
Ajuste de un modelo funcional para medir el efecto de la tasa de cambio sobre el precio del Petróleo WTI en el periodo (2000-2015)

Adjustment of a functional model to measure the effect of the exchange rate on the price of WTI Oil in the period (2000-2015)

Javier Yesid Ladino Santamaría.^a
javierladino@usantotomas.edu.co

Wilmer Pineda Ríos.^b
wilmerpineda@usantotomas.edu.co

Heivar Yesid Rodriguez Pinzon.^c
heivarrodriguez@usantotomas.edu.co

Resumen

En los últimos años el precio del petróleo ha experimentado cambios o fluctuaciones significativas, induciendo efectos importantes en la economía. En este documento se va analizar el precio del petróleo WTI y la tasa de cambio, mediante un modelo de regresión funcional concurrente, en el periodo 2000 al 2015, con el fin de analizar los cambios que tiene el precio del petróleo WTI a lo largo del tiempo, mediante técnicas descriptivas de datos funcionales como la media funcional, coeficiente de variación funcional y ACP funcional, para explicar el comportamiento o impacto que tienen las variables que se está analizando.

Palabras clave: Análisis de datos funcionales, regresión funcional concurrente, Petróleo WTI, Tasa de Cambio, Demanda de producción.

Abstract

In recent years, the price of oil has undergone significant changes or fluctuations, inducing important effects in the economy. This document will analyze the price of WTI oil and the exchange rate through a concurrent functional regression model in the period 2000 to 2015 to see throughout the year the changes that the WTI oil price has, also using other techniques descriptive of functional data to explain the impact or behavior of these variables.

Keywords: Analysis of functional data, concurrent functional regression, WTI Oil, Exchange Rate, Production demand.

^aEstudiante de Estadística Universidad Santo Tomás Bogotá

^bDocente de Estadística Universidad Santo Tomás Bogotá

^cDocente de Estadística Universidad Santo Tomás Bogotá

1. Introducción

Uno de los temas más discutidos de la actualidad han sido la tasa de cambio y el precio del petróleo, ya que son factores importante en la economía mundial, los cambios o fluctuaciones significativas que vienen presentando, mas que todo la tasa de cambio. Pero ¿Qué sabemos de la tasa de cambio? ¿Qué factores están determinando su comportamiento a lo largo del año? ¿Cómo es la relación entre la tasa de cambio y el petróleo WTI? ¿Cómo se ve afectado el mercado colombiano? Son estos unos de los interrogantes que motivaron la elaboración de este estudio.

Un factor importante en una economía abierta es la tasa de cambio, ya que siendo el precio de una moneda en función de otra, llega a tener un fuerte impacto sobre la cuenta corriente y otras variables macroeconómicas, como la exportaciones y las importaciones. A lo largo de los años, el petróleo ha sido una variable que tiene importantes consecuencias en Colombia, por lo que la disminución de las exportaciones, se tiene un peso más débil, menos crecimiento y un gobierno que se enfrenta a problemas con sus ingresos.

Estudios anteriores utilizan modelos VAR y análisis de cointegración como Gaviria, M y Sierra, H.(2003), Londoño, W. (2005), entre otros, para explicar el comportamiento de la tasa de cambio y el precio del petróleo en el corto plazo. Otros modelos analizan a largo plazo, pero no lo hacen conjuntamente para saber la diferencia entre los años, de aquí sale la propuesta para este trabajo que se va analizar todos los años en conjunto mediante los datos funcionales.

Los datos funcionales consisten en la evolución de una variable a lo largo del tiempo (proceso estocástico), de modo que los valores que toman son funciones en lugar de vectores como en análisis multivariante clásico. La imposibilidad de medir la mayoría de estas variables continuamente en el tiempo, unida a la complejidad teórica de muchos de los métodos estadísticos disponibles para su análisis llevan a que se manejen resúmenes periódicos que constituyen las series temporales contenidas normalmente en los anuarios estadísticos.

Para comprobar como influyen en Colombia la tasa de cambio y el precio del petróleo de manera significativa, es necesario un estudio analítico sobre las variables. El propósito de este trabajo, mediante datos funcionales, analizar los años conjuntamente a partir de un modelo funcional concurrente, para determinar estadísticamente el efecto que tiene la tasa de cambio sobre el precio del petróleo WTI en el mercado colombiano para el periodo 2000 a 2015. Para este análisis, se iniciara con un análisis descriptivo de las curvas o funciones que son representadas por los años del periodo de estudio, con la media funcional, coeficiente de variación funcional propuesto por Keser, Kocakoc & Sehirlioglu (2016), un ACP funcional para el comportamiento general que tienen las curvas, reconocer los años que presentan situaciones atípicas mediante Bagplot y HDR boxplot propuesto por Hyndman Rob j. & Shang (2010), y finalizar con el ajuste del modelo funcional concurrente.

Este documento se estructura de la siguiente manera: después de esta introducción se realiza una descripción del marco de referencia de la determinación la tasa de cambio, el petróleo WTI y los datos funcionales, seguido de la teoria del modelo funcional. La sección 4 se refiere al análisis de los resultados encontrados. Finalmente, se establecen las conclusiones del estudio y la discusión final de los hallazgos.

2. Marco de Referencia

2.1. Tasa de Cambio

En toda economía abierta al mundo se debe manejar el concepto de tipo de cambio, que es el *precio relativo*, el cual es el precio del dinero de un país en términos de la moneda de otro país. Se tiene dos conceptos importantes para definir la tasa de cambio, que son el tipo cambio nominal (TCN) y el tipo de cambio real (TCR), la TCN o tipo de cambio directo se le conoce por la cantidad de unidades de moneda nacional que es necesario para adquirir una unidad de moneda extranjera. La TCR es la variable que ajusta el Tipo Cambio Nominal, con la relación existente entre los precios externos y los precios domésticos.

$$\text{TCR} = \text{TCN} * \text{PExternos} / \text{Pinternos}$$

En una economía puede desplazarse de extremo a extremo, en un Sistema de Tipos de Cambio Flexibles o un Sistema de Tipos de cambio Fijo. En un sistema de tipos de cambio fijos, los bancos centrales extranjeros están dispuestos a comprar y a vender sus monedas a un precio fijado por el banco central local (Dornbusch; Fischer; Startz, 2008). El precio relativo de una moneda no varía libremente, es decir, que no está siendo determinado por el mercado, sino que es fijado por una entidad, por lo general es el Banco Central que es el encargado de mantenerlo. Por otro lado, un sistema de Tipos de Cambios Flexibles, los bancos centrales autorizan que el tipo se ajuste para buscar el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda de divisas (Dornbusch; Fischer; Startz, 2008). Sin embargo, debido a problemas de inflación que esté puede generar, no es fácil hablar del sistema de tipo de cambio fijo (flotación limpia pura), en cambio, se llega a aceptar un sistema de tipo de cambio flexibles (flotación sucia), donde las autoridades pueden interponerse cuando sea necesario. Colombia posee una flotación sucia, con lo que se debe tener en cuenta la apreciación cambiaria y la depreciación cambiaria, que consiste en un aumento o disminución en el valor de la moneda nacional requerida para comprar una moneda extranjera (Escobar, 2012). Un factor importante de tener en cuenta son las importaciones y exportaciones, por ejemplo es cuando la moneda de un país "*divisa*" se deprecia los extranjeros encuentran que sus exportaciones son más baratas y los residentes nacionales encuentran que las importaciones del extranjero son más caras, una apreciación de la moneda tiene el efecto contrario: los extranjeros pagan más por los productos de un país y los consumidores nacionales pagan menos por los productos extranjeros (Krugman y Obstfeld, 2006)

2.2. Mercado de Divisas

En el mercado de divisas, la tasa de cambio es definida por una interacción de variables endógenas (observables) y exógenas (No observables). El caso particular del dólar, lo que determinan su precio es la oferta y la demanda. La oferta de dólares viene siendo dada por transferencias que envían los colombianos residentes en el exterior a sus familiares en Colombia, inversionistas extranjeros que traen recursos con el fin de invertir en Colombia, exportaciones nacionales de bienes y servicios. La demanda de dólares sería el caso contrario de la oferta, inversionistas que desean liquidar sus inversiones en Colombia para invertir fuera del país, la deuda externa que el gobierno colombiano necesitara dólares para pagar servicios, las importaciones de bienes y servicios que requerirá de dólares con el fin de pagar sus compras (Alonso; Cabrera, 2004).

En resumen la relación entre oferta y demanda es afectada por otras variables económicas, como lo es la deuda externa, inversiones que se hagan en Colombia, la cantidad de dinero en la economía e intervenciones del Banco de la República. Para la oferta, esta determina el precio del dólar, ya que al disponer de mayores medios de pago se demanda más dólares, es decir, la relación no sería directa; por lo que "si el Banco de la República aumenta la cantidad de dinero en la economía, es posible que una proporción importante del dinero adicional se destine a comprar dólares" (Cárdenas, 2013).

Otra relación a tener en cuenta son la oferta monetaria y el tipo de cambio en corto plazo, que se define a partir de: “un incremento de la oferta monetaria del país se traduce en un depreciación de su moneda en el mercado de divisas, mientras que una reducción de la oferta monetaria conduce a una apreciación de la misma” (Krugman; Obstfeld; Melitz, 2012). Con esto, se confirma que si se tiene una relación entre ambos mercados, el mercado de divisas y el mercado monetario, con lo que: “el mercado monetario fija el tipo de interés del dinero, que a su vez influye sobre el tipo de cambio. Por lo cual, un incremento constante de la oferta monetaria reduce el tipo de interés (como respuesta al exceso de medios de pago) a medida que el mercado de dinero alcanza el nuevo punto de equilibrio.” (Rivera; Toro; Riascos, 2017).

2.3. El petróleo: Extracción y Producción

El petróleo es una mezcla de hidrocarburos comprimidos, que se manifiestan del cubrimiento de plantas acuáticas por sedimentos y de restos de animales, rocas y minerales, que con el tiempo se van formando gracias a la temperatura y la presión ejercidas sobre restos durante millones de años⁴. Debido a su composición química y la disposición de sus moléculas, el petróleo posee tres tipos de petróleo crudo: los paranínicos, los asfálticos y aquellos de base mixta. Es el producto de mayor comercialización a nivel mundial y el más transado en los mercados de todo el mundo; mientras sus derivados se utilizan en diferentes industrias desde la energética hasta la agricultura⁵. Uno de los derivados del petróleo mas influyente en la determinación del precio es el combustible para calefacción o el heating oil⁶, ya que es muy utilizado en el invierno (sobre todo en el norte de América) y sus niveles de inventarios y demanda esperada es uno de los más importantes determinantes en la determinación del precio del petróleo.

Algo importante a tener en cuenta con relación al precio es la referencia geográfica, ya que afecta directamente las ganancias. Los crudos ligeros se deben tener en cuenta que son deseables, ya que su extracción es más fácil y así se obtienen productos destilados con mayor facilidad a diferencia de los crudos pesados, con lo que llega a tener mayor ganancia económica este. Por otro lado, para establecer su referencia, se examina cada barril de crudo en los laboratorios de estudios de petróleo, ya que estos tienen una composición molecular única.

Extracción y Producción

Se realiza la exploración petrolífera en regiones donde el suelo permita la formación de hidrocarburos, también notar que ese suelo tenga material orgánico y que haya transcurrido el tiempo suficiente para que el petróleo se formara y haya ascendido por la corteza. Este proceso tarda alrededor de décadas de millos de años. Teniendo en cuenta estos factores se emplea a estudiar antecedentes del suelo para extraer muestras del mismo con técnicas como la perforación o bien se puede usar una prueba sísmica, que consiste en estudiar cómo se refractan y reflejan las ondas en las rocas, con lo cual facilitara saber cómo están las condiciones del suelo y si cabe la posibilidad que en esta área se almacene petróleo y/o gas. Mencionar también que, en su mayoría el gas viene disuelto en el petróleo crudo, y es necesario separarlo para su respectivo procesamiento. Cuando se descubre un pozo petrolero que contenga petróleo crudo, gas o ambos, se hacen perforaciones de pozos adicionales con el fin de conocer la extensión del yacimiento y las condiciones de producción del mismo.

Después se procede a producir el petróleo para lo cual se construyen gasoductos, tanques y oleoductos, para que el crudo sea procesado, trasladar a los mercados y finalmente ser vendido. Algunos prefieren tener reservas de estos y venderlos luego. Una vez estando ya en la parte de producción del petróleo que se encontró en el yacimiento, algo fundamental es la presión natural dentro del yacimiento, y aún más si se quiere estudiar la viabilidad económica. La presión juega un papel importante en la producción del crudo, ya que ésta varía de acuerdo a las condiciones geológicas y al yacimiento, tales como “la roca en la que está el yacimiento, y la historia de su producción”, es decir, que debido a la presión natural del subsuelo tiene la suficiente fuerza como para hacer subir al petróleo hacia la superficie. A este fenómeno

se le conoce como "levantamiento natural". No obstante, este fenómeno no es permanente en las áreas o en el yacimiento. A medida que el petróleo deja de fluir hacia la superficie, este desaparece. Y para su extracción, debe ser bombeado usando métodos artificiales como el más usado que es el "levantamiento artificial", que funciona a partir de gas y electricidad para bombear el petróleo hacia la superficie.

A medida que pasa el tiempo, estos métodos van perdiendo efectividad, por lo tanto la producción de crudo empieza a necesitar métodos secundarios de producción. Uno de los más empleados es el de filtrar agua en los yacimientos para forzar el crudo a subir hacia los oleoductos. En esta última década, la demanda de crudo existente ha aumentado, con lo que fue necesario implementar nuevos métodos terciarios de producción, en donde se concentran en incrementar las características del flujo de petróleo a través de dióxido de carbono, vapor y otros gases o químicos.

2.4. Sector Petrolero Colombiano

El Petróleo contribuye de forma importante en la dinámica de la economía colombiana, debido a que es uno de los bienes de mayor relevancia dentro del rubro de exportaciones en el país. Y así mismo, en una de las actividades más importantes en años recientes. A lo largo del siglo XX, la industria petrolera sufrió ciertas dificultades, la del arduo trabajo para encontrar petróleo entre otras de carácter político, económico y jurídico.

De acuerdo con algunos registros históricos, el primer descubrimiento de petróleo en Colombia fue en el siglo XVI, momento en el que un grupo comandado por Gonzalo Jiménez de Quesada llegó a la Tara, que hoy se conoce como Barrancabermeja, y las instalaciones industriales más importantes de Ecopetrol. La expedición española encontró un líquido negro que brotaba de la tierra y que los indígenas usaban a manera de ungüento corporal, con propósitos medicinales (Mayorga, 2002). Otros lugares que se vinculan a la industria petrolera son La Guajira en Orito, la región de catatumbo y las cercanías de Lórica.

En 1905, el gobierno colombiano concedió a Virgilio Barco permiso para explotar fuentes de petróleo en el actual departamento de Norte de Santander. A medida que pasa el tiempo, en la primera de estas dos concesiones, se descubrió lo que se conoce en la industria petrolera con el nombre de un gigante, el campo Cira-Infantas, que tras sucesivos traspasos quedó finalmente en manos de la Tropical Oil Company, cuyas acciones pertenecían a la Standard Oil de New Jersey. Finalmente, luego de numerosas disputas legales que involucraron tanto a magistrados de la Corte Suprema de Justicia como a ex presidentes de la República, esta concesión revirtió al estado en agosto de 1951, siendo manejada por la compañía petrolera creada por el gobierno en 1948 con ese propósito que es Ecopetrol (Mayorga, 2002).

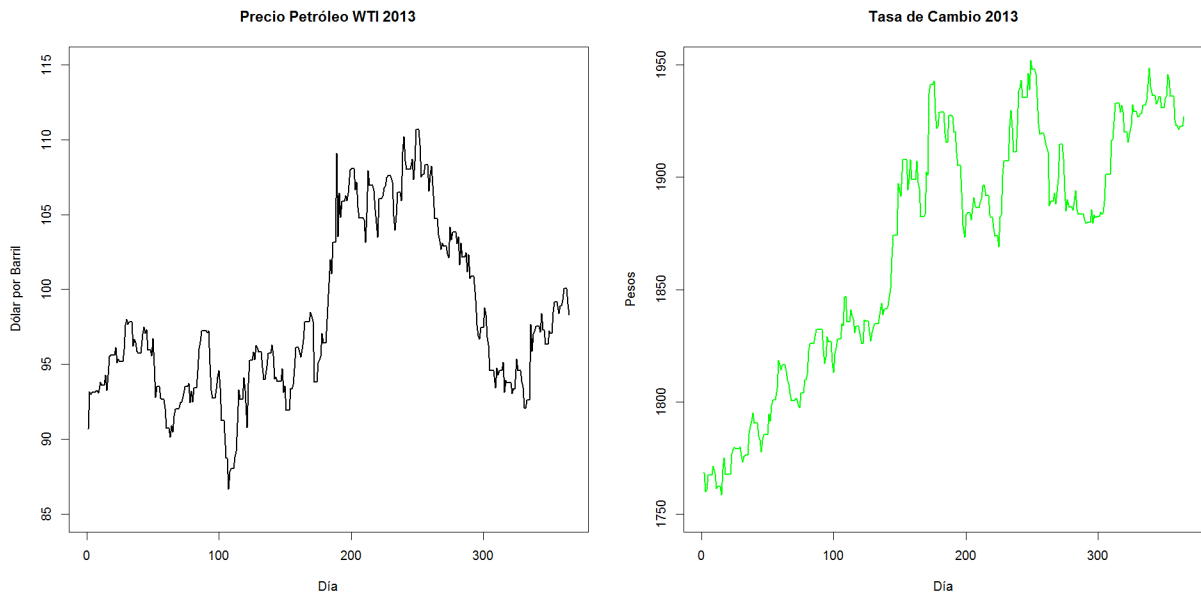
Durante el período 1955-1974, el coeficiente de exportaciones del país disminuyó a causa del lento crecimiento de las exportaciones de café (a excepción de la segunda mitad de la década de los setenta). Las exportaciones minerales durante este período crecieron, a causa del aumento del precio del oro durante la primera mitad de la década de los setenta, pero la producción de hidrocarburos en Colombia no corrió con la misma suerte; el hallazgo de gigantescas reservas en otras partes del mundo hizo que las compañías multinacionales no encontraran atractivo explorar (Ocampo, 2014).

La disminución de producción debido a la guerra de Irán en octubre de 1973, y como consecuencia los precios se multiplicaron por cuatro, que causó un aumento en la perforación exploratoria, debido a tal esfuerzo se encontraron yacimientos en 1983 en Cañón Limón, que hizo posible la autosuficiencia petrolera en Colombia. A finales de los setenta, Ecopetrol organizó una nueva empresa llamada Terpel en Bucaramanga en 1968, con el objetivo de proyectarse a otras regiones. Según cifras dadas por el Departamento Nacional de Planeación (DNP), Ecopetrol, en la primera mitad de los setenta, tuvo una producción nacional del 17%, un 45% en la segunda mitad de los setenta, en los ochenta aumentó al 55% y los noventa se elevó al 64%.

2.5. Cambios de la tasa de cambio y el precio del Petróleo WTI

Una posible razón y, la más común, que explica un aumento del precio del petróleo es la tasa de cambio, la interacción entre Estados Unidos y la economía mundial, ya que un dólar fuerte es reflejo del aumento

de la economía americana. La coyuntura de Estados Unidos y la mundial influyen los movimientos o cambios del petróleo y el dólar, si la economía de Estados Unidos se fortalece, por ende su divisa también. Como su producción energética ha aumentado, los precios de los commodities del petróleo fluctúan, según "la regla de oro colombiana" habría de esperarse una relación inversamente proporcional, es decir, aumentos en los precios del petróleo correspondidos con la apreciación de la moneda, pero esta regla no siempre se da ya que depende de los diferentes choques que enfrenta la economía (Blanchard & Gali, 2007) El 2013 es un ejemplo de esto donde se observa que ambas series van aumentando y tienen relación positiva después de inicios de abril.



Otro ejemplo también puede ser la crisis de Rusia y Asia a finales de los noventa, tanto el dólar como el petróleo bajaron, debido a lo que se conoce como "Efecto Vodkaz" "Efecto Domino", lo que se sugiere pensar en que otros factores que explique los cambios que tiene el precio del petróleo.

Una segunda posible razón que explique el cambio del petróleo es la oferta y la demanda, en poder sustituir una inversión en divisas por una en materias primas como el petróleo. Invertir en divisas aleja el riesgo de una caída en precios de materias primas y vice-versa. En Colombia, una alta parte de la Inversión Extranjera Directa (IED) está ligada al sector energético, es decir, hablamos de un problema de oferta y demanda. La demanda por activos en dólares aumenta, subiendo así el precio del dólar, la baja rentabilidad del petróleo disminuye su atracción y, por ende, su demanda, llevando su precio a la baja.

La tasa de interés es otra posible razón, un aumento en la tasa de interés de un banco central, es señal de presiones inflacionarias, lo que se interpreta como una advertencia a inversionistas a retirarse o alejarse del mercado cambiario, ya que si la inflación no preocupa en demasía a nadie, es raro que las inversiones se vuelquen sobre materias primas como el petróleo y que éste vuelva a subir. Los inversionistas, posiblemente, se inclinarían por las divisas, lo que implica que sube la demanda y a su vez el precio del dólar, es decir, que ambos precios tanto como el petróleo y el dólar están sujetos a expectativas sobre las tasas de interés y la inflación.

3. Análisis de Datos Funcionales (ADF)

El análisis de datos funcionales, se ha expandido rápidamente en los últimos años. La amplia amplitud de aplicaciones y herramientas hacen una definición precisa de los datos funcionales sea algo difícil. A un alto nivel, uno debería pensar que los datos funcionales surge cuando una de las variables o unidades

de interés en un conjunto de datos puede ser naturalmente visto como una curva suave o función. El análisis de datos funcionales puede ser considerado el como el análisis estadístico de muestra de curvas (posiblemente combinado con vectores o escalares también).

Un dato funcional no es una observación única, si no más bien es un conjunto de medidas a lo largo del tiempo que, tomados en conjunto, deben ser considerados como una sola entidad, curva o imagen. Por lo general, el continuo es el tiempo, y en este caso, los datos se denominan comúnmente "longitudinales". En este documento, se analizara las variables funcionales se caracterizan por la evolución de una variable a lo largo del tiempo (proceso estocástico), de modo que los valores que toman son funciones.

El análisis de datos funcionales transforma los datos discretos en funciones; la unidad básica de información es la función completa, a la que se le aplica diversas técnicas, con el objetivo de descubrir estructuras que, con el análisis de datos discretos, no sería posible evidenciar.

El análisis de datos funcionales es aquella parte de la estadística que trabaja con muestras de funciones aleatorias. Ramsay y Silverman (2005), entre otros, han introducido herramientas de análisis de para este tipo de datos. Las medidas de tendencia central, de dispersión y de relación entre variables aplicadas a muestras de variables aleatorias, se pueden definir de manera análoga para muestras de datos funcionales. Sólo hace falta considerar que ahora estaremos trabajando en un espacio vectorial distinto: el espacio L_2 (funciones cuadrado integrables). En realidad, Ramsay y Silverman definen estas medidas manera general para cualquier espacio que tenga definido un producto escalar, y luego deduce de ellas las definiciones para muestras de funciones (RAMSAY & SILVERMAN, 2005).

El conjunto de datos más simple encontrado en ADF es un simple de la forma:

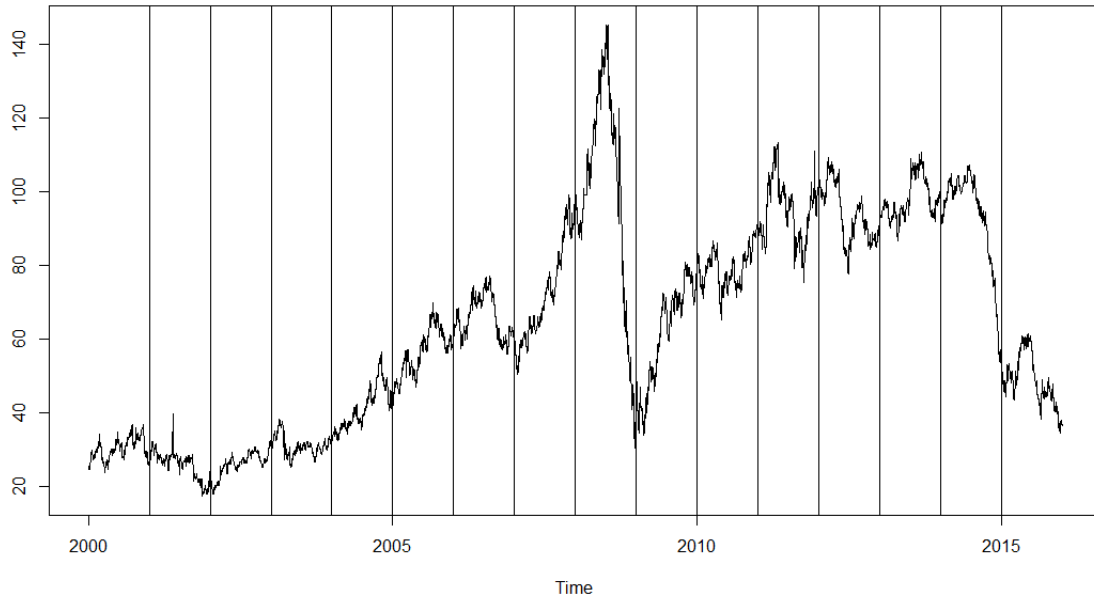
$$x_n(t_{j,n}) \in \mathbb{R}, t_{j,n} \in [T_1, T_2], n = 1, 2, 3, \dots, N, j = 1, \dots, J_n.$$

Esto significa que N curvas observadas en un intervalo común $[T_1, T_2]$. Los valores de las curvas nunca se conocen en todos los puntos $t \in [T_1, T_2]$, están disponibles solo en algunos puntos en específico $t_{j,n}$ el cual puede ser diferente para diferentes curvas x_n . Muchas aplicaciones importantes de ADF tratan con situaciones donde el numero de puntos, $t_{j,n}$, por curva es pequeño, por ejemplo un número de un solo dígito. En cualquier caso, una idea fundamental de ADF es que los objetos que queremos estudiar son curvas suaves

$$x_n(t) : t \in [T_1, T_2], n = 1, 2, 3, \dots, N$$

para el cual los valores $x_n(t)$ existe en cualquier punto t , pero se observan solo en puntos seleccionados $t_{j,n}$. Por ejemplo, una de las variables que se va analizar en este trabajo es el precio del petróleo WTI, que se muestra la serie completa desde 2000 hasta 2015 $x_n(t)$ en el año n en el tiempo t que representa los días del año.

Precio del Petróleo WTI



3.1. Suavizamiento

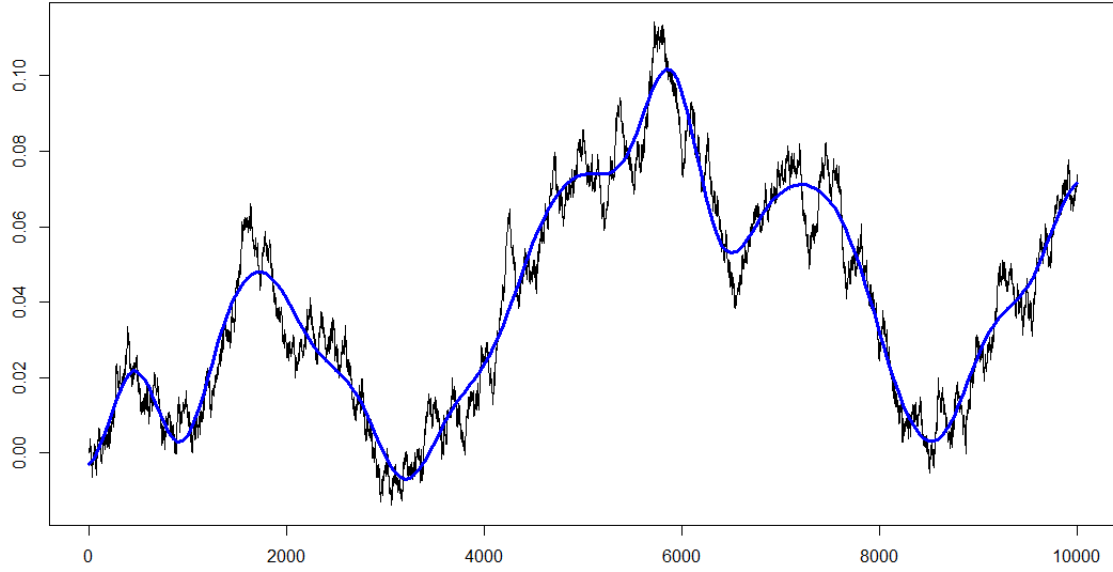
El primer paso para trabajar con datos funcionales es expresarlos mediante una expansión de base. El suavizado de curvas a través de funciones consiste en aproximar las funciones del espacio considerado a través de:

$$X_n(t) = \sum_{m=1}^M c_{nm} B_m(t), 1 \leq n \leq N. \quad (1)$$

Donde B_m son algunas colecciones estandar de "basis functions", Fourier, B-splines, Wavelets, etc... La expansión de base refleja la intuición de que los datos son observados de funciones suaves que comparten algunas propiedades de forma, y así puede ser aproximado como una combinación lineal de algún M formas básica B_m , con M siendo típicamente más pequeño que el numero de puntos de tiempo observado, J_n . Si el numero de puntos t_{j_n} es muy largo, como el magnetómetro o datos financieros de alta frecuencia, la expansión base tiene el propósito de reemplazar la escala de los datos originales $X_n(t_{j_n})$ por una pequeña colección de los coeficientes c_{nm} . Si los puntos de tiempo t_{j_n} difieren entre sujetos, la expansión pone las curvas en un dominio común, para que sean más fácilmente comparables. Por cada n , la curva x_n es representado por el vector columna $c_n = [c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nM}]^T$ de dimensión M.

El siguiente ejemplo ilustra la construcción de una expansión base usando una simulación de datos. Esto nos permite enfocarnos en aspectos esenciales sin entrar en el pre procesamiento de datos reales.

$$S_i = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=1}^i N_k, N_k \sim iidN(0, 1), 1 \leq k \leq K \quad (2)$$



En el gráfico muestra una trayectoria de la camina aleatoria cual puede ser visto como una función definida en el intervalo $[0, K]$ por $X(t_i) = S_i, t_i = i$. Para el suavizamiento es necesario estimar c de la ecuación (1), que parte de suponer que las funciones de coeficientes en el operador diferencial lineal son constantes:

$$L(x)(t) = \sum_{m=0}^M \alpha_m x^{(m)}(t) \tag{3}$$

Con lo que se tiene que

$$\int_{T_1}^{T_2} (L(x_k)(t))^2 dt = \int_{T_1}^{T_2} \left(\sum_{m=0}^M \alpha_m x_k^{(m)}(t) \right)^2 dt \tag{4}$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^M \alpha_m \alpha_p x_k^{(m)}(t) x_k^{(p)}(t) dt$$

$$= \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^M \alpha_m \alpha_p \int_{T_1}^{T_2} x_k^{(m)}(t) x_k^{(p)}(t) dt$$

$$\int_{T_1}^{T_2} x_k^{(m)}(t) x_k^{(p)}(t) dt \tag{5}$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \left(\sum_{j=1}^K c_j B_j^{(m)}(t) \right) \left(\sum_{k=1}^K c_k B_k^{(p)}(t) \right) dt$$

$$= \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K c_j c_k \int_{T_1}^{T_2} (B_j^{(m)}(t))(B_k^{(p)}(t)) dt = c^T R_{mp} c$$

Por lo tanto

$$\int_{T_1}^{T_2} (L(x_k)(t))^2 dt = \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^M \alpha_m \alpha_p (c^T R_{mp} c) = c^T R c \tag{6}$$

Donde $R = \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^M \alpha_m \alpha_p R_{mp}$, ahora para estimar c se debe penalizar la suma de cuadrados

$$\begin{aligned}
 PSS_\lambda &= \sum_j (Y_j - x_k(t_j))^2 + \lambda \int_{T_1}^{T_2} (L(x_k)(t))^2 dt \\
 &= \sum_j (Y_j - x_k(t_j))^2 + \lambda c^T R c \\
 &= \sum_{j=1}^n (Y_j - \sum_{k=1}^K c_k B_k(t_j))^2 + \lambda c^T R c \\
 &= \sum_{j=1}^n (Y_j - \Phi(t_j)^T c)^2 + \lambda c^T R c \\
 &= (Y - \Phi c)^T (Y - \Phi c) + \lambda c^T R c \\
 &= Y^T Y - Y^T \Phi c - c^T \Phi^T Y + c^T \Phi^T \Phi c + \lambda c^T R c
 \end{aligned} \tag{7}$$

Para finalmente estimar c , se deriva la ecuación (7) con respecto a c , se iguala a cero y se despeja c y se obtiene como resultado lo siguiente

$$\hat{c} = (\Phi^T \Phi + \lambda R)^{-1} \Phi^T Y \tag{8}$$

3.2. Análisis descriptivo funcionales

Como ya se mencionó las medidas de tendencia central, de dispersión y de relación entre variables aplicadas a muestras de variables aleatorias se aplican igualmente para muestras de datos funcionales, sólo que en este caso, los objetos calculados corresponden a curvas.

Las correspondientes funciones descriptivas de la media y la desviación estándar utilizadas en este trabajo están dadas por las expresiones:

Dado un conjunto de datos funcionales X_1, X_2, \dots, X_n definidos en $t \subset T \in \mathbb{R}$

1. Media: $\bar{X}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i(t)}{n}$
2. Varianza: $Var(X(t)) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i(t) - \bar{X}(t))^2}{n}$

3.3. Detección de curvas atípicas

Existen actualmente diversas herramientas para visualizar grandes cantidades de datos funcionales en forma de curvas suavizadas; dentro de ellas se incluyen el gráfico arco iris, el diagrama de caja funcional, y el diagrama de región de mayor densidad (HDR) funcional, que sirven como métodos de análisis a través de una interfaz gráfica.

Estos métodos facilitan el hallazgo de características que podrían no haber sido evidentes con el uso de estadísticos y modelos matemáticos, como lo es la identificación con precisión de valores atípicos con gran velocidad de cálculo, mientras que proporciona una representación gráfica, que pueden no ser identificadas a partir de un gráfico de los datos originales.

3.3.1. BAGPLOT Funcional

El bagplot funcional es basado en el bagplot bivariado (Rousseeuw, Ruts & Tukey, 1999), aplicando a los dos primeros componentes principales robustos. Usada por Tukey's (1975) profundidad de ubicación de medio espacio. La región profunda D_k es el conjunto para todo θ , con $d(\theta, z) \geq k$. Porque la región profunda de una serie de cascos convexos, tenemos $D_{k_1} \subset D_{k_2}$ para $k_2 > k_1$. La mediana Tukey está definida como el valor de θ el cual minimiza $d(\theta, z)$ si hay tal un único θ ; otro lado está definido como el centro de gravedad de la región más profunda.

Como un boxplot univariado, el bagplot bivariado tiene un punto central, que sería la mediana de Tukey, una región interna (the "bag"), y una región externa (the "fence"), más allá de que valores atípicos se muestran como puntos individuales. El "bag" está definido como la región profunda más pequeña que contiene al menos el 50% del número total de observaciones.

El bagplot funcional es un mapeo del bagplot de las dos principales componentes robustas a las curvas funcionales. El bagplot funcional muestra la curva mediana que es la curva con mayor profundidad, y la región interna y externa. La región interna está definida como la región limitada por todas las curvas correspondientes a puntos en la "bivariate bag". Así, el 50% de las curvas están en la región interna. La región externa se define de manera similar como la región delimitada por todas las curvas correspondientes a los puntos dentro de "bivariate fence región".

3.3.2. HDR BOXPLOT Funcional

El HDR boxplot funcional está basado en el HDR boxplot bivariado (Hyndman, 1996), que es aplicado a los scores de las dos principales componentes robustas. El HDR boxplot bivariado es construido usando un kernel estimado de densidad bivariado $\hat{f}(z)$, que está definido como:

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_i}(z - Z_i) \quad (9)$$

Donde Z_i representa un conjunto de puntos bivariados. $K_{h_i}(\cdot) = K(\cdot/h_i)/h_i$, K es el kernel funcional, y h_i es el ancho de banda para la i -ésima dimensión. Los anchos de banda fueron seleccionados usando validación cruzada suavizada (Doung and Hazelton, 2005).

Usando el kernel estimado de densidad, un HDR está definido como:

$$R_\alpha = z : \hat{f}(z) \geq f_\alpha \quad (10)$$

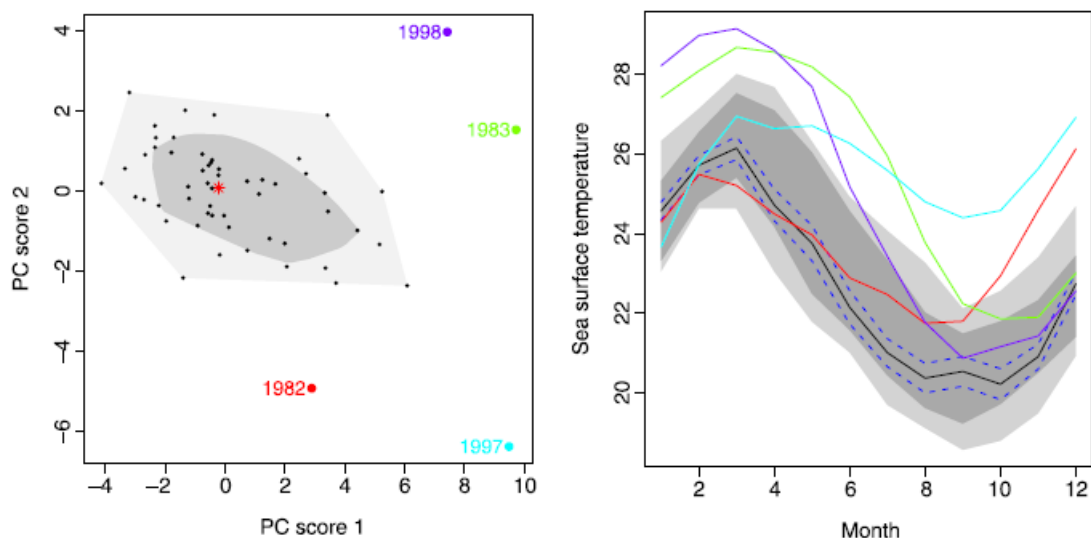
Donde f_α tal que $\int_{R_\alpha} \hat{f}(z) dz = 1 - \alpha$; es decir, esa es la región con cobertura de probabilidad $1 - \alpha$, donde todos los puntos dentro de la región tienen una estimación de densidad más alta que cualquiera de los puntos de fuera de la región, que otorga el nombre de "región de mayor densidad".

El HDR boxplot bivariado muestra la moda (el punto de densidad más alto), definido como $\arg \sup \hat{f}(z)$, a lo largo con el 50% interior y generalmente 99% regiones exteriores de mayor densidad. Todos los puntos excluidos del exterior HDR son atípicos.

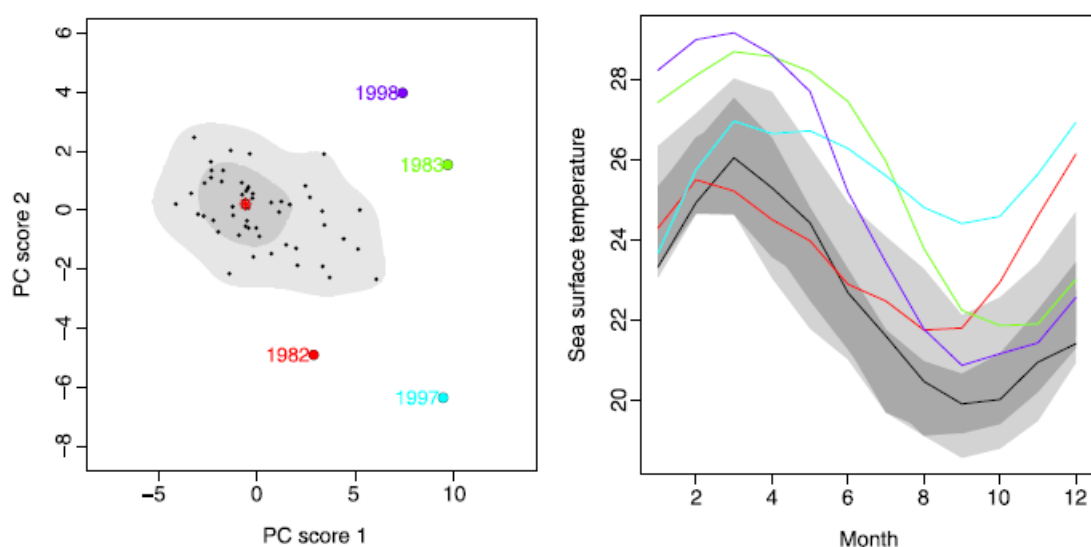
El HDR boxplot funcional es un mapeo del HDR boxplot bivariado del score de las dos principales componentes robustas a las curvas funcionales. El HDR boxplot funcional muestra la curva modal (la curva con la densidad más alta), y la región interna y externa. La región interna está definida como la región limitada por todas las curvas correspondientes a puntos dentro del 50% bivariate HDR. Así el 50% de las curvas están en la región interior. La región exterior está definida similar como la región limitada por todas las curvas correspondientes a los puntos dentro la HDR bivariado exterior.

En las siguientes imágenes se muestran dos ejemplos, usando los datos temperatura de la superficie del mar. En la parte izquierda del gráfico, la región oscura gris muestra el 50% "bag" la región gris clara el 99% "fence". En la parte derecha, la línea negra es la curva mediana, rodeado por 95% intervalos de confianza puntual. Las curvas fuera de la región se muestran como valores atípicos de diferentes colores.

Bagplot Funcional



HDR Boxplot Funcional



3.4. Modelo Regresión Funcional

El modelo de regresión funcional es la extensión natural del modelo de regresión lineal que permite establecer la relación entre una variable respuesta y una o más covariables, con la diferencia que existe por lo menos una variables (respuesta o explicativa) funcional en dicho modelo que tiene la siguiente forma:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

En el cual todas las variables aleatorias son escalares, y las explicativas x_i se suponen típicamente como escalares conocidos. En un modelo lineal funcional, algunas de esas cantidades son curvas y análogos de

los coeficientes β_1 y β_2 debe ser definida apropiadamente.

En ADF se distingue tres casos, en lo que las respuestas o las explicativas, o ambos son curvas. Por simplicidad se supone que las respuestas y las explicativas tienen media cero. En todas las formulaciones, se supone que los errores ϵ_i son independientes de las variables explicativas x_i .

$$Y_i(t) = \int \Psi(t, s)X_i(s)ds + \epsilon_i(t). \tag{12}$$

El modelo de la ecuación (12) se le conoce como *The fully functional model*, donde la respuesta Y_i son curvas, al igual que las explicativas X_i .

$$Y_i = \int \Psi(s)X_i(s)ds + \epsilon_i(t). \tag{13}$$

El modelo de la ecuación (13) se le conoce como *The scalar response model*, que a diferencia del anterior la respuesta son escalares, y las explicativas X_i siguen siendo una curva.

$$Y_i(t) = \int \Psi(t)x_i ds + \epsilon_i(t). \tag{14}$$

El modelo de la ecuación (14) se le conoce como *The functional response model*, donde la variable respuesta son curvas, y las explicativas son escalares conocidos.

Estos tres modelos, son solo prototipos destinados a ilustrar la idea general. El problema principal es que las funciones Ψ son objetos dimensionales infinitos, es decir, superficies, que debe ser estimados a partir de una muestra finita. Sin restricciones en Ψ un posible ajuste perfecto es todos los residuales son cero, y las estimaciones resultantes $\hat{\Psi}$ son erráticos, funciones de tipo de ruido, que no proporcionan información útil. El parámetro Ψ se estima a menudo restringiendo la acción de los operadores correspondientes a subespacios abarcados por los EFPC's de los datos. Como lo escrito por Horváth y Kokoszka (2012) en el capítulo, los EFPC's resume las principales características de los datos. Este enfoque de estimación elimina una variabilidad similar al ruido. Otro enfoque es imponer una penalidad de aspereza a las estimaciones, lo que tiene un efecto similar de eliminación de ruido y producción de estimaciones interpretables. Estos tres modelos se han modificado en varias direcciones, dependiendo de las aplicaciones disponibles, y se han desarrollado métodos de estimación adecuados.

Para este trabajo, se propone ajustar el siguiente modelo que es una extensión del modelo de la ecuación (12), que tiene una estructura similar al del modelo lineal clásico, con la diferencia de que el vector de parámetros $\beta(t)$, el vector $Y(t)$ y $X(t)$ son vectores de funciones en vez de vectores de números, y se conoce como modelo funcional concurrente, ya que el valor $Y_i(t)$ de la curva respuesta Y_i depende solo del valor de la explicativa X_i en el mismo tiempo, y de ahí el nombre de concurrente.

$$Y_i(t) = x_{i1}\beta_1(t) + x_{i2}\beta_2(t) + \dots + x_{iq}\beta_q(t) + \epsilon_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{15}$$

Por cada unidad i , la respuesta Y_i es una función. Existen q variables explicativas escalar. Los q parámetros de regresión funcional β a menudo se llaman funciones de efecto, donde el modelo (15) puede escribirse como $Y(t) = \beta(t)X(t) + \epsilon(t)$ y así los vectores de modelo se puede expresar de la siguiente manera:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_N(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{bmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \vdots \\ \beta_q(t) \end{bmatrix}, \quad \epsilon(t) = \begin{bmatrix} \epsilon_1(t) \\ \epsilon_2(t) \\ \vdots \\ \epsilon_N(t) \end{bmatrix}$$

Para la estimación de los parámetros β en el modelo (15), seguido de una aplicación ilustrativa de este modelo. El estimador de mínimos cuadrados del parámetro β está definido como el el valor que minimiza

$$\sum_{i=1}^N \|Y_i - \sum_{k=1}^q x_{ik}\beta_k\|^2 = \int \sum_{i=1}^N e_i^2(\beta, t)dt \tag{16}$$

Donde

$$e_i^2(\beta, t) = (Y_i - \sum_{k=1}^q x_{ik}\beta_k)^2$$

Para cada t fijo, $\sum_{i=1}^N e_i^2(\beta, t)$ es minimizado si

$$\hat{\beta}(t) = (X^T(t)X(t))^{-1}X^TY(t) \quad (17)$$

Con lo que los valores ajustados (predictivos) y los residuales se computan usando

$$\hat{Y}(t) = X(t)\hat{\beta}(t), \quad \hat{\varepsilon}(t) = Y(t) - \hat{Y}(t).$$

Una vez teniendo las estimaciones del modelo y los residuales, se procede a calcular el R^2 , que se calcula bajo el mismo razonamiento que en un modelo lineal con el ANOVA, y también cuando se propone un modelo para el ajuste de los datos, se establecen básicamente los supuestos sobre el error de independencia, que para este trabajo se usará el test de Portmanteau para datos funcionales. Para el R^2 se necesita la suma de cuadrados integrada del error y la suma de cuadrados integrada total, con lo que se tiene

$$R_i^2 = 1 - \frac{\int (Y_i(t) - \hat{Y}_i(t))^2 dt}{\int (Y_i(t) - \bar{Y}_i)^2 dt}$$

Para el test de Portmanteau, Székely y Rizzo (2009), proponen el test de independencia para dos variables X y Y , una prueba basada en una medida de dependencia conocida como **la correlación de distancias**. El test básicamente mira si las curvas son incorrelacionadas.

Se tiene las siguientes funciones aleatorias $X_n(t)$, $t \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots, N$

H_0 : Los $X_n(\cdot)$ son independientes e idénticamente distribuidos.

H_1 : La hipótesis nula no se mantiene.

Bajo H_0 , si el supuesto de que las observaciones X_n tienen media 0, en el espacio $L^2[0, 1]$, entonces $\hat{Q}_N \xrightarrow{d} X_{p^2H}^2$ y el estadístico está dada por:

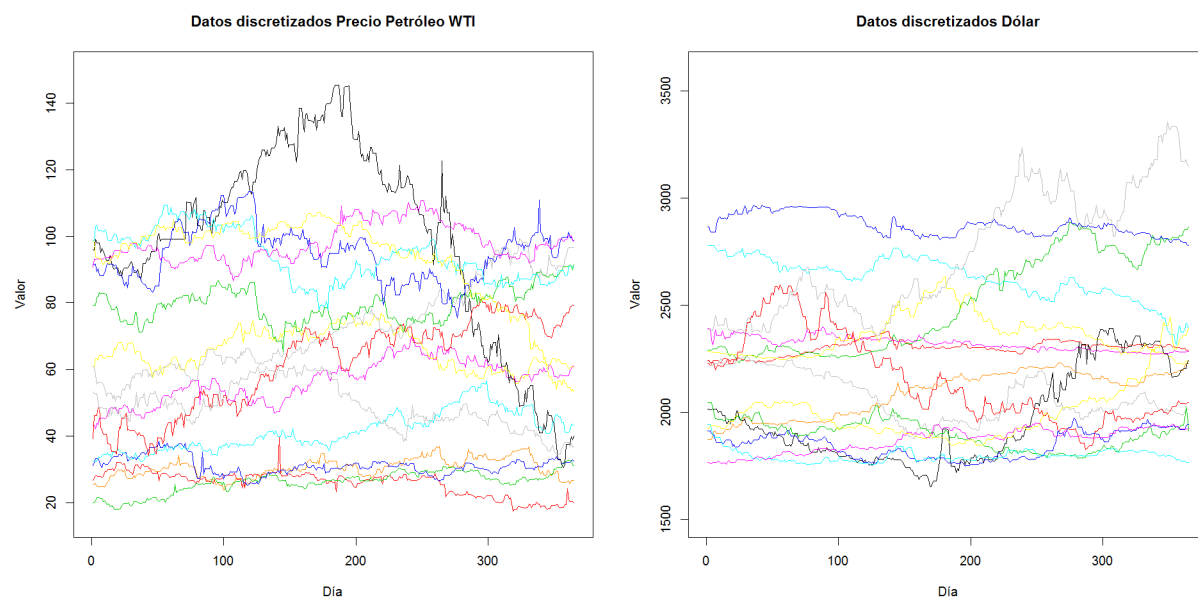
$$\hat{Q}_N = N \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^p \hat{c}_h^2(i, j) \hat{\lambda}_i^{-1} \hat{\lambda}_j^{-1}$$

4. Resultados

4.1. Datos Discretizados

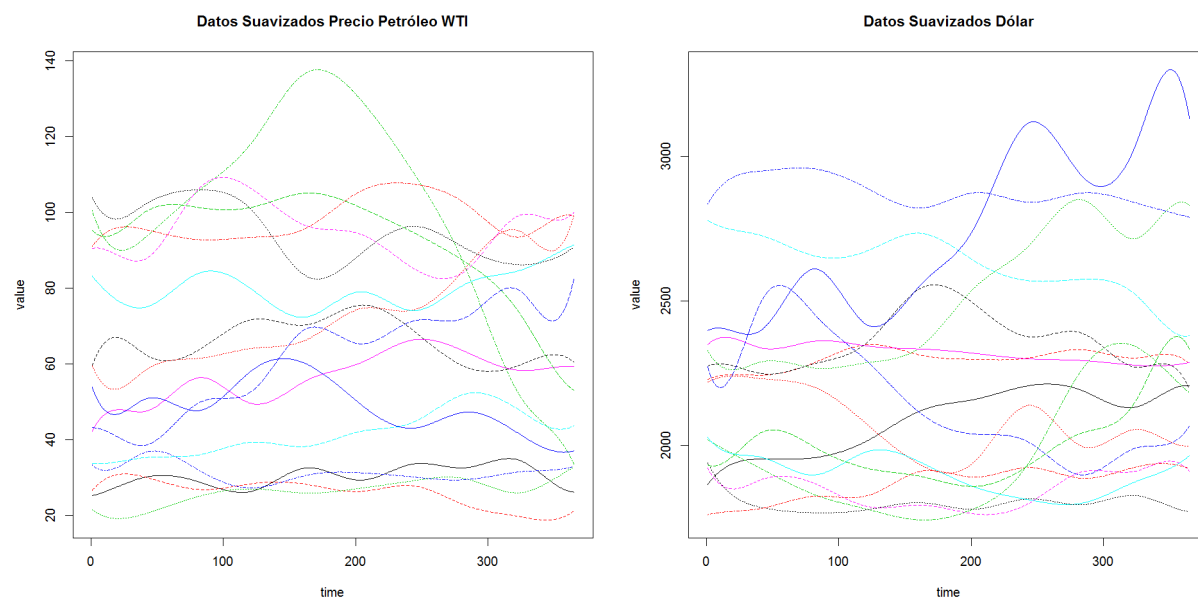
Una vez creado las matrices en R con los datos observados de ambas bases de datos, se puede observar los datos discretizados como se ilustra a continuación:

Ajuste de un modelo funcional para medir el efecto de la tasa de cambio sobre el precio del Petróleo WTI en el periodo (2000-2

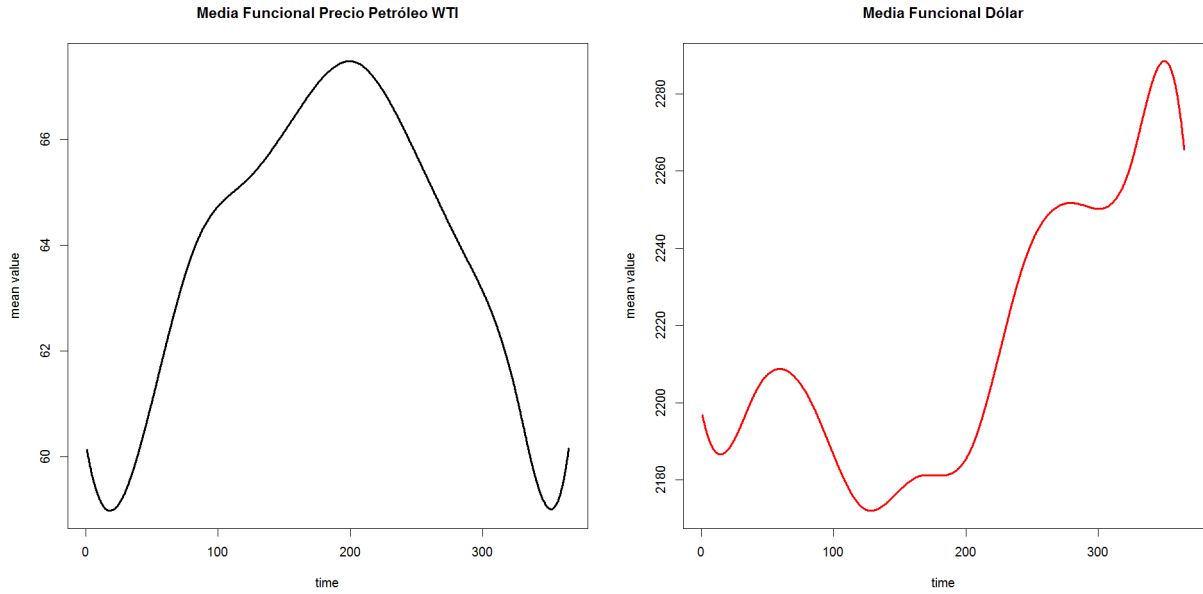


Como se observa en ambas gráficas, en la del dólar son pocas curvas en donde supera los \$3000 COP que es después de agosto, en cuanto al del petróleo se puede apreciar son varias curvas las que están por encima de los \$15000 COP el barril y que se ve que están un poco más dispersos que al del dólar.

4.2. Datos Suavizados y Media Funcional



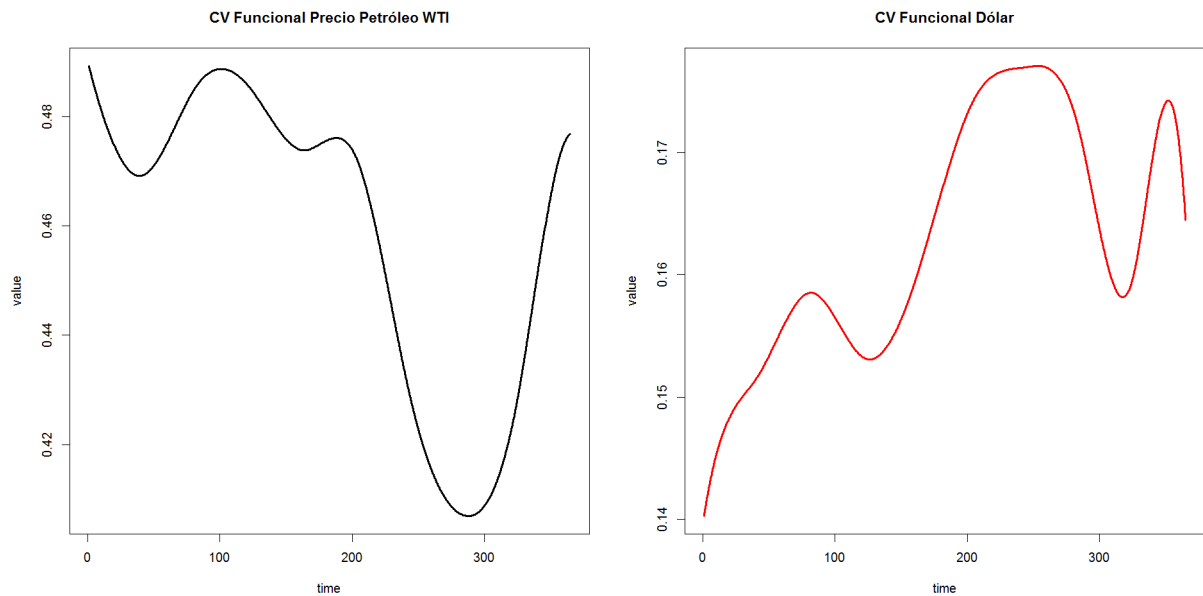
A través de la función `Data2fd` de R se convierten las matrices generadas anteriormente en los gráficos discretizados en un objeto de datos funcionales realizando así su respectiva suavización. Las medidas de tendencia central y dispersión que se usará es la media funcional y el coeficiente de variación funcional que se calcula median la función `mean.fd`, para el coeficiente de variación se tuvo que programar y con la ayuda de la función `exponentiate.fd` se logró evaluar.



Con lo que se observa en la media funcional del precio del petróleo, este oscila entre \$58 y \$68 dólares el precio por barril, en cuanto la tasa de cambio está oscilando \$2180 COP y \$2280 COP. También podemos notar que incluso en el comportamiento de la media llegan a tener una relación inversamente proporcional, que a medida que el precio del petróleo aumenta el dólar disminuye, pero como se dijo anteriormente esta relación no siempre se da y se puede notar entre febrero y marzo que ambas van aumentando.

El comportamiento del petróleo se debe a las reservas de crudo, cuando las sacan al mercado el precio del petróleo empieza a disminuir como se ve que después de agosto presenta una caída, en cuanto al dólar el crecimiento después de mitad de año es debido a un aumento en las tasas de interés del banco central de Estados Unidos.

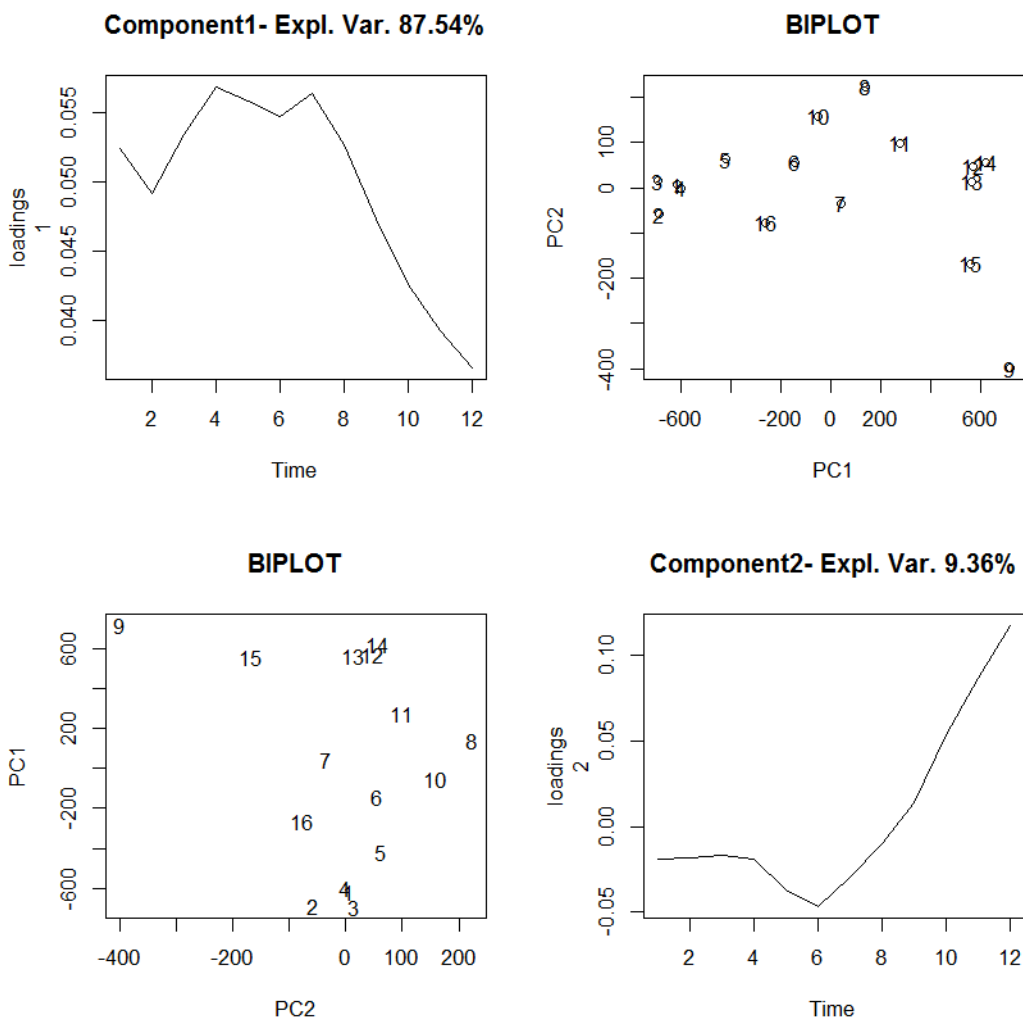
4.3. Coeficiente de Variación Funcional



Se procede a mirar el coeficiente de variación funcional ya que el problema que puede tener la media es que se afectado por valores extremos, en este caso estaríamos hablando de curvas que estén muy alejadas. Para ambas variables se observa que el precio del petróleo tiene más variabilidad como se había sospechado al ver las curvas suavizadas, al inicio del año se observa que es más variable y que variando en un 40 % y 50 % que no es mucha variabilidad la que está presentando, esto se pueda deber a la volatilidad que presenta a final y al inicio de año de cada curva. En cuanto a la tasa de cambio está variando en un 14 % y 18 % que no es mucho, con lo cual lo que se observó en el gráfico de la media funcional está no es tan afectada por curvas atípicas.

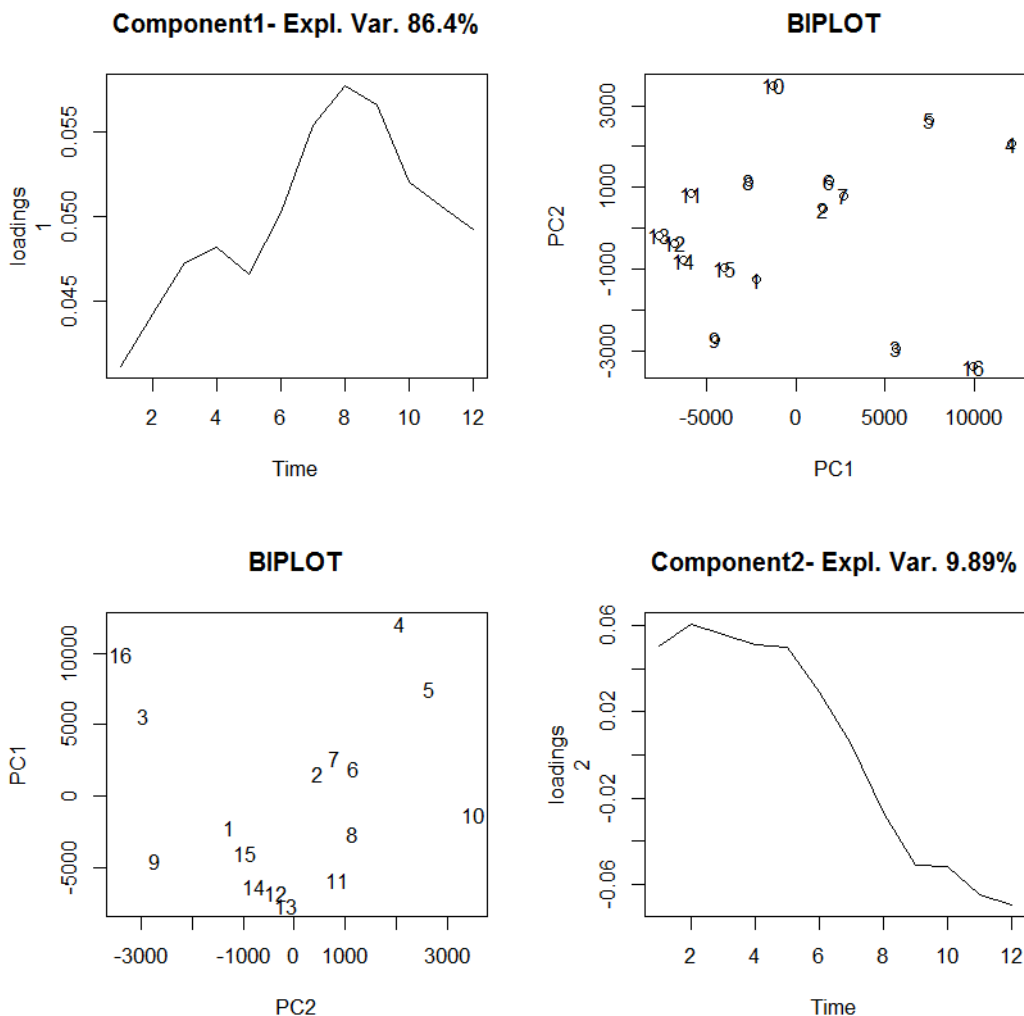
4.4. ACP Funcional

Con la función center.fd se centra los datos para después poder hacer el ACP funcional con la función fdata2pc, con el ACP se puede ver el comportamiento de cada curva para una variable, con lo que se puede ilustrar mejor que años presentan cambios a lo largo del año.



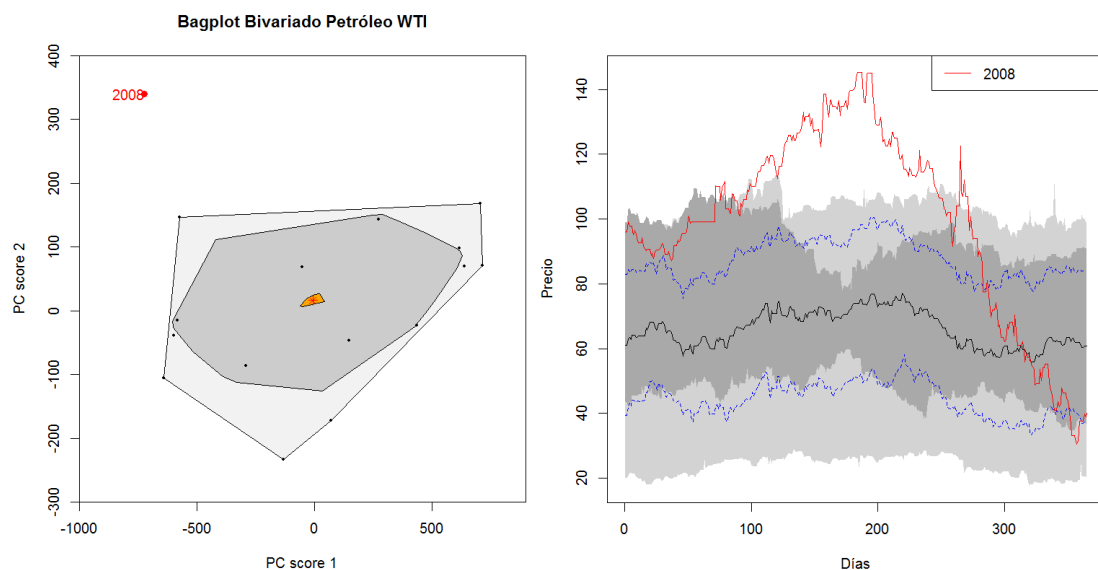
Para el petróleo WTI, notamos en principio que con 2 componentes me está explicando más del 90 % de la variabilidad, R por defecto arroja los numero en el orden en que se encuentran en la matriz (por ejemplo el 1 hace referencia al año 2000 porque es el primer año que se está analizando), vemos que el 9 (año 2008) está más correlacionada con ambas componentes, la primera componente está explicando una

caída a mitad de año, las curvas más afectadas son en el 2008, 2014 y 2013, la segunda componente es el caso contrario que después de mitad de año explica un aumento, con la diferencia de que son pocos años los que presentan este comportamiento que son 2009, 2010 y 2007. Como se mencionó anteriormente con el 2008 que es la que está más alejada de las demás se puede sospechar que este año se puede considerar como curva atípica.

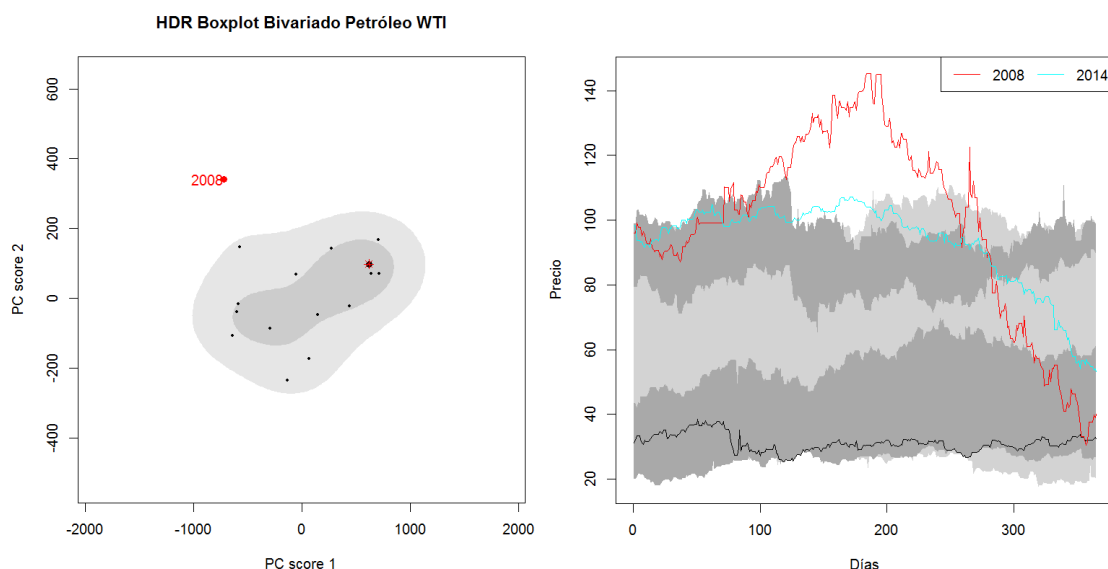


Para el caso del dólar vemos que al igual que el precio del petróleo WTI, con solo 2 componentes está explicando más del 90% de la variabilidad, la primera componente explica un aumento hasta agosto, pero son pocos años los que presentan este comportamiento que es el caso del 2003, también que el año 2015 está muy correlacionada con ambas componentes al igual que el 2002, y como se dijo anteriormente estos al estar alejados de los demás años se puede sospechar que son curvas atípicas, con la primera componente un poco más de la mitad de las curvas presentan no un aumento si no una caída desde inicio de año hasta agosto y por lo que resta tiene un aumento. Con la segunda componente el año 2009 es la que presenta un decaimiento a lo largo del año, este al igual que el 2015 se puede sospechar que también es una curva atípica, al igual que el 2003.

4.5. Identificar Curvas atípicas

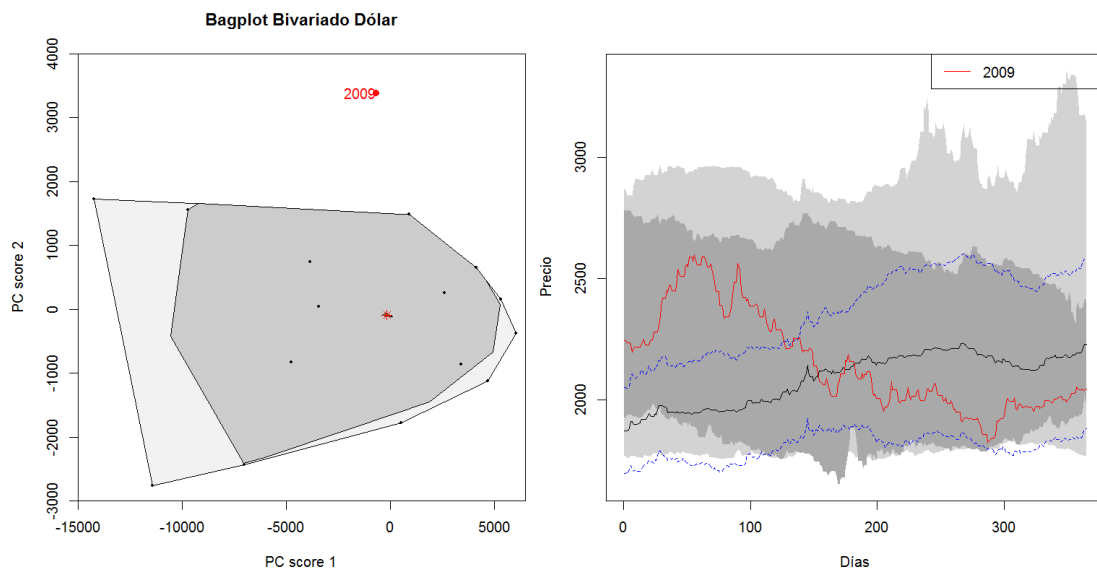


Tal como se muestra en ambos gráfico y lo que se tenía sospechado en el ACP funcional, el 2008 con el Bagplot se considera una curva atípica, con el segundo gráfico notamos que es una curva atípica de forma.

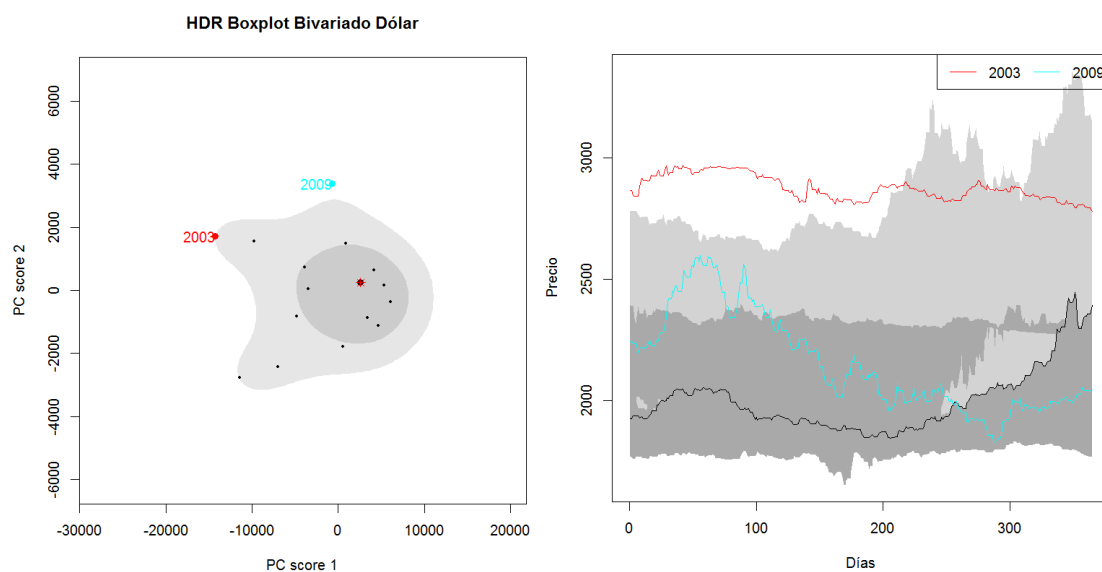


Según el HDR boxplot no solo toma el 2008 como atípico, sino que también considera al 2014 como una curva atípica, y también por lo que se aprecia en el gráfico vemos que es un atípico de forma que en el 2 trimestre se sale de la banda de confianza.

En el 2008 la OPEP anunció un histórico recorte de 2,2 millones de barriles diarios en su oferta de petróleo y obtuvo el apoyo de dos países no miembros del cartel, Rusia y Azerbaiyán, para otros eventuales recortes, pero no logró hacer repuntar de inmediato los precios del crudo. El recorte se suma a las reducciones por un total de dos millones de b/d anunciadas en septiembre y octubre, que según analistas el cartel ha implementado en sólo un 50% y que no logro frenar el desplome de las cotizaciones. Tras la decisión del cartel en su reunión de Orán el barril de West Texas Intermediate (WTI) cayó a su nivel más bajo desde julio de 2004, a 40,20 dólares.



Con el Bagplot, notamos que en ambos gráficos y lo que se tenía sospechado en el ACP funcional, el 2009 se considera una curva atípica, con el segundo gráfico notamos que es una curva atípica de forma.

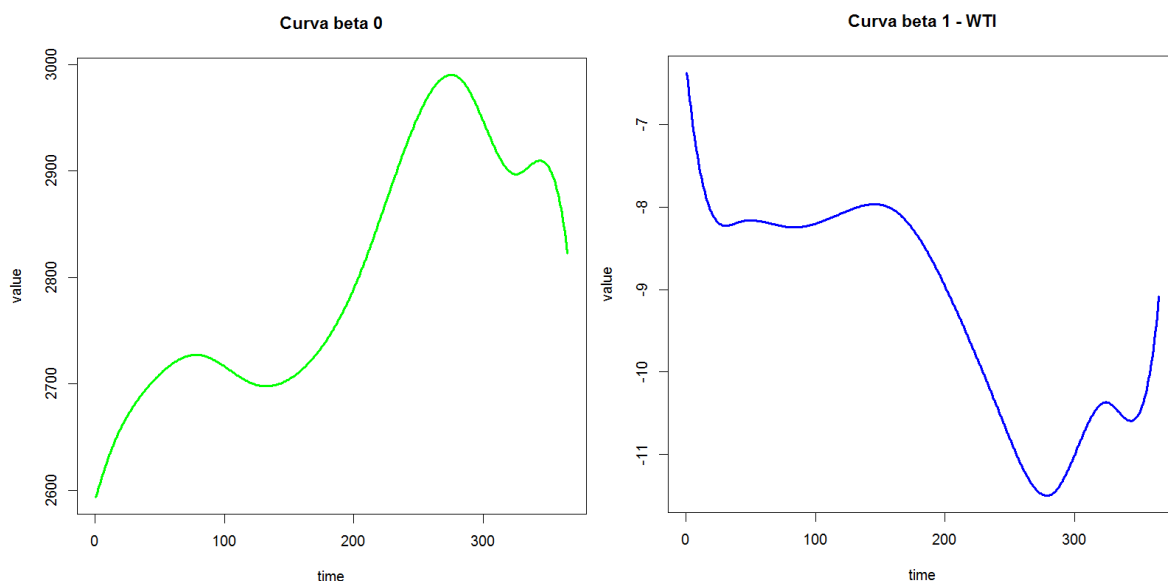


Con el HDR boxplot considera que no solo el 2009 se considera como atípico, si no con que también el 2003 la toma como curva atípica, con la leve diferencia de que este no es una curva atípica de forma al 95 % de confianza.

Para el 2009 presenta tres escenarios, entre finales de 2008 y el 6 de marzo de 2009, el peso colombiano se devaluó 13,3%; entre esa última fecha y el 16 de octubre, se apreció 32,7%; y desde esa fecha a fin de año se devaluó otro 10 %. Según un informe económico del Ministerio de Comercio, Industria y Turismo, en el 2009 la crisis económica internacional, la reducción de los precios de los productos básicos, la tendencia decreciente de la inflación mundial y la desaceleración de la economía y de la demanda interna en Colombia, la Junta Directiva del Banco de la República decidió reducir en forma constante la tasa de intervención, con el objetivo de reactivar la demanda y el consumo.

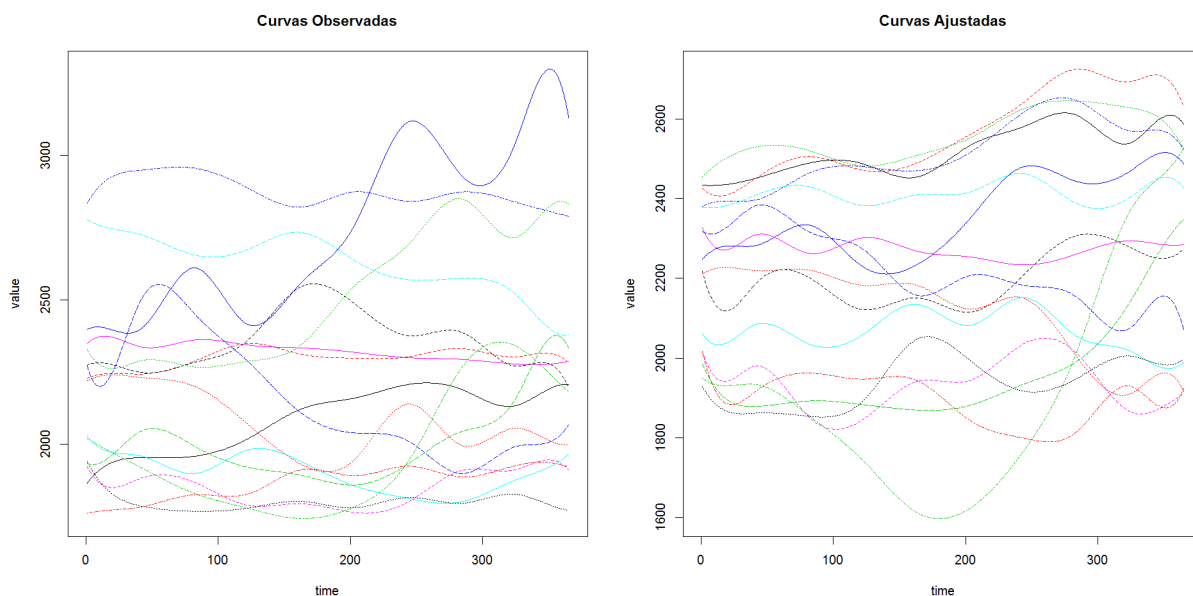
4.6. Regresión Funcional Concurrente

El modelo propuesto $TRM(t) = \hat{\beta}_0(t) + \hat{\beta}_1(t)WTI(t)$



Para este contexto el β_0 no tiene interpretación, ya que el precio del petróleo no puede costar 0 dolares por barril y que la tasa de cambio este entre 2900 y 3000 pesos a lo largo del año.

Para la curva del β_1 , se puede observar que la época más afectada del año es a inicios de octubre y vuelve a retomar una apreciación el peso colombiano, también que después de mitad de año esta se devalúa hasta octubre, y que de a mitad de enero hasta junio el peso colombiano tiende a ser constante, con lo cual se dice que por cada dolar por barril que aumente el petróleo WTI, se espera que la tasa de cambio disminuya 11 pesos a inicios de octubre. Por el otro lado, a comienzos del año, es la época menos afectada, ya que presenta una disminución de 6 a 8 pesos.



Quando se ajusta un modelo para los datos, se deben cumplir unos supuestos sobre los residuales como en regresión lineal. Para datos funcionales, es igual, se deben cumplir los supuestos sobre independencia,

normalidad, media cero y varianza constante. Para este trabajo, al ver los residuales que se calculan a partir de una diferencia de las curvas observadas y las curvas estimadas $\hat{\varepsilon} = Y_i - \hat{Y}_i$, se hizo el test de Portmanteau, donde los resultados se ven en la tabla 1, que hasta el momentos es el unico supuesto que se puede probar, ya que los otros no se han logrado adaptar a los datos funcionales. Con valores p mayores al 10% No se rechaza la hipotesis nula, y se concluye que las curvas de los residuales son independientes e idénticamente distribuidos en el primer rezago. Para el R^2 , dio un valor de 0.9874, es decir, el 98.74 % de la variabilidad de la tasa de cambio en el año, se explica por la variabilidad del precio del petróleo WTI en el año.

Componentes	Valor-p
2	0.2741
3	0.2285
4	0.9999

Tabla 1: Test de Portmanteau.

5. Discusión

1. Con este trabajo se pudo observar la tendencia a inicios del siglo de ciertas variables a través del método conocido como datos funcionales, obteniendo medida descriptivas clásicas que permiten analizar y entender el comportamiento de cada variable a lo largo del año.
2. En el ACP funcional se logró corroborar lo que se tenía pensado de si algunos años se podían considerar como atípicos, debido a que estaban alejados de los demás puntos que se observaban en el ACP, y se confirmó al ver los gráficos de BagPlot y HDRPlot
3. Para detectar curvas atípicas aplicando ambos métodos tanto HDRPlot y BagPlot, se llegó a la conclusión de que el HDRPlot presenta mejores resultados ya que logra captar más curvas que el BagPlot.
4. Por medio de un modelo de regresión funcional concurrente se logró determinar si el precio del petróleo WTI tiene un efecto en la determinación de la tasa de cambio, con lo que se encontró que en un principio la interpretación no es tan diferente de un modelo clásico, y con esas estimaciones se logran ver cómo va cambiando a lo largo del año.
5. Para una próxima labor con este trabajo que se propuso, es la de avanzar con ese tipo de método ya que es nuevo y que es interesante, sería la de evaluar la volatilidad que pueda llegar a tener estas series, también la de aplicarle transformaciones a las variables, diferenciarlas, entre otras que uno generalmente hace en series de tiempo, también la de agregarle más covariables al modelo como lo es la inflación, IPC, tasa de interés, entre otras.

Agradecimientos

Agradecer las asesorías que se hicieron en el transcurso de la investigación con los profesores, al profesor Wilmer Pineda mi asesor y docente de la Universidad Santo Tomás, por la idea de trabajo y sus contribuciones en el desarrollo estadístico del trabajo, al profesor Heivar Yesid Rodriguez, docente de la Universidad Santo Tomás, por la contribución de referencias y desarrollo económico del documento, a mis compañeros del trabajo Daniel Castellanos Garcia, Santiago Zuluaga Langton y Luisa Fernanda Mazorra Otero, economistas de la Universidad de Los Andes, por la colaboración con cualquier inquietud en el ámbito económico del trabajo.

Bibliografía

1. ALONSO C. , Julio César; CABRERA, Alejandro (2004). La tasa de cambio nominal en Colombia. Departamento de Economía: Universidad ICESI, segunda edición. 9p. [En línea] Disponible en: <https://www.icesi.edu.co/departamentos/economia/publicaciones/docs/Apecon2.pdf>
2. BAILEY, R.E. The Economics of Financial markets. New York: Cambridge University Press, 2005. 550p.
3. BAREÑO, J. El petróleo como referente económico mundial. Ensayos de Economía. México D.F.: Universidad distrital de México, 2008. 33-42p
4. Bernanke, Ben, Mark Gertler, and MarkWatson, (1997): "Systematic Monetary Policy and the Effects of Oil Shocks", Brookings Papers on Economic Activity, 1997-1, 91-157.
5. Blanchard, O. J., & Gali, J. (2007). The Macroeconomic Effects of Oil Shocks: Why are the 2000s so different from the 1970s? (No. w13368). National Bureau of Economic Research.
6. Banco de la Republica. (1998). Introducción al análisis económico: el caso colombiano. Siglo del Hombre Editores.
7. CÁRDENAS, Mauricio (2013). Introducción a la economía colombiana. Alfaomega, tercera edición. 292-293p.
8. Cardot, H., Ferraty, F. and Sarda, P. (1999): Functional linear model. Statistics and Probability Letters, 45, 11-22.
9. DORNBUSCH, Rudiger; FISCHER, Stanley & STARTZ, Richard (2008). Macroeconomía. Mc Graw Hill, novena Edición. 324p.
10. ESCOBAR, Gonzalo (2012). Modelo de Mundell Fleming: notas de clases. Universidad Andrés Bello, Noviembre. 6-7p. [En línea] Disponible en: <http://facultades.unab.cl/economiaynegocios/#les/2012/11/DOCUMENTODOCENTEN3.pdf>.
11. HYNDMAN, Rob J., & SHANG, Han Lin. Rainbow Plots, Bagplots, and Boxplots for Functional Data. Journal of Computational and Graphical Statistics. 2010, 19:1, 29-45.
12. Horvath, L., & Kokoszka, P. (2012). Inference for functional data whit applications (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
13. Keser & Kocakoç & Sehirlioglu, (2016), A New Descriptive Statistic for Functional Data: Functional Coefficient Of Variation, Dokuz Eylul University, Econometrics Department, Turkey.
14. Kokoszka, P., & Reimherr, M. (2017). Introduction to functional data analysis. CRC Press. pag 3 - 6, 67 - 74.
15. KRUGMAN, Paul; OBSTFELD, Maurice; MELITZ, Marc (2012). Economía internacional: teoría y política. Pearson editorial S.A. Madrid, novena edición. 373p.
16. Krugman, P. y Obstfeld, M. (2006) Economía internacional, teoría y política. 7 ed. Madrid: Pearson educación. 742 p.
17. RAMSAY, J. O., & SILVERMAN, B. W. Functional Data Analysis. Second Edition United States of America: Springer Science+Business Media. Inc. 2005, p. 22-25, 43-52, 217-221, 247-260.
18. Rivera, M. M., Toro, J. S., & Hermoza, J. C. R. (2017). El comportamiento del precio del petróleo y la volatilidad en la tasa de cambio: análisis de impacto de las variaciones del WTI y de la tasa de interés referencia sobre la tasa de cambio nominal en Colombia, periodo 2013-2015. Tendencias, 18(1), 13-40.

19. Yao, F., Müller, H-G. and Wang, J-L. (2005): Functional linear regression analysis for longitudinal data. *The Annals of Statistics*, 33(6), 2873-2903.