

CERCHAS Y PROGRESIONES

I.C. Ricardo Correa Uribe

**Facultad de Ingeniería Civil -
Bogotá**

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS

CONSEJO EDITORIAL

P. José Antonio Balaguera Cepeda, O.P.

Rector General

P. Pedro José Díaz Camacho, O.P.

Vicerrector Académico General

P. Marco Antonio Peña Salinas, O.P.

Vicerrector Administrativo y Financiero General

P. Luis Francisco Sastoque Poveda, O.P.

Vicerrector General de Universidad Abierta y a Distancia -VUAD-

Omar Parra Rozo

Director Unidad de Investigación y Posgrados

Aída María Bejarano Varela

Editora

ISSN: 1794-8266

Hecho el depósito que establece la ley

© 2006

Universidad Santo Tomás

Derechos Reservados

Universidad Santo Tomás

Consejo Editorial

Carrera 13 N° 54-39

Tels: 249 71 21 – 255 42 01

<http://www.usta.edu.co>

e-mail: editorial@correo.usta.edu.co

Impresión

Universidad Santo Tomás

Departamento de Comunicaciones

Editorial y Publicaciones

Bogotá, D.C., Colombia

2006

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	4
1. CERCHA EN V	5
2. CERCHA EN N	10
3. CERCHA HOWE	18
BIBLIOGRAFÍA	30

INTRODUCCIÓN

En muchos casos, la hipótesis de carga predominante en el diseño de cerchas en **V**, en **N** y en la tipo Howe consiste en un conjunto de fuerzas verticales y hacia abajo de magnitud F aplicado en los nudos interiores de la cuerda superior y $F/2$ en los nudos extremos. Se configura así un sistema simétrico de cargas aplicadas a estructuras que también son simétricas.

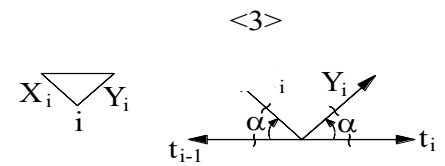
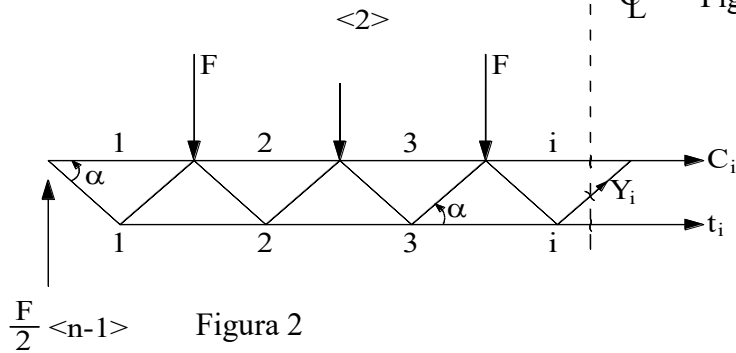
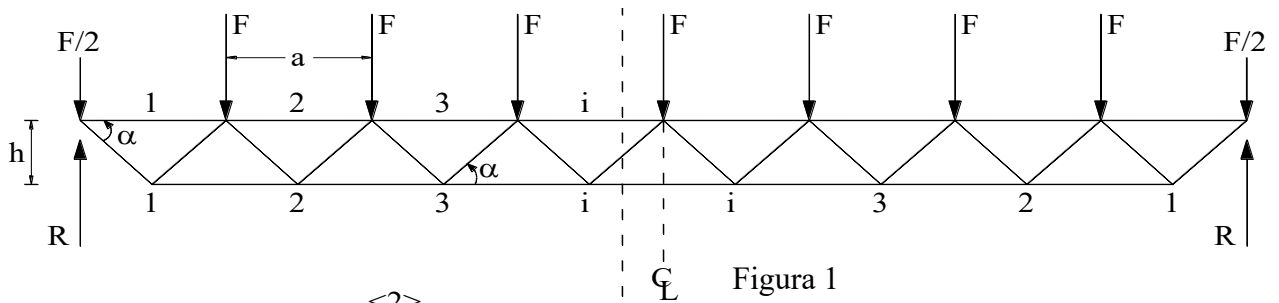
En el caso de las correas metálicas en **V** y **N**, éstas se utilizan para transferir las cargas de la cubierta a la cercha principal, y en el caso de la cercha Howe para transferir las cargas de las correas a los apoyos de la misma.

Estas condiciones permiten plantear las ecuaciones generales que determinan la fuerza (tracción o compresión) en las barras de cualquier módulo de la cercha en función del número de orden del módulo, y las que determinan la fuerza en las barras de un módulo cualquiera cuando se conocen previamente las del módulo inmediatamente anterior (ecuaciones de recurrencia).

Cuando se conocen las fuerzas en las barras del primer módulo y las ecuaciones de recurrencia mencionadas o si se conoce el número de orden del módulo, estas ecuaciones permiten determinar inmediatamente las fuerzas en todas las barras de todos los módulos de la cercha.

Como se verá, en el desarrollo de estas ecuaciones (totalmente deducidas por el autor) aparecen con frecuencia las denominadas “Progresiones aritméticas”, cuyas propiedades son fundamentales en la deducción de estas ecuaciones.

1. CERCHA EN V



NOMENCLATURA

L = claro de la cercha = na

h = altura

a = longitud de pandeo

n = número par de módulos

i = entero positivo

Tal que $1 \leq i \leq n/2$; α = inclinación de la celosía.

$$R = \frac{nF}{2} \Rightarrow R - \frac{F}{2} = \frac{nF}{2} - \frac{F}{2} = \frac{F}{2} \langle n-1 \rangle = \text{fuerza neta en el apoyo}$$

EQUILIBRIO VERTICAL (FIGURA 2)

$$\Sigma Fy = \frac{F}{2} \langle n-1 \rangle - \langle i-1 \rangle F + Y_i \text{Sen} \alpha = 0$$

$$Y_i = \frac{F \langle i-1 \rangle - \frac{F}{2} \langle n-1 \rangle}{\text{Sen} \alpha} = \frac{Fi - F + \frac{F}{2} - \frac{Fn}{2}}{\text{Sen} \alpha} = \frac{1}{\text{Sen} \alpha} \left[Fi - \frac{Fn}{2} - \frac{F}{2} \right] \Rightarrow Y_i = \frac{F}{2 \text{Sen} \alpha} [2i - n - 1]$$

EQUILIBRIO VERTICAL (FIGURA 3)

$$\Sigma Fy = Y_i \text{Sen} \alpha + X_i \text{Sen} \alpha = 0$$

$$X_i = -Y_i \quad \rightarrow \quad \boxed{X_i = \frac{F}{2 \text{Sen} \alpha} [n+1-2i]} \quad \langle 1 \rangle$$

$$\boxed{Y_i = -X_i} \quad \langle 2 \rangle$$

EQUILIBRIO HORIZONTAL (FIGURA 3)

$$\Sigma Fx = t_i + Y_i \text{Cos} \alpha - X_i \text{Cos} \alpha - t_{i-1} = 0$$

$$t_i = t_{i-1} + X_i \text{Cos} \alpha - Y_i \text{Cos} \alpha = t_{i-1} + \text{Cos} \alpha [X_i - Y_i] = t_{i-1} + \text{Cos} \alpha [X_i + X_i]$$

$$t_i = t_{i-1} + 2 \text{Cos} \alpha [X_i] = t_{i-1} + 2 \text{Cos} \alpha \left[\frac{F}{2 \text{Sen} \alpha} [n+1-2i] \right]$$

FÓRMULA DE RECURRENCIA

$$\boxed{t_i = t_{i-1} + F \cot \alpha [n+1-2i]} \quad \langle 3 \rangle$$

$$t_0 = 0 \text{ (no hay barra)}$$

EQUILIBRIO HORIZONTAL (FIGURA 2)

$$\Sigma Fx = t_i + C_i + Y_i \text{Cos} \alpha = 0$$

$$C_i = -Y_i \text{Cos} \alpha - t_i = X_i \text{Cos} \alpha - t_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{2} - t_i$$

$$C_i = \frac{t_i - t_{i-1} - 2t_i}{2} = \frac{-t_{i-1} - t_i}{2} \Rightarrow \boxed{C_i = -\frac{t_{i-1} + t_i}{2}} \quad \langle 4 \rangle$$

promedio con signo cambiado

EJEMPLO 1

Determine las tensiones en la siguiente cercha V.

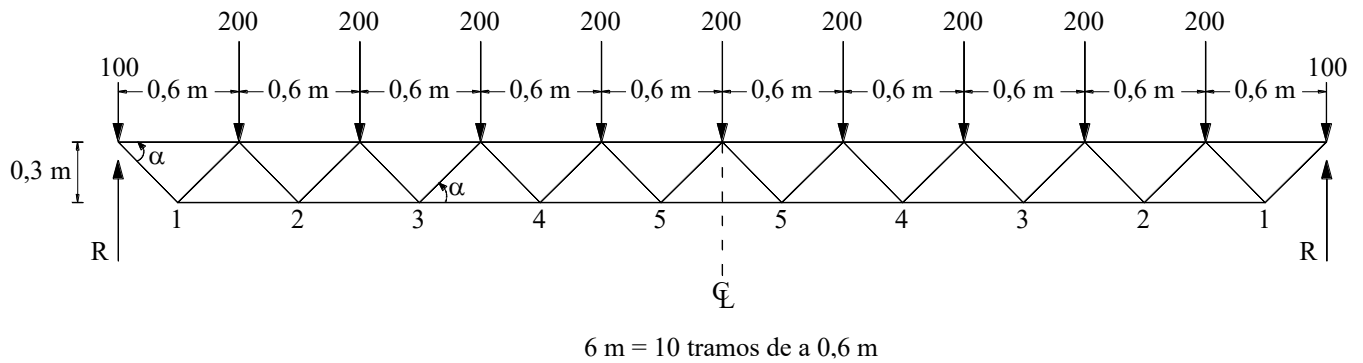


Figura 4

Datos:

$$F = 200 \text{ Kg}$$

$$n = 10$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$h = 0,3 \text{ m}$$

Solución

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{0,3 \text{ m}}{0,3 \text{ m}} \right) = 45^\circ \Rightarrow \begin{matrix} \text{Sen} \alpha = 0,707 \\ \text{Cot} \alpha = 1,0 \end{matrix}$$

- *Celosía:* $X_i = \frac{F}{2\text{Sen}\alpha} [n+1-2i] = \frac{200}{2(0,707)} [10+1-2i]$

$$\rightarrow \langle 1 \rangle \boxed{X_i = 1551 - 282i} \quad \langle 2 \rangle \boxed{Y_i = -X_i} \quad 1 \leq i \leq 5 \text{ (entero)}$$

- *Cinta interior:* $t_i = t_{i-1} + F \cot \alpha [n+1-2i] \quad [t_0 = 0] ; t_i = t_{i-1} + 200(1)[11-2i]$

$$\langle 3 \rangle \boxed{t_i = t_{i-1} + 2200 - 400i} \quad \langle t_0 = 0 \rangle \quad \langle 1 \leq i \leq 5 \rangle \text{ (entero)}$$

- *Cinta superior:* aplicar: $\boxed{C_i = -\frac{t_{i-1} + t_i}{2} = \text{-promedio}} \langle 4 \rangle$

Tabulando las ecuaciones $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle$ para $1 \leq i \leq 5$

Se obtiene el siguiente cuadro:

i	1	2	3	4	5
Xi	1269	987	705	423	141
Yi	-1269	-987	-705	-423	-141
ti	1800	3200	4200	4800	5000
Ci	-900	-2500	-3700	-4500	-4900

Cuadro 1

Ahora se utiliza la simetría y se colocan las fuerzas encima del esquema de la cercha.

(+) = tracción

(-) = compresión

Ahora se hallará una fórmula para t_i en función de i , es decir: $t_i=f(i)$ cuando F y α están definidas. Si en la figura 2 se toman momentos en o, se obtiene:

$$\sum \widehat{M}_o = \frac{F}{2} \langle n-1 \rangle ia - t_i h - F[a + 2a + 3a + \dots + \langle i-1 \rangle a] = 0$$

$$\frac{F}{2} \langle n-1 \rangle ia - t_i h = Fa \langle 1 + 2 + 3 + \dots + \langle i-1 \rangle \rangle$$

$$\frac{F}{2} \langle n-1 \rangle ia - t_i h = Fa \left[\frac{1 + \langle i-1 \rangle}{2} \right] [i-1] \text{ (Suma prog. aritmética)}$$

$$\frac{F}{2} \langle n-1 \rangle ia - t_i h = \frac{Fa \langle i-1 \rangle i}{2} \rightarrow t_i = \frac{1}{h} \left[\frac{Fia}{2} \langle n-1 \rangle - \frac{Fia}{2} \langle i-1 \rangle \right]$$

$$t_i = \frac{Fia}{2h} [(n-1) - (i-1)] = \frac{Fia}{2h} [n-1-i+1]$$

$$t_i = \frac{Fia}{2h} \langle n-i \rangle \langle 5 \rangle$$

Si en esta fórmula hacemos $F= 200 \text{ kg}$; $n= 10$; $a= 0,6 \text{ m}$; $h=0,3 \text{ m}$

Ver ejemplo 1. Al reemplazar en $\langle 5 \rangle$, se obtiene:

$$t_i = \frac{200(0,6)i}{2(0,3)} [10 - i] \Rightarrow \boxed{t_i = 200i[10 - i]}$$

Ecuación que al tabularla para $1 \leq i \in Z \leq 5$, se obtiene la fila de las tracciones del cordón inferior (ver tercera fila del cuadro 1).

Se finalizará este ejemplo dibujando el diagrama de respuesta de la cercha

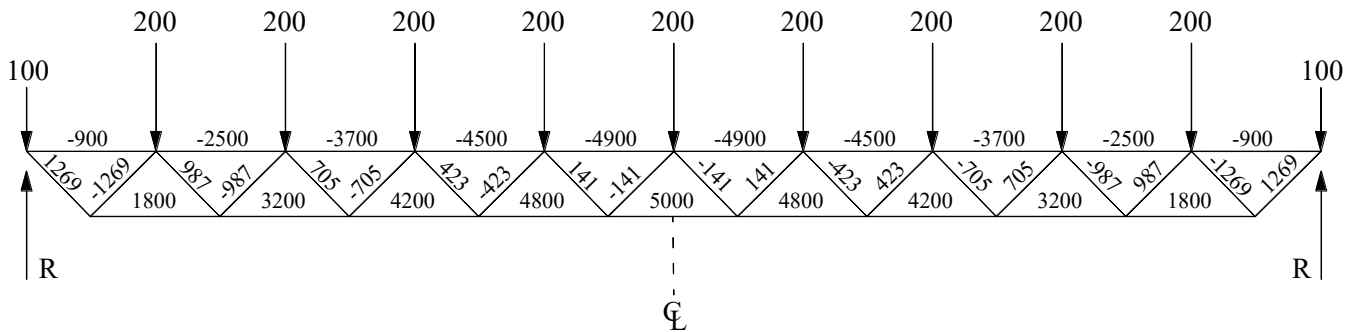


Figura 5

2. CERCHA EN N

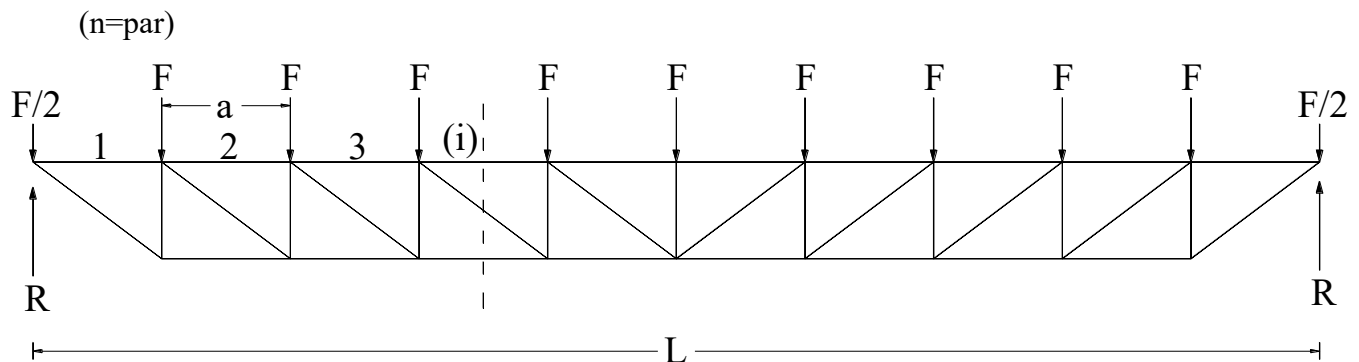


Figura 1

NOMENCLATURA

a = Longitud de cada módulo

n = número de módulos

R = valor de cada reacción

F = carga concentrada en nudos interiores superiores

$F/2$ = Carga concentrada en los nudos extremos

i = variable discreta que indica el número de orden $\leq \frac{n}{2}$ de cada uno de los módulos

C_i = compresión en el i -ésimo módulo de la cuerda superior

t_i = tracción en el i -ésimo módulo de la cuerda inferior B

α = inclinación de la celosía

D_i = fuerza en la i -ésima diagonal que se demostrará que es siempre de tracción

V_i = fuerza en la i -ésima vertical

Reacción en los apoyos (R)

$$R = \frac{(n-1)F + 2(F/2)}{2} = \frac{nF}{2}$$

$$\text{Fuerza neta en el apoyo izquierdo} = \frac{nF}{2} - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}(n-1)$$

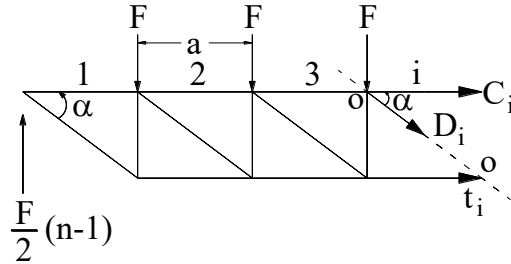


Figura 2

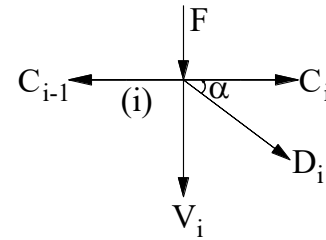


Figura 3

DIAGONALES

En la figura 1 se tiene:

$$\Sigma Fy = \frac{F}{2}(n-1) - \underbrace{(F + F + \dots + F)}_{(i-1) \text{ Veces}} - D_i \text{Sen} \alpha = 0$$

$\frac{F}{2}(n-1) - F(i-1) - D_i \text{Sen} \alpha = 0$; simplificando y despejando \$D_i\$, se obtiene:

$$D_i = \frac{F}{2 \text{Sen} \alpha} (n+1-2i) \quad \langle 1 \rangle$$

Fórmula que sirve para todas las diagonales de la cercha; como \$n\$ debe ser par, se tabula \$i\$ entre 1 y \$n/2\$. Calculándose de esta forma las diagonales de la primera mitad de cercha, las diagonales de la segunda mitad se determinarán en seguida utilizando la simetría de la estructura.

Dado que \$i \leq n/2\$ se cumple \$n+1-2i > 0\$ lo cual implica que \$D_i > 0\$, esto significa que esta fuerza será siempre de tracción.

Además, se observa que \$D_i\$ es una función lineal decreciente de \$i\$, lo cual quiere decir que la máxima tracción se presenta cuando \$i=1\$ en la primera diagonal y su valor será:

$$D_1 = \frac{F}{2\text{Sen}\alpha}(n+1-2(1)) = \frac{F}{2\text{Sen}\alpha}(n-1), \text{ es decir: } \boxed{D_{\text{máx}} = D_1 = \frac{F}{2\text{Sen}\alpha}(n-1)} \langle 2 \rangle$$

También de la ecuación 1 se puede deducir la relación existente entre las tracciones de dos diagonales consecutivas de la siguiente forma:

$$D_{i+1} - D_i = \frac{F}{2\text{Sen}\alpha}(n+1-2(i+1)) - \frac{F}{2\text{Sen}\alpha}(n+1-2i)$$

Después de simplificar, queda: $\boxed{D_{i+1} = D_i - \frac{F}{\text{Sen}\alpha}}$ $\langle 3 \rangle$

Esto demuestra que la tracción en las diagonales consecutivas forman una progresión aritmética de razón $\frac{-F}{\text{Sen}\alpha}$, lo que quiere decir que hallada la tracción D_1 de la primera diagonal se obtienen las siguientes simplemente restando la cantidad $\frac{F}{\text{Sen}\alpha}$ cuando se pasa de una diagonal a la siguiente.

VERTICALES

Ahora bien, en la figura 2 se tiene:

$$\downarrow \Sigma Fy = V_i + D_i \text{Sen}\alpha + F = 0 \Rightarrow V_i = -D_i \text{Sen}\alpha - F$$

Reemplazando el valor de D_i dado por la ecuación (1), quedará:

$$V_i = \frac{-F}{2\text{Sen}\alpha}(n+1-2i)\text{Sen}\alpha - F$$

Después de simplificar, se llega a: $\boxed{V_i = \frac{-F}{2}(n+3-2i)}$ $\langle 4 \rangle$

Se ve que V_i es una función lineal creciente de i , además $n + 3 - 2i > 0$ para $2 \leq i \leq n/2$, lo cual significa que V_i es siempre negativa, es decir, una compresión en todas las verticales de la cercha.

Nótese que la primera vertical ocurre en $i=2$. En este caso también se puede deducir una relación entre las compresiones de dos verticales consecutivas de la siguiente manera.

Utilizando la ecuación (4) se obtiene: $V_{i+1} - V_i = -\frac{F}{2}[n + 3 - 2(i+1)] + \frac{F}{2}[n + 3 - 2i]$

Después de simplificar se obtiene: $V_{i+1} - V_i = F$ es decir $V_{i+1} = V_i + F$ (5), lo que demuestra que estas compresiones forman una progresión aritmética de razón F , cuando i satisface $2 \leq i \leq n/2$ (verticales de la mitad izquierda de cercha) en la vertical central simplemente se observa que su compresión es $-F$ (ver nudo central superior). En la mitad derecha de la cercha, las verticales se hallan por simetría.

Como V_i es lineal creciente y siempre negativa, la vertical más cargada será siempre la primera vertical (ecuación (4)). Para $i=2$.

CUERDA SUPERIOR

Si en la figura 1 se toman momentos en o, se tiene:

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_o = Fa + F(2a) + \dots + F(i-1)a - \frac{F}{2}(n-1)ia - C_i h - 0$$

$$\Rightarrow C_i = \frac{1}{h} \left[Fa(1 + 2 + \dots + (i-1)) - \frac{Fia}{2}(n-1) \right]$$

$$C_i = \frac{1}{h} \left[Fa \frac{i}{2}(i-1) - \frac{Fia}{2}(n-1) \right]$$

Después de simplificar se llega a:

$$C_i = \frac{Fai}{2h}(i-n) \quad \langle 6 \rangle$$

Válida para $1 \leq i \leq n/2$

Como $i < n$ entonces $i-n < 0$ y como $\frac{Fai}{2h} > 0$

Se deduce que $C_i < 0$ lo que significa que C_i será siempre una compresión.

También se puede expresar C_i de la siguiente forma: $C_i = \frac{Fa}{2h}i^2 - \frac{Fan}{2h}i$, donde i es una variable discreta que verifica $1 \leq i \leq n/2$; se observa entonces que C_i es una función cuadrática de i con dominio discreto con la concavidad hacia arriba con valores siempre negativos. Todo esto significa que la compresión crece (es decir, se hace más negativa) de izquierda a derecha. Para la compresión máxima se tiene:

$$\frac{dC_i}{di} = \frac{Fa}{h}i - \frac{Fan}{2h} = 0$$

$\Rightarrow i = \frac{n}{2}$ Es decir que la máxima compresión se obtiene en los módulos centrales; para

obtener su valor, se reemplaza este valor de i en la ecuación $\langle 6 \rangle$, obteniéndose:

$$C_{m\acute{a}x} = \frac{-Fan^2}{8h} \quad \langle 7 \rangle$$

Nota: la derivada $\frac{dC_i}{di}$ se hizo como si i fuera una variable continua.

La compresión mínima se produce en el primer módulo ($i=1$)

Aquí también se puede deducir la relación existente entre las compresiones de dos módulos consecutivos de la cuerda superior. Utilizando la ecuación $\langle 6 \rangle$, se obtiene:

$$C_{i+1} - C_i = \frac{Fa(i+1)}{2h}(i+1-n) - \frac{Fai}{2h}(i-n)$$

Simplificando y despejando C_{i+1} , se obtiene: $C_{i+1} = C_i + \frac{Fa}{2h}(2i+1-n)$ (8)

CUERDA INFERIOR

Si en la figura 1 se toman momentos en o, se obtiene:

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_o = Fa + F(2a) + \dots + (i-2)aF + t_i h - \frac{F}{2}(n-1)(i-1)a = 0$$

$$Fa[1+2+\dots+(i-2)] + t_i h = \frac{Fa}{2}(n-1)(i-1)$$

$$Fa \frac{(i-1)(i-2)}{2} + t_i h = \frac{Fa}{2}(n-1)(i-1)$$

$$t_i = \frac{1}{h} \left[\frac{Fa}{2}(n-1)(i-1) - \frac{Fa}{2}(i-1)(i-2) \right]$$

Después de simplificar se llega a: $t_i = \frac{Fa}{2h}(n+1-i)(i-1)$ (9)

Si en la ecuación (6) de las compresiones en la cuerda superior se cambia i por $i-1$, se

obtiene: $C_{i-1} = \frac{Fa}{2h}(i-1)(i-1-n) = -\frac{Fa}{2h}(n+1-i)(i-1)$. Este resultado coincide con la

ecuación (9), pero con signo negativo, es decir, $C_{i-1} = -t_i$; por lo tanto: $t_i = -C_{i-1}$ (10)

Esta ecuación significa que la fuerza en el módulo i de la cuerda inferior es el negativo de la compresión del módulo anterior $i-1$; y como el negativo de esta compresión es siempre positiva, se deduce que la fuerza t_i será siempre de tracción para toda la cuerda inferior.

Observando la ecuación (10) se puede demostrar que las tracciones máximas se encuentran en los módulos centrales y las mínimas en los módulos extremos.

A continuación se resolverá un ejemplo para aplicar las ecuaciones aquí descritas.

EJEMPLO

En la cercha de la figura 4, determine la fuerza en cada barra.

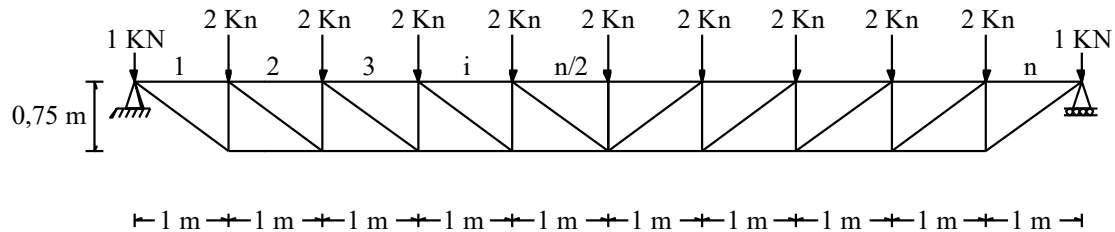


Figura 4

Solución

Aquí $n = 10$ (par) $F = 2 \text{ KN} = 2000 \text{ N}$

$$\alpha = \text{tg}^{-1}(0,75/1) \approx 36,87^\circ \Rightarrow \text{Sen} \alpha = 0,6$$

- *Diagonales:* se aplicará la ecuación $\langle 2 \rangle$ para D_1 .

$$D_1 = \frac{F}{2 \text{Sen} \alpha} (n-1) = \frac{2000}{2(0,6)} (10-1) \Rightarrow D_1 = 15000 \text{ N. De acuerdo con la ecuación}$$

$$\langle 3 \rangle, \text{ se obtendrá: } D_{i+1} = D_i - \frac{2000}{0,6} = D_i - 3333,33$$

Es decir, $D_{i+1} = D_i - 3333,33$ (progresión aritmética de razón $r = -3333,33$ y como D_1 ya se conoce, con esta ecuación se obtendrán todas las diagonales.

- *Verticales:* la primera vertical es V_2 que de acuerdo con la ecuación $\langle 4 \rangle$ será:

$$V_2 = \frac{-2000}{2} (10+3-2(2)) = -9000 \text{ N. Si se aplica ahora la ecuación } \langle 5 \rangle$$

$V_{i+1} = V_i + F$ quedará $V_{i+1} = V_i + 2000$ (progresión aritmética de razón $= 2000$). Y como V_2 ya se conoce, con esta ecuación se obtendrán todas las verticales.

- *Cuerda superior:* teniendo en cuenta que $a=1$ m; $h=0,75$ m ; $n=10$ y $F=2000$ N se aplicará la ecuación (6)

$$C_i = \frac{Fai}{2h}(i-n) = \frac{2000(1)i}{2(0,75)}(i-10)$$

$$C_i = 1333,33i(i-10) \text{ donde } 1 \leq i \leq 5$$

- *Cuerda inferior:* se aplicará la ecuación (10) $t_i = -C_{i-1}$

Las ecuaciones obtenidas se tabularán para $1 \leq i \leq 5$ (teniendo en cuenta la simetría), con excepción de las verticales que comienzan en $i=2$ y la vertical central que evidentemente tiene un valor de -2000 N.

i	1	2	3	4	5
Di	15000	11666,67	8333,34	5000	1666,67
Vi	No existe	-9000	-7000	-5000	-3000
Ci	-12000	-21333,28	-28000	-32000	-33333,3
ti	No existe	12000	21333,28	28000	32000

A continuación se hará un diagrama de respuesta en la estructura considerada colocando los resultados en KN.

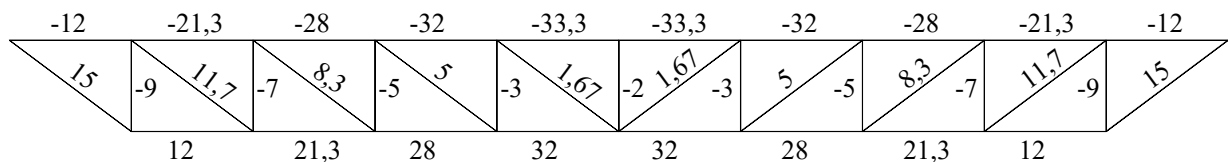


Figura 5

Nota:

(+) tracción

(-) compresión

3. CERCHA HOWE

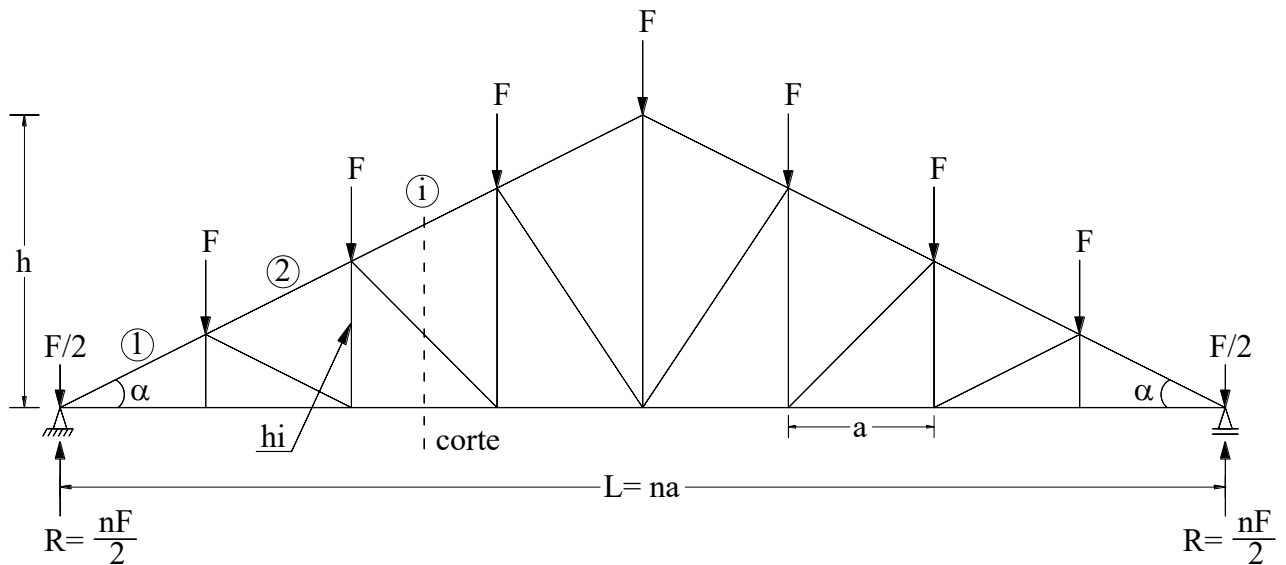


Figura 1

NOMENCLATURA

$\{F\}$ = sistema de fuerzas transmitidas por las correas

L = luz entre apoyos

h = altura

α = inclinación de la cuerda superior

a = longitud horizontal de cada módulo

n = número de módulos (siempre par)

\textcircled{i} = número de orden de cada módulo ($1 \leq i \leq n/2$)

Al efectuar un corte en el “i-ésimo” módulo, quedará:

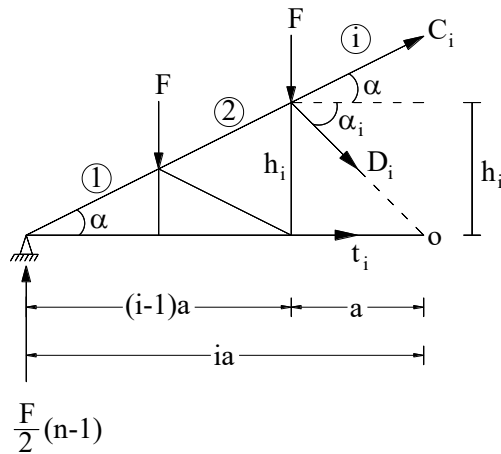


Figura 2

C_i = fuerza en el i-ésimo módulo de la cuerda superior (se demostrará que es una compresión).

t_i = Fuerza en el i-ésimo módulo de la cuerda inferior, la cual será siempre de tracción.

D_i = Fuerza en la i-ésima diagonal que, como se verá luego, siempre saldrá de compresión.

De la figura 1 se observa que la fuerza vertical total en el apoyo izquierdo es

$$R - \frac{F}{2} = \frac{nF}{2} - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}(n-1)$$

Este valor aparece en el extremo izquierdo la figura 2.

RELACIONES GEOMÉTRICAS

Si en la figura 2 se designa por h_i la altura de la i-ésima barra vertical, ésta se podrá expresar como sigue por triángulos semejantes:

$$\frac{(i-1)a}{h_i} = \frac{\frac{n}{2}a}{h} \Rightarrow \boxed{h_i = \frac{2h(i-1)}{n}} \quad \langle 1 \rangle$$

Otras relaciones útiles serán:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} = \cos\alpha} \quad \langle 2 \rangle$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{2h}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} = \sin\alpha} \quad \langle 3 \rangle$$

$$\cos\alpha_i = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h_i^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{4h^2}{n^2}(i-1)^2}} = \frac{an}{\sqrt{(an)^2 + 4h^2(i-1)^2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha_i = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2(i-1)^2}}} \quad \langle 4 \rangle$$

TOMA DE MOMENTOS ALREDEDOR DE “O” (FIGURA 2)

$$\Sigma \widehat{M}_0^+ = \frac{F}{2}(n-1)ia + C_i \cos\alpha(h_i) + C_i \sin\alpha(a) - Fa - F(2a) - \dots - F(i-1)a = 0$$

De donde:

$$C_i [a \sin\alpha + h_i \cos\alpha] = Fa + 2Fa + \dots + (i-1)Fa - \frac{F}{2}(n-1)ia$$

$$C_i [a \sin\alpha + h_i \cos\alpha] = Fa[1 + 2 + \dots + (i-1)] - \frac{F}{2}(n-1)ia$$

La suma de la progresión aritmética que aparece será:

$$1 + 2 + \dots + (i-1) = \left[\frac{1 + (i-1)}{2} \right] (i-1) = \frac{i}{2}(i-1)$$

Reemplazando este valor, quedará:

$$C_i [a \operatorname{Sen} \alpha + h_i \operatorname{Cos} \alpha] = Fa \left[\frac{i}{2} (i-1) \right] - \frac{F}{2} (n-1)ia$$

$$C_i [a \operatorname{Sen} \alpha + h_i \operatorname{Cos} \alpha] = \frac{Fai}{2} [(i-1) - (n-1)]$$

$$C_i [a \operatorname{Sen} \alpha + h_i \operatorname{Cos} \alpha] = \frac{Fai}{2} (i-n)$$

$$C_i = \frac{Fai(i-n)}{2[a \operatorname{Sen} \alpha + h_i \operatorname{Cos} \alpha]} \text{ Al sustituir: } h_i, \operatorname{Cos} \alpha, \operatorname{Sen} \alpha, \text{ dados por las ecuaciones}$$

\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle y \langle 3 \rangle, quedará:

$$C_i = \frac{Fai(i-n)}{2 \left[a \frac{2h}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} + \frac{2h(i-1)}{n} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right]}$$

$$C_i = \frac{Fai(i-n)}{2 \left[\frac{2ah}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} + \frac{2ah(i-1)}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right]} = \frac{Fai(i-n)}{2 \left[\frac{2ah[1 + (i-1)]}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right]}$$

$$C_i = \frac{Fai(i-n)}{2 \left[\frac{2ahi}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right]} = \frac{F(i-n)\sqrt{L^2 + 4h^2}}{4h}$$

$$C_i = \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} \cdot [i-n]. \text{ Cuando la carga y la geometría de la cercha están definidas, el}$$

$$\text{término } \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} \text{ será constante, o sea que: } \boxed{K = \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4}} \quad \langle 5 \rangle$$

Con lo cual el valor de C_i será $C_i = K(i-n)$, es decir: $\boxed{C_i = Ki - Kn}$ \langle 6 \rangle; como $i < n$, entonces $Ki < Kn \Rightarrow Ki - Kn < 0$. Esto significa que $C_i < 0$ es decir C_i es negativa, lo que equivale a decir que C_i siempre será una fuerza de compresión.

La diferencia de compresiones entre dos módulos consecutivos de la cuerda superior será:

$$C_{i+1} - C_i = [K(i+1) - Kn] - [Ki - Kn]$$

$$C_{i+1} - C_i = Ki + K - Kn - Ki + Kn = K$$

O sea que $C_{i+1} = C_i + K$ <7>. Esto significa que las compresiones en los módulos de la cuerda superior forman una progresión aritmética de razón “K”.

La compresión en el primer módulo de la cinta superior será, según <6>, $C_1 = K(1) - Kn$ o

$$\text{sea que } C_1 = K(1 - n) \text{ <8>}$$

Determinando “K”, según ecuación <5>, y aplicando en seguida las ecuaciones <8>y<7>, respectivamente, se determina toda la cuerda superior.

CÁLCULO DE DIAGONALES Y VERTICALES

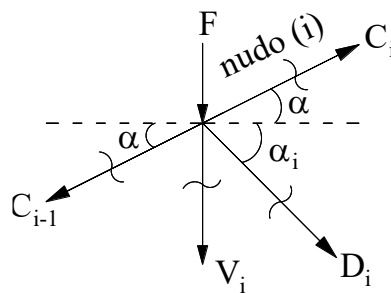


Figura 3

La figura 3 representa el i-ésimo nudo de la cuerda superior localizado en el extremo izquierdo del i-ésimo módulo de la cuerda.

DEL EQUILIBRIO HORIZONTAL SE OBTIENE

$$\sum_{\rightarrow}^+ f_x = C_i \cos \alpha - C_{i-1} \cos \alpha + D_i \cos \alpha_i = 0$$

$$D_i = \frac{(C_{i-1} - C_i) \cos \alpha}{\cos \alpha_i} ; \text{ según } \langle 7 \rangle C_{i-1} - C_i = -K$$

Luego: $D_i = \frac{-K \cos \alpha}{\cos \alpha_i}$ reemplazando los valores de K , $\cos \alpha$ y $\cos \alpha_i$ dados por las ecuaciones $\langle 5 \rangle$; $\langle 2 \rangle$ y $\langle 4 \rangle$, respectivamente, se obtiene:

$$D_i = \frac{-\frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}}}{\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2(i-1)^2}}}$$

Después de simplificada da:
$$D_i = -\frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2} \quad \langle 9 \rangle \quad (i \geq 2)$$

Como siempre se toma la raíz positiva, D_i siempre resultará en una compresión (negativa).
Del equilibrio vertical de la figura 3 se obtiene:

$$\uparrow \sum f_y = C_i \sin \alpha - C_{i-1} \sin \alpha - F - D_i \sin \alpha_i - V_i = 0$$

$$\text{En donde } \sin \alpha_i = \frac{h_i}{\sqrt{h_i^2 + a^2}} = \frac{\frac{2h}{n}(i-1)}{\sqrt{\frac{4h^2}{n^2}(i-1)^2 + a^2}}$$

$$\sin \alpha_i = \frac{2(i-1)}{\sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2}}$$

Ahora se despeja V_i de la ecuación de equilibrio vertical. Así:

$$V_i = (C_i - C_{i-1})\text{Sen}\alpha - F - D_i\text{Sen}\alpha_i$$

Reemplazando $(C_i - C_{i-1})$; $\text{Sen}\alpha$; D_i ; $\text{Sen}\alpha_i$ por los valores ya obtenidos, quedará:

$$V_i = K \left[\frac{2h}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right] - F + \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2} \cdot \frac{2(i-1)}{\sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2}}$$

Y como: $K = \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4}$, quedará

$$V_i = \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} \left[\frac{2h}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right] - F + \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2} \cdot \frac{2(i-1)}{\sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2}}$$

La cual después de simplificar quedará:

$$\boxed{V_i = \frac{F}{2}i - F} \quad \langle 10 \rangle$$

Esta fórmula es válida para $2 \leq i < n/2$, pues en $(i=1)$ no existe barra vertical y en $i = n/2$, o sea en la cumbre, la forma del nudo no se ajusta a la figura 3.

En la ecuación $\langle 10 \rangle$ se observa que al ser $i \geq 2$, siempre se tendrá $V_i \geq 0$ (tracción o fuerza nula).

De la ecuación $\langle 10 \rangle$ se obtiene: $V_2 = \frac{F}{2}(2) - F = F - F = 0$; es decir, siempre será $\boxed{V_2 = 0}$

para este tipo de estructura con la hipótesis de carga impuesta.

$$\text{Además } V_{i+1} - V_i = \left[\frac{F}{2}(i+1) - F \right] - \left[\frac{F}{2}i - F \right]$$

$$V_{i+1} - V_i = \frac{Fi}{2} + \frac{F}{2} - F - \frac{Fi}{2} + F = F/2$$

Es decir $V_{i+1} - V_i = F/2$, o bien; $V_{i+1} = V_i + F/2$ $\langle 11 \rangle$.

De la ecuación $\langle 11 \rangle$ se observa que la tensión en las barras verticales forma una progresión aritmética de razón $(F/2)$.

De acuerdo con esto, será $V_3 = V_2 + F/2$; $V_4 = V_3 + F/2$ y así sucesivamente todo esto cuando el entero positivo (i) verifique $2 \leq i \leq n/2$

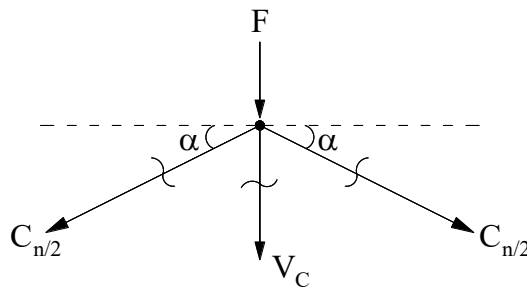


Figura 4

PARA LA VERTICAL CENTRAL

Se ejecuta el siguiente análisis:

$$\downarrow + \sum f_y = 2C_{n/2} \text{Sen} \alpha + F + V_C = 0$$

$$V_C = -F - 2C_{n/2} \text{Sen} \alpha$$

Se sabe que $C_i = Ki - Kn$

Según la ecuación $\langle 6 \rangle$ Luego $C_{n/2} = K(n/2) - Kn = -Kn/2$. Sustituyendo este valor, se

$$\text{obtiene: } V_C = -F - 2 \left(\frac{-Kn}{2} \right) \text{Sen} \alpha$$

$$V_C = -F + Kn \text{Sen} \alpha$$

Si ahora se sustituye K y $Sen\alpha$, dados por las ecuaciones $\langle 5 \rangle$ y $\langle 3 \rangle$, respectivamente, se obtendrá:

$$V_C = -F + \left[\frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} \right] n \cdot \frac{2h}{\sqrt{L^2 + 4h^2}}$$

$$V_C = -F + \frac{Fn}{2} \rightarrow \boxed{V_C = F \left[\frac{n}{2} - 1 \right]} \quad \langle 12 \rangle$$

Con esta fórmula se calculará la fuerza en la barra vertical central.

CÁLCULO DE LA CUERDA INFERIOR

Si en la figura 2 se escribe la ecuación de equilibrio horizontal, se obtiene:

$$\sum f_x = t_i + D_i \cos \alpha_i + C_i \cos \alpha = 0; \text{ es decir } t_i = -D_i \cos \alpha_i - C_i \cos \alpha$$

$$\text{O sea: } t_i = \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2(i-1)^2}} - \frac{K(i-n) \cdot L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}}$$

$$t_i = \frac{FL}{4h} - \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} \cdot (i-n) \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}}$$

$$t_i = \frac{FL}{4h} - \frac{FL}{4h} (i-n) = \frac{FL}{4h} [1 - (i-n)] = \frac{FL}{4h} [n+1-i]$$

$$\boxed{t_i = \left(\frac{F}{4}\right) \left(\frac{L}{h}\right) [n+1-i]} \quad \langle 13 \rangle.$$

De acuerdo con $\langle 13 \rangle$, se ve que $t_i > 0$; es decir, t_i será siempre una fuerza de tracción.

Además ($i \geq 2$) y se observa que:

$$t_2 = \left(\frac{F}{4}\right) \left(\frac{L}{h}\right) (n+1-2) \text{ es decir } \boxed{t_2 = \frac{FL(n-1)}{4h}} \quad \langle 14 \rangle$$

$$\text{Además } t_{i+1} - t_i = \left[\frac{FL}{4h} (n+1 - (i+1)) \right] - \frac{FL}{4h} (n+1-i)$$

$$t_{i+1} - t_i = \frac{FL}{4h}(n+1-i-1) - \frac{FLn}{4h} - \frac{FL}{4h} + \frac{FLi}{4h}$$

$$t_{i+1} - t_i = \frac{FLn}{4h} - \frac{FLi}{4h} - \frac{FLn}{4h} - \frac{FL}{4h} + \frac{FLi}{4h}$$

$$t_{i+1} - t_i = -\frac{FL}{4h} \quad \text{o sea} \quad \boxed{t_{i+1} = t_i - \frac{FL}{4h}} \quad (15)$$

O sea que las tracciones en la cuerda inferior disminuyen en una cantidad $\frac{FL}{4h}$ cuando se pasa de un módulo al siguiente.

Siendo $t_2 = \frac{FL(n-1)}{4h}$ la máxima que se presenta en el primer módulo, también al observar

la cercha original se ve que $\boxed{t_1 = t_2}$

EJEMPLO

A modo de ejemplo se resolverá la siguiente cercha Howe (n= 8 módulos)

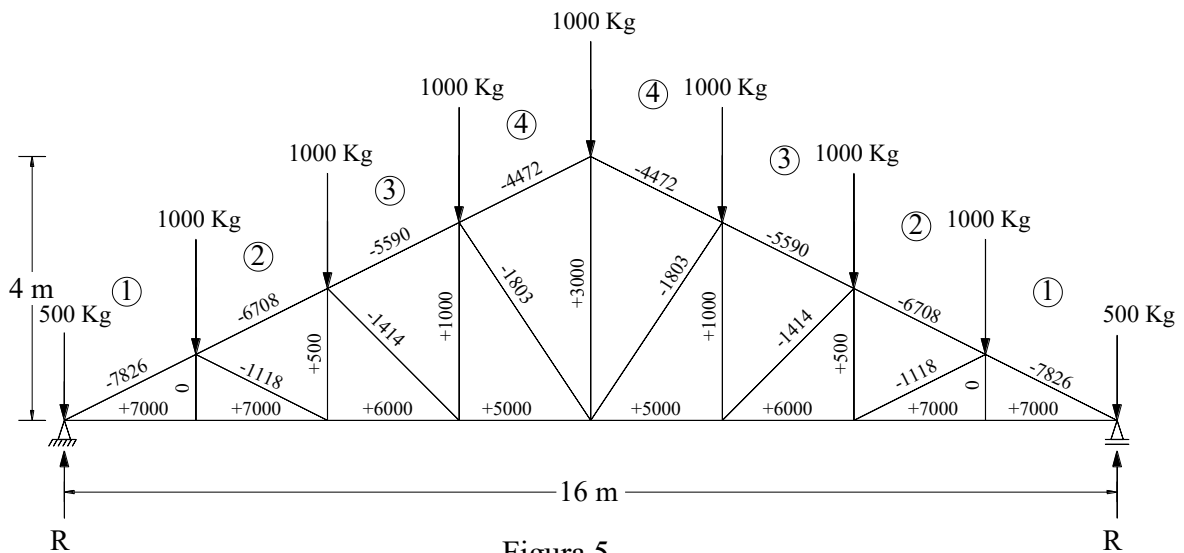


Figura 5

Solución

Para este caso, se tiene $F= 1000 \text{ Kg}$; $L= 16 \text{ m}$; $h= 4 \text{ m}$; $(n=8)$

- *Evaluación de constantes:* $K = \frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} = \frac{1000}{4} \sqrt{\left(\frac{16}{4}\right)^2 + 4} \quad \boxed{K = 1118 \text{ Kg}}$

$$\frac{FL}{4h} = \frac{1000(16)}{4(4)} \Rightarrow \boxed{\frac{FL}{4h} = 1000 \text{ Kg}}$$

- *Cuerda superior:* con la ecuación (8) se obtiene:

$$C_1 = K(1-n) = 1118(1-8) = -7826 \text{ Kg.}$$

Ahora se aplica la ecuación (7)

$$C_{i+1} = C_i + K; \text{ es decir: } \boxed{C_{i+1} = C_i + 1118} \quad (1 \leq i \leq 4)$$

- *Cuerda inferior:* se aplican las ecuaciones (14) y (15)

$$t_2 = \frac{FL}{4h}(n-1) = 1000[8-1] = 7000 \text{ Kg} = t_1 = t_2$$

$$t_{i+1} = t_i - \frac{FL}{4h} \Rightarrow \boxed{t_{i+1} = t_i - 1000} \quad (2 \leq i \leq 4)$$

- *Verticales:* $V_2=0$ y según la ecuación (11) $V_{i+1} = V_i + F/2$; es decir:

$$\boxed{V_{i+1} = V_i + 500} \quad (2 \leq i \leq 4) \text{ y según la ecuación (12) se tiene}$$

$$V_C = F\left(\frac{n}{2} - 1\right) = 1000\left[\frac{8}{2} - 1\right] \Rightarrow V_C = 3000 \text{ Kg}$$

- *Diagonales:* se aplica la ecuación (9)

$$D_i = -\frac{F}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4(i-1)^2} = -\frac{1000}{4} \sqrt{\left(\frac{16}{4}\right)^2 + 4(i-1)^2} \Rightarrow \boxed{D_i = -500\sqrt{4 + (i-1)^2}}$$

para $2 \leq i \leq 4$

A continuación se hace un cuadro para tabular las ecuaciones obtenidas en b,c,d y e.

i	1	2	3	4	5
Ci	-7826	-6708	-5590	-4472	no existe
ti	+7000	+7000	+6000	+5000	no existe
Vi	no existe	0	+500	+1000	+3000
Di	no existe	-1118	-1414	-1803	no existe

Aplicando la simetría de la estructura, se obtienen los resultados de la mitad derecha de la cercha. Ver resultados en el esquema de la cercha.

BIBLIOGRAFÍA

FERDINAND P., Beer; RUSSELL, Jhonston y ELLIOT R., Eisenberg. *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*. 7^a ed. Editorial McGraw-Hill. .

COURANT / ROBBINS. *¿Que es la matemática?* 5^a ed. Madrid: Editorial Aguilar. Colección Ciencia y Técnica.