Una propuesta de nuevo modelo de crecimiento a partir de los aportes de Harrod Solow y
Kalecki – Aplicación al caso colombiano 1980-2014

Director de Tesis: Gustavo Adolfo Díaz Valencia

Gregory Alejandro Quiroga Herrera

Mayo 2018.

Universidad Santo Tomás.

Maestría en Ciencias Económica.

Dedicatoria

Dedico esta investigación a Dios, mi prometida, mi abuela, mi madre, mi hermano y mi padrastro porque cada conquista que tenga en mi vida persigue el objetivo de honrarlos y demostrarles que todo su esfuerzo, apoyo y amor, se traduce en resultados tangibles.

A la memoria de Antolín Saiz.

Agradecimientos

A Dios porque sin su Gracia y Soberanía no habría podido jamás tener logro alguno.

A mi madre por su incondicional apoyo y dedicación a mi bienestar. A mi familia por su motivación y por ser un pilar de mis valores. A Liliana Jurado por brindarme el amor que da combustible para ser perseverante en nuestros proyectos. A mis compañeros de Maestría, porque con ellos creé un ambiente abierto al aprendizaje y a la crítica académica.

A Fernando Chacón por su constante ánimo de aprender que se torna contagioso y porque su estable interés en nuestros diálogos sobre diversos temas me mantuvo motivado en la academia y en la investigación. Su amistad sincera ha sido un instrumento avivador de mis intereses intelectuales y espirituales. A Gustavo Díaz por sus aportes y dirección a este trabajo. A Andrés Vernazza por infundirme la pasión por la Economía y por ser mi guía profesional.

Resumen

En este trabajo se elabora una propuesta de Nuevo Modelo Teórico para analizar el crecimiento económico a partir de los aportes hechos por Roy Harrod, Robert Solow y Michal Kalecki a la ciencia Económica. De los modelos de estos tres economistas se extraen algunos insumos que, implementando análisis matemáticos, permiten la elaboración de una propuesta de nuevo modelo que permite realizar análisis de economías con condiciones diferentes en los mercados de los factores productivos. Con el nuevo modelo propuesto se realiza una revisión de la economía colombiana que lleva a concluir que la aplicación de una estrategia de aumentos salariales generalizada no genera efectos relevantes sobre el crecimiento económico. Adicionalmente, para que un incremento generalizado de los salarios genere aportes positivos al crecimiento económico colombiano se requieren de condiciones económicas irrealizables como: 1) tasas de crecimiento del stock del capital cercanas al 100% 3) e incrementos anuales en la inversión, el gasto público y las exportaciones que representen cerca del 40% del PIB.

Palabras Clave: crecimiento económico, remuneración de los factores, productividad marginal, producción, ingreso nacional, demanda agregada

Clasificación JEL: O47, D24

Abstract

In this work a proposal of New Theoretical Model is elaborated to analyze the economic growth from the contributions made by Roy Harrod, Robert Solow and Michal Kalecki to the Economic science. From the models of these three economists are extracted some inputs that, by implementing mathematical analysis, allow the elaboration of a proposal of new model that allows analysis of economies with different conditions in the markets of the productive factors. With the proposed new model, a review of the Colombian economy is carried out, which leads to the conclusion that the application of a generalized wage increase strategy does not generate significant effects on economic growth. Additionally, for a generalized increase in wages to generate positive contributions to Colombian economic growth, unrealizable economic conditions are required, such as: 1) growth rate of capital stock close to 100% 2) and annual increases in investment, public spending and exports that represent about 40% of GDP.

Keywords: economic growth, factor remuneration, marginal productivity, production, national income, aggregate demand

JEL Classification: O47, D24

Tabla de Contenidos

Introducción.....	9
Capítulo 1 Antecedentes Teóricos	13
Modelos de crecimiento económico	13
El modelo de Harrod	13
Modelo de Solow	18
Modelo de Kalecki	22
Observaciones acerca de los modelos de crecimiento de Harrod, Solow y Kalecki.....	28
Capítulo 2 Propuesta de Nuevo Modelo Teórico	32
Las escuelas neoclásica y post-keynesiana	32
Metodología	34
Desarrollo de la propuesta del NMT	37
Tasas de crecimiento con base inicial	38
Tasas de crecimiento con base final.....	38
Axiomas de la propuesta de NMT.	38
La función de producción y el ingreso nacional	39
La remuneración de los factores y la demanda agregada	44
Deducciones del NMT	48
Capítulo 3 Aproximación empírica de la propuesta de nuevo modelo	49
Metodología	49
Resultados	50
Capítulo 4. Conclusiones.....	57
Lista de referencias	60
Apéndice.....	63
Test de Dickey-Fuller aumentada rezagos (0) – Variables de ecuaciones de demanda	63
Resultados de la Regresión Ecuación Consumo	63
Test de Dickey-Fuller aumentada rezagos (0) – Errores de ecuación de consumo ...	64
Resultados de la Regresión Ecuación Importaciones	65
Resultados de la Regresión Ecuación Crecimiento Económico.....	65
Test de Dickey-Fuller aumentada rezagos (0) – Errores de ecuación importaciones	66

De la función de producción a la ecuación de ingreso nacional	67
Obtención de la tasa de crecimiento de la producción	69
Obtención de la tasa de crecimiento de la demanda	71

Lista de Tablas

Tabla 1. Ecuaciones de los modelos de Harrod, Solow y Kalecki	29
Tabla 2. Insumos para la propuesta de NMT	35
Tabla 3. Valor de $\partial Y. \partial Cl$ – óptica producción	44
Tabla 4. Valor de $\partial Y. \partial Cl$ – óptica demanda.....	47

Lista de Figuras

Figura 1. Dinámica de r	21
Figura 2. Evolutivo de $(\partial Y.)/\partial Cl$ para oferta y demanda	50
Figura 3. Aporte en puntos básicos de los cambios en Cl a las tasas de crecimiento Oferta y Demanda.....	51
Figura 4. Evolución de Cl 1980-2014	52
Figura 5. Evolución variables Cl . & $(1+\ln(L/K)\alpha.+L.-K.)$	53
Figura 6. Valor estimado K . que satisface $\partial Y.\partial Cl = 0$	54
Figura 7. Evolución variables $\alpha b - a$ & $i0 + g0 + x0 - (i + g + x)$	56

Introducción

El crecimiento económico ha sido de alto interés en todas las esferas de la economía. Su relevancia abarca desde lo más teórico y académico hasta lo más práctico y político. Alrededor de este se dan los principales debates de la actualidad, dado que se encuentra asociado a temas como el bienestar, el desarrollo y el medio ambiente, entre otros. Por esta razón no deja de ser un área importante en la investigación económica y en la producción académica. Cada aporte sobre el crecimiento económico resulta relevante e innovador sin importar cuánto se haya investigado sobre el tema.

El antecedente teórico de esta investigación se remonta a los modelos de Harrod, Solow y Kalecki. Roy Harrod abre el análisis sobre el crecimiento económico introduciendo una perspectiva dinámica (Harrod, 1939). Este primer modelo ha sido evaluado como acertado y consistente con la realidad económica como se demuestran en varias investigaciones teóricas y empíricas¹; sin embargo presentaba el planteamiento de un crecimiento inestable en términos dinámicos. Para brindar una solución teórica a dicha inestabilidad, Robert Solow (1956) flexibiliza la tasa de ahorro e incluye en el análisis el cambio técnico y la tasa de interés.

De forma contemporánea a los planteamientos hechos por Solow, Michal Kalecki (1956) planteó un análisis sobre la dinámica de la economía partiendo de una postura marxista. Sus conclusiones resultaban cercanas a los planteamientos keynesianos con los

¹ Pueden revisarse textos como La interacción entre el multiplicador y el acelerador: Una aproximación para Colombia (Bernal Bellon & Meza Carvajalino, 2012), Del filo de la navaja a la cáscara de la nuez: Un nuevo examen de la dinámica de Harrod (Moreno Rivas, 2005) y La tasa de crecimiento garantizada de Harrod como ley del crecimiento económico: Una comprobación empírica (Bernal Bellon, La tasa de crecimiento garantizada de Harrod como ley del crecimiento económico: Una comprobación empírica, 2008)

cuales había coincidido en varios estudios (Nuti, 2004). En su análisis, Kalecki elabora un estudio sistemático de la economía de manera independiente llegando así a un análisis de largo plazo con la misma base keynesiana de corto plazo que utilizó Harrod en sus formulaciones.

El objetivo de la presente investigación es elaborar una propuesta de modelo de crecimiento económico a partir de los aportes teóricos y matemáticos hechos por Roy Harrod, Robert Solow y Michal Kalecki. Para alcanzar este objetivo, se hará una revisión de los modelos planteados por los autores ya mencionados y se expondrán los aportes de cada uno considerados útiles para la elaboración de la propuesta de nuevo modelo teórico.

El cuestionamiento que se origina sobre el planteamiento de una propuesta de nuevo modelo de crecimiento económico es: ¿Es posible integrar, en una sola propuesta de modelo, las conclusiones de los neoclásicos y los post-keynesianos acerca del efecto de los aumentos salariales en el crecimiento económico? De esta inquietud se desprende la hipótesis a continuación:

Las conclusiones de los economistas neoclásicos y los post-keynesianos pueden integrarse en una única propuesta de modelo a pesar ser opuestas.

Para responder esta pregunta y validar la hipótesis, se realizó una revisión de los modelos fundamentales de Roy Harrod, Robert M Solow y Michal Kalecki; se exponen las principales conclusiones de las escuelas neoclásica y post-keynesiana sobre la relación entre los salarios y el crecimiento económico y se elabora la propuesta de un nuevo modelo integrando las ópticas de oferta y demanda a través de la remuneración de los factores productivos. Como resultado teórico se espera que la relación, entre los cambios salariales

y el crecimiento económico, dependa de las condiciones de cada economía, por lo cual es posible la existencia de una relación directa, neutra o inversa según sea el caso.

En este trabajo se propone un modelo que sirve de marco de análisis aplicable a varias economías e industrias (por ejemplo en el sector financiero, azucarero, automotriz, etc.). Aquí, se obtienen las ecuaciones fundamentales de la propuesta de modelo y se analiza para el caso colombiano; sin embargo no se determinan condiciones de estabilidad dinámica de la propuesta de modelo ni una senda de crecimiento para Colombia como tradicionalmente se suele hacer en los modelos de crecimiento económico. Esto implica que, en este trabajo, la propuesta del nuevo modelo presenta una óptica de corto plazo y los resultados que se obtengan de su aplicación deben ser interpretados para un escenario de corto plazo.

En el primer capítulo de esta investigación se exponen los antecedentes teóricos, para ello se realiza una revisión de los modelos de crecimiento de Harrod, Solow y Kalecki y se presentan de forma sintetizada las ecuaciones fundamentales de cada modelo y sus principales aportes.

En el segundo capítulo se exponen las conclusiones de las escuelas neoclásica y post-keynesiana sobre la relación entre los salarios y el crecimiento económico; y se desarrolla la propuesta de nuevo modelo de crecimiento. La elaboración de la propuesta de modelo se inicia con la definición de los aportes matemáticos y teóricos que se extractan de los modelos de Roy Harrod, Robert Solow y Michal Kalecki. Luego, a través de la aplicación de análisis matemático, se definen las tasas de crecimiento de la oferta y la demanda de la propuesta de nuevo modelo partiendo de:

- Una función de producción modificada para integrar al modelo los efectos de la competencia imperfecta en los mercados de los factores productivos (capital y trabajo)
- La ecuación de demanda agregada donde el consumo total esta discriminado por consumo de trabajadores y consumo de capitalistas.

En el tercer capítulo se realiza una aproximación empírica a la propuesta de nuevo modelo utilizando los datos de la Penn World Table 9.0 para Colombia. Aplicando las ecuaciones de la propuesta de nuevo modelo obtenidas en el segundo capítulo, se obtienen los valores de las principales variables y parámetros que permiten determinar el efecto de un incremento salarial generalizado sobre el crecimiento económico colombiano.

Finalmente, en el cuarto capítulo, se presentan las conclusiones generales de la investigación con base en los resultados obtenidos de la elaboración matemática y la aproximación empírica de la propuesta de nuevo modelo.

Capítulo 1

Antecedentes Teóricos

Modelos de crecimiento económico

En este capítulo se exponen de manera sintetizada los modelos de Harrod, Solow y Kalecki presentándose las principales ecuaciones y aportes a la materia del crecimiento económico. Una vez expuestos todos los modelos, se presentan algunas observaciones del autor sobre estos.

El modelo de Harrod². Combina el principio de aceleración y la teoría del multiplicador del marco keynesiano. Para describir el modelo, se indican a continuación las tres bases axiomáticas planteadas por Harrod:

- El nivel de ingreso es el determinante más importante de la oferta de ahorro
- La tasa de crecimiento del ingreso es el determinante de la demanda de ahorro
- La demanda es igual a la oferta

Con estos tres axiomas se formaliza el modelo partiendo de la definición de la tasa de crecimiento. Para este modelo, la tasa real de la economía corresponde a la variación porcentual del producto de un periodo a otro, es decir:

$$G = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} \quad (1)$$

² Todas las ecuaciones expuestas en esta sección son obtenidas del texto “La Teoría Dinámica” de Roy F. Harrod (1939)

Donde G es la tasa aritmética de crecimiento, Y_0 es el estado inicial de la economía et Y_I es el estado final de la economía.

Además de la tasa real de crecimiento, en este modelo, se define la tasa de crecimiento económico garantizada la cual se entiende como aquella que deja satisfechos a todos los agentes indicando que se produjo exactamente lo que se esperaba. Esta tasa se denota como G_w .

Para obtener G_w , se inicia de la tasa de ahorro, la cual se entiende como la porción del ingreso que se destina ahorrar:

$$s = \frac{S}{Y} \quad (2)$$

Dicha tasa, denotada como s , varía de acuerdo a la magnitud del ingreso, la fase del ciclo, los cambios institucionales, etc.

Adicional a la tasa de ahorro, se contempla, como un componente del modelo, el valor de los bienes de capital requeridos para la producción de una unidad adicional de producto, el cual se denota como C . Es decir:

$$C = \frac{\Delta K}{\Delta Y} = \frac{K_1 - K_0}{Y_1 - Y_0} \quad (3)$$

Esta relación marginal capital/producto varía de acuerdo a la tecnología y la naturaleza de los bienes. Dependerá también de la magnitud del ingreso y la fase del ciclo.

Ahora, teniendo en cuenta que i) las variaciones en el stock de capital representan la inversión neta ($\Delta K = I$), ii) la cual es igual al ahorro en condiciones de equilibrio ($I = S$), iii) y contemplando que C es equivalente a la relación marginal capital/producto requerida, se puede obtener que:

$$sY = C\Delta Y \quad (4)$$

A partir de aquí se puede despejar G_w , así:

$$G_w = \frac{s}{C} \quad (5)$$

Por definición, C se refiere al incremento requerido de K para aumentar una unidad de Y ; mientras que C_p se refiere a la relación marginal real capital producto, por lo cual:

$$G = \frac{s}{C_p} \quad (6)$$

Ya definidas las tasas de crecimiento garantizada y real – G_w y G respectivamente- sigue analizar la relación que existe entre ellas. Por definición, cuando la expectativa sobre C se cumple, significa que $C_p = C$, por lo cual $G = G_w$, es decir que se ha logrado el equilibrio; sin embargo, cuando C_p y C difieren, las dos tasas de crecimiento se separan y se alejan indefinidamente.

La fuente de la inestabilidad. Cuando las expectativas de los agentes en la economía se cumplen, estos tenderán a mantener sus decisiones de inversión; en caso contrario, las ajustarán. Por ejemplo, cuando la economía crece por encima de lo esperado por los empresarios, significa que los inventarios se ven reducidos de forma no deseada o que existe una provisión insuficiente de equipo productivo, por lo cual aumenta la producción estimulando así nuevamente a la economía, de modo tal que se perpetúa la dinámica expansionista. El razonamiento es el mismo cuando la economía crece por debajo de las expectativas de los empresarios.

Las expectativas acerca del crecimiento se ven reflejadas en el valor de C . Así, cuando $C > C_p$ el sistema se estimula a la expansión; y a la inversa, cuando $C < C_p$ entonces el sistema se estimula a la contracción. No existe ninguna fuerza dentro del sistema que contrarreste la dinámica divergente que existe entre C y C_p , es decir que existe entre G_w y G . Esto lleva a pensar que la divergencia entre G_w y G produce comportamientos explosivos en la tasa real de crecimiento; sin embargo, según lo explica Harrod, esto se controla dado que la tasa de crecimiento garantizada también es dinámica, es decir que cuando G se aleja de G_w entonces G_w se ajusta.

Es posible comparar la dinámica de G_w con un sistema de expectativas adaptativas - a pesar de que Harrod no indica que su modelo se trate de expectativas adaptativas - pues

cuando el crecimiento previsto por los empresarios no coincide con la realidad, entonces ajustarán sus decisiones de inversión de acuerdo a lo que esperan que crezca la economía. Podría pensarse que el nivel de inversión requerido para un cambio de una unidad de producto es siempre el mismo en cualquier fase de un ciclo económico; sin embargo esto no es necesariamente cierto. Para entender el porqué de la variación de C_p , se incorpora en el modelo el concepto de tasa natural de crecimiento.

La tasa máxima de crecimiento que puede tener una economía en condiciones de pleno empleo es lo que Harrod denomina como tasa natural de crecimiento. Por definición, es imposible que exista una tasa de crecimiento superior a esta nueva tasa, por lo cual las tasas de crecimiento real y garantizada siempre estarán por debajo del nivel natural. Dado esto, se puede afirmar que cuando la economía experimenta una expansión y la tasa de crecimiento real aumenta apartándose de la garantizada, entonces se acercará a la tasa natural de crecimiento, lo que significa que aumenta el nivel de empleo haciendo que se requiera un nivel menor de inversión para lograr un incremento de una unidad de producto. El mismo razonamiento funciona cuando la economía presenta una contracción.

Cuando la tasa real de crecimiento aumenta, la tasa garantizada también aumentará como persiguiendo la tasa real, lo cual mitiga el efecto explosivo de la tasa real. Cuando la tasa garantizada continua en incremento hasta rebasar a la tasa real, entonces la tasa real empezará a disminuir y la garantizada le seguirá. Esta dinámica continúa mostrando que el equilibrio es inestable; sin embargo ya no se muestra una acción explosiva de la tasa de crecimiento real de la economía, sino que dicha inestabilidad se presenta en forma de ciclo.

Modelo de Solow³. Se fundamenta en un marco de análisis neoclásico. A continuación los principales supuestos planteados por Solow en el modelo:

- Para la producción de una unidad de producto es necesaria la utilización de capital y mano de obra
- La tasa de crecimiento de la mano de obra es exógena
- La tasa de ahorro es elástica con respecto a la tasa de interés

La definición del modelo se inicia en la identidad básica de que el ahorro – el cual es una porción del ingreso – es igual a la inversión entendida como la variación en el stock de capital, es decir:

$$\dot{K} = sY \quad (7)$$

Ahora, dado que para la producción es necesario emplear capital y trabajo, entonces esta primera es una función de estos últimos, por lo cual:

$$\dot{K} = sF(K, L) \quad (8)$$

³ Todas las ecuaciones expuestas en esta sección son obtenidas del texto “A Contribution to the Theory of Economic Growth” de Robert Solow (1956)

La ecuación (8) posee dos incógnitas; sin embargo el valor de L es estimable dado que se ha considerado que la tasa de crecimiento de la mano de obra es exógena, es decir:

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad (9)$$

Donde n es la tasa de crecimiento de la mano de obra, t el momento de análisis y L_0 el nivel de mano de obra en un periodo base. Por lo cual:

$$\dot{K} = sF(K, L_0 e^{nt}) \quad (10)$$

La anterior ecuación expresa el nivel de inversión que se seguirá en condiciones de pleno empleo de la mano de obra en la producción. Aquí es importante observar que la oferta de empleo está determinada y fija independientemente de cualquier otro factor o variable contemplada en el modelo; sin embargo, la demanda de empleo si dependerá del nivel de salario, por lo cual se empleará la mano de obra que corresponda con un salario de eficiencia, es decir con aquel que sea igual a la productividad marginal del trabajo. Lo mismo sucede con el stock de capital, pues en cada momento del tiempo el stock de capital disponible ya está determinado; sin embargo se empleará aquel nivel de capital en el que el pago de este factor sea equivalente a su productividad marginal. En síntesis, resulta ser la propensión marginal al ahorro la que determina el volumen de inversión en la economía.

La Estabilidad del Equilibrio. Con el fin de obtener un sendero de acumulación de capital consistente con cualquier tasa de crecimiento de la mano de obra, se introduce al modelo la relación capital producto que se denota como r .

$$r = \frac{K}{L} \quad (11)$$

Por la cual se puede obtener el stock de capital así:

$$K = rL = rL_0e^{nt} \quad (12)$$

Si se deriva dicha igualdad con respecto al tiempo, con el fin de obtener la acumulación de capital o inversión, se consigue:

$$\dot{K} = L_0e^{nt}\dot{r} + nrL_0e^{nt} \quad (13)$$

Al reemplazar la ecuación (13) en (10) se obtiene que:

$$(\dot{r} + nr)L_0e^{nt} = sF(K, L_0e^{nt}) \quad (14)$$

Ahora, si se dividen la ecuación (14) por la mano de obra y además se despeja $\dot{r}$, entonces se consigue:

$$\dot{r} = sF(r, 1) - nr \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que la función de producción por trabajador depende de la relación capital/trabajo y que además esta es la única que explica su dinámica, entonces el estado de $\dot{r}$ determina la dinámica de la producción por trabajador. En síntesis, si r en condiciones de equilibrio es estable, entonces el equilibrio de la tasa de crecimiento económico también es estable.

Para validar la estabilidad del equilibrio vale la pena recurrir al método gráfico, por lo cual se tiene la imagen a continuación:

Figura 1. Dinámica de r

Fuente: “A Contribution to the Theory of Economic Growth” – Roberth Solow (1956)

En la Figura 1 se puede observar que cuando $r < r^*$ entonces $\dot{r} > 0$ dado que $sF(r, I) > nr$. Esto significa que r aumentará hasta llegar al equilibrio r^* y no existen fuerzas que lo impulsen a rebasarlo, pues si $r > r^*$ entonces $\dot{r} < 0$ dado que $sF(r, I) < nr$, por lo cual r disminuirá hasta igualarse alcanzando el nivel de equilibrio r^* .

Modelo de Kalecki⁴. Se desarrolla de manera independiente a los modelos de Harrod y Solow. Este modelo parte de un análisis de la demanda y con una postura marxista. En su desarrollo se coinciden con varios de los planteamientos de Keynes (1936) de tal forma que desemboca en un modelo semejante al del acelerador de la inversión. El modelo se fundamenta en las siguientes premisas:

- Las decisiones de consumo de los empresarios son el determinante de los beneficios de los empresarios en el instante inmediato, aunque el consumo dependa de los beneficios pasados
- La participación de los beneficios de los empresarios en el ingreso nacional aumenta a medida que aumenta el grado de monopolio en las industrias
- Los agentes económicos son básicamente dos: los asalariados y los empresarios. Es por esto que los ingresos de la economía están constituidos por pago a los trabajadores (sueldos y salarios) y pagos a los empresarios (beneficios)

Así, el modelo se inicia con la siguiente identidad:

⁴ Todas las ecuaciones expuestas en esta sección son obtenidas del texto “Teoría de la dinámica económica - Ensayo sobre los movimientos cíclicos y a largo plazo de la economía capitalista” (1956)

$$Y = W + P \quad (16)$$

Donde Y representa el ingreso privado, W el ingreso de los trabajadores y P los beneficios que obtienen los empresarios. Por otra parte, este ingreso se destina al consumo y al ahorro de los agentes de la economía, por lo cual:

$$Y = C_k + C_w + S \quad (17)$$

Donde C_k representa el consumo de los empresarios, C_w representa el consumo de los trabajadores y S representa el ahorro total. Para efectos del desarrollo del modelo, se supone que los asalariados dedican todo su ingreso al consumo y no ahorran, por lo cual S equivale al ahorro de los empresarios.

Teniendo en cuenta que el ahorro es igual a la inversión, y que el ahorro total de la economía es adjudicado a los empresarios, se puede afirmar que los beneficios de los empresarios se descomponen en consumo e inversión, es decir:

$$P = C_k + I \quad (18)$$

Donde I corresponde a la inversión. Adicionalmente, el consumo de los empresarios puede expresarse como una función de los beneficios pasados así:

$$C_k = A + qP_{t-\lambda} \quad (19)$$

Donde, al igual que la ecuación de consumo keynesiana, A representa un factor autónomo que indica un nivel de consumo mínimo en el corto plazo y q representa una propensión marginal a consumir que indica el aumento del consumo al aumentar el beneficio en una unidad monetaria.

Ahora bien, teniendo en cuenta que el consumo y la inversión de los empresarios es lo que determina el nivel de beneficios, se puede afirmar que los beneficios $P_{t-\lambda}$ están en función de la inversión en el periodo $t-\lambda-w$, es decir:

$$P_{t-\lambda} = f(I_{t-\lambda-w}) \rightarrow P_t = f(I_{t-w}) \quad (20)$$

Remplazando (20) en (18), se puede despejar P_t así:

$$P_t = \frac{A + I_{t-w}}{1 - q} \quad (21)$$

Considerando que A y q son constantes, los cambios en los beneficios dependen directamente de los cambios en la inversión así:

$$\Delta P_t = \frac{\Delta I_{t-w}}{1 - q} \quad (22)$$

Ahora, retornando a la ecuación (16) se puede decir que:

$$W = Y - P \quad (23)$$

Además, la parte del ingreso nacional que se destina al pago de los empleados, está igualmente compuesta por un factor fijo y uno variable que depende del tamaño del ingreso nacional, es decir:

$$W = \alpha Y + \beta \quad (24)$$

Donde β representa el factor constante y α representa la fracción del ingreso nacional que se destina a la remuneración variable de los empleados. Ahora, teniendo en cuenta que los empleados no destinan ingresos al ahorro, fácilmente se puede indicar que α es equiparable con la propensión marginal a consumir de los empleados.

Al igualar las ecuaciones (23) y (24) y despejando Y se obtiene que:

$$Y = \frac{P + \beta}{1 - \alpha} \quad (25)$$

Considerando que α y β son constantes, los cambios en Y son explicados por los cambios en los beneficios así:

$$\Delta Y = \frac{\Delta P}{1 - \alpha} \quad (26)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (22), se puede obtener ΔY en función de ΔI_{t-w} así:

$$\Delta Y = \frac{\Delta I_{t-w}}{(1 - \alpha)(1 - q)} \quad (27)$$

Finalmente, se ha llegado a la ecuación que describe el crecimiento económico según el modelo de Kalecki.

El ciclo económico. A lo largo del desarrollo teórico de su modelo, Kalecki presenta los determinantes de la inversión y expresa una función autoregresiva de la inversión que muestra su naturaleza cíclica. La inversión tiene el objeto de aumentar los beneficios de los empresarios, y dado que son estos quienes toman las decisiones de inversión, entonces invertirán por encima del nivel de depreciación del capital con el fin de

obtener beneficios. Esta conducta es la que da la naturaleza cíclica a la inversión y, en consecuencia, al ingreso nacional.

De fondo, la ecuación de la inversión lleva implícita la dinámica misma del ingreso, los beneficios y la distribución de la renta. La ecuación inicial de la inversión que expresa Kalecki es:

$$I_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} S_t + b' \frac{\Delta P_t}{\Delta t} + e \frac{\Delta O_t}{\Delta t} + d' \quad (28)$$

Donde $\frac{a}{1+c}$ representa el efecto de la variación del acervo de capital, y b' , e & d' son parámetros productos de la expresión de la relación lineal entre las decisiones de inversión de los empresarios y los beneficios y el producto bruto.

Finalmente, las expresiones $\frac{\Delta P_t}{\Delta t}$ & $\frac{\Delta O_t}{\Delta t}$ pueden ser sustituidas por las ecuaciones (22) y (27). Con lo cual, sustituyendo y simplificando, la ecuación final de los determinantes de la inversión que muestran la dinámica del ciclo es:

$$I_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} I_t + \frac{1}{1-q} \left(b' + \frac{e}{1-a'} \right) \frac{\Delta I_{t-w}}{\Delta t} + d' \quad (29)$$

Kalecki expresa la ecuación anterior de forma simplificada haciendo redefinición de algunos términos. Primero indica que la desviación entre la inversión y la depreciación del

capital es igual a i , y luego agrupa el término $\frac{1}{1-q} \left(b' + \frac{e}{1-a'} \right)$ y lo expresa como μ . De esta forma, la ecuación resultante es:

$$i_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} i_t + \mu \frac{\Delta i_{t-w}}{\Delta t} \quad (30)$$

El coeficiente μ se deriva de suponer que el acervo de capital tiene un efecto negativo sobre la inversión, por lo cual implica un efecto dual de la inversión actual sobre la inversión futura, pues en un sentido expandirá los beneficios y la inversión futura; pero por otro sentido aumentará el acervo de capital haciendo que se reduzcan las decisiones de inversión de los empresarios. En otra vía, cuando se alcanza un nivel en el que la inversión presente sea igual a la depreciación del capital, se tendrá un nivel rezagado de inversión que mantiene la dinámica cíclica del sistema. Por estas tres motivaciones descritas, según este modelo no existe un estado estacionario; sino que la inversión siempre tendrá una tendencia y un ciclo.

Observaciones acerca de los modelos de crecimiento de Harrod, Solow y

Kalecki. Hasta el momento se ha realizado una síntesis de los modelos expuestos en los escritos de los economistas Roy Harrod, Robert Solow y Michal Kalecki. Se han presentado de forma soslayada los fundamentos del desarrollo de sus modelos y las ecuaciones que resumen sus conclusiones. Para completar el análisis de los modelos, vale la pena detenerse a observar el significado final de las ecuaciones de crecimiento económico obtenidas y contrastarlas con la coherencia que guardan con la realidad económica.

Por elaborar una remembranza de los tres modelos, en la Tabla 1 se presentan las ecuaciones finales de los análisis de los tres autores en cuestión:

Tabla 1. Ecuaciones de los modelos de Harrod, Solow y Kalecki

Ecuación de Harrod	Ecuación de Solow	Ecuación de Kalecki
$G = \frac{s}{C_p}$	$\dot{r} = sF(r, 1) - nr$	$\Delta Y = \frac{\Delta I_{t-w}}{(1-\alpha)(1-q)}$

Fuente: elaboración propia

Observando la ecuación final de Harrod, se exponen dos componentes determinantes del crecimiento económico: el ahorro y la relación marginal capital producto. Acerca de estas dos variables se concluye que el determinante del crecimiento económico resulta siendo la relación marginal capital producto, pues a una misma tasa de ahorro pueden corresponder distintas tasas de crecimiento; mientras que la variación de la relación marginal capital producto determina la dinámica del crecimiento económico (Bernal Bellon, 2009).

Ahora, un acercamiento a la ecuación final del modelo de Solow muestra que el crecimiento económico depende del nivel de ahorro en la economía y la tasa de crecimiento de la población. Según el planteamiento del modelo, con estas variables podría indicarse el nivel de relación capital trabajo que mantienen a la economía en el estado estacionario; sin embargo, en la práctica el modelo no es útil para hallar las magnitudes del producto que corresponden a determinadas tasas de ahorro o de crecimiento poblacional aunque si

explique correctamente la relación que existe entre las tasas de ahorro y crecimiento poblacional con los niveles de producto, pues altas tasas de ahorro corresponden con altos niveles de renta mientras que altas tasas de crecimiento poblacional corresponden con bajos niveles de renta (Mankiw, Romer, & Weil, 1992)

Ahora, realizando un acercamiento sobre la ecuación de Kalecki, llama la atención la semejanza que tiene con el multiplicador keynesiano de la inversión. Lo único que parece diferenciarlos es que el multiplicador keynesiano hace que el ingreso aumente cuando aumenta la inversión en una proporción equivalente a la inversa de la propensión marginal al ahorro de la economía (Keynes, 1936); mientras que el factor en el que aumenta en la ecuación de Kalecki, expuesta en la tabla 1, es la inversa del múltiplo entre la participación de los beneficios en el ingreso nacional y la propensión marginal a ahorrar de los empresarios. En últimas, si todo el ingreso nacional fuese representado por los beneficios de los empresarios, entonces la ecuación de Kalecki sería exactamente igual a la del multiplicador keynesiano de la inversión. Pareciese que la ecuación de Kalecki es el caso general del multiplicador de la inversión que saca a la luz que la proporción en la que aumenta el ingreso ante aumentos en la inversión es mayor a medida que aumenta la participación de la remuneración de los empleados dentro del ingreso nacional.

Unificando las tres observaciones sobre los modelos en estudio, se puede evidenciar que en los tres, la tasa de ahorro tiene relevante importancia. Según la ecuación de Harrod, a mayores tasas de ahorro corresponden mayores tasas de crecimiento; según la de Solow, a mayores tasas de ahorro corresponden mayores niveles de ingreso y, por último, según la de Kalecki, a mayores tasas de ahorro menores aumentos de ingreso ante aumentos unitarios de inversión. Ante estas apreciaciones sobre la tasa de ahorro en los párrafos anteriores

puede encontrarse que esta tiene un efecto dual sobre el crecimiento económico, tanto en sentido positivo como negativo.

Otra variable relevante que aparece en común en los modelos que se han revisado es la inversión. En los tres modelos, la inversión es una variable necesaria para la existencia de crecimiento económico en el largo plazo y en los tres modelos el crecimiento económico guarda relación directa con el crecimiento económico. Así cuando la inversión aumenta, el crecimiento económico aumenta. Este efecto es altamente obvio en las ecuaciones de Solow y Kalecki; sin embargo, hace falta mirar con detenimiento la ecuación de Harrod para ver la relación directa que pueda guardar la inversión con el crecimiento económico. Si se tomara la ecuación de Harrod, y se derivara con respecto a la inversión, esta sería inferior a cero; sin embargo, los aumentos altos en la inversión se dan después de los empresarios haber analizado la forma en la que la inversión aumentaría al máximo la producción y la venta de un producto, por lo cual los aumentos significativos en la inversión se traducen también en aumentos significativos en el producto. Así, no es solo la inversión la que determina el crecimiento económico en el modelo de Harrod, sino que es más bien la relación entre la inversión y el crecimiento del producto, es decir la productividad marginal del capital.

Capítulo 2

Propuesta de Nuevo Modelo Teórico

En este capítulo se presentan, de forma sintetizada, las conclusiones de las escuelas neoclásica y post-keynesiana sobre la relación existente entre los cambios en los salarios y el crecimiento económico; posteriormente se expone la propuesta de un Nuevo Modelo Teórico (NMT) para analizar el crecimiento económico. Este se deriva de las consideraciones extraídas de los modelos de Harrod, Solow y Kalecki en términos teóricos y matemáticos. Además, esta propuesta de un nuevo modelo es el aporte que el presente trabajo pretende dar a la ciencia económica, por lo cual es elaboración propia del autor con base en algunos aspectos teóricos de los modelos de crecimiento referenciados.

El planteamiento de la propuesta del NMT tiene un enfoque general en su aplicación, y tomará en cuenta desajustes entre el ahorro y la inversión y la competencia imperfecta en el mercado de los factores productivos, reduciendo la cantidad de supuestos que usualmente se implementan en los modelos de crecimiento expuestos anteriormente.

Las escuelas neoclásica y post-keynesiana

La escuela neoclásica se ubica como el paradigma dominante en la teoría económica. Bajo esta perspectiva, dado que los precios y salarios son considerados flexibles, la reducción de los salarios reduciría el precio relativo de la mano de obra con lo cual aumentaría su contratación en las empresas, además, el costo marginal de las firmas se reducirá causando un incremento en la producción y la contratación de todos los factores productivos (Nicholson, 2001). En conclusión, la variación de los salarios guarda una relación inversa con el crecimiento económico.

En contraste a la conclusión neoclásica, los post-keynesianos afirman que las variaciones salariales guardan una relación directa con el crecimiento económico. Esto se debe al principio de la demanda efectiva según el cual, una reducción de los salarios genera una contracción de la demanda agregada que se traduce en una posterior reducción de la producción y una consecuente reducción de la mano de obra contratada (Lavoie, 2005).

De las dos posturas económicas planteadas, se puede observar que la determinación de la relación entre los cambios de los salarios y el crecimiento económico depende de cual se considere la fuerza de mercado dominante. Si la oferta agregada es la fuerza determinante del crecimiento económico, entonces la conclusión neoclásica es válida; en el caso contrario, la conclusión aceptada sería la post-keynesiana.

A pesar de lo indicado en el párrafo anterior, para que la conclusión de los neoclásicos sea válida, no basta con que la fuerza determinante del crecimiento económico sea la oferta; sino que es necesario que, de forma generalizada, las empresas sean competitivas y tomen decisiones eficientes que hayan llevado a la producción a su frontera según los insumos contratados; pues de no ser así, aun cuando la fuerza de mercado determinante sea la oferta, sería posible que los salarios aumenten sin que ello implique una reducción de la producción bien fuera porque el salario se encontraba por debajo de productividad de los trabajadores o porque la reducción de la mano de obra contratada por el aumento de salarios podría compensarse con un aumento de la productividad de los trabajadores.

Por el lado de la demanda, tampoco es suficiente con que esta sea la fuerza determinante del crecimiento económico para indicar que el argumento de los post-keynesianos sea válido, pues si bien el aumento de los salarios podría incentivar el

consumo de los trabajadores, también podría reducir la proporción de renta que es tomado por los capitalistas con lo cual se vería reducido el consumo causado por estos y los niveles de inversión que estos ejecuten. Esto puede sustentarse en el mismo modelo kaleckiano, que es herramienta de análisis de los post-keynesianos, pues una reducción de las ganancias se traduce en una contracción del nivel de inversión, tal como se puede observar en la ecuación (28) expuesta en el capítulo anterior.

En síntesis, es conceptualmente posible que los cambios salariales tengan relación directa, neutra o inversa con el crecimiento económico. La naturaleza de la relación dependerá de las condiciones propias de cada economía que sea sujeta de análisis y su existencia es conceptualmente posible independientemente de cual sea la fuerza teóricamente determinante del crecimiento económico. Por este motivo, para el desarrollo de la propuesta del NMT, se analizan la producción y la demanda por separado y se examinan las condiciones bajo las cuales los cambios salariales tienen relación directa, neutra o inversa con el crecimiento económico.

Metodología

Para la elaboración de la propuesta de NMT, se parte de algunas consideraciones utilizadas por Harrod, Solow y Kalecki en sus modelos. Luego, a través de la exploración matemática, se presentan ecuaciones de crecimiento de la oferta y de la demanda. En la Tabla 2 se exponen los insumos que se obtienen de cada modelo para la elaboración de la propuesta de NMT.

Tabla 2. Insumos para la propuesta de NMT

Modelo	Información extraída del modelo	Información ajustada en la
Insumo	insumo	propuesta de NMT
Harrod	<p>En el modelo de Harrod se observa que la productividad marginal del capital es determinante del crecimiento económico; sin embargo, esto no es tan evidente. Es necesario detenerse a analizar que lo que denomina Harrod como “Relación Marginal Capital Producto (ICOR)” es una aproximación de la inversa de la productividad marginal del capital es decir:</p> $ICOR \approx \frac{1}{PmgK}$ <p>Esta aproximación se debe a que el total de los cambios en el producto no son causa única de los cambios en el capital, sino que también hay incidencia por los cambios en el nivel de mano de obra.</p>	<p>En la propuesta del modelo teórico que se desarrolla, se consideran los efectos de las productividades marginales de ambos factores productivos (capital y trabajo) en el análisis del crecimiento económico. Esto representa una extensión al modelo de Harrod el cual sólo contempla una medida indirecta de la productividad marginal del capital sobre el crecimiento económico.</p>
Solow	<p>El modelo de Solow se desarrolla con el supuesto de que la remuneración de los</p>	<p>En la propuesta de nuevo modelo teórico se prescinde del supuesto</p>

	factores productivos es equivalente a sus correspondientes productividades marginales.	de remuneración eficiente para abarcar la generalidad de los escenarios (remuneración eficiente y remuneración no eficiente) lo cual implica un replanteamiento de la presentación matemática de la función de producción.
Kalecki	El modelo de Kalecki parte del análisis de la distribución factorial del ingreso nacional indicándose que el grado de monopolio de una industria determina la participación de los beneficios en la renta nacional.	En la propuesta de nuevo modelo teórico, el análisis se elabora a partir del ingreso nacional siendo este el vínculo entre oferta y demanda, pues partiendo de las posibles diferencias entre la remuneración de los factores y sus productividades marginales, se infiere la forma funcional de la producción y las estructuras de las ecuaciones de consumo de los empleados y los capitalistas. Del mismo modo, la condición de competencia imperfecta en los mercados de factores productivos

		determina la participación de los salarios y beneficios en el ingreso nacional.
--	--	---

Fuente: elaboración propia

Adicional a las orientaciones teóricas de los modelos de crecimiento precedentes, para la elaboración del nuevo modelo se contempla la dificultad de agregación de la función de producción⁶. Se supone, en este nuevo modelo, que la participación de las empresas en los mercados de bienes y servicios en términos de producción es relativamente estable, por lo cual una presentación agregada de la función de producción es útil al menos para analizar la dinámica económica aunque no sea útil para determinar las magnitudes de las variables asociadas a la producción. Por ejemplo, es posible determinar si la productividad marginal de los factores aumenta o disminuye a través del tiempo; sin embargo no es posible establecer el valor de dicha productividad marginal.

Desarrollo de la propuesta del NMT

La propuesta de NMT toma el ingreso nacional como eje de conexión entre la oferta agregada y la demanda agregada. A manera de definición, se presentan dos tipos de tasas de crecimiento que se utilizan en la exposición del modelo:

⁶ Para ahondar sobre este tema se recomienda la revisión de los resultados de lo que se denominó como “El debate de las dos Cambridge” revisar los escritos de Felipe y McCombie sobre la función de producción (La función de producción agregada en retrospectiva, 2005)

Tasas de crecimiento con base inicial. Se denotan con la representación de la variable seguida de un punto. Estas tasas representan el cambio en una variable como porcentaje de su valor inicial así:

$$V_{\cdot} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Donde V_0 y V_1 representan los valores de la variable en su estado inicial y final respectivamente.

Tasas de crecimiento con base final. Se denotan con la representación de la variable seguida de dos puntos seguidos. Estas tasas representan el cambio en una variable como porcentaje de su valor final así:

$$V_{\cdot\cdot} = \frac{V_1 - V_0}{V_1}$$

Donde V_0 y V_1 representan los valores de la variable en su estado inicial y final respectivamente.

Axiomas de la propuesta de NMT. La propuesta del NMT se fundamenta en los axiomas a continuación:

- El crecimiento económico puede presentarse en condiciones de competencia imperfecta en los mercados de los factores.
- Las remuneraciones de los factores productivos se relacionan con sus correspondientes productividades marginales aunque exista una desviación entre ambos cuando no haya competencia perfecta en los mercados de los factores
- El ingreso nacional se divide entre los asalariados y capitalistas

- El consumo total de la economía se compone del consumo de los trabajadores y el de los capitalistas
- El nivel de importaciones está determinado por el ingreso total
- No hay presencia de inflación

La función de producción y el ingreso nacional. La función de producción, ha de reflejar la forma en la que la combinación de los factores capital y trabajo den como resultado un nivel de producto, además debe reflejar el aporte que cada factor tiene a la producción y en consecuencia su nivel de remuneración. La forma tradicionalmente aceptada de dicha función de producción es la Cobb-Douglas de tipo

$$Y = L^{\alpha} K^{1-\alpha} \quad (31)$$

De esta representación, siguiendo el teorema de Euler, se obtiene la identidad del ingreso nacional

$$Y = wL + rK \quad (32)$$

Donde w equivale a la productividad marginal del trabajo y r , a la productividad marginal del capital. También, α representa la participación de la remuneración a los asalariados dentro del ingreso total y $(1 - \alpha)$, la de los capitalistas. Esta relación entre la función de producción y la identidad del ingreso nacional es cierta, en términos teóricos,

siempre que exista perfecta competencia en los mercados de los factores; sin embargo, esta condición de competitividad no se presenta plenamente en la economía, sino que pueden existir asimetrías en la información y relaciones de poder en los mercados que impiden la equidad entre las productividades marginales de los factores y sus correspondientes remuneraciones. Dado esto, se supone que la función de producción que representa la combinación de factores en términos de no competencia perfecta tiene la siguiente forma⁷:

$$Y = L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \quad (33)^8$$

De esta forma, si se mantiene que α y $(1 - \alpha)$ son las participaciones de las remuneraciones de trabajo y capital dentro del ingreso nacional entonces los salarios y las ganancias no son exactamente la productividad marginal de los factores⁹, sino que vienen determinados así:

$$w = Cl \frac{\partial Y}{\partial L} \quad (34)$$

⁷ Se toma por referencia la función de producción tipo Cobb-Douglas dado que representa la mejor aproximación algebraica de la función de ingreso nacional tal como se evidencia en la demostración matemática de Diaz y Giral (2011)

⁸ Esta forma funcional se asume dado que, por la demostración hecha en el apéndice “De la función de producción a la ecuación de ingreso nacional”, es útil para obtener un coeficiente de desviación entre los precios de los factores y sus correspondientes productividades marginales.

⁹ Esto implica un escenario de no competencia perfecta en los mercados de los factores productivos

$$r = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{Cl}} \right) \frac{\partial Y}{\partial K} \quad (35)^{10}$$

Donde Cl es el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio, es decir el ratio entre el salario medio y la productividad marginal del trabajo¹¹. Así, si Cl es igual a uno, los factores productivos están siendo remunerados por sus correspondientes productividades marginales; si es mayor que uno, el salario es superior a la productividad marginal del trabajo mientras la ganancia, inferior. Este mismo razonamiento puede hacerse para el caso en que Cl es inferior a uno. Dado esto, un eventual aumento del salario medio aumentaría el valor de Cl si la productividad marginal del trabajo se mantiene constante o decrece.

La función de producción asumida representa la competencia imperfecta dado que de ella se deriva una función de ingresos en la cual los precios de los factores productivos se desvían de sus productividades marginales. Por definición, bajo la existencia de competencia perfecta en los mercados de factores productivos, los precios de estos se igualan a sus productividades marginales; si existe alguna desviación entre estos valores, significa que hay presencia de poder de monopolio o monopsonio. En el primer caso (monopolio), el precio del factor sería superior a su productividad marginal dadas las presiones que podrían darse por asociaciones sindicales las cuales podrían fijar niveles salariales más elevados aun cuando implique un menor nivel de contratación de mano de

¹⁰ En el apéndice “De la función de producción a la ecuación de ingreso nacional” se describe al proceso de análisis matemático para obtener las ecuaciones 34 y 35

¹¹ Dado que estos dos son positivos entonces Cl también es positivo.

obra ; mientras que si el precio es inferior, existe presencia de poder de monopsonio al tener las empresas la capacidad determinar el valor del salario en lugar de ser precio aceptantes en el mercado de trabajo (Nicholson, 2001).

De alguna forma, Cl , es una medida indirecta de la justicia de la distribución del ingreso que, teniendo en cuenta la forma de la función de producción supuesta, se puede representar:

$$Cl = \alpha \frac{\ln(\frac{L}{\bar{K}})}{\ln(\frac{Y}{\bar{K}})} \quad (36)$$

De esta relación se deduce que una justa remuneración de los factores, la cual se presenta cuando $Cl = 1$, lleva a una participación de la remuneración de los trabajadores en el ingreso nacional dada por la ecuación (37)

$$\alpha = \frac{\ln(\frac{Y}{\bar{K}})}{\ln(\frac{L}{\bar{K}})} \quad (37)$$

Al analizar la función de producción propuesta se observa que es posible que no exista una senda de crecimiento única y determinable, pues aunque se mantenga la condición de homogeneidad de grado 1 pueden presentarse incumplimientos en las

condiciones de INADA¹². Detallando, si el valor de Cl es inferior a α entonces $\frac{d^2Y}{dL^2}$ y $\frac{d^2Y}{dK^2}$ se tornarían positivas, es decir que habrían rendimientos marginales crecientes, con lo cual no existirían garantías de convergencia hacia un estado estacionario. Otro tema a considerar sobre la función de producción es que al asumir la tipo Cobb-Douglas con la inclusión de Cl implica que existe sustitución entre factores productivos aunque esta no sea perfecta.

Ahora, con el fin de obtener el crecimiento de la producción, se diferencia la función de producción y se divide entre la producción, con lo cual se obtiene:

$$Y. = \frac{\alpha}{Cl} L. + \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) K. + \ln\left(\frac{L}{K}\right) \frac{1}{Cl} (\partial\alpha - \alpha Cl.) \quad (38)^{13}$$

Esta tasa de crecimiento refleja que el efecto que tiene Cl en $Y.$ es ambiguo pues, dependiendo de las tasas de crecimiento del capital, la mano de obra y la contribución de la remuneración de los asalariados al ingreso nacional, el impacto puede ser directo o inverso. De forma más precisa, el cambio que experimenta el crecimiento económico por cambios en Cl está dado por:

$$\frac{\partial Y.}{\partial Cl} = \frac{1}{Cl^2} \left(\alpha(Cl. - 1 + K. - L.) - \ln\left(\frac{L}{K}\right) \partial\alpha \right) \quad (39)$$

¹² Las condiciones de INADA garantizan la ruta de crecimiento económico estable.

¹³ En el apéndice "Obtención de la tasa de crecimiento de la producción" se describe al proceso de análisis matemático para obtener la ecuación 38

De esta forma, el signo de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ depende de la relación entre Cl . y $(1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha. + L. - K.)$. En la Tabla 3 se indica el signo de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ según el cumplimiento de determinadas condiciones

Tabla 3. Valor de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ – óptica producción

$Cl. > 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha. + L. - K. \quad Cl. = 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha. + L. - K. \quad Cl. < 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha. + L. - K.$			
Valor de			
$\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$	> 0	$= 0$	< 0

Fuente: elaboración propia

Adicionalmente, a medida que el valor de Cl aumente, el resultado de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ tenderá a cero por lo cual el efecto de Cl sobre Y . será cada vez menor. Del mismo modo, en la medida que Cl decrezca, el resultado de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ se alejará de cero. Esto implica que los aumentos salariales tienen cada vez menos influencia sobre el crecimiento económico a medida que estos aumentan, apartándose de su productividad marginal.

La remuneración de los factores y la demanda agregada. Partiendo de la óptica de la demanda agregada se tiene que:

$$Y = C + I + G + X - M \quad (40)$$

Donde C corresponde al consumo de las familias, I , a la inversión, G , al gasto del gobierno, X , a las exportaciones brutas y M , a las importaciones brutas. Ahora, teniendo en cuenta que el consumo de las familias es ejecutado por los trabajadores y capitalistas, se puede definir que:

$$C = C_A + awL + brK \quad (41)$$

Donde C_A es el consumo autónomo, a la propensión marginal a consumir de los trabajadores y b , la propensión marginal a consumir de los capitalistas. Teniendo en cuenta que estas propensiones representan el nivel de consumo adicional al aumentar el ingreso en una unidad monetaria entonces estas deben ser positivas y menores a uno. Del mismo modo, se puede indicar que el nivel de importaciones depende de los ingresos totales de la economía, es decir

$$M = M_A + dY \quad (42)$$

Dado que el salario está definido como $w = Cl \frac{\partial Y}{\partial L}$, y ∂Y , en esta ecuación del salario, no corresponde al cambio total del producto sino al cambio producido por cambios en la mano de obra entonces se puede redefinir w así:

$$w = Cl \frac{\beta(\partial Y)}{(\partial L)} \quad (43)$$

Donde (∂Y) corresponde a la variación total del producto y β representa la participación de los cambios del producto que son causados solo por los cambios en la mano de obra dentro del cambio total del producto.

Así pues, la ecuación de demanda agregada queda

$$Y = C_A + \frac{a\beta(\partial Y)}{L..} Cl + b(Y - \frac{\beta(\partial Y)}{L..} Cl) + I + G + X - M_A - dY \quad (44)$$

Dividiendo la ecuación entre el valor del PIB en el periodo anterior y despejando la tasa de crecimiento de la demanda, se obtiene:

$$Y. = \frac{c_A + i + g + x - m_A + b - d - 1}{1 - b + d - \frac{\beta(a-b)}{L..} Cl} \quad (45)^{14}$$

¹⁴ En el apéndice “Obtención de la tasa de crecimiento de la demanda” se describe al proceso de análisis matemático para obtener las ecuaciones 44 y 45

Donde c_A , i , g , x y m_A son los valores del consumo autónomo, la inversión, el gasto público, las exportaciones y el componente autónomo de las importaciones, correspondientemente, divididos por el nivel de PIB del periodo anterior.

Para el caso de la demanda, Cl también tiene efectos ambiguos sobre la tasa de crecimiento del producto. El cambio que experimenta la demanda por la variación de Cl está dado por:

$$\frac{\partial Y.}{\partial Cl} = \frac{\beta(a-b)(c_A + i + g + x - m_A + b - d - 1)}{L.. \left(1 - b + d - \frac{\beta(a-b)}{L..} Cl\right)^2} \quad (46)$$

Así, el cambio en la tasa de crecimiento de la demanda es independiente de los cambios en Cl siempre que se cumpla $(a = b)$ ó $(\alpha(b-a) = (i_0 + g_0 + x_0) - (i + g + x))$. Siendo i_0 , g_0 y x_0 la participación de la inversión, el gasto y las exportaciones del periodo anterior en el PIB del periodo anterior. En la matriz a continuación se indica el signo de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ según el cumplimiento de determinadas condiciones:

Tabla 4. Valor de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ – óptica demanda

Valor de	$\alpha(b-a)$	$\alpha(b-a)$	$\alpha(b-a)$
$\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$	$<$	$=$	$>$
	$(i_0 + g_0 + x_0) - (i + g + x)$	$(i_0 + g_0 + x_0) - (i + g + x)$	$(i_0 + g_0 + x_0) - (i + g + x)$
$L.. > 0$	> 0	$= 0$	< 0
$b > a$	$L.. = 0$	indeterminación	indeterminación
	$L.. < 0$	< 0	$= 0$
		> 0	

$b = a$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
$L.. > 0$	< 0	$= 0$	> 0
$b < a$	$L.. = 0$	indeterminación	indeterminación
	$L.. < 0$	> 0	$= 0$
		$= 0$	< 0

Fuente: Elaboración propia

Al igual que en el caso de la oferta, a medida que el valor de Cl aumente, el resultado de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ tenderá a cero por lo cual el efecto de Cl sobre Cl será cada vez menor. Del mismo modo, en la medida que Cl decrezca, el resultado de $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ se alejará de cero; sin embargo, la velocidad con la que $\frac{\partial Y.}{\partial Cl}$ tiende a cero a medida que Cl aumenta es inferior en el caso de la demanda que en el caso de la oferta. Las implicaciones de esto son las mismas descritas en el título anterior dedicado al análisis de la producción.

Deducciones del NMT

Del desarrollo del NMT se puede deducir que:

- La variación de la remuneración de los salarios puede tener relación positiva, neutra o negativa con el crecimiento económico. Todo depende de las condiciones de cada economía.
- Las variables que condicionan la relación entre la variación de los salarios y el crecimiento económico son la inversión, la distribución factorial del ingreso, los niveles y tasas de crecimiento de los factores productivos, las exportaciones y el gasto público.

Capítulo 3

Aproximación empírica de la propuesta de nuevo modelo

En este capítulo se presentan los resultados de la aproximación empírica de la propuesta de modelo lo cual involucra el cálculo de las variables y parámetros del nuevo modelo para el caso colombiano.

Metodología

Para la aproximación empírica se utiliza la información disponible en la Penn World Table 9.0 para la economía colombiana durante el periodo 1980-2014. De allí se toman las siguientes variables:

- Número de personas empleadas
- Stock de capital a precios constantes de 2011¹⁵ (en millones de US\$)
- PIB ópticas gasto y producción a precios constantes de 2011 (en millones de US\$)
- Participación de la remuneración a los asalariados en el PIB
- Participación de los componentes del gasto (consumo, inversión, gasto público, importaciones y exportaciones) en el PIB

De allí se calcula el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio aplicando la ecuación (36). Las propensiones marginales a consumir de los capitalistas y

¹⁵ En el apéndice del documento “The Next Generation of the Penn World Table” se explica la metodología de estimación del stock del capital en la PWT (Feenstra, Inklaar, & Timmer, 2015)

trabajadores, así como la propensión marginal a importar, son estimadas a través de mínimos cuadrados ordinarios con las ecuaciones (41) y (42).

Resultados

Las propensiones marginales al consumo para trabajadores y capitalistas son 0.810 y 0.177 correspondientemente, y la propensión marginal a importar es 0.193. Estos resultados, al igual que el consumo y las importaciones autónomas, son obtenidos a través de MCO con evidencia de cointegración entre las variables involucradas en la estimación¹⁶. Con estos valores se puede estimar el efecto que tiene el cambio en Cl sobre las tasas de crecimiento de la oferta y la demanda aplicando las ecuaciones (39) y (46)

Figura 2. Evolutivo de $(\partial Y.)/\partial Cl$ para oferta y demanda

Fuente: Elaboración propia

¹⁶ Los resultados de las regresiones y los test de raíz unitaria, para las variables y los errores de los modelos estimados, se pueden observar en el apéndice de este documento

Como se observa en la Figura 2, para el periodo de referencia, el indicador $(\partial Y.)/\partial Cl$ es, para la mayoría de los periodos, negativo. Es decir, la relación entre Cl y la tasa de crecimiento económico colombiana es fundamentalmente inversa. De forma complementaria, en la Figura 3, se observa que el efecto final de los cambios en Cl sobre los cambios en las tasas de crecimiento son relativamente despreciables, pues para ningún año alcanzó a representar, al menos, una variación en un punto básico en las tasas de crecimiento de oferta y demanda.

Figura 3. Aporte en puntos básicos de los cambios en Cl a las tasas de crecimiento Oferta y Demanda

Fuente: Elaboración propia

Observando la Figura 4 se evidencia un marcado decrecimiento de Cl desde 1994 hasta el 2014. Eso explica la tendencia de $(\partial Y.)/\partial Cl$ a hacerse más negativo – alejándose de cero – con el paso de los años. Teniendo en cuenta estas tendencias, sería válido esperar

que los cambios en Cl generen mayor aporte, en términos de puntos básicos, a las tasas de crecimiento de oferta y demanda y que el valor de aporte en puntos básicos sea positivo.

Figura 4. Evolución de Cl 1980-2014

Fuente: Elaboración propia

Realizando un acercamiento sobre la oferta, es de esperar que se mantenga la relación negativa existente entre la tasa de crecimiento económico y el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio. Se requieren condiciones alejadas de la realidad, tales como tasas de crecimiento del capital no observadas en Colombia durante el periodo de análisis, para que la brecha existente entre las líneas punteada y continua, de la Figura 5, se cierre. Esta brecha, como se puede evidenciar en la Tabla 3, determina el signo de $\frac{\partial \gamma}{\partial Cl}$.

Figura 5. Evolución variables $Cl.$ & $(1+\ln(L/K)\alpha.+L.-K.)$

Fuente: Elaboración propia

Para demostrar que se requieren condiciones alejadas de la realidad para que la brecha entre $Cl.$ & $(1+\ln(L/K)\alpha.+L.-K.)$ se cierre, es necesario calcular el valor de la tasa de crecimiento del capital que satisface la condición $(Cl. = 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha. + L. - K.)$. El valor obtenido corresponde a la tasa de crecimiento del capital a partir de la cual los cambios de Cl empiezan a tener un impacto positivo sobre la tasa de crecimiento económico de la producción. Para obtener el valor de $Cl.$ en función de $K.$ se calcula el diferencial total de Cl en la ecuación (36) y se divide entre la misma ecuación, con lo cual se obtiene que:

$$Cl. = \alpha. + L. + \frac{K. - Y.}{\ln\left(\frac{Y}{K}\right)} \quad (47)$$

Así pues, reemplazando la ecuación (47) en la condición ($Cl. = 1 + \ln\left(\frac{L}{K}\right)\alpha. + L. - K.$) y despejando K . se obtiene:

$$K. = \frac{\ln\left(\frac{Y}{K}\right)\left(1 + \alpha. \left(\ln\left(\frac{L}{K}\right) - 1\right)\right) + Y.}{1 + \ln\left(\frac{Y}{K}\right)} \quad (48)$$

Figura 6. Valor estimado K . que satisface $\frac{\partial Y.}{\partial Cl} = 0$

Fuente: Elaboración propia

Si se asume que la participación de la remuneración a los asalariados en el PIB se mantiene constante y que la tasa de crecimiento económico mantiene un promedio de

3.47%¹⁷ entonces se requeriría que el stock de capital reportado en 2015 hubiese sido 15.15 veces el del 2014 y mantener tasas de crecimiento del capital por encima del 100% a partir del 2016. En la Figura 6 se muestra la evolución estimada de la tasa de crecimiento del capital requerida para cambiar el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ durante el periodo 2016-2060 con base en la ecuación (48).

En el caso de la demanda también se espera que $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ se mantenga negativo. Las condiciones para el cambio del signo son demasiado exigentes y alejadas de la realidad. En la Figura 6 se evidencia la amplia brecha que existe entre los componentes $\alpha(b - a)$ & $(i_0 + g_0 + x_0) - (i + g + x)$ que son los que definen el signo de $\frac{\partial Y}{\partial Cl}$ en el caso colombiano, pues según la información de la Tabla 4, Colombia se encuentra en el estado en que $b < a$ y la tasa de crecimiento de la mano de obra se ha mantenido positiva desde 1980.

Teniendo en cuenta que el valor de $\alpha(b - a)$ en 2014 fue de -0.393 y además:

$$(i_0 + g_0 + x_0) - (i + g + x) = \frac{(I_0 + G_0 + X_0) - (I + G + X)}{Y_0} = \frac{-\Delta(I + G + X)}{Y_0} \quad (49)$$

Si se supone que la participación de la remuneración a los asalariados en el ingreso nacional, en términos reales, se mantiene constante, se requeriría que el aumento anual de la inversión, el gasto público y las exportaciones brutas, represente más del 39.3% del PIB para cerrar la brecha presentada en la Figura 7. Este requisito es alejado de la realidad si se

¹⁷ Este valor de referencia se obtiene estimando la tasa de crecimiento de la producción durante 1994-2014 a través de MCO con la forma funcional $\ln(Y) = \beta_0 + \beta_1(Año)$ donde β_1 corresponde a la tasa de crecimiento media estimada. Los resultados de la regresión se encuentran en el apéndice.

considera el hecho que, durante el periodo 1980-2014, el incremento más alto registrado de la inversión, el gasto público y las exportaciones brutas como porcentaje del PIB fue del 6,7% en el año 2011.

Figura 7. Evolución variables $\alpha(b - a)$ & $(i_0 + g_0 + x_0) - (i + g + x)$

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 4. Conclusiones

Como respuesta a la pregunta ¿ Es posible integrar, en un solo modelo, las conclusiones de los neoclásicos y los post-keynesianos acerca del efecto de los aumentos salariales en el crecimiento económico?, Se evidenció que la propuesta de NMT presenta un marco de análisis generalizado que permite la evaluación de las posturas Neoclásicas y Post-keynesianas¹⁸ acerca del efecto de los aumentos salariales a nivel agregado en la economía. Con un mismo modelo se demostró que, dependiendo de las condiciones de las variables involucradas en la oferta y la demanda, los incrementos salariales bien pueden tener efectos negativos, neutros o positivos en el crecimiento económico.

El NMT integra el análisis de las productividades marginales de ambos factores productivos – capital y trabajo – lo cual representa una visión más general del crecimiento económico que la planteada por Harrod (1939), pues él solo planteó una visión desde la relación marginal capital producto, es decir desde un solo factor productivo. Sin embargo, esta inclusión del factor trabajo en el análisis del crecimiento económico ya había sido realizada por Solow (1956) y presentó la estabilidad del equilibrio bajo un escenario de competencia perfecta asumiendo igualdad entre la remuneración de los factores y sus correspondientes productividades marginales. En la propuesta de NMT se ha prescindido de dicho supuesto que representa a la remuneración eficiente de los factores con lo cual se logra un marco de análisis más general que el propuesto por Solow. El hecho de no asumir la remuneración eficiente de los factores conllevó al planeamiento de una función de

¹⁸ De forma introductoria sobre este tema se puede revisar “Introduction to Post-Keynesian Economics” (Lavoie, 2007)

producción del tipo Cobb-Douglas modificada. Esta nueva función de producción permite la existencia de equilibrios múltiples e inestables dado que es posible que la función sea decreciente en los factores y tenga rendimientos marginales crecientes¹⁹.

En los modelos de Harrod y Solow, la producción y la demanda se vinculan a través de la inversión asumiendo que esta es igual al ahorro y que representa una fracción del ingreso nacional. En el caso de la propuesta de NMT, el vínculo entre la producción y la demanda se hace a través del consumo asumiendo que este se realiza con el ingreso obtenido por los trabajadores y capitalistas al producir. Es en este punto donde la propuesta de NMT se vincula con el modelo de Kalecki (1956), pues se desagrega el consumo total entre el ejecutado por trabajadores y capitalistas lo cual conduce a un análisis sobre la distribución factorial del ingreso. En el modelo de Kalecki el análisis desagregado del consumo total y de la distribución factorial del ingreso conduce a la determinación de la dinámica de la inversión y del crecimiento económico mismo. En el caso de la propuesta de NMT se condujo el análisis hacia la determinación de la incidencia que tendría un aumento salarial sobre el crecimiento económico. Dicha incidencia, según la propuesta de NMT, puede ser positiva, negativa o neutra, lo cual implica una integración de las conclusiones de los neoclásicos y los post-keynesianos en un solo modelo, dependiendo de:

- las propensiones marginales a consumir de los trabajadores y capitalistas
- la participación de la remuneración a los asalariados en el ingreso nacional

¹⁹ Se pueden revisar las condiciones de INADA o las condiciones para que exista un estado estacionario en los textos académicos de crecimiento económico tradicionales como los de Barro y Sali-i-Martin (Crecimiento Económico, 2009)

- la tasa de crecimiento de la mano de obra contratada
- el crecimiento de la inversión, el gasto público y las exportaciones
- la tasa de crecimiento del capital

Una vez realizada la aproximación empírica de la propuesta de NMT en el caso colombiano, se concluye que un aumento generalizado de los salarios sería un lastre para el crecimiento económico colombiano teniendo en cuenta que, por sus condiciones, la relación existente entre los cambios salariales y el crecimiento económico es inversa, requiriéndose eventos poco probables, al punto de ser alejados de la realidad, para cambiar el sentido de dicha relación.

Lista de referencias

- Barro, R. J., & Xavier, S.-i.-M. (2009). *Crecimiento Económico*. Barcelona: Reverté.
- Bernal Bellon, J. R. (2008). La tasa de crecimiento garantizada de Harrod como ley del crecimiento económico: Una comprobación empírica. *Cuadernos de Economía*, 57-88.
- Bernal Bellon, J. R. (2009). *Teoría del Crecimiento Económico: Un punto de vista heterodoxo. Análisis desde la perspectiva de Harrod*. Bogotá D.C: Universidad Nacional de Colombia - Centro de Investigaciones para el Desarrollo.
- Bernal Bellon, J. R., & Meza Carvajalino, C. A. (2012). La interacción entre el multiplicador y el acelerador: Una aproximación para Colombia. *Economía*, 11-32.
- Cobb, C. W., & Douglas, P. H. (1928). A Theory of Production. *The American Economic review*, 139-165.
- Díaz, W. A., & Giral, D. A. (2011). Comparación de la solución analítica de la función de producción COBB-DOUGLAS con la obtenida por el método de mínimos cuadrados. *Revista Tecnura*, XV(28), 134-141.
- Feenstra, R., Inklaar, R., & Timmer, M. (2015). The Next Generation of the Penn World Table. *American Economic Review*, 3150-3182.
- Harrod, R. F. (1939). La Teoría Dinámica. En A. Sen, *Economía del Crecimiento* (págs. 43-62). México: Fondo de Cultura Económica.
- Kalecki, M. (1935). A Macrodynamic Theory of Business Cycles. *Econometrica*, 327-344.

- Kalecki, M. (1956). *Teoría de la dinámica económica - Ensayo sobre los movimientos cíclicos y a largo plazo de la economía capitalista*. Mexico: Fondo de Cultura Económica.
- Keynes, J. M. (1936). *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero*. Nueva York: Harcourt.
- Lavoie, M. (2005). El corto plazo: Demanda efectiva y mercado de trabajo. En M. Lavoie, *La economía postkeynesiana: Un antídoto del pensamiento único* (págs. 91-110). Barcelona: Icaria editorial S.A.
- Lavoie, M. (2007). *Introduction to Post-Keynesian Economics*. Nueva York: PALGRAVE MACMILLAN.
- Mankiw, G. N., Romer, D., & Weil, D. N. (1992). A Contribution To The Empirics Of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 407-437.
- Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, D. (1992). *A contribution to the empirics of economic growt*. THE QUARTERLY JOURNAL OF ECONOMIC.
- McCombie, J. S., & Felipe, J. (2005). La función de producción agregada en retrospectiva. *Investigación Económica, LXIV*(253), 43-88.
- Moreno Rivas, Á. M. (2005). Del filo de la navaja a la cáscara de la nuez: Un nuevo examen de la dinámica de Harrod. *Revista de Economía Institucional*, 101-132.
- Nicholson, W. (2001). Fijación de precios en los mercados de insumos. En W. Nicholson, *Micoreconomía Intermedia y sus aplicaciones* (págs. 422-444). Bogotá: McGraw-Hill .
- Nuti, D. M. (2004). Kalecki and Keynes revisited: Two original approaches to demand determined income – and much more besides. En *Kalecki's Economics Today*. Londres y Nueva York: Routledge.
- Solow, R. M. (Febrero de 1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. (T. M. Press, Ed.) *The Quarterly Journal of Economic*, 70(1), 65-94.

Solow, R. M. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function.
Review of Economics and Statistics, 312-320.

Apéndice

Test de Dickey-Fuller aumentada rezagos (0) – Variables de ecuaciones de demanda

Ho: La serie tiene raíz unitaria

P value para Z(t)		Consumo	rk	wl	PIB demanda	Importaciones
En Nivel	Con Deriva	0.9897	0.9973	0.9469	1.0000	0.9703
	Con tendencia	0.9968	0.9951	0.9483	1.0000	0.9732
En primera diferencia	Con Deriva	0.0017	0.0000	0.0003	0.0047	0.0002
	Con tendencia	0.0371	0.0000	0.0084	0.0268	0.0012

Resultados de la Regresión Ecuación Consumo

(1)	
VARIABLES	consumo

rk	0.177***
	(0.0502)
wl	0.810***
	(0.0352)
v1991	19,017***
	(5,159)
Constant	33,368***
	(3,635)

Observations	35
R-squared	0.995

Standard errors in parentheses

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Test de Dickey-Fuller aumentada rezagos (0) – Errores de ecuación de consumo

Ho: La serie tiene raíz unitaria

P value para Z(t)	Errores ecuación consumo
-------------------	-----------------------------

En Nivel	Sin intercepto	0.0000
----------	-------------------	--------

Resultados de la Regresión Ecuación Importaciones

	(1)
VARIABLES	importaciones
PIB Gasto	0.193*** (0.00734)
Constant	-29,144*** (2,697)
Observations	35
R-squared	0.954

Standard errors in parentheses

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Resultados de la Regresión Ecuación Crecimiento Económico

(1)	
VARIABLES	Ln (Y)
<hr/>	
Año	0.0.34***
	(0.0019)
Constant	-56,587***
	(3,847)
Observations	21
R-squared	0.945
<hr/>	
Standard errors in parentheses	

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Test de Dickey-Fuller aumentada rezagos (0) – Errores de ecuación importaciones

Ho: La serie tiene raíz unitaria

P value para Z(t)		Errores ecuación importaciones
<hr/>		
En Nivel	Sin intercepto	0.0350
<hr/>		

De la función de producción a la ecuación de ingreso nacional

Sea la función de producción

$$Y = L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \quad (50)$$

Donde:

- α corresponde a la participación de la remuneración a los trabajadores en el ingreso nacional, $\alpha = \frac{wL}{Y}$
- $(1 - \alpha)$ corresponde a la participación de la remuneración a los capitalistas en el ingreso, $(1 - \alpha) = \frac{rK}{Y}$
- L es la mano de obra
- K es el stock de capital
- Cl es el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio
- Y es el nivel de producto

Si se deriva parcialmente la función de producción con respecto a L y K , se obtiene

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}}}{L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{Y}{L} = PmgL \quad (51)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}}}{K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{Y}{K} = PmgK \quad (52)$$

De las ecuaciones (49) y (50) se obtiene que:

$$\alpha Y = \frac{\partial Y}{\partial L} Cl L \quad (53)$$

$$(1 - \alpha)Y = \frac{(1 - \alpha)}{\left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right)} \frac{\partial Y}{\partial K} K \quad (54)$$

Sumando las ecuaciones (51) y (52) se obtiene

$$\alpha Y + (1 - \alpha)Y = Y = \frac{\partial Y}{\partial L} Cl L + \frac{(1 - \alpha)}{\left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right)} \frac{\partial Y}{\partial K} K \quad (55)$$

Así pues:

$$w = Cl \frac{\partial Y}{\partial L} \quad (56)$$

$$r = \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \frac{\alpha}{Cl}} \right) \frac{\partial Y}{\partial K} \quad (57)$$

Por tanto:

$$Y = w L + r K \quad (58)$$

Obtención de la tasa de crecimiento de la producción

Sea la función de producción

$$Y = L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1 - \frac{\alpha}{Cl}} \quad (59)$$

Donde:

- α corresponde a la participación de la remuneración a los trabajadores en el ingreso nacional, $\alpha = \frac{wL}{Y}$
- $(1 - \alpha)$ corresponde a la participación de la remuneración a los capitalistas en el ingreso, $(1 - \alpha) = \frac{rK}{Y}$
- L es la mano de obra
- K es el stock de capital

- Cl es el coeficiente de desviación de eficiencia del salario medio
- Y es el nivel de producto

Si se deriva la función de producción con respecto a cada variable se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}}}{L} = \frac{\alpha}{Cl} \frac{Y}{L} = PmgL \quad (60)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}}}{K} = \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{Y}{K} = PmgK \quad (61)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \ln(L) - L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \ln(K)}{Cl} = \frac{Y}{Cl} (\ln(L) - \ln(K)) \quad (62)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Cl} = \frac{\alpha}{Cl^2} L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \ln(K) - \frac{\alpha}{Cl^2} L^{\frac{\alpha}{Cl}} K^{1-\frac{\alpha}{Cl}} \ln(L) = \alpha \frac{Y}{Cl^2} (\ln(K) - \ln(L)) \quad (63)$$

Multiplicando cada derivada parcial por el cambio de la variable con respecto a la cual se derivó el producto para luego sumar todos los resultados, se puede obtener el cambio total del producto así:

$$\begin{aligned} \partial Y = & \frac{\alpha Y}{ClL} \partial L + \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) \frac{Y}{K} \partial K + \frac{Y}{Cl} (\ln(L) - \ln(K)) \partial \alpha + \alpha \frac{Y}{Cl^2} (\ln(K) \\ & - \ln(L)) \partial Cl \end{aligned} \quad (64)$$

Al dividir la ecuación (62) entre Y se obtiene la tasa de crecimiento de la producción así:

$$\frac{\partial Y}{Y} = Y. = \frac{\alpha}{Cl} L. + \left(1 - \frac{\alpha}{Cl}\right) K. + \ln\left(\frac{L}{K}\right) \frac{1}{Cl} (\partial\alpha - \alpha Cl.) \quad (65)$$

Obtención de la tasa de crecimiento de la demanda

Sea la demanda agregada

$$Y = C_A + a\alpha Y + b(1 - \alpha)Y + I + G + X - M_A - dY \quad (66)$$

Donde:

- Y es el valor de la demanda agregada
- C_A es el consumo autónomo
- α corresponde a la participación de la remuneración a los asalariados dentro del ingreso nacional
- a y b son a las propensiones marginales a consumir de los trabajadores y capitalistas correspondientemente
- I , G , & X son la Inversión, el Gasto Público y las Exportaciones brutas correspondientemente
- M_A son las importaciones autónomas

- d es la propensión marginal a importar

Al agrupar Y al lado izquierdo de la ecuación (64) se obtiene:

$$Y(1 + \alpha(b - a) - b + d) = C_A + I + G + X - M_A \quad (67)$$

Teniendo en cuenta que $\alpha Y = wL$ se utiliza la ecuación (44) para obtener α , por lo cual:

$$\alpha = Cl \frac{\beta Y_{..}}{L_{..}} \quad (68)$$

Donde:

- β es la proporción que representa el cambio en el producto, efecto de cambios en la mano de obra, dentro de la variación total del producto
- Cl es el coeficiente de desviación del ingreso medio con respecto a la productividad marginal del trabajo

Reemplazando (66) en (65) se obtiene:

$$Y(1 + \frac{\beta Y_{..}}{L_{..}} Cl (b - a) - b + d) = C_A + I + G + X - M_A \quad (69)$$

Al dividir la ecuación (67) entre Y_0 se obtiene:

$$Y_{..} + 1 + \beta Cl \frac{Y_{..}}{L_{..}} (b - a) - Y_{..} b - b + Y_{..} d + d = c_A + i + g + x - m_A \quad (70)$$

Al sacar factor común $Y_{..}$. De (68) se tiene:

$$Y_{..} \left(1 - \beta Cl \frac{(a - b)}{L_{..}} - b + d \right) - b + d + 1 = c_A + i + g + x - m_A \quad (71)$$

Finalmente, de (69) se despeja la tasa de crecimiento de la demanda, por lo cual:

$$Y_{..} = \frac{c_A + i + g + x - m_A + b - d - 1}{1 - b + d - \frac{\beta(a - b)}{L_{..}} Cl} \quad (72)$$