
Aplicación del Modelo Beta Bayesiano Dinámico para la tasa de desempleo en Colombia

Application the Dynamic Bayessian Beta Models to Colombia unemployment rates

Luis Fernando Bautista Manrique^a
luisbautista@usantotomas.edu.co

Dagoberto Bermúdez Rubio^b
dagobertobermudez@usantotomas.edu.co

Resumen

Los modelos de regresión Beta han tomado gran importancia en la explicación de variables continuas que se encuentran restringidas al intervalo $(0,1)$, por ejemplo, las tasas y proporciones. El ajuste y la predicción de series temporales como la tasa de desempleo, es una herramienta importante para decisiones económicas de un país, dado que presenta una tendencia temporal o cíclica. Se propone en este trabajo, la aplicación del modelo Beta Bayesiano Dinámico de la tasa de desempleo en Colombia entre enero 2001 y junio 2017, para abordar al ajuste de nuestro modelo, se realizó el ajuste de modelos Beta clásicos y modelos Beta Bayesianos, comparando la calidad del ajuste que proporciona cada modelo planteado. Con la aplicación del modelo Beta Bayesiano Dinámico se identifican algunos factores de influencia en la tasa del desempleo.

Palabras clave: Tasa de desempleo, Modelo Beta Bayesiano Dinámico, serie temporal.

Abstract

The Beta regression models have taken great importance in how these explain the continue variables that are restricted to the Interval $(0,1)$ such as rates and proportions. The fit and prediction of temporal series as unemployment rate is an important tool for economic decisions of a country due to it presents a temporal o cyclical tendency. In this study, we propose the application of Bayesian Beta Dynamic model for unemployment rate in Colombia from January 2001 to June 2017. Fit Beta regression models and Bayesian Beta models was maked also a comparison of quality the fit provided by each suggested model was considered. Finally, we found that with the application of Bayesian Beta Dynamic model some factors of influence on unemployment rate are identified.

Keywords: Unemployment rate, Dynamic Bayesian Beta Models, time series .

^aEstudiante Estadística Universidad Santo Tomas

^bDocente Estadística Universidad Santo Tomas

1. Introducción

Hoy en día las series de tiempo desempeñan un papel fundamental en el entorno económico, dado que estas representan el cambio de una variable con un patrón de comportamiento. De esta manera se puede observar su evolución en el tiempo y se pueden realizar pronósticos que sean de ayuda para diferentes estudios. Teniendo en cuenta lo anterior, existen diferentes métodos estadísticos para realizar el estudio de dichas series.

La tasa de desempleo es un importante indicador macroeconómico ya que puede decir cómo se encuentra la economía en el país, la tasa de desempleo presenta una tendencia temporal o cíclica que a largo plazo se espera que disminuya, desempeña un papel fundamental en el entorno económico del país. En la mitad de la última década del siglo *XX* el desempleo colombiano comenzó a subir hasta alcanzar su cima en el año 2000, momento a partir del cual se tiene un lento descenso del indicador hasta el día de hoy, aun cuando la economía crece a una de las tasas más altas en los últimos años. Lopez - Misas(2006) [12].

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar un modelo Beta Bayesiano Dinámico para estimar la tasa de desempleo, dado que la variable dependiente (y) se mide continuamente y está restringida en el intervalo $0 < y < 1$. El modelo propuesto se basa en el supuesto de que la variable respuesta es distribuida beta Ferrari y Cribari-Neto (2004) [9], ya que es adaptable para el ajuste de un modelo de proporciones. La distribución Beta es muy flexible para modelar tales datos ya que su densidad puede mostrar formas bastante diferentes dependiendo de los valores de los parámetros. Da-Silva, Migon & Correia (2010) [6]

El modelo de regresión lineal no es el apropiado en las situaciones que la variable se encuentra restringida en el intervalo $(0,1)$, una posible solución es la de transformar la variable dependiente de manera que asuma valores en la recta real, y luego modelar la media de la variable respuesta transformada como un predictor lineal basado en un conjunto de variables exógenas sin embargo, se tiene inconveniente siendo uno de ellos el hecho de que los parámetros del modelo no pueden interpretarse.

Existen en la literatura diferentes investigaciones de modelos de regresión Beta como Ferrari y Cribari-Neto (2004) [9] que proponen la estimación por métodos clásicos basados en máxima verosimilitud siguiendo la metodología de los MLG; Cepeda (2001) [3] y Cepeda & Gamerman (2005) [4], desde la perspectiva Bayesiana, propone de igual forma la estimación de parámetros basados en la construcción de un algoritmo que intercala la estimación de los parámetros para la media y la variabilidad para modelos doblemente generalizados; Figueroa-Zuñiga et al.(2013) [10] modelo Beta con inclusión de efectos mixtos; da-Silva, Migon & Correia (2010) [6] propone un modelo Beta Bayesiano Dinámico para modelar y pronosticar series de proporciones.

En el análisis de series temporales los modelos ARIMA de Box & Jenkins (1976) [2] son ampliamente utilizados para el ajuste de la tasa de desempleo. Están contruidos con las propiedades de serie de tiempo, donde se supone que son constantes en el tiempo, por lo general este supuesto no se cumple, debido a que factores o decisiones económicas pueden causar cambios en las propiedades estadísticas de las series temporales. Un inconveniente de estos modelos es la validación previa a su implementación, los modelos Dinámicos Bayesianos no requieren que las series de tiempo sean estacionarias y por lo tanto, tienen un mayor potencial en el pronóstico de series temporales.

El documento que se desarrolla a continuación, la sección 2 inicia con la descripción de la distribución Beta, definida bajo las parametrizaciones en términos de las duplas de media y dispersión (μ, ϕ) , se presenta el modelo de regresión Beta, luego de definido el modelo se muestra una corta descripción de la perspectiva bayesiana con la estimación mediante el algoritmo propuesto por Cepeda & Gamerman (2005) [4], posterior a esto, se presenta en la sección 2.4 se centra en el modelo Beta Bayesiano Dinámico, con la estimación de modelos lineales Dinámicos, modelos lineales Dinámicos Generalizados y el modelo Beta Dinámico. Finalmente, se encuentran resumidos los hallazgos del ejercicio en la sección 5.

2. Marco teórico

2.1. Propiedades de la distribución Beta

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Y que sigue una distribución Beta está dada por:

$$f(y|p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1}(1-y)^{q-1}, \quad 0 < y < 1, \quad (1)$$

donde $p > 0$ y $q > 0$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma, la media y la varianza de Y son respectivamente,

$$E(Y) = \frac{p}{p+q} \quad (2)$$

$$Var(Y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \quad (3)$$

En el caso de igualdad de ambos parámetros la función de densidad es simétrica, cuando los parámetros toman valores distintos la función de densidad deja de ser simétrica. Un intercambio de los valores de los parámetros da lugar a la imagen simétrica de la curva original.

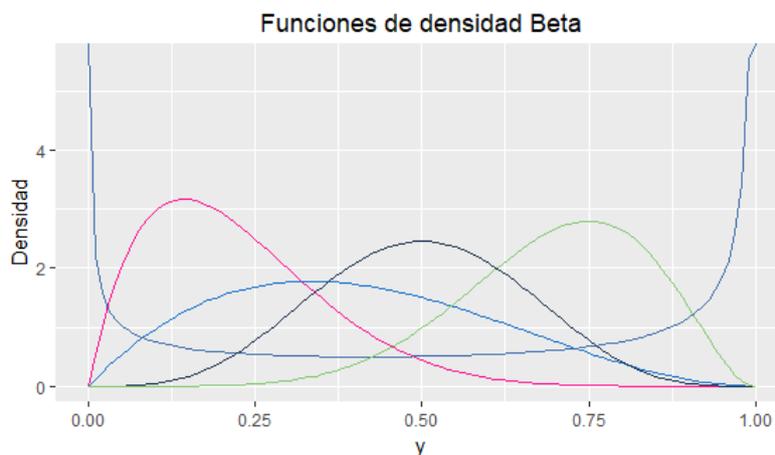


Figura 1: Distribuciones Beta considerando diferentes valores para los parámetros (p,q).

Con el fin de obtener una estructura de regresión para la media de la respuesta junto con el parámetro de precisión, se trabaja con una parametrización diferente de la densidad beta presentada en la ecuación (4).

- En términos de μ y ϕ asociados a los parámetros de la media y la dispersión (Cepeda, (2001) [3]; Ferrari & Cribari-Neto,(2004) [9])

$$\mu = \frac{p}{p+q}, \quad \phi = p+q \quad (4)$$

$$p = \mu\phi, \quad q = (1-\mu)\phi$$

2.2. Modelo de regresión Beta Clásico

La distribución Beta, como es bien sabido, es muy flexible para modelar proporciones ya que su densidad puede tener formas diferentes dependiendo los valores de los dos parámetros que indexan la distribución. Para el análisis de regresión es adecuado modelar la media de la variable respuesta, donde se define el modelo con un parámetro de precisión, se parametriza la función de densidad de la distribución Beta. Ferrari y Cribari-Neto (2004) [9]. De esta forma, la función de densidad asociada queda determinada así:

$$f(y|\mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} y^{\mu\phi-1}(1-y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad 0 < y < 1 \quad (5)$$

Donde podemos deducir que las ecuaciones (2) y (3) se definen

$$E(y) = \frac{p}{(p+q)} = \mu$$

$$Var(y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\phi} = \frac{V(\mu)}{1+\phi}$$

con $\phi = p + q$.

Así $0 < \mu < 1$ y $\phi > 0$, la forma de densidad dada en la ecuación (5) cambia dependiendo los dos parámetros. Particularmente se tendrá simetría cuando $\mu = 1/2$ y asimetría cuando $\mu \neq 1/2$, asimismo para un μ fijo, el parámetro ϕ controla la dispersión del modelo, de tal manera que al aumentar ϕ la varianza en el modelo disminuye, donde podemos decir que ϕ es un parámetro de precisión.

Para poder hacer uso de los MLG, es necesario expresar la beta reparametrizada en términos de la familia exponencial biparamétrica:

$$f(y|\eta_1, \eta_2) = h(y)\exp\{\eta_1 S(Y) + \eta_2 T(y) - \rho(\eta_1, \eta_2)\}$$

Cuando $\tau = 0$ la familia exponencial biparamétrica se reduce a la familia exponencial de un parámetro.

$$f(y_i, \phi, \mu) = \exp\left\{\mu\phi \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) - \ln(y(1-y)) + \phi \ln(1-y) + \ln\Gamma(\phi) - \ln\Gamma(\mu\phi) - \ln\Gamma((1-\mu)\phi)\right\}$$

Dado lo anterior, se identifican los siguientes parámetros:

<i>F. exp. biparamétrica</i>	<i>Parámetro</i>
η_1	$\mu\phi$
η_2	ϕ
$T(y)$	$\log(1-y)$
ρ	$\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma(\phi(1-\mu))}$

Tabla 1: *Parámetros de la beta en términos de la familia exponencial biparamétrica*

Los parámetros de la familia exponencial biparamétrica η_1 y η_2 se relacionan a través de la media $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \mu$.

Para formar el modelo de regresión utilizando la aproximación de MLG, se utilizan dos funciones de enlace: una para el parámetro de localización (μ) y la otra para el parámetro de precisión (ϕ).

Sea y_1, y_2, \dots, y_n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, donde y_i sigue la función de densidad (1) con media μ_i y dispersión desconocida $\phi_i, i = 1, \dots, n$.

Los componentes sistemáticos para la media y variabilidad son; η_{1i} y η_{2i} , respectivamente. Lo cual está relacionado con p variables explicativas $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})'$ que definen el comportamiento de $\eta_{1i} = \sum_{j=1}^k x_{ij}\beta_j$ relacionado con la media μ_i y con k covariables $\mathbf{Z}_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{ik})'$ definidas en función $\eta_{2i} = \sum_{h=1}^k z_{ih}\gamma_h$ para explicar la variabilidad definida según ϕ ; o σ^2 .

Las funciones de enlace $g(\cdot) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $h(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que deben satisfacer ser monótonas crecientes (decrecientes), continuas y dos veces diferenciables. Este trabajo adopta las siguientes funciones:

$$g(\mu_i) = \text{logit}(\mu_i) = X_i' \beta = \eta_{1i} \tag{6}$$

y

$$h(\phi_i) = \log(\phi_i) = Z_i' \gamma = \eta_{2i} \tag{7}$$

En particular, la función logit se puede escribir:

$$x_i' \beta = \log \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right) \iff \mu_i = \frac{e^{x_i' \beta}}{1 + e^{x_i' \beta}}$$

Los parámetros del modelo de regresión Beta son interpretables en términos de la media de la variable de respuesta, donde esta será convenientemente ligada con la estructura de regresión mediante el enlace logit (Ferrari & Cribari-Neto, (2004) [9]). Supongamos que el valor de la i -ésima variable, x_{ij} muestra que por cada c unidades que se incrementa, manteniendo las demás variables con su valor original, y sea μ^* la media de Y bajo los nuevos valores de las variables explicativas y μ la media de Y con valores originales.

$$e^{c\beta_i} = \frac{\mu^*/(1 - \mu^*)}{\mu/(1 - \mu)}$$

De tal manera $e^{c\beta_i}$ surge de forma natural y similar bajo la figura de la razón de *odds* para modelar la media. Otros tipos de enlaces como el probit, log-log ó complemento log-log pueden ser considerados; cabe resaltar que a lo largo del trabajo no serán objeto de estudio. El proceso de estimación define unas ecuaciones de estimación bajo las funciones de *score* asociadas al gradiente de la log-verosimilitud, esto es $U_\beta(\beta, \phi)$ y $U_\phi(\beta, \phi)$ se determina un sistema de ecuaciones igual a cero. Estas ecuaciones no se pueden resolver analíticamente y por tanto requiere de un método de optimización numérico como *Newton – Raphson* o *Fisher Scoring*. Bajo condiciones de regularidad, Ferrari y Cribari-Neto (2004) [9] presentan que las estimaciones por máxima verosimilitud son asintóticamente normales:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = N_p \sim \left(\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}, \mathbf{K}^{-1} \right) \tag{8}$$

donde \mathbf{K} representa la matriz de información de Fisher con componentes fuera de la diagonal asociadas a las derivadas cruzadas de β y ϕ , los cuales son diferentes de cero, haciendo énfasis en las consideraciones ya mencionadas como es la ausencia de ortogonalidad entre los parámetros.

Es importante resaltar que la distribución Beta en la ecuación (1) pertenece a la familia exponencial biparámetroica (si en algún caso uno de los dos parámetros son conocidos nos lleva a la familia exponencial

uniparámetro) y por lo tanto la ecuación (4) no existe ortogonalidad entre los parámetros entonces, se hace necesario un nuevo algoritmo que, de forma análoga a los modelos doblemente generalizados, incorpore unas ecuaciones de estimación que involucre la relación existente entre la media y la variabilidad dada por ϕ . Tejedor, F. (2014) [15]

2.3. Perspectiva Bayesiana

La estimación Bayesiana y el algoritmo MCMC propuesto en Cepeda, E. (2001) [3] y Cepeda, E. & Gamerman, D. (2005) [4] está dada por la extensión de los modelos doblemente generalizados (MDG) está basado un algoritmo que paso a paso permite hacer una estimación conjunta de los parámetros, para implementar una metodología Bayesiana, para estimar los parámetros del modelo de regresión beta, es necesario especificar una distribución a priori para estos. Siendo así, $L(\mathbf{Y}|\Theta)$ denota la función de verosimilitud por los datos y la distribución a prior $p(\Theta)$, donde $\Theta = (\beta, \gamma)$, la distribución a posteriori está dada por $\pi(\Theta) \propto L(\mathbf{Y}|\Theta)p(\Theta)$, suponiendo que la distribución a priori de los parámetros siguen una distribución normal, la distribución posteriori de $\pi(\Theta)$ de la cual se asume que no tiene una forma distribucional conocida. Cepeda, E. (2001) [3].

Se propone tomar de Θ muestras de las distribuciones marginales $\pi(\beta|\gamma)$ y $\pi(\gamma|\beta)$, mediante la inclusión de variables de aproximación lineal o variables de trabajo, se derivan de la aproximación de Taylor de primer orden respecto a las funciones $h(t_1)$ y $g(t_2)$ alrededor de los valores de μ y ϕ , respectivamente, donde t_1 y t_2 son las variables aleatorias adecuadas tales que $E(t_1) = \mu$ donde $t_1 = Y$, si el modelo de esta dado por (6), la variable observada de trabajo está dada por:

$$\tilde{y}_i = x'_i \beta^{(c)} + \frac{y_i - \mu_i^{(c)2}}{(\mu_i^{(c)})(1 - \mu_i^{(c)})}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Donde $\mu^{(c)}$ y $\beta^{(c)}$ son los valores de μ y β , asumiendo que $\tilde{y}_i = 1, \dots, n$, tiene distribución normal y asumiendo que la distribución a priori condicional es normal $\beta|\gamma \sim N(b, B)$ para la cual $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}(\gamma - g)$ y $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}'$. Luego el kernel $k_1(\beta^{(j)}|.)$ que es usado para la obtención de las muestras de la distribución marginal $\pi(\beta|\gamma)$ tiene distribución normal con parámetros \mathbf{b}^* y \mathbf{B}^* dados por las siguientes expresiones:

$$k_1(\beta^{(j)}|.) = N(\mathbf{b}^*, \mathbf{B}^*) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^* &= \mathbf{B}^*(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{X}'\Sigma^{-1}Y) \\ \mathbf{B}^* &= (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

Donde Σ es asociada a la matriz diagonal de varianzas de la variable de trabajo Y .

Para ϕ se define la variable de trabajo \hat{y}_i en términos de $h(.)$, de tal forma se debe construir una variable aleatoria auxiliar que cumpla $E(t_i) = \phi_i$. Esta variable se define en términos de Y_i los parámetros μ_i y ϕ_i . Después en base de las nuevas expresiones se define la estimación de parámetros para ϕ , en función de \mathbf{Z}_i

$$\check{y}_i = z'_i \gamma^{(c)} + \frac{y_i}{\mu_i} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

De forma semejante se tiene $\check{Y} = (\check{y}_1, \check{y}_2, \dots, \check{y}_n)'$ y la a priori para γ es condicional $\gamma|\beta \sim N(g_1, G_1)$ siendo $g_1 = g - \mathbf{C}'\mathbf{G}^{-1}(\beta - b)$ y $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G} - \mathbf{C}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}$. De tal forma para obtener muestras de $\phi(\gamma|\beta)$ se hace uso del kernel $k_2(\gamma^{(j)}|.)$ definido por las siguientes expresiones:

$$k_2(\gamma^{(j)}|\cdot) = N(\mathbf{g}^*, \mathbf{G}^*) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^* &= \mathbf{G}^*(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{Z}'\Psi^{-1}\check{Y}) \\ \mathbf{G}^* &= (\mathbf{G}^{-1} + \mathbf{Z}'\Psi^{-1}\mathbf{Z})^{-1} \end{aligned}$$

Donde Ψ es asociada a la matriz diagonal de varianzas de la variable de trabajo \check{Y} .

Luego este procedimiento va a inducir una cadena de Markov, que por las consideraciones del algoritmo de Gibbs, alcance un estado donde se espera que las muestras sean obtenidas de la distribución estacionaria $\pi(\Theta)$. Así, el algoritmo está dado de la siguiente forma:

1. Inicialice el contador en $j = 1$ bajo los valores iniciales $\Theta = (\beta^{(0)}, \gamma^{(0)})'$.
2. Para el paso j , con los kernels dados en (11) y (12) siendo los componentes de β y γ de $(\beta, \gamma)'$.
3. Entonces obtenga de $k_1(\beta^{(j)}|\cdot)$ un vector aleatorio β^* y a través de la probabilidad de aceptación $\alpha_1(\beta^{(j)}, \beta^*)$ determine si este es un valor apropiado. En caso de serlo $\beta^{j+1} = \beta^*$, por otro lado si no es aceptado genere un nuevo valor de la cadena. De la misma forma genere un vector aleatorio γ^* del kernel $k_2(\gamma^{(j)}|\cdot)$, calcule $\alpha_2(\gamma^{(j)}, \gamma^*)$ y determine si este vector tiene validez respecto de la generación de valores para esta cadena.
4. Repita los pasos (2) y (3) hasta lograr la convergencia.

2.4. Modelo Beta Bayesiano Dinámico

2.4.1. Modelos lineales dinámicos

los Modelos Lineales Dinámicos (MLD), se han convertido en un foco de interés en el análisis de series temporales. Se caracterizan por un par de ecuaciones, denominadas ecuación observacional y ecuación de evolución de parámetros o ecuación de sistema.

Las ecuaciones de observación y del sistema están dadas por:

$$Y_t = F_t'\theta_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, V_t) \quad (13)$$

$$\theta_t = G_t\theta_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0, W_t) \quad (14)$$

Suponga para $t = 1, \dots$, que \mathbf{Y}_t es un vector columna de r observaciones.

- \mathbf{F}_t es una matriz de regresión dinámica conocida de orden $(n \times r)$
- \mathbf{G}_t es una matriz de estado conocida de orden $(r \times r)$
- \mathbf{V}_t es una matriz de varianza observada conocida de orden $(n \times n)$
- \mathbf{W}_t es una matriz de evolución conocida de orden $(r \times r)$

En las que las sucesiones de errores ϵ_t y ω_t son independientes y mutuamente independientes, respectivamente. El modelo lineal dinámico está completamente especificado por la cuádrupla (F_t, G_t, V_t, W_t) .

2.4.2. Modelos Lineales Dinámicos Generalizados

Los Modelos Lineales Dinámicos Generalizados (MLDG) son una extensión de Harrison & Stevens (1976) [11] y West, Harrison & Migon (1985) [16]. El modelo lineal Dinámico normal para la familia exponencial tiene como base los Modelos Lineales Generalizados.

Se supone que la distribución de las observaciones pertenece a la familia exponencial, donde η_t es el parámetro natural y $\phi_t = V_t^{-1}$ es la precisión en el caso Dinámico, η_t tiene una relación lineal con el vector de estados θ_t . Este ajuste describe la ecuación de observación (13) mediante:

$$p(y_t|\eta_t) \propto \exp[(y_t\eta_t - b(\eta_t))/\phi_t] \quad (15)$$

Se introduce la función de enlace adecuada que relaciona la media:

$$\mu_t = E(y_t|\eta) = b'(\eta_t) \quad y \quad \lambda_t = g(\eta_t) = F_t'\theta_t$$

El conjugado a priori para η_t está dado por:

$$p(\eta_t|D_{t-1}) \propto \exp[(r_t\eta_t - b(\eta_t))/s_t]$$

Los valores de los hiperparámetros (r_t, s_t) deben ser estimados.

Ecuación del sistema

$$\theta_t = G_t\theta_{t-1} + \omega; \quad \omega \sim N(0, W_t)$$

La inferencia Bayesiana en esta clase de modelos explora los aspectos secuenciales de la inferencia combinando las operaciones; la evolución en la construcción de la información a priori y la actualización para de la nueva observación hasta el tiempo t .

Suponiendo $D_t = D_{t-1} \cup \{y_t\}$ es la información hasta el tiempo t , incluidos F_t y G_t , $\forall t$ suponiendo que son conocidos con D_0 representa la información a priori.

La evolución de la ecuación (14) solo se especifica parcialmente. Esto significa que la distribución de $(\theta_{t-1}|D_{t-1})$ y ω_t solo se especifican por los momentos de primer y segundo orden, es decir: $\theta_{t-1}|D_{t-1} \sim (m_{t-1}, C_{t-1})$ y $\omega \sim N(0, W_t)$. Dado que la distribución a priori de los parámetros esta especificada parcialmente $(\theta_t|D_{t-1}) \sim N(a_t, R_t)$, donde $a_t = G_t m_{t-1}$ y $R_t = G_t G_{t-1}' G_t' + W_t$.

Para $\lambda_t = g(\eta_t) = F_t'\theta_t$, dado que la distribución a priori de $(\lambda_t|D_{t-1}) \sim N(f_t, q_t)$, donde $f_t = F_t'a_t$ y $q_t = F_t'R_tF_t$.

2.4.3. Modelo Beta Dinámico

Se presenta la metodología para modelar una serie temporal de proporciones Y_t considerando MLDG. da-Silva, Migon. & Correia (2010) [6]. Usando una nueva reparametrización de la distribución Beta Ferrari y Cribari-Neto, (2004) [9], el modelo se define por los siguientes componentes:

- Ecuación Observacional

$$p(y_t|\mu_t, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi\mu_t)\Gamma(\phi(1-\mu_t))} y_t^{\phi\mu_t-1} (1-y_t)^{\phi(1-\mu_t)-1} \quad (16)$$

- Ecuación del Sistema

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + \omega_t; \quad \omega_t \sim N(0, W_t)$$

- Información a priori

$$(\mu_t | D_{t-1}) \sim \text{Beta}(r_t, s_t)$$

- Función de enlace

$$\lambda_t = g(\mu_t) = F_t' \theta_t = \log\left(\frac{\mu_t}{1-\mu_t}\right) \text{ tal que } \mu_t = \frac{\exp(\lambda_t)}{1+\exp(\lambda_t)}$$

- Información inicial

$$(\theta_0 | D_0) \sim N(m_0, C_0)$$

El parámetro μ_t es el valor esperado de $(y_t | \phi)$ y ϕ el parámetro de precisión.

Inferencia del modelo Beta Dinámico

Para estimar los parámetros del modelo Beta Dinámico, puede verse como un proceso MLDG.

- Evolución:* Basado en momentos (m_{t-1}, C_{t-1}) , la distribución posterior $(\theta_{t-1} | D_{t-1}, \phi)$, siguiendo los pasos de la sección (2.4.3), se obtienen (f_t, q_t) del predictor lineal λ_t .
- igualdad de parámetros de a un paso:* Donde $\mu_t = g^{-1}(\lambda_t)$ es la distribución a priori que debe tener parámetros únicos relacionados con λ_t .
- Actualización a un paso:* Los primeros valores de los dos momentos de la distribución posterior de μ_t o cualquier aproximación adecuada de ellos, indicados por $(\tilde{\mu}_t, \tilde{V}_t)$ se quiere obtener (f_t^*, q_t^*) , los parámetros de los momentos posterior de λ_t . Que permiten estimar los momentos posterior de $(\theta_t | D_t, \phi), (m_t, C_t)$ utilizando la estimación lineal de Bayes.

Para completar el análisis secuencial, la distribución marginal de $(y_t | D_{t-1})$ puede obtenerse en función de los momentos de $(\mu_t | D_{t-1})$.

Pasos de Evolución

- La a priori del parámetro θ_t y el predictor lineal λ_t , usando la ecuación de evolución obtenemos $(\theta_t | D_{t-1}) \sim (a_t, R_t)$ y $(\lambda_t | D_{t-1}) \sim (f_t, q_t)$, la covarianza a priori entre θ_t y λ_t se obtiene como: $R_t F_t = \text{cov}(\theta_t, \lambda | D_{t-1})$.
- La a priori de μ_t tiene una distribución a priori conjugada está siempre disponible para los modelos en la familia exponencial, el parámetro μ_t esta en el intervalo $(0, 1)$, la elección para la a priori es de la familia Beta: $\mu_t | D_{t-1} \sim \text{Beta}(r_t, s_t)$ donde $r_t, s_t > 0$, son conocidas las funciones D_{t-1} siendo conocidos sus dos primeros momentos y se usan en la solución de un sistema no lineal para obtener los valores de los parámetros r_t, s_t consistentes con (f_t, q_t) , los momentos de $(\lambda_t | D_{t-1})$.

Dado lo anterior la inferencia para el Modelo Beta Dinámico está dada por:

$$(\theta_{t-1} | D_{t-1}) \sim [m_{t-1}, C_{t-1}]$$

$$(\theta_t | D_{t-1}) \sim [a_t, R_t]$$

$$\text{con } a_t = G_t m_{t-1} \text{ y } R_t = G_t C_{t-1} G' + W_t$$

$$(\lambda_t | D_{t-1}) = [f_t, q_t]$$

donde $f_t = F' a_t$ y $q_t = F'_t R_t F_t$ dado que $\lambda_t = g(\mu_t) = F'_t \theta_t$

Dado que el predictor lineal está relacionado con la media de la distribución de observación a través de una función de enlace no lineal, se necesita alguna aproximación para determinar los hiperparámetros r_t y s_t de la distribución a priori de μ_t .

Donde $(\mu_t | D_{t-1}) \sim \text{Beta}(r_t, s_t)$, el par (r_t, s_t) se puede encontrar en términos del valor exacto esperado de la distribución log-beta West, M. and Harrison, P.J. (1997) [17].

$$E[\log(\frac{\mu_t}{(1-\mu_t)})] = \psi(r_t) - \psi(s_t) \text{ y } V[\log(\frac{\mu_t}{(1-\mu_t)})] = \psi'(r_t) + \psi'(s_t),$$

Donde $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ y $\psi'(z) = \frac{d\psi(z)}{dz}$, y respectivamente, las funciones digamma y trigamma Para el modelo Beta Dinámico se obtiene:

$$E(\lambda | D_{t-1}) = E \left[\log \left(\frac{\mu_t}{(1-\mu_t)} \right) | D_{t-1} \right] = \psi(r_t) - \psi(s_t) = f_t$$

$$V(\lambda_t | D_{t-1}) = \psi'(r_t) + \psi'(s_t) = q_t$$

- (c) Actualizando θ_t la distribución conjunta especificada parcialmente de θ_t y λ_t se obtiene dado los resultados previos de esta sección. El método lineal de estimación Bayesiana (ver West, M. and Harrison, P.J. (1997) [17], Capítulos 4 y 14) puede ser empleado para obtener:

$$\hat{E}[\theta_t | \lambda_t, D_{t-1}] = a_t + \frac{1}{q_t} R_t F_t (\lambda_t - f_t)$$

$$\hat{V}[\theta_t | \lambda_t, D_{t-1}] = R_t - \frac{1}{q_t} R_t F_t F'_t R_t$$

Dado la distribución a posterior de $(\lambda_t | D_t, \phi)$, se obtiene la a posterior de $(\theta_t | D_t, \phi)$ como:

$$m_t = a_t + \frac{1}{q_t} R_t F_t (f_t^* - f_t)$$

$$C_t = R_t - \frac{1}{q_t} \left[R_t F_t F'_t R_t \left(1 - \frac{q_t^*}{q_t} \right) \right]$$

Intuitivamente, esto corresponde a la información de y_t , a través de la distribución a posterior de λ_t , para obtener los momentos condicionales:

$$E[\theta_t | D_{t-1}]$$

y

$$V[\theta_t | \lambda_t, D_{t-1}]$$

2.5. Criterios de Comparación

En la aplicación de modelos es común decidir sobre si incluir o eliminar parámetros, dado lo anterior aparece la necesidad de realizar comparación entre los modelos a través de criterios que permitan determinar la calidad del ajuste dado por el modelo. Los criterios AIC (Akaike Information Criterion) y BIC (Bayesian Information Criterion), definido en Spiegelhalter et al. (2002) [8] y el criterio DIC (Deviance Information Criterion) el cual se basa en la distribución a posteriori de la estadística deviance $D(\theta)$:

$$D(\theta) = -2\log(p(Y|\theta)) + 2\log(f(Y)),$$

donde $f(Y)$ denota a distribución marginal de Y .

El primer término del DIC , evalúa la bondad del ajuste, en cuanto el segundo término penaliza la complejidad del modelo, este puede ser calculado como:

$$DIC = E_{\theta|Y}(D(\theta) + p_D). \quad (17)$$

El primer término de la ecuación(17), define la esperanza a posteriori del deviance y el segundo término el número efectivo de parámetros del modelo. Este criterio es particularmente útil en problemas de selección de modelos en los que las distribuciones a posteriori son obtenidas por simulaciones vía MCMC. Los mejores ajustes son obtenidos con modelos que tienen menores valores del DIC.

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Desarrollar un Modelo Beta Bayesiano Dinámico para modelar y pronosticar la tasa de desempleo en Colombia y determinar los factores que la afectan.

3.2. Objetivos Específicos

- Ajustar modelos de regresión Beta Clásicos y Beta Bayesianos para determinar las variables que afectan a la tasa de desempleo.
- Comparar el ajuste del modelo Beta Bayesiano Dinámico para ϕ conocido y ϕ desconocido.

4. Descripción de las variables

Las variables que se trabajaron fueron tomadas del Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas (DANE) y del Banco de la República de Colombia de enero 2001 a junio 2017 (medidas mensuales) son :

- Tasa de desempleo en Colombia, es la situación en que se encuentra una persona en edad de trabajar y no tiene empleo, siendo la proporción de personas con el propósito de trabajar se puedan emplear.
- El Indicador de Seguimiento a la Economía (ISE) es un índice sintético cuyo fin es proporcionar una medida de la evolución de la actividad real de la economía en el corto plazo.
- El IPC es un indicador que mide la variación de precios de una canasta de bienes y servicios representativos del consumo de los hogares del país. Los resultados son analizados por grupos, subgrupos y clases de gastos, gastos básicos y niveles de ingreso.
- El Índice de Precios del productor (IPP) es el indicador coyuntural sobre los precios de los bienes en el primer canal de distribución, es decir, precios del productor. Reporta la variación promedio de los precios de una cesta de bienes que se producen en el país para consumo interno y para exportación, incluye sector primario y secundario. No contiene sector servicios.
- Las exportaciones son la salida de mercancías del territorio aduanero nacional con destino a otro país. También se considera exportación, la salida de mercancías a una Zona Franca Industrial de Bienes y de Servicios.
- Índice de la producción industrial (IPR) es un indicador de la producción industrial total en Colombia.

5. Resultados

En las secciones anteriores se fundamentó teóricamente las premisas que soportan el Modelo Beta Bayesiano Dinámico por tanto, en la presente sección se expondrán los resultados de la aplicación del modelo iniciando con la contextualización de la información utilizada, hasta los resultados de la estimación de los parámetros del modelo.

5.1. Análisis Descriptivo

La tasa de desempleo es estimada mensual para Colombia por el DANE de La Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH) que tiene como objetivo principal proporcionar información básica sobre el tamaño y estructura de la fuerza de trabajo (empleo, desempleo e inactividad) de la población del país, la encuesta se clasifica a las personas según su fuerza de trabajo en ocupadas, desocupadas o inactivas. De esta forma es posible estimar los principales indicadores del mercado laboral colombiano, como son la Tasa Global de Participación (TGP), la Tasa de Ocupación (TO) y la Tasa de Desempleo (TD). Se trata de una investigación continua, que se aplica en todo el territorio del país y que permite la desagregación de resultados para el total nacional y áreas metropolitanas.

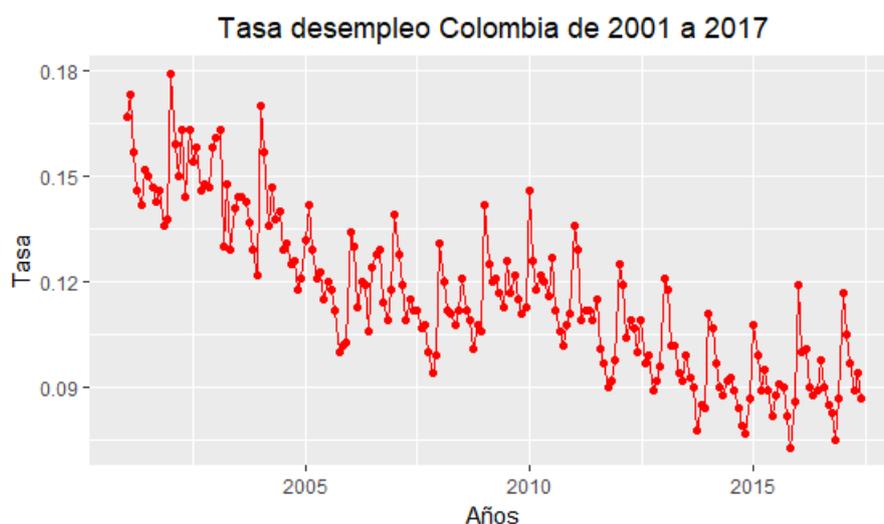


Figura 2: *Tasa desempleo Colombia Enero 2001 - Junio 2017*

Colombia a comienzos del 2001 se encontraba en una crisis económica con orígenes internacionales que afectó a los países en desarrollo, además, el conflicto interno con la llegada de la presidencia de Álvaro Uribe en 2002 se tomaron medidas de orden interno y así generó confianza de inversión empresarial y fortaleció gradualmente la economía del país, donde de manera gradual sometió la tasa de desempleo, cuando el desempleo empezó a reducir lentamente llegó una crisis financiera internacional en el 2008, este periodo el desempleo aumentó, después de haber hecho políticas para incentivar el empleo, se eliminaron las horas extras, recorte en domingos y festivos.

En el gobierno de presidente J. Manuel Santos en 2010 el desempleo seguía por encima de los dos dígitos, se implementó metodología para reducir el desempleo se basó en impulsar sectores intensivos en mano de obra como la construcción (programa PIPE¹) y aprovechó la buena racha por la cual pasaba en ese momento el sector minero energético, con lo que logró reducir temporalmente a un dígito el desempleo.

La tendencia de la tasa de desempleo se puede observar una tendencia estacional, como se observa en la

¹Plan de impulso a la productividad y el empleo www.mincit.gov.co

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: basem$TD
Dickey-Fuller = -3.0653, Lag order = 5, p-value = 0.1301
alternative hypothesis: stationary
```

5.2. Modelos para la tasa de desempleo

5.2.1. Modelo de regresión Beta Clásico

Utilizando la librería `betareg` del software R-Project², se ajustan modelos de regresión Beta clásico recordando que por defecto usa la función de enlace "log".

En la tabla 2 se reportan los criterios "Akaike Information Criterion"(AIC) y "Bayesian Information Criterion"(BIC), para los diferentes modelos ajustados con las diferentes variables, sin embargo como se puede evidenciar el modelo 1 muestra un mejor ajuste que los otros modelos propuestos.

Modelos	Variables del Modelo	AIC	BIC
Mod 1	Intercepto, ISE, IPC, IPR	-1319.027	-1302.586
Mod 2	Intercepto, ISE, IPP, IPR	-1317.949	-1301.507
Mod 3	Intercepto, ISE, IPR	-1315.755	-1302.602
Mod 4	Intercepto, ISE, IPC, IPP, log(Exportaciones)	-1292.662	-1272.932
Mod 5	Intercepto, ISE, IPC, IPP	-1283.548	-1267.107
Mod 6	Intercepto, ISE, IPC	-1282.491	-1269.338
Mod 7	Intercepto, ISE	-1282.210	-1272.346
Mod 8	Intercepto, IPC	-1178.498	-1168.633
Mod 9	Intercepto, IPP	-1171.101	-1161.237
Mod 10	Intercepto, log(Exportaciones)	-1118.793	-1108.928

Tabla 2: Modelos Beta Clásicos ajustados para la tasa desempleo en Colombia

Siendo el siguiente modelo que presento mejor ajuste, se puede evidenciar que tiene el menor AIC y BIC.

$$\text{logit}(\mu_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 ISE_i + \hat{\beta}_2 IPC_i + \hat{\beta}_3 IPR_i$$

En la tabla 3 y 4 se reporta la estimación de los parámetros del modelo 1, además, estos resultados muestran que los parámetros son significativos.

Parametrer	Estimate $\hat{\beta}$	Std. Error	z value	Pr (> z)	
Intercepto	-0.8199687	0.0522133	-15.704	< 2e-16	***
ISE	-0.0063397	0.0008094	-7.833	4.78e-15	***
IPC	0.0020219	0.0008718	2.319	0.0204	*
IPR	-0.0072118	0.0011084	-6.507	7.69e-11	***

Tabla 3: Coefficients (mean model with logit link)

Signif.codes : 0"***" 0.001"***" 0.01"*" 0.05"." 0.1"" 1

²Puede ser obtenido de forma libre desde la página <http://www.r-project.org/>

Paramatrer	Estimate	Std. Error	z value	Pr (> z)
ϕ	1412.3	141.9	-9.95	< 2e-16 ***

Tabla 4: *Phi coefficients (precision model with identity link)*

Type of estimator: ML (maximum likelihood)

Log-likelihood: 664.5 on 5 Df

Pseudo R-squared: 0.8578

Number of iterations: 39 (BFGS) + 3 (Fisher scoring)

Ahora veremos en la figura 4, la comparación de la tasa de desempleo observada y estimada por el modelo de regresión beta clásico.

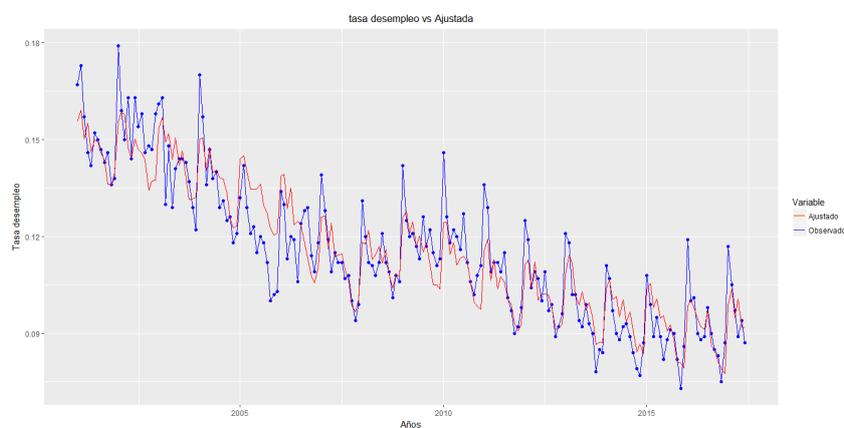


Figura 4: *Tasa de desempleo observada y estimada para el modelo beta clásico*

Donde podemos ver que presenta un buen ajuste el modelo Beta.

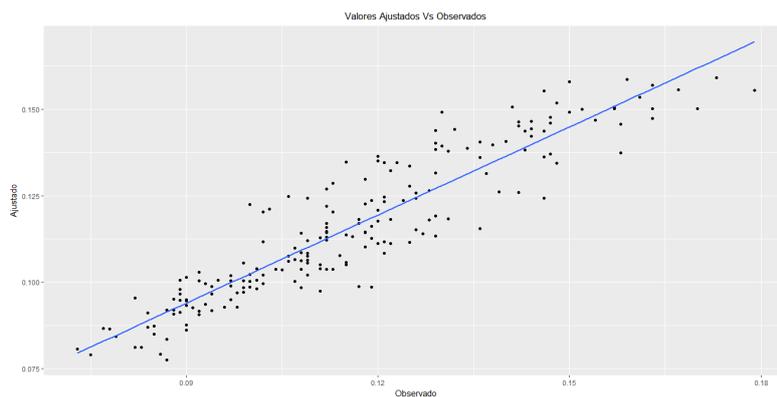


Figura 5: *Valores ajustados vs Observados*

Vemos que este modelo presenta una relación significativa (gráficamente), ya que los valores ajustados por el modelo y los resultados reales muestran una relación más a fin con la recta $y = x$.

Pronóstico de la tasa desempleo en Colombia

Se realiza pronóstico de la tasa de desempleo de Colombia para junio de 2017 (observación 198) a un paso dado el modelo Beta Clásico estimado, mostrando un buen ajuste con las variables el indicador de seguimiento a la economía (ISE), índice del precio al consumidor (IPC) y el índice de la producción industrial (IPR).

Se realiza el pronóstico a un paso para el mes de junio de la siguiente manera:

$$\text{logit}(\hat{\mu}_{198}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 ISE_{197} + \hat{\beta}_2 IPC_{197} + \hat{\beta}_3 IPR_{197}$$

<i>Fecha</i>	<i>Real</i>	<i>Pronóstico</i>
Junio 2017	0.087	0.0969

Tabla 5: *Pronóstico de tasa de desempleo a un paso*

Dado el pronóstico vs la tasa de desempleo para junio de 2017 (tabla 5) presentan una diferencia de 0.0099 siendo alta ya que este valor pronosticado está sobrestimando el valor real.

5.2.2. Modelo de regresión Beta Bayesiano

Se procede a realizar las estimaciones doblemente generalizadas Bayesianas del modelo, en la tabla 6 se reporta el "deviance information criterion" (DIC) para los modelos ajustados con las diferentes variables, sin embargo el modelo 1 muestra un ajuste mejor que los otros modelos propuestos; además junto a la convergencia de las cadenas fueron el indicativo de selección.

<i>Modelos</i>	<i>VARIABLES del Modelo</i>	<i>DIC</i>
Mod 1	Intercepto, ISE, IPC, IPR	-1323.529
Mod 2	Intercepto, ISE, IPP, IPR	-1322.692
Mod 3	Intercepto, ISE, IPR	-1315.730
Mod 4	Intercepto, ISE, IPC, IPP, log(Exportaciones)	-1295.416
Mod 5	Intercepto, ISE, IPC, IPP	-1288.622
Mod 6	Intercepto, ISE, IPC	-1290.916
Mod 7	Intercepto, ISE	-1287.917
Mod 8	Intercepto, IPC	-1177.193
Mod 9	Intercepto, IPP	-1170.589
Mod 10	Intercepto, log(Exportaciones)	-1122.563

Tabla 6: *Modelos Beta Bayesianos para la tasa desempleo en Colombia*

Siendo el siguiente modelo que presento mejor ajuste:

$$\text{logit}(\mu_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 ISE_i + \hat{\beta}_2 IPC_i + \hat{\beta}_3 IPR_i$$

Para el ajuste del modelo, se realizaron 200.000 iteraciones Monte Carlo, descartando 2.000 cadenas y tomándolas de a 5. Se realizaron los test de diagnóstico pertinentes, con los que se han observado comportamientos deseables de las cadenas (ver tabla 9, figuras 6 y 7).

En las tablas 7 y 8 se reporta la estimación de los parámetros del modelo 1, estos resultados muestran que los parámetros estimados mediante la metodología Bayesiana.

<i>Paramatrer</i>	<i>Median $\hat{\beta}$</i>	<i>2.5 %</i>	<i>97.5 %</i>	<i>n.sample</i>	<i>n.effective</i>
Intercepto	-0.832	-0.946	-0.719	79200	220
ISE	-0.007	-0.008	-0.005	79200	200
IPC	0.002	0.001	0.004	79200	1300
IPR	-0.007	-0.009	-0.005	79200	170

Tabla 7: *Medianas a posteriori estimadas. Intervalos de credibilidad al 95% para los parámetros del modelo Beta Bayesiano*

<i>Paramatrer</i>	<i>Median $\hat{\phi}$</i>	<i>2.5 %</i>	<i>97.5 %</i>	<i>n.sample</i>	<i>n.effective</i>
c0	6.110	5.125	7.076	79200	13000
c1	0.009	0.007	0.017	79200	15000

Tabla 8: *Coefficientes Phi. Intervalos de credibilidad al 95% para para los parámetros modelo Beta Bayesiano*

Al analizar la convergencia de la cadena para cada parámetro, se puede concluir que la convergencia es alcanzada para cada uno, esta conclusión se confirma por el test de convergencia en el diagnóstico de Heidelberg y Welch's (Heidelberg & Welch(1981) [13] y Heidelberg & Welch(1983) [14]), los cuales fueron obtenidos usando las librerías lattice y coda del software R-Project. Los resultados del diagnóstico realizado son presentados en la tabla 9.

Test	Test statistic						
	β_0	β_1	β_2	β_3	C0	C1	deviance
Heidel							
Chain 1							
Stationarity Test	passed	passed	passed	passed	passed	passed	passed
Start iteration	1	1	1	1	1	1	1
P-value	0.286	0.150	0.213	0.378	0.972	0.933	0.295
Halfwidth Test	passed	passed	passed	passed	passed	passed	passed
Mean	-8.31e-01	-6.72e-03	2.30e-03	-6.89e-03	6.11e+00	9.43e-03	-1.33e+03
Halfwidth	0.007396	0.000120	0.000107	0.000178	0.021907	0.000178	0.172704
Chain 2							
Stationarity Test	passed	passed	passed	passed	passed	passed	passed
Start iteration	1	1	1	1	1	1	1
P-value	0.220	0.198	0.287	0.467	0.230	0.209	0.691
Halfwidth Test	passed	passed	passed	passed	passed	passed	passed
Mean	-8.38e-01	-6.82e-03	2.35e-03	-6.75e-03	6.11e+00	9.50e-03	-1.33e+03
Halfwidth	6.21e-03	8.79e-05	8.98e-05	1.55e-04	2.34e-02	1.90e-04	1.66e-01

Tabla 9: *Test de diagnóstico de Heidelberg & Welch's para convergencia*

Adicionalmente en la tabla 9 y la figura 6 indican que las cadenas son estacionarias dado que estos resultados son esenciales para lograr una estimación adecuada de los parámetros del modelo.

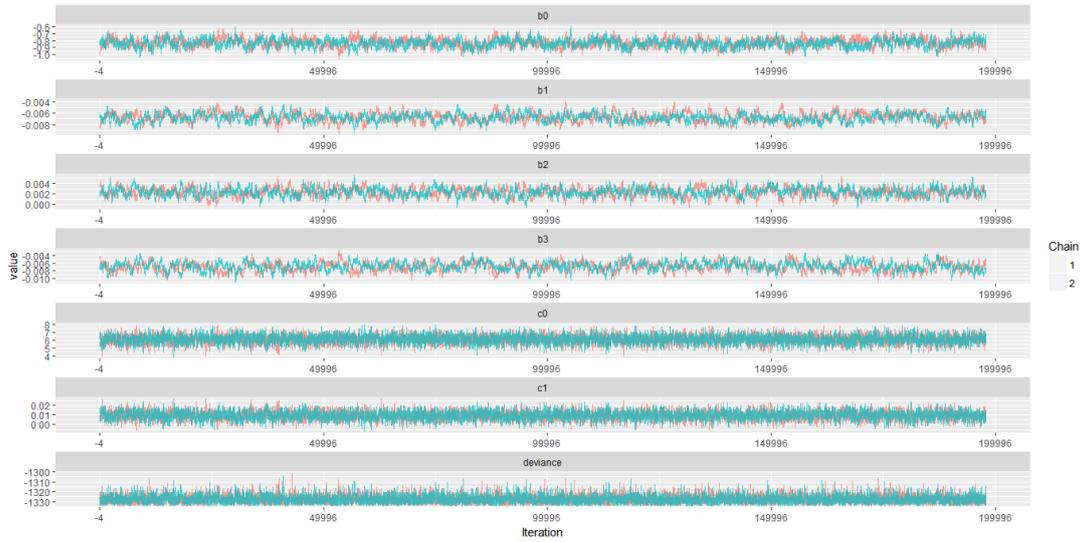


Figura 6: Traza de las cadenas de los parámetros del modelo ajustado.

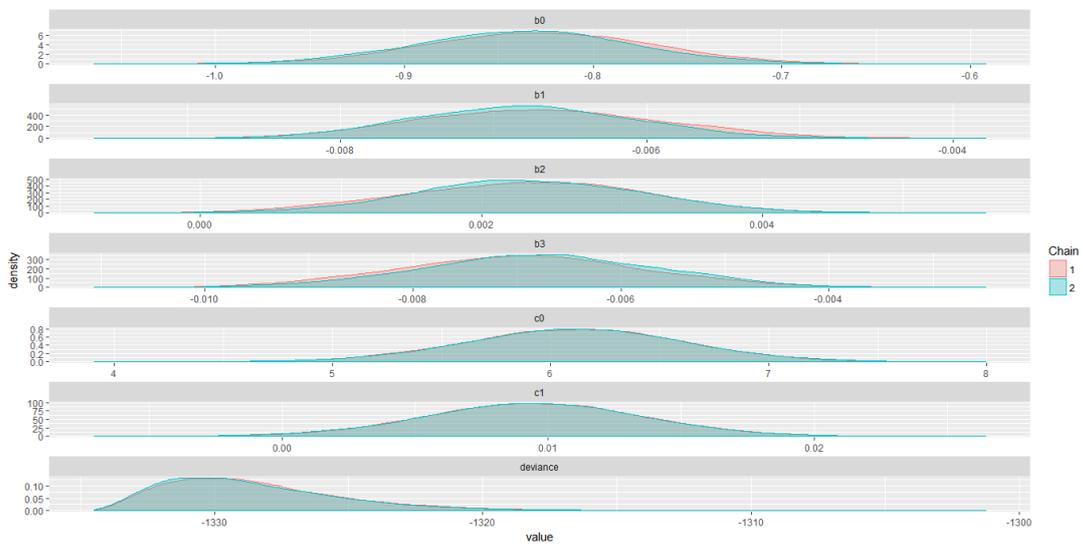


Figura 7: Densidad de los parámetros del modelo ajustado.

Ahora veremos en la figura 8 la comparación de la tasa de desempleo y el estimado con el modelo 1 indicando un buen ajuste

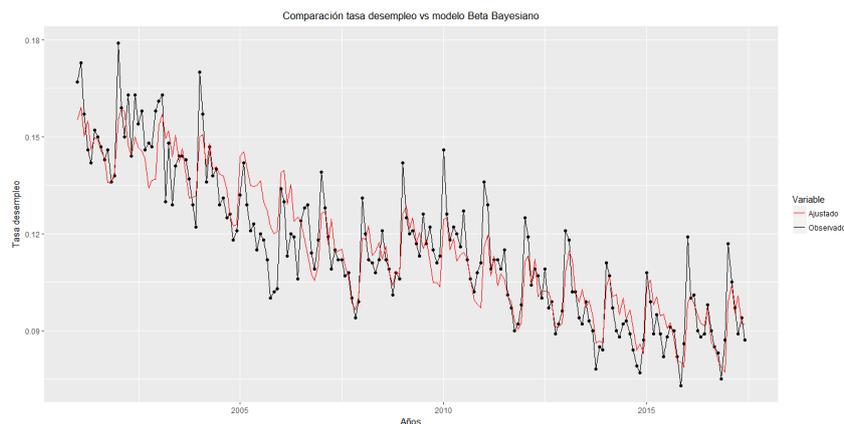


Figura 8: *Tasa de desempleo observada y estimada para el modelo beta bayesiano*

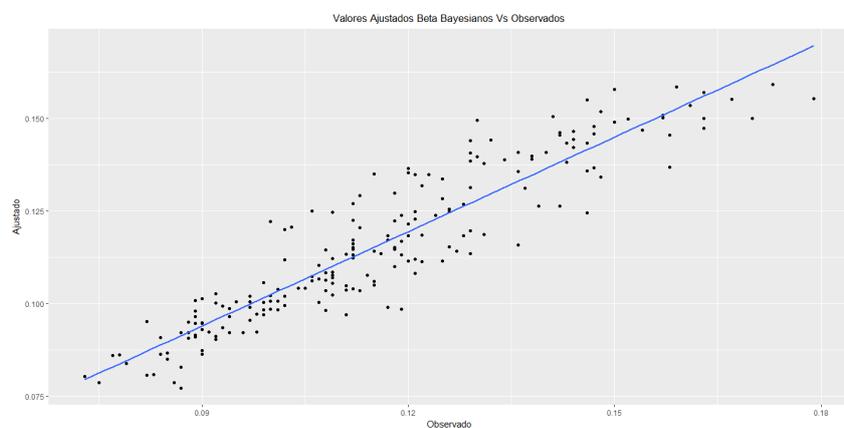


Figura 9: *Valores ajustados Beta Bayesianos vs Observados*

Vemos que este modelo presenta una relación significativa (gráficamente), ya que los valores ajustados por el modelo y los resultados reales muestran una relación más a fin con la recta $y = x$. **Pronóstico de la tasa desempleo en Colombia**

Se realiza pronóstico de la tasa de desempleo de Colombia para junio de 2017 (observación 198) a un paso dado el modelo Beta Bayesiano estimado, mostrando un buen ajuste con las variables el indicador de seguimiento a la economía (ISE), índice del precio al consumidor (IPC) y el índice de la producción industrial (IPR).

Se realiza el pronóstico a un paso para el mes de junio de la siguiente manera:

$$\text{logit}(\hat{\mu}_{198}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 ISE_{197} + \hat{\beta}_2 IPC_{197} + \hat{\beta}_3 IPR_{197}$$

Fecha	Real	Pronóstico
Junio 2017	0.087	0.0972

Tabla 10: *Pronóstico de tasa de desempleo a un paso modelo beta bayesiano*

Dado el pronóstico vs la tasa de desempleo para junio de 2017 (tabla 10) presentan una diferencia de 0.0102 siendo alta ya que este valor pronosticado esta sobrestimando el valor real.

5.2.3. Modelo Beta Bayesiano Dinámico

Ahora se realizan las estimaciones mediante el modelo Beta Bayesiano Dinámico, en la tabla 11 se reporta el "deviance information criterion"(DIC) para los modelos ajustados con las diferentes variables, sin embargo el modelo 4 muestra un ajuste mejor que los otros modelos propuestos.

La simulación se llevó a cabo usando las librerías WinBUGS y rjags del software R-Project, para cada uno de los 12 modelos se simularon 20.000 muestras de las cuales se eliminaron las primeras 2.000.

<i>Modelos</i>	<i>Variables del Modelo</i>	<i>DIC</i>
Mod 1	Intercepto, ISE, IPC,IPP, IPR	-532.6418
Mod 2	Intercepto, ISE, IPC, IPR	-541.6302
Mod 3	Intercepto, ISE, IPP, IPR	-489.0809
Mod 4	Intercepto, ISE, IPR	-598.5469
Mod 5	Intercepto, ISE, IPC, IPP, log(Exportaciones)	-550.7815
Mod 6	Intercepto, ISE, IPC, IPP, log(Exportaciones),IPR	-577.7202
Mod 7	Intercepto, ISE, IPC, IPP	-544.945
Mod 8	Intercepto, ISE, IPC	-564.2787
Mod 9	Intercepto, ISE	3899.839
Mod 10	Intercepto, IPC	-576.3931
Mod 11	Intercepto, IPP	-519.8155
Mod 12	Intercepto, IPR	-505.7609

Tabla 11: *Modelos Beta Bayesianos Dinámicos para la tasa desempleo en Colombia*

En los resultados mostrados posteriormente, dado que el mejor modelo Beta Bayesiano Dinámico es el 4 (ver tabla 11) donde se utilizaron como variables independientes ISE e IPR y un ϕ fijo que toma valor 100.

Se realizaron dos modelos adicionales para comparar si el cambio del valor en ϕ fijo, presenta cambios en el ajuste del modelo (ver tabla 12).

<i>Modelo</i>	<i>ϕ</i>	<i>DIC</i>
I	100	-598.5469
II	50	-300.6924
III	10	-6.027909

Tabla 12: *Escenarios de modelos Beta Bayesiano Dinámico con diferentes ϕ*

Se puede observar en la tabla 12 que, en la medida que aumenta el ϕ (precisión), el valor del "deviance information criterion"(DIC) disminuye, además mejora el ajuste del modelo.

- Modelo Beta Bayesiano Dinámico para la tasa de desempleo en Colombia

$$\text{logit}(\mu_t) = \beta_{0t} + \beta_{1t}ISE_t + \beta_{2t}IPR_t$$

$$\phi = 100$$

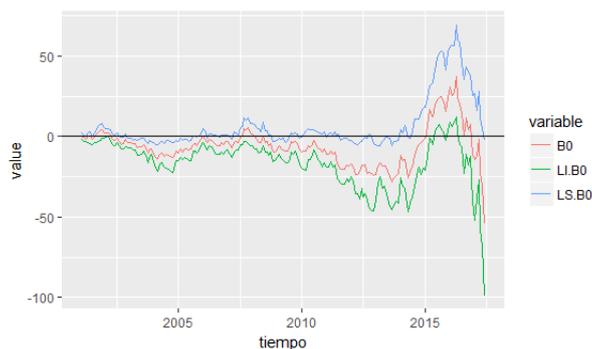
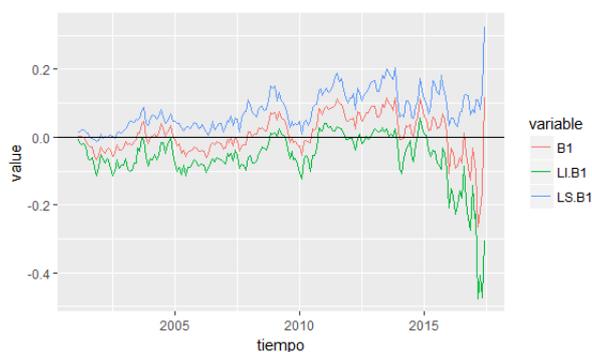
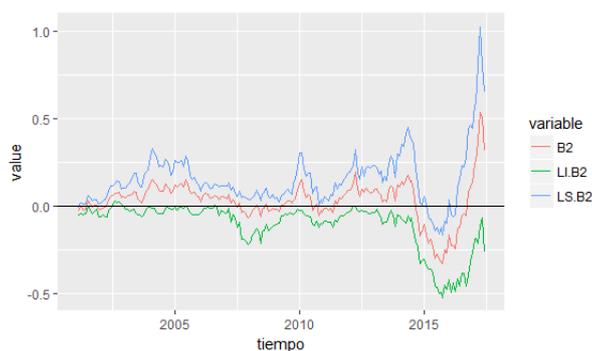
(a) β_{0t} (b) β_{1t} (c) β_{2t}

Figura 10: Trayectoria estimada de β_{0t} (a), β_{1t} (b), β_{2t} (c) con sus intervalos de credibilidad del 90% para el modelo Beta Bayesiano Dinámico

Dados los resultados del modelo se observa en la figura 10 la trayectoria de las estimaciones de los parámetros, en la figura 10(a) muestra la trayectoria de β_{0t} estimado (línea roja), con sus respectivos intervalos de probabilidad a posteriori al 90%. Se puede observar que el parámetro es significativo la mayor parte del tiempo, La figura 10(b) muestra la trayectoria de β_{1t} estimado (línea roja), con sus respectivos intervalos de probabilidad a posteriori al 90%. Dado que el límites inferior del intervalo de probabilidad en algunas partes toma valores de cero, indica que el parámetro no es significativo la mayor parte del tiempo y la figura 10(c) muestra la trayectoria de β_{2t} estimado (línea roja), con sus respectivos intervalos de probabilidad a posteriori al 90%. Dado que los límites inferior y superior del intervalo de probabilidad en algunas partes toma valores de cero, indica que el parámetro no es significativo la mayor parte del tiempo.

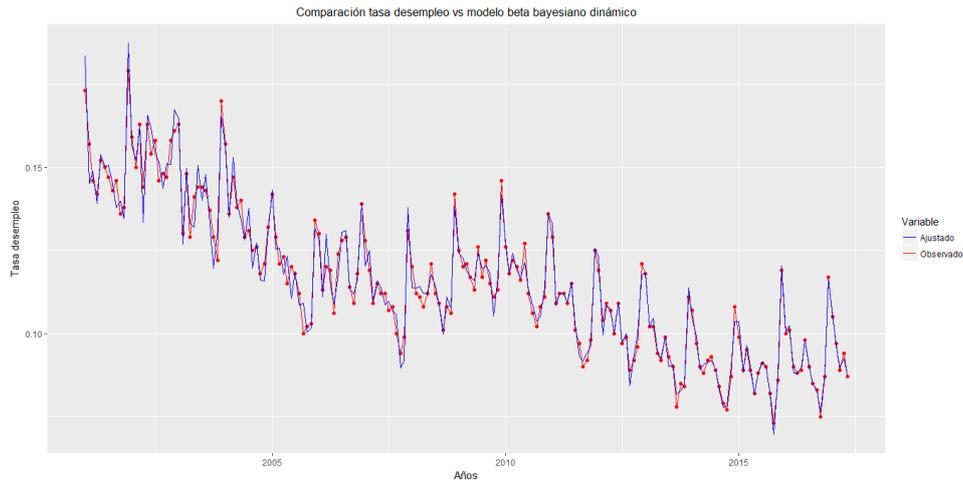


Figura 11: *Tasa de desempleo observada y estimada para el modelo Beta Bayesiano Dinámico*

En la figura 11 se observa la comparación de la tasa de desempleo y el estimado con el modelo 4 de la tabla 11 indicando que el modelo Beta Bayesiano Dinámico presenta un buen ajuste dado que describe el comportamiento de la serie.

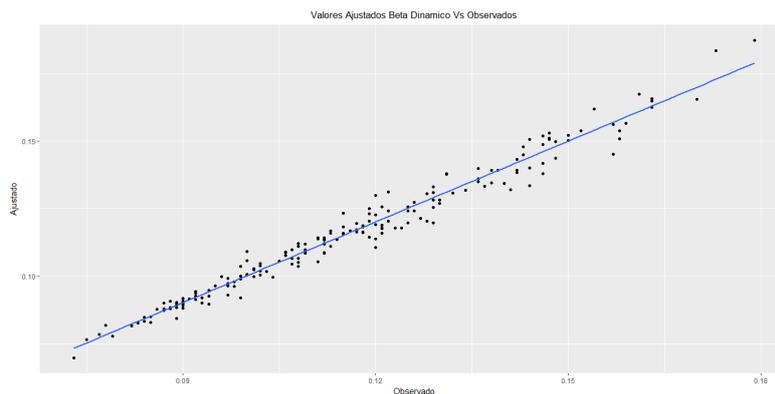


Figura 12: *Valores ajustados Beta Bayesianos Dinámicos vs Observados*

Vemos que este modelo presenta una relación mucho más significativa (gráficamente figura 12) que los modelos anteriores, ya que los valores ajustados por el modelo y los resultados reales muestran una relación más a fin con la recta $y = x$.

Pronóstico de la tasa desempleo en Colombia

Se realiza pronóstico de la tasa de desempleo de Colombia para junio de 2017 (observación 198) a un paso dado el modelo Beta Bayesiano Dinámico estimado, mostrando un buen ajuste con las variables el indicador de seguimiento a la economía (ISE) y el índice de la producción industrial (IPR).

Se realiza el pronóstico a un paso para el mes de junio de la siguiente manera:

$$\text{logit}(\hat{\mu}_{198}) = \hat{\beta}_{0,198} + \hat{\beta}_{1,198}ISE + \hat{\beta}_{2,198}IPR$$

<i>Fecha</i>	<i>Real</i>	<i>Pronóstico</i>
Junio 2017	0.087	0.112631

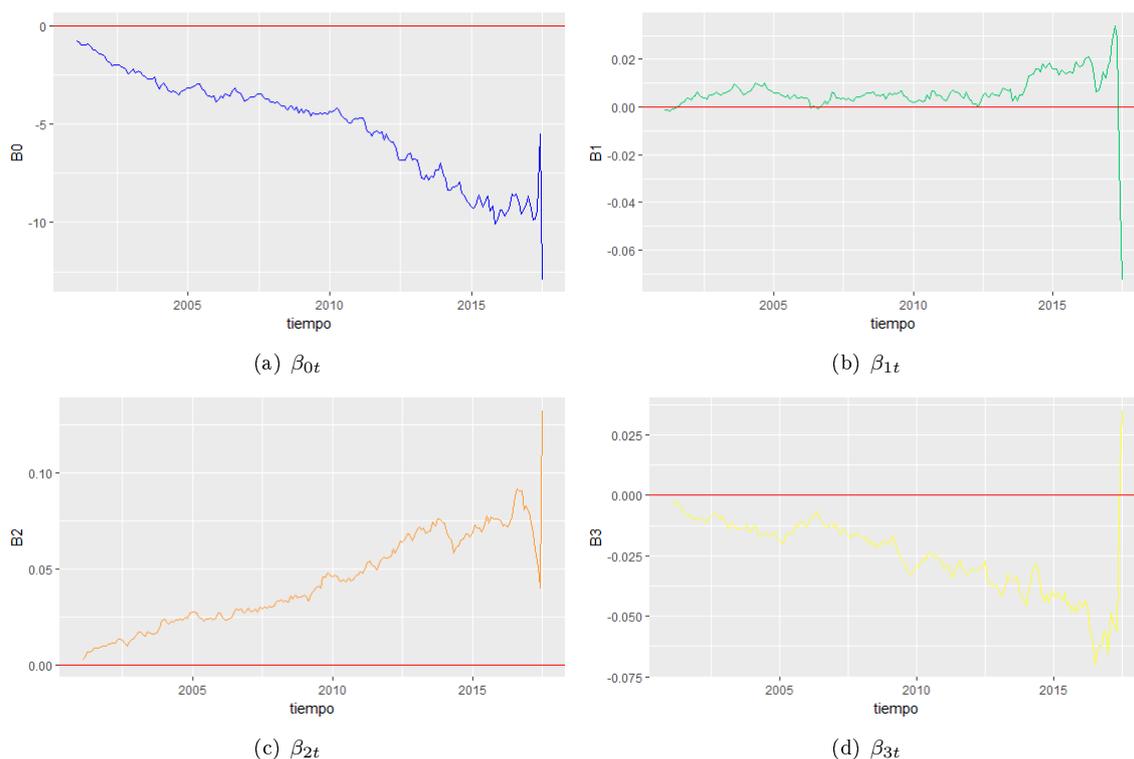
Tabla 13: *Pronóstico de tasa de desempleo a un paso*

Dado el pronóstico vs la tasa de desempleo para junio de 2017 (tabla 15) presentan una diferencia de 0.025631 siendo alta ya que este valor pronosticado esta sobrestimando el valor real.

Modelo Beta Bayesiano Dinámico Doblemente Generalizado

Dado los modelos anteriores planteados se realizo el ajuste de Modelo Beta Bayesiano Dinámico Doblemente Generalizado para cada uno de los dos modelos se simularon 20.000 muestras de las cuales se eliminaron las primeras 2.000 para obtener un resumen la distribución a posteriori de los parámetros del modelo.

<i>Modelos</i>	<i>Variables del Modelo</i>	<i>DIC</i>
Mod 1	Intercepto, ISE, IPC, IPR	-1476.166
Mod 2	Intercepto, ISE, IPR	-262.5659

Tabla 14: *Modelos Beta Bayesianos Dinámicos DGLM para la tasa desempleo en Colombia*Figura 13: *Trayectoria estimada de β_{0t} (a), β_{1t} (b), β_{2t} (c) para el modelo Beta Bayesiano Dinámico*

Dados los resultados del modelo se observa en la figura 13 la trayectoria de las estimaciones de los parámetros, en la figuras 13(a)(b)(c)(d) muestra la trayectoria de los $\hat{\beta}$ estimados, se puede observar que los parámetros son significativos todo el tiempo.

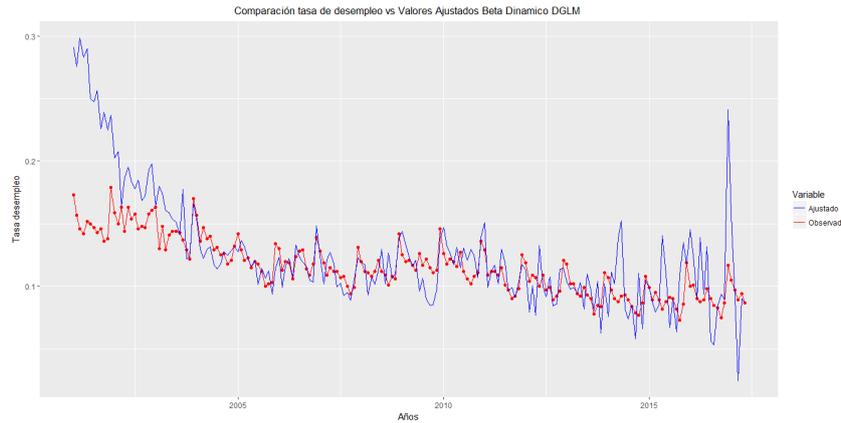


Figura 14: Tasa de desempleo observada y estimada para el modelo Beta Bayesiano Dinámico

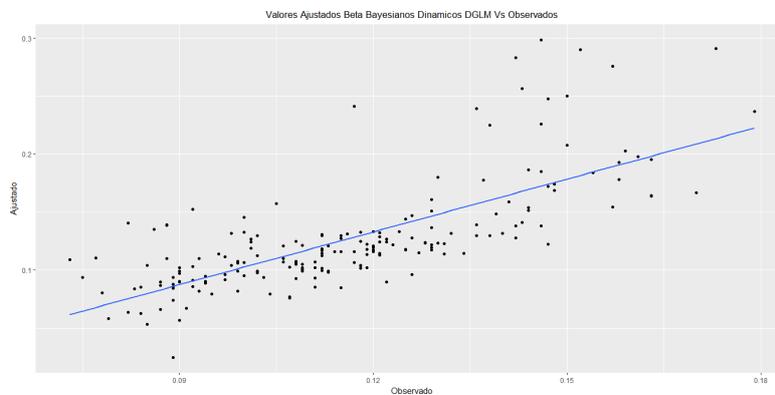


Figura 15: Valores ajustados Beta Bayesianos Dinámicos DGLM vs Observados

Vemos que este modelo presenta una relación significativa (gráficamente), ya que los valores ajustados por el modelo y los resultados reales muestran una relación más a fin con la recta $y = x$.

Pronóstico de la tasa desempleo en Colombia

Se realiza pronóstico de la tasa de desempleo de Colombia para junio de 2017(observación 198) a un paso dado el modelo Beta Bayesiano Dinámico con ϕ estimado, mostrando un buen ajuste con las variables el indicador de seguimiento a la economía (ISE) y el índice de la producción industrial (IPR).

Se realiza el pronóstico a un paso para el mes de junio de la siguiente manera:

$$\text{logit}(\hat{\mu}_{198}) = \hat{\beta}_{0,198} + \hat{\beta}_{1,198}ISE_{197} + \hat{\beta}_{2,198}IPC_{197} + \hat{\beta}_{3,198}IPR_{197}$$

Fecha	Real	Pronóstico
Junio 2017	0.087	0.1069081

Tabla 15: Pronóstico de tasa de desempleo a un paso

Dado el pronóstico vs la tasa de desempleo para junio de 2017 (tabla 15) presentan una diferencia de 0.0199 siendo alta ya que este valor pronosticado esta sobrestimando el valor real.

6. Conclusiones

El modelo Beta Bayesiano Dinámico es más robusto que los modelos Beta Clásicos y Beta Bayesianos en cuanto al ajuste que proporciona a los datos, dado que describe el comportamiento de la serie. En el caso del modelo Beta Bayesiano Dinámico con el valor de ϕ conocido, se observa a medida que es mayor su valor, aumenta la precisión (reducción de varianza) en los datos, el modelo mejora su ajuste; debido a que la variabilidad en los datos se reduce y por tanto mejora la identificación de los parámetros a estimar.

Se estimaron dos tipos de modelos Beta Bayesianos Dinámicos, en el primero que se planteó ϕ conocido, el que tuvo mejor ajuste (menor valor del DIC), fue el que se incluyó las covariables ISE e IPR. En el segundo modelo se planteó con ϕ desconocido el que tuvo mejor ajuste (menor valor del DIC) como covariables ISE, IPC e IPR; bajo este escenario el modelo con mejor ajuste (menor valor del DIC) fue el que se planteó con ϕ desconocido.

Por lo tanto estos modelos contribuyen al entendimiento de la dinámica de la tasa de desempleo y ayudan a trazar políticas.

Los resultados sobre el pronóstico a un paso, muestran que el modelo planteado no presentó equivalencia con el valor observado.

7. Trabajos futuros

- Los modelos de efectos fijos se restringen en este trabajo al enlace logístico para la media y logarítmico para los parámetros de variabilidad, luego se plantea extender a otro tipo de funciones: log-log, complemento log-log ó probit para la media y para la precisión ϕ los enlaces identidad, raíz cuadrada ó de potencias.
- Para un trabajo posterior se podría considerar un modelo Beta dinámico jerárquico y modelo Beta dinámico con rezagados.

8. Agradecimientos

Agradezco a Dios, a mi director de tesis Dagoberto Bermúdez por su apoyo y acompañarme en el proceso de elaboración de mi trabajo de grado. También quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional.

Referencias

- [1] Bermúdez Rubio Dagoberto, *Modelamiento Bayesiano de caudal y precipitación aplicando modelos dinámicos y procesos de Poisson no homogéneos*(Repositorio, Universidad Nacional de Colombia).
- [2] Box, G. & Jenkins, G.(1976). *Time Series Analysis: Forecasting & Control.*, Prentice Hall, London.
- [3] Cepeda, E. (2001), *Modelagem Bayesiana da variabilidade em modelos lineares generalizado*, PhD thesis, Universidade Federal Do Rio De Janeiro.
- [4] Cepeda, E. & Gamerman, D. (2005). *Bayesian Methodology For Modelling Parameters in the two Parameter Exponential Family*, ESTADÍSTICA 57, 93-105.
- [5] Cepeda,E.,Jaimes,Daniel.,Marin, M. y Rojas,J(2016) . *Bayesian Beta Regression with the Bayesian-betareg R-Package*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.
- [6] C.Q. da-Silva, H. S. Migon. and L. T., Correia(2010), *Dynamic Bayesian Beta Models*
- [7] Da-Silva,C. and Migon,H.(2014). *Hierarchical Dynamic Beta Model*.Universidade de Brasília, Brasília - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro
- [8] D.J. Spiegelhalter, N.G. Best, B.P Carlin, and A. Linde(2002). *Bayesian measures of model complexity and fit*, Journal of the Royal Statistical Society series B 64, 583-639.
- [9] FERRARI,S. AND CRIBARI-NETO,F (2004). *Beta Regression for modelling rates and proportions*.Universidad de São Paulo,São Paulo - Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- [10] Figueroa-Zuñiga, J. I., Arellano-Valle, R. B. & Ferrari, S. L. (2013). *Mixed beta regression:A bayesian perspective*,Computational Statistics & Data Analysis 61, 137-147.
- [11] Harrison, P. J. & Stevens, C. V. (1976). Bayesian Forecasting., Journal of the Royal Statistical Society (38): 205?247.
- [12] López,E y Misas,M.(2006). *Las fuentes del desempleo en Colombia: un examen a partir de un modelo SVEC*. Banco de la República de Colombia
- [13] P. Heidelberger and P. Welch(1981). *A spectral method for confidence interval generation and run length control in simulations*, Communications of The ACM
- [14] P. Heidelberger and P. Welch(1983). *Simulation run length control in the presence of an initial transient*,Operations Research
- [15] Tejedor,F.(2014). Modelamiento conjunto de media y varianza en modelos mixtos con respuesta Beta: perspectiva Bayesiana,Repositorio, Universidad Nacional de Colombia.
- [16] West, M., Harrison, P. J., Migon, H. S. (1985). Dynamic generalized linear models and Bayesian forecasting. Journal of the American Statistical Association, 80(389), 73-83.
- [17] West, M. and Harrison, P.J. (1997). Bayesian Forecasting and Dynamic Models. 2nd edition, Springer, New York.
- [18] <http://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/ech/ech/bol-empleo-abr-17.pdf>
- [19] <http://www.banrep.gov.co/es/tasas-empleo-desempleo>