

Información Importante

La Universidad Santo Tomás, informa que el(los) autor(es) ha(n) autorizado a usuarios internos y externos de la institución a consultar el contenido de este documento a través del Catálogo en línea del CRAI-Biblioteca y el Repositorio Institucional en la página Web de la CRAI-Biblioteca, así como en las redes de información del país y del exterior con las cuales tenga convenio la Universidad.

Se permite la consulta a los usuarios interesados en el contenido de este documento, para todos los usos que tengan **finalidad académica**, nunca para usos comerciales, siempre y cuando mediante la correspondiente cita bibliográfica se le dé crédito al trabajo de grado y a su autor.

De conformidad con lo establecido en el Artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, la Universidad Santo Tomás informa que “los derechos morales sobre documento son propiedad de los autores, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.”

Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación, CRAI-Biblioteca

Universidad Santo Tomás, Bucaramanga

**Análisis de eficiencia técnica del servicio público de agua potable en el Municipio de
Málaga, Santander: una aplicación del Análisis Envolvente de Datos (DEA)**

Paola Andrea Rojas Mendoza

Trabajo de grado para optar por el título de Economista

Director:

Álvaro Ramírez Suárez

PhD.

Universidad Santo Tomas, Bucaramanga

División de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables

Facultad de economía

2017

Contenido

Resumen.....	6
Abstract.....	7
Introducción	8
Marco Teórico.....	9
Eficiencia y tipos de eficiencia.	9
Modelo de eficiencia DEA.....	12
Modelo Retornos Variables a Escala (RVE) y Eficiencia de Escala.	16
Modelo de Retorno Constante a Escala (RCE).....	17
Modelo Retornos Variables a Escala (RVE) y Eficiencia de Escala.	20
Metodología	22
Diseño del modelo DEA.	23
Análisis de Resultados	24
Análisis de los niveles y tendencias históricas en los ingresos, costos y gastos del servicio de agua potable prestado por la EPM de Málaga.	24
Estimación de los índices de eficiencia técnica de la EPM de Málaga en la prestación del servicio de agua potable.....	28
Conclusiones.....	32
Recomendaciones	33
Bibliografía.....	34
Apéndices.....	39

Apéndice A. Eficiencia Técnica Glogal.....	39
Apéndice B. Eficiencia Pura Técnica	40
Apéndice C. Eficiencia de Escala	41

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1. <i>Evolución de los niveles de ingresos, costos, gastos y utilidades de la EPM de Málaga en la prestación del servicio de agua potable 2007-2015 (en millones de \$ constantes del 2008) ..</i>	26
Tabla 2. <i>Estadísticos descriptivos de los índices de eficiencia técnica global, según diferentes supuestos y métodos de estimación.....</i>	29
Tabla 3. <i>Estadísticos descriptivos de los índices de eficiencia técnica pura según los diferentes supuestos y métodos de estimación.....</i>	30
Tabla 4. <i>Estadísticos descriptivos de los índices de eficiencia técnica de escala según los diferentes supuestos y métodos de estimación.</i>	31

Lista de Figuras

	Pág.
<i>Figura 1.</i> Modelo de Eficiencia Económica de Farrell. Tomado de Ramírez	10
<i>Figura 2.</i> Evolución y tendencia lineal del ingreso, costos, gastos y ganancias de la EPM de Málaga en el período 2007-2015 (precios constantes del 2008).....	27

Resumen

El propósito central de esta investigación es medir la eficiencia técnica global, técnica pura y de escala de los recursos productivos empleados en la prestación del servicio de agua potable del municipio de Málaga, Santander, en el período 2007-2015. Al efecto se usó el enfoque DEA (Análisis Envolvente de Datos) sobre una muestra de corte longitudinal de 36 trimestres de datos sobre ingresos y costos de mano de obra, materiales y capital. El análisis se adelantó en seis escenarios asumiendo retornos variables a escala, con orientación al aumento del producto y al ahorro de recursos. El índice de eficiencia técnica global calculado varió en el rango de 66,9% (orientado a los insumos) y 81,9% (orientado al producto). Estos resultados sugieren que, la EPM podría reducir hasta en un 33,1% los costos de uso de recursos actuales manteniendo el nivel de producción y precios del agua actual. Así mismo, la empresa podría aumentar el ingreso total aumentando la producción de agua en el 18,1% con el nivel de recursos actuales. Es decir, la empresa está operando a una escala sub óptima. Se sugiere que la empresa obtenga recursos adicionales y consiga asesoría técnica que le permitan ajustar la escala de operación actual al nivel óptimo.

Palabras clave: Eficiencia técnica, DEA, ingresos, costos, gastos.

Abstract

The main purpose of this research is to assess the overall technical efficiency, pure technical efficiency and scale efficiency of the productive resources used in the provision of potable water in the municipality of Malaga, Santander, over the period 2007-2015. To this end, a Data Envelope Analysis DEA approach was applied to a longitudinal data series of 36 semesters regarding total revenues, labor, materials and capital expenses. The analysis was carried out on 6 different scenarios assuming variable returns to scale in both output and input oriented frameworks. The calculated global technical efficiency index ranged from 66.9% (input-oriented) to 81.9% (product-oriented). These technical inefficiencies suggest that Malaga's EPM could decrease by 33,1% current costs and expenses on resources while keeping actual level of water output and service prices alike. Likewise, this company could rise present supply of potable water by 18,1% with prevailing resource endowment. Then, the Company's management should seek for additional financial and technical assistance in order to bring the present scale of operation to its optimal scale.

Keywords: Technical efficiency, DEA, revenue, costs, expenses.

Introducción

Este artículo gira en torno a de una investigación para medir y analizar la eficiencia técnica en la oferta del servicio de agua potable en el municipio de Málaga, Santander. La eficiencia técnica es un componente de la eficiencia económica (Farrell , 1957). A partir del trabajo pionero de Farrell, la literatura sobre eficiencia productiva es rica en aplicaciones empíricas para la medición de la eficiencia a nivel de empresas, mediante enfoques paramétricos y no paramétricos. En este estudio se usa el método no paramétrico de Análisis Envolvente de Datos DEA (por sus siglas en ingles) el cual ha sido ampliamente aceptado en este tipo de investigaciones (Cooper , Seiford, & Tone, 2007).

En Málaga, se han encontrado evidencias sobre posibles ineficiencias técnicas en la prestación del servicio de agua potable (SSPD, 2015) (Ramirez F. A., 2016); las más notorias se relacionan con la falta de cobertura, fugas de agua, racionamientos en épocas de verano, baja potabilidad y por consiguiente altas tarifas. En función de esta problemática, la presente investigación se orienta a probar la hipótesis de existencia de ineficiencias en el servicio prestado por la EPM de Málaga ente gestor del servicio.

Por consiguiente, en la primera sección se revisan los conceptos teóricos de eficiencia y tipos de eficiencia y se exponen los principales modelos para medir la eficiencia a partir de la estimación de funciones frontera. En la segunda sección se desarrolla la metodología propuesta a partir de los estados financieros de la empresa² durante el periodo 2007-2015 sobre: activos, pasivos,

² Los Datos fueron provistos por el Sistema Consolidador de Hacienda e Información Pública CHIP de la Contaduría Nacional del Ministerio de Hacienda (**Contaduría Nacional del Ministerio de Hacienda , 2016**)

patrimonio y costos (de operación y venta) trimestrales. En la cuarta sección se analizan los resultados y se discuten las conclusiones y recomendaciones.

Marco Teórico

Eficiencia y tipos de eficiencia.

En este apartado, se describen los conceptos teóricos básicos sobre la eficiencia productiva y los que enmarcan el método DEA usado en este estudio. En la teoría de la producción de la empresa, la eficiencia se describe como la máxima producción posible de lograr con los recursos disponibles, dada la tecnología (eficiencia técnica); o como la combinación de insumos o factores de producción de menor (mínimo) costo para obtener un nivel determinado de producto (eficiencia de precios o distributiva) (Ferguson & Gould).

Según la teoría neoclásica de la firma, la función objetivo de la firma es maximizar el ingreso neto, sujeto a los niveles y precios de los recursos y productos y la función de producción técnica. En el mundo real, una firma puede no alcanzar este objetivo debido a: (1) ineficiencias técnicas o distributivas sobre las cuales tiene alguna forma de control; (2) factores aleatorios fuera del control de la firma o por errores de medición. Esta teoría asume que la firma siempre opera de una manera técnicamente eficiente y produce el máximo nivel de producto para las posibles combinaciones de insumos. Es decir, la función de producción es una frontera y el producto de las firmas individuales se ubica sobre o por debajo de la frontera. Por lo tanto, el mayor interés de la teoría sobre eficiencia se centra en la ineficiencia distributiva solamente y en cómo lograrla.

Koopmans y Debreu (1951) fueron los primeros economistas en medir la eficiencia técnica empíricamente, entendida como la capacidad de una empresa de maximizar el producto dado los

insumos o recursos (Koopmans, T, 1951); (Debreu, 1951). El concepto de eficiencia productiva fue operacionalizado por M.J Farrell en 1957, al desarrollar el concepto de función frontera como estándar de eficiencia y sugirió un método para medir la eficiencia productiva. Al efecto, Farrell definió los conceptos de eficiencia técnica, eficiencia distributiva o de precios y eficiencia económica. Además ideó el marco analítico para su medición, el cual se sintetiza en la Figura 1 (Farrell, 1957).

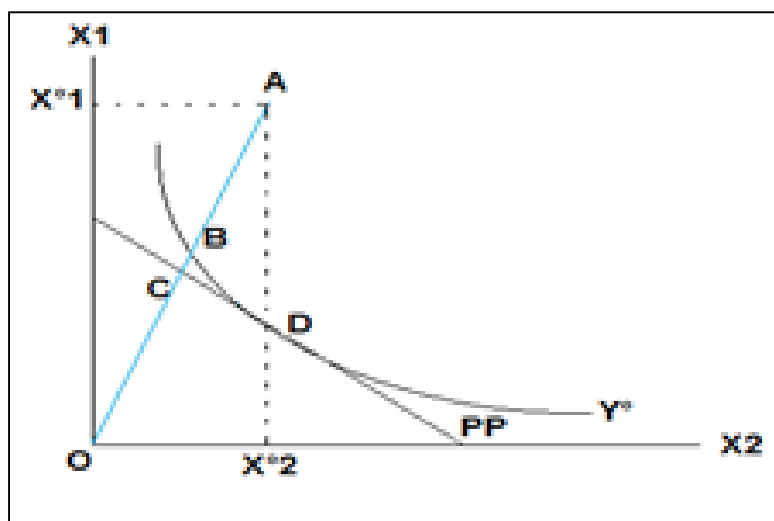


Figura 1. Modelo de Eficiencia Económica de Farrell. Tomado de Ramírez

Fuente: (Ramírez A. , Analisis de eficiencia economica en fincas arroceras: aplicacion de una funcion frontera deterministica de ingresos brutos, 2013)

Como se observa en la Figura 1, se asume que el proceso de producción usa sólo dos recursos: X_1 y X_2 . La isocuanta Y^0 representa las distintas combinaciones de los recursos X_1 y X_2 que una empresa técnicamente eficiente debe usar para producir una cantidad igual a Y^0 . Por tanto, sólo la empresa que se ubica sobre la isocuanta es técnicamente eficiente en el uso de los recursos X_1 y X_2 . Igualmente se asume que, dos empresas, producen la misma cantidad de producto Y^0 en los puntos A y B, respectivamente. Ambas empresas usan diferentes cantidades de recursos X_1 y X_2 pero las aplican en la misma proporción, como lo refleja el rayo OA. La empresa que produce Y^0

en el punto A utilizando X°_1 y X°_2 cantidades de los recursos es ineficiente desde el punto de vista técnico. En contraste, la empresa que produce Y^0 en el punto B es eficiente técnicamente. De acuerdo con Farrell, el índice de eficiencia técnica está dada por la razón OA/OB . La firma que produce en el punto B tiene un índice de eficiencia de 1 (OB/OB) y usa sólo una fracción de los recursos X_1 y X_2 que emplea la empresa ubicada en el punto A.

Farrell igualmente conceptualizó la eficiencia distributiva con la ayuda de la línea de presupuestos PP en la Figura 1, cuya pendiente es igual a la relación de precios de los recursos X_1 y X_2 . La empresa que produce Y_0 en el punto D usa la combinación óptima de recursos para producir el nivel de producto Y_0 . Sin embargo, los costos de producción de la empresa en D son sólo una fracción OC/OB de los costos de la empresa en B. Farrell definió esta razón como el índice de eficiencia distributiva de las empresas en B y en A. Esto debido a que la empresa en A puede ubicarse en el punto B también, si todos los factores que causan la ineficiencia técnica se pueden eliminar. Por consiguiente, todas las empresas que se ubiquen en todos los puntos factibles a lo largo del rayo OA tienen el mismo índice de eficiencia (Farrell , 1957).

Aún más, si la empresa en A fuera técnica y distributivamente eficiente su costo de producción sería una fracción OC/OB de su costo actual. Farrell definió esta razón como la eficiencia económica de la empresa en A. Bajo el supuesto de RCE la eficiencia económica de la empresa en A en la producción de caña panelera es igual al producto de la eficiencia técnica (OB/OA) y la eficiencia distributiva (OC/OB). Esto es OC/OB (Mankiw & Rabasco, 2007); (Sarmiento Lotero & Castellanos, 2008); (Ramirez, 2013).

Según Farrell, la ineficiencia técnica resulta de cierta inhabilidad de la empresa para lograr el máximo producto; es decir, de la incapacidad para usar la tecnología eficientemente y emplear los recursos en la cantidad y combinación necesarios para maximizar el producto. A su vez, la

ineficiencia distributiva o de precios resulta de la inhabilidad de la empresa para combinar y usar la cantidad de recursos de mínimo costo para maximizar las ganancias, dadas las señales de precios del producto y recursos del mercado. La ineficiencia económica es por tanto, la resultante de la existencia de ineficiencias técnicas y distributivas (Farrell , 1957); (Fare, Grosskopf, & Lovell, 1994)

Green (1993) sostiene que las funciones de producción “promedias” estimadas por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), usualmente se estiman bajo el supuesto de que todas las desviaciones de la función de producción se deben solamente a errores aleatorios. No obstante, en numerosos estudios empíricos se ha demostrado que las ineficiencias técnicas entre firmas son sustanciales y significativas (Green, 1993);(Bravo-Ureta & Pinheiro, 1993). Por tanto, la función de producción “promedia” no es una representación apropiada de la función de producción frontera de una empresa. La existencia de ineficiencias técnicas ofrecen una oportunidad para incrementar la producción de la empresa con los recursos existentes (sin recursos adicionales), si los factores que causan las ineficiencias pueden ser identificadas y si las “causas” no se deben a “restricciones” en los recursos.

Modelo de eficiencia DEA.

La metodología DEA involucra el uso de diferentes modelos de programación lineal para la construcción de una superficie de tipo frontera discreta o por tramos de los datos. Las medidas de eficiencia se calculan con respecto a la frontera. Este modelo inicialmente fue propuesto por Farrell pero el método no recibió amplia atención sino hasta 1978 a partir del cual el termino de análisis envolvente de datos apareció por primera vez en virtud del trabajo de Charnes Cooper y Rhodes

(Marquez Contreras , Velasquez Gonzalez, Flores Guitierrez, Flores Marquez, & Garzon Martinez, 2015)

Charnes Cooper y Rhodes (1978) propusieron un modelo orientado al producto asumiendo retornos constantes a escala (RCE). Se asume que hay K insumos y M productos para cada una de las N firmas o unidades productivas o unidades de decisión. Para la firma i ésima estos se representan por dos vectores columna: X_i y Y_i respectivamente. La matriz de insumos o de recursos $K \times N$ X y la matriz de productos $P \times N$ Y representa los datos para todas las N firmas. Una manera intuitiva de introducir el modelo DEA es en la forma radial. Para cada unidad productiva el objetivo es medir la relación que existe entre todos los productos sobre todos los insumos tal como $U'Q_i / V'X_i$ donde U es un vector $P \times 1$ de los pesos o ponderaciones de los productos y V es un vector $K \times 1$ de los pesos de los insumos. Los pesos óptimos se obtienen resolviendo el siguiente problema de programación lineal (Charnes, A; Cooper , W; Rhodes, E, 1978):

Maximizar u, q con respecto a

$$U' Q_i/V' X_i$$

Para $i = 1, 2, \dots, N$ (1)

Sujeto a

$$U' Q_i/V' X_i \leq 1$$

$$u, v \geq 0$$

Esta formulación implica encontrar los valores de u y v tales que, la medida de eficiencia para la i ésima unidad productiva sea máxima, sujeta a las restricciones de que todas las medidas de eficiencia deben ser menor o igual a 1. Según Charnes et. Al. (1978) un problema de esta formulación es que tiene un número infinito de soluciones. Para evitar esto, se impone la restricción de $V' X_i = 1$ la cual se especifica como:

Maximizar u, q con respecto a

$$U' Q_i/V' X_i$$

Para $i = 1, 2, \dots, N$ (2)

Sujeto a

$$V' X_i = 1$$

$$U' Q_i - V' X_i \leq 0$$

$$u, v \geq 0$$

La especificación (2) anterior se conoce como la forma multiplicativa del modelo DEA. Esta especificación se debe transformar a la forma envolvente de DEA usando el concepto de dualidad, el cual es equivalente a la siguiente formulación:

Minimizar θ, λ con respecto a

$$\theta$$

Sujeto a

(3)

$$-Q_i + Q\lambda \leq 0$$

$$\theta X_i - X\lambda \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Donde, θ es un escalar y λ es un vector de constantes $N \times 1$. Esta forma envolvente implica menos restricciones que la forma multiplicativa (2); ($K+P$ es menor que $N+1$) y por tanto es la forma preferida para resolver. El valor obtenido de θ es el nivel de eficiencia de la i ésima firma y satisface la restricción de que $\theta < 1$, donde: el valor de 1 indica un punto sobre la frontera y por tanto la firma es técnicamente eficiente según la definición de Farrell.

Se debe notar que el problema de programación lineal (3) debe resolverse N veces para cada firma en la muestra; luego se obtiene un valor de θ para cada firma. En esta formulación el problema toma la i ésima firma y luego busca reducir radialmente el vector de insumos X_i , en la medida de lo posible, mientras este se mantenga dentro del conjunto factible de recursos. La contracción radial del vector de insumos X_i produce un punto de proyección $(X\lambda, Q\lambda)$ sobre la superficie de esta tecnología. Las restricciones en el modelo 3 aseguran que el punto proyectado no caiga por fuera del conjunto factible.

Modelo Retornos Variables a Escala (RVE) y Eficiencia de Escala.

El supuesto de retornos constantes a escala es apropiado para todas las unidades productivas que operan a una escala óptima. Sin embargo, por distintos factores como las regulaciones del gobierno, restricciones financieras, competencia imperfecta de los mercados, entre otras, las unidades productivas no pueden operar a una escala óptima.

Banker, Charnes y Cooper sugirieron ajustar el modelo DEA con retornos constantes a escala para considerar la situación de retornos variables a escala. Cuando no todas las unidades productivas están operando en la escala óptima, las mediciones de eficiencia técnica (ET) se confunden con las de eficiencia técnica de escala (ETE). El empleo del modelo RVE permite el cálculo de ET sin incluir o excluidos los efectos de ETE (Chediak.P & Valencia A., 2008)

El problema de programación lineal (RVE) se obtiene agregando al modelo de retornos constantes de escala una restricción de convexidad la cual se especifica de la siguiente manera (Cooper , Seiford, & Tone, 2007)

Minimizar θ, λ

Con respecto a

Q

Sujeto a

(4)

$$-Q_i + Q\lambda \leq 0$$

$$\theta X_i - X\lambda \geq 0$$

$$N1'\lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

Según estos autores, este planteamiento forma un casco convexo de planos que se intersectan el cual envuelve los puntos de datos más ajustadamente que el casco cónico del modelo RCE. De esta manera los índices de ET del modelo de retornos variables a escala resultan mayores o iguales que los obtenidos usando el modelo de RCE. La restricción de convexidad asegura que una unidad productiva ineficiente se compare solamente con otras unidades productivas de un tamaño similar. Esto contrasta con el modelo RCE donde una firma puede compararse contra unidades productivas que son sustancialmente diferentes, lo cual hace que la suma de los pesos λ sean mayores o menores que 1.

La medida de eficiencia de escala se obtiene corriendo dos modelos: uno CRS y luego otro VRS. Luego los índices de eficiencia técnica del modelo CRS se desagregan en dos componentes: uno debido a ineficiencia técnica pura el cual resulta de calcular la eficiencia técnica del modelo de VRS y otro debido a la ineficiencia de escala. Si hay una diferencia en los dos índices de eficiencia técnica en ambos modelos esto indica que la unidad productiva tiene ineficiencia de escala.

Por definición:

$$ET (RCE) = ET (RVE) * ETE.$$

Si $ETE = 1$ (la eficiencia de escala es óptima), entonces: $ET (RCE) = ET (RVE)$ y la unidad productiva está operando bajo retornos constantes a escala.

Modelo de Retorno Constante a Escala (RCE).

La metodología DEA involucra el uso de diferentes modelos de programación lineal para la construcción de una superficie de tipo frontera discreta o por tramos de los datos. Las medidas de eficiencia se calculan con respecto a la frontera. Este modelo inicialmente fue propuesto por Farrell

pero el método no recibió amplia atención sino hasta 1978 a partir del cual el término de análisis envolvente de datos apareció por primera vez en virtud del trabajo de Charnes Cooper y Rhodes (Marquez Contreras, Velasquez Gonzalez, Flores Guitierrez, Flores Marquez, & Garzon Martinez, 2015)

Charnes Cooper y Rhodes propusieron un modelo orientado al producto asumiendo retornos constantes a escala (RCE). En la siguiente discusión se ilustra este modelo. Se asume que hay K insumos y M productos para cada una de las N firmas o unidades productivas o unidades de decisión. Para la firma i ésima estos se representan por dos vectores columna: X_i y Y_i respectivamente. La matriz de insumos o de recursos $K \times N$ X y la matriz de productos $P \times N$ Y representa los datos para todas las N firmas. Una manera intuitiva de introducir el modelo DEA es en la forma radial. Para cada unidad productiva el objetivo es medir la relación que existe entre todos los productos sobre todos los insumos tal como $U'Q_i / V'X_i$ donde U es un vector $P \times 1$ de los pesos o ponderaciones de los productos y V es un vector $K \times 1$ de los pesos de los insumos. Los pesos óptimos se obtienen resolviendo el siguiente problema de programación lineal (Charnes, A; Cooper, W; Rhodes, E, 1978):

Maximizar u, q con respecto a

$$U' Q_i / V' X_i$$

Para $i = 1, 2, \dots, N$

(1)

Sujeto a

$$U' Q_i / V' X_i \leq 1$$

$$u, v \geq 0$$

Esta formulación implica encontrar los valores de u y v tales que, la medida de eficiencia para la i ésima de unidad productiva sea máxima sujeta a las restricciones de que todas las medidas de eficiencia deben ser ≤ 1 . Un problema con esa formulación es que tiene un número infinito de soluciones. Para evitar esto se impone la restricción de $\sum v_j X_{ij} = 1$ la cual se especifica como:

Maximizar u, v con respecto a

$$U' Q_i / V' X_i$$

Para $i = 1, 2, \dots, N$

(2)

Sujeto a

$$V' X_i = 1$$

$$U' Q_i - V' X_i \leq 0$$

$$u, v \geq 0$$

La especificación (2) anterior se conoce como la forma multiplicativa del modelo DEA. Esta especificación se debe transformar a la forma envolvente de DEA usando el concepto de dualidad, el cual es equivalente a la siguiente formulación:

Minimizar θ, λ con respecto a

$$\theta$$

Sujeto a

(3)

$$-Q_i + Q\lambda \leq 0$$

$$\theta X_i - X\lambda \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Donde: θ es un escalar y λ es un vector de constantes $N \times 1$. Esta forma envolvente implica más pocas restricciones que la forma multiplicativa (2) ($K+P$ es menor que $N+1$) y por tanto es la forma preferida a resolver. El valor obtenido de θ es el nivel de eficiencia de la i ésima firma y satisface la restricción de que $\theta < 1$, donde el valor de 1 indica un punto sobre la frontera y por tanto una firma técnicamente eficiente según la definición de Farrell. Se debe notar que el problema de programación lineal (3) debe resolverse N veces para cada firma en la muestra luego se obtiene un valor de θ para cada firma. En esta formulación el problema toma la i ésima firma y luego busca reducir radialmente el vector de insumos X_i en la medida de lo posible mientras se mantenga dentro del conjunto factible de los recursos. La contracción radial del vector de insumos X_i produce un punto de proyección $(X \lambda, Q \lambda)$ sobre la superficie de esta tecnología. Las restricciones en el modelo 3 aseguran que el punto proyectado no caiga por fuera del conjunto factible (Farrell, 1957).

Modelo Retornos Variables a Escala (RVE) y Eficiencia de Escala.

El supuesto de retornos constantes a escala es apropiado para todas las unidades productivas operan a una escala óptima. Sin embargo por distintos factores como las regulaciones del gobierno, restricciones financieras, competencia imperfecta de los mercados, entre otras, las unidades productivas no pueden operar a una escala óptima.

Banker, Charnes y Cooper sugirieron ajustar el modelo DEA con retornos constantes a escala para considerar las situación de retornos variables a escala en el caso de que se especifique un modelo de retornos constantes a escala cuando no todas las unidades productivas están operando en la escala óptima las mediciones de eficiencia técnica (ET) se confunden con las de eficiencia

técnica de escala (ETE). El empleo del modelo RVE permite el cálculo de ET sin incluir o excluidos los efectos de ETE (Chediak.P & Valencia A., 2008)

El problema de programación lineal (RVE) se obtiene agregando al modelo de retornos constantes de escala una restricción de convexidad la cual se especifica de la siguiente manera:

Minimizar θ, λ

Con respecto a

$$Q$$

Sujeto a

(4)

$$-Q_i + Q\lambda \leq 0$$

$$\theta X_i - X\lambda \geq 0$$

$$N1'\lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

Este planteamiento forma un casco convexo de planos que se intersectan el cual envuelve los puntos de datos más ajustadamente que el casco cónico del modelo RCE. De esta manera los índices de ET del modelo de retornos variables a escala resultan mayores o iguales que los obtenidos usando el modelo de RCE. La restricción de convexidad asegura que una unidad productiva ineficiente se compare solamente con otras unidades productivas de un tamaño similar. Esto es el punto de proyección de la unidad productiva sobre la frontera DEA en una combinación convexa de las demás unidades productivas observadas. En contraste de RCE una firma puede

compararse contra unidades productivas que son sustancialmente diferentes lo cual hace que la suma de los pesos λ sean mayores o menores que 1.

La medida de eficiencia de escala se obtiene corriendo dos modelos: uno CRS y luego otro DRS. Luego los índices de eficiencia técnica del modelo CRS se desagregan en dos componentes: uno debido a ineficiencia técnica pura el cual resulta de calcular la eficiencia técnica del modelo de VRS y otro debido a la ineficiencia de escala. Si hay una diferencia en los dos índices de eficiencia técnica en ambos modelos esto indica que la unidad productiva tiene ineficiencia de escala.

Por definición:

$$ET (RCE) = ET (RVE) * ETE.$$

Si $ETE = 1$ (la eficiencia de escala es óptima), entonces: $ET (RCE) = ET (RVE)$ y la unidad productiva está operando bajo retornos constantes a escala.

Metodología

En este estudio se seleccionó la metodología DEA bajo el supuesto de retornos de variables a escala bajo la hipótesis de que la empresa de acueducto de Málaga no está operando a una escala óptima. Para la realización del estudio de eficiencia se usaron datos de corte longitudinal

recolectados por el Ministerio de Hacienda sobre los ingresos, costos y gastos de la EPM en una muestra de 36 trimestre correspondientes al periodo 2007 – 2015.5

Diseño del modelo DEA.

Se especificó un modelo de programación lineal DEA con la función objetivo de maximizar el ingreso bruto de la empresa (valor de los ingresos) sujeto a las restricciones de: capital físico (valor de los activos en libros); costos de mano de obra y capital humano (valor de los sueldos y salarios) y valor de los gastos en materiales e insumos. El modelo se corrió en seis escenarios⁶ con el fin de comparar estadísticamente las diferencias en los estimados de eficiencia: global, pura y de escala. En los estudios de eficiencia de servicio públicos normalmente lo que se encuentra es que las aplicaciones DEA buscan a priori establecer la eficiencia de la empresa para maximizar el producto o minimizar el costo usando un solo método de cálculo el indicador de eficiencia. En este estudio se comparan los resultados de eficiencia bajo los distintos enfoques del análisis y se explora el efecto del método de medición sobre los indicadores de eficiencia: Radial, No radial y Mixto. Los escenarios son:

1. DEA orientado al producto usando el método radial
2. DEA orientado al producto usando el método no radial

⁵ Esta información está disponible en la base de datos de la Sistema Consolidador de Hacienda e Información Pública CHIP de la Contaduría Nacional del Ministerio de Hacienda (Contaduría Nacional del Ministerio de Hacienda , 2016)

⁶ Con este fin se usó el Software MAXDEA

3. DEA orientado al producto usando el método mixto.
4. DEA orientado a los insumos usando el método radial.
5. DEA orientado a los insumos usando el método no radial.
6. DEA orientado a los insumos usando el método mixto.

Análisis de Resultados

Análisis de los niveles y tendencias históricas en los ingresos, costos y gastos del servicio de agua potable prestado por la EPM de Málaga.

El propósito de este análisis fue confirmar si la EPM genera utilidades, dadas las tarifas del servicio y la composición de los costos de producción. La utilidad se expresó como el ingreso bruto, ya que dentro de los costos no se incluyeron todos los costos fijos de la Empresa en particular los referidos a los costos financieros y de posesión de los activos fijos.

Como se desprende de la Tabla 1, a precios constantes del 2008, la EPM de Málaga ha registrado márgenes de utilidades por la prestación del servicio de agua potable en la totalidad de trimestres considerados, medidos por el ingreso bruto. Es decir, la administración de la Empresa ha sido cuidadosa en la aplicación de los recursos y el empleo de los ingresos generados por el servicio. El comportamiento del ingreso bruto intra anual, tiende a seguir un patrón estacional donde, en el primer trimestre, los ingresos totales son mayores y tienden a ser mínimos en el cuarto trimestre. Al contrario, los costos y gastos son más bajos durante el primer trimestre y se incrementan alcanzando el máximo monto en el cuarto trimestre. Se considera que este patrón de ingresos y egresos es congruente con la disponibilidad de recursos presupuestales autorizados para

ser ejecutados y a la dinámica normal de operación de la empresa, y no al comportamiento del flujo de fondos (ingresos y egresos) el cual debe ser relativamente constante.

Los estadísticos descriptivos de cada uno de los componentes del presupuesto ejecutado permiten concluir:

1. El ingreso total promedio en términos reales por trimestre asciende a \$ 751 millones con un coeficiente de variación alto del 59% y una tasa de crecimiento trimestral del 2,37%. Esto último significa que el ingreso total ha venido creciendo en términos constantes a la tasa del 9,8% anual y que se ha venido duplicando cada 7,3 años.
2. Los costos de la EPM registrados se descomponen en promedio así: \$308 millones por trimestre (51%) por concepto de costos de ventas y de producción del servicio y \$298 millones trimestre (49%) por concepto de gastos administrativos y de overhead.
3. Mientras el costo de ventas y de producción promedio ha aumentado a la tasa del 4,04% trimestral (equivalente al 17,1% anual) y se ha duplicado cada 4,2 años, los gastos administrativos han crecido menos rápido a la tasa del 1,43% trimestral, equivalente a una tasa del 5,8% anual para duplicarse cada 12,3 años.
4. En consecuencia, la ganancia neta de la empresa ha sido en promedio de \$146 millones trimestrales con un altísimo coeficiente de variación del 149% y una tasa de tasa crecimiento del 0,98% trimestral (3,9% anual) y expectativas de doblarse cada 18,3 años.

No obstante, la tasa de crecimiento de los costos ha sido superior a la tasa de crecimiento de los ingresos (ventas) y ha sido el doble de la tasa de crecimiento de los gastos por lo cual el margen de ganancia ha venido decreciendo.

Tabla 1. *Evolución de los niveles de ingresos, costos, gastos y utilidades de la EPM de Málaga en la prestación del servicio de agua potable 2007-2015 (en millones de \$ constantes del 2008)*

Trimestres	Ingresos	Gastos	Costos	Ingreso Bruto
1	186	33	86	67
2	370	91	217	62
3	558	149	348	61
4	781	268	513	0,1
5	198	55	68	75
6	457	164	158	135
7	698	265	229	204
8	1027	661	365	1
9	198	67	158	1
10	395	117	269	9
11	610	204	387	19
12	993	459	533	1
13	194	56	63	75
14	401	156	179	66
15	766	230	301	235
16	1145	644	501	0,1
17	542	74	124	344
18	1158	174	271	713
19	1417	261	393	763
20	731	299	290	142
21	198	61	99	38
22	1105	159	261	685
23	1411	291	439	681
24	1826	1096	729	1
25	203	104	78	21
26	495	225	195	75
27	829	415	301	113
28	1311	858	452	1
29	406	169	121	116
30	672	366	202	104
31	1060	516	314	230
32	1532	941	591	0,1
33	262	110	126	26
34	576	232	268	76
35	936	363	446	127
36	1385	745	639	1
Media	751	308	298	146
Desviación Estándar	446	270	172	217
Coefficiente Variación	0,59	0,88	0,58	1,49
Tasa Crecimiento Trimestral	2,37	4,04	1,43	0,97

Nota: Elaboración propia adaptada de la base de datos CHIP (Contaduría Nacional del Ministerio de Hacienda , 2016)

Como lo ilustra la figura 2, la gestión pública de la EPM de Málaga ha sido eficiente durante las últimas tres administraciones, constituyéndose la prestación del servicio en un negocio aceptable para el Estado, ya que su ganancia después de cubrir los costos y gastos ha sido positiva y equivalente, en promedio, al 19,44% del ingreso con variaciones interanuales importantes. No obstante, el margen de ganancia muestra una tendencia a permanecer constante o a disminuir en el largo plazo, probablemente como consecuencia de la expansión de la oferta y cobertura del servicio de acueducto a zonas más dispersas, pero con costos y gastos incrementales.

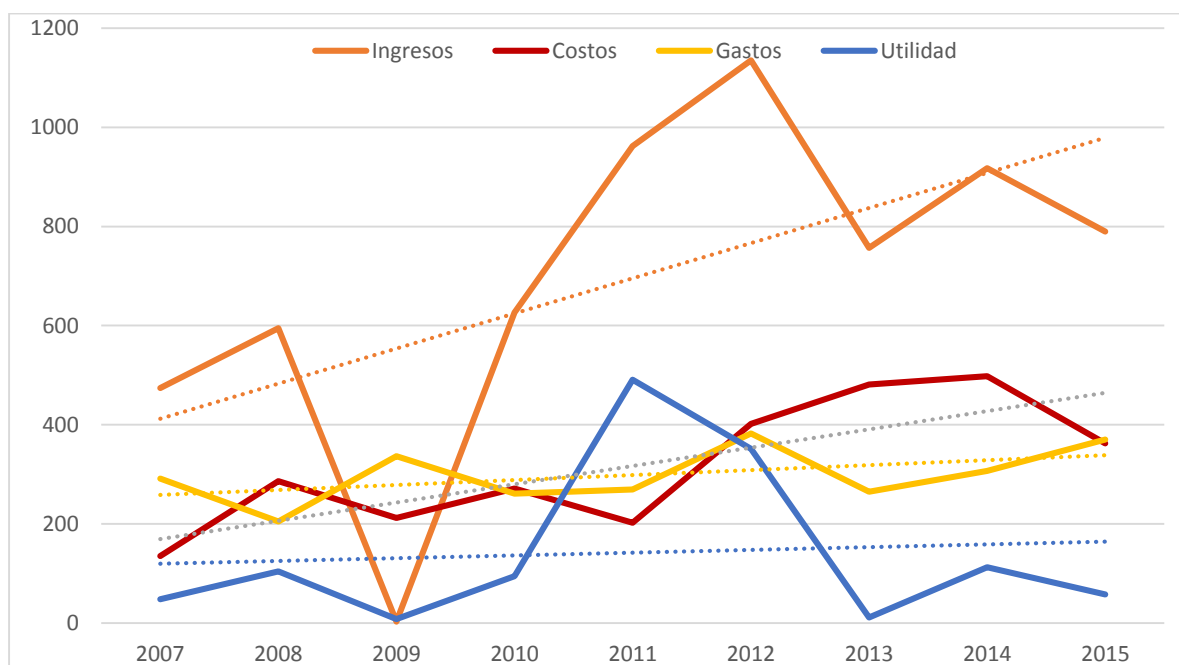


Figura 2. Evolución y tendencia lineal del ingreso, costos, gastos y ganancias de la EPM de Málaga en el período 2007-2015 (precios constantes del 2008).

Elaboración propia basada en la base de datos CHIP (Contaduría Nacional del Ministerio de Hacienda, 2016)

Estimación de los índices de eficiencia técnica de la EPM de Málaga en la prestación del servicio de agua potable.

Las Tablas 2, 3 y 4 siguientes sintetizan el índice de eficiencia técnica global y sus dos componentes: eficiencia técnica pura y eficiencia técnica de escala, respectivamente. Los estadísticos descriptivos permiten examinar la forma de la distribución de los índices de eficiencia a través de los trimestres, los valores máximos y mínimos de los índices y la amplitud de los rangos de variación de los índices. Mediante una prueba estadística *t*, para la comparación de medias de muestras relacionadas, se comprobó si los índices de eficiencia técnica calculados eran estadísticamente diferentes o no. Esto con el fin de confirmar si en el caso de los servicios públicos los indicadores de eficiencia son sensibles a los métodos y supuestos usados en el presente estudio usando la técnica DEA.

Como se verifica en la Tabla 2, el índice de eficiencia técnica global calculado varió en el rango de 66,9% (DEA orientado a insumos) a 81,9% (DEA orientado al producto) según los supuestos del método usados. Sin embargo, no se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre estos dos índices. Por tanto, se puede inferir que la eficiencia técnica global de la EPM de Málaga es moderada a alta. En el primer caso, la Empresa podría reducir los costos del servicio en un 33,1% sin disminuir el producto, si usara los recursos productivos en los niveles, combinaciones y formas empleados por la empresa en los trimestres más eficientes en costos. Alternativamente, la empresa podría aumentar la producción de agua y/o ingreso monetario de un 18,1% sin aumentar la cantidad de insumos, si produce el volumen de agua que puede servir en los trimestres más eficientes en el suministro de agua, usando los recursos en los niveles, combinaciones y formas establecidas. Es probable que exista una alta y significativa correlación

entre los trimestres más efectivos en costos o de más alto abastecimiento de agua con las épocas más húmedas de la región.

Tabla 2. *Estadísticos descriptivos de los índices de eficiencia técnica global, según diferentes supuestos y métodos de estimación*

Descriptivos	DEA Orientado al Producto			DEA Orientado a los Insumos		
	RADIAL	NORADIAL	MIXTO	RADIAL	NORADIAL	MIXTO
Media	0,819 a	0,819 a	0,819 a	0,819 a	0,669 a	0,669 a
Error estándar de la media	0,0298	0,0298	0,0298	0,0298	0,0440	0,0440
Mediana	0,800	0,800	0,800	0,800	0,600	0,600
Moda	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Desviación estándar	0,1786	0,1786	0,1786	0,1786	0,2638	0,2638
Coefficiente Variación	0,2179	0,2179	0,2179	0,2179	0,3941	0,3941
Asimetría	-0,629	-0,629	-0,629	-0,629	0,174	0,174
Error estándar de asimetría	0,393	0,393	0,393	0,393	0,393	0,393
Curtosis	-0,676	-0,676	-0,676	-0,676	-1,529	-1,529
Error estándar de curtosis	0,768	0,768	0,768	0,768	0,768	0,768
Mínimo	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3
Máximo	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Nota: a: Índices no estadísticamente diferentes; * $P < 0,05$. *Cálculos propios adaptados del Apéndice A.*

Conceptualmente, la eficiencia técnica pura indica en qué medida la empresa está logrando el máximo rendimiento de los recursos disponibles con la tecnología existente. Mientras que la

eficiencia de escala determina en qué medida la unidad productiva analizada está operando en la escala óptima (Cooper, Seiford, & Tone, 2007). La eficiencia técnica pura mide la habilidad del productor para lograr el máximo producto por unidad de recurso. La eficiencia de escala indica la habilidad del productor para producir con la escala óptima.

Como se observa en la Tabla 3 el índice de eficiencia técnica pura de la EPM de Málaga es muy alta variando en el rango de 94,2 % a 96,7%. Es decir, la administración de la empresa cuenta con un escaso margen para aumentar la producción de agua potable (entre 5,8% y 3,3%) con los recursos y tecnología que posee actualmente. No se encontraron diferencias significativas entre los indicadores de eficiencia técnica pura, según la orientación.

Tabla 3. *Estadísticos descriptivos de los índices de eficiencia técnica pura según los diferentes supuestos y métodos de estimación*

	ETP-P- RADIAL	ETP-P- NORADIAL	ETP-P- MIXTO	ETP-I- RADIAL	ETP-I- NORADIAL	ETP-I- MIXTO
Media	0,967*	0,967*	0,967*	0,992*	0,942*	0,942*
Error estándar de la media	0,0126	0,0126	0,0126	0,0047	0,0184	0,0184
Mediana	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Moda	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Desviación estándar	0,0756	0,0756	0,0756	0,0280	0,1105	0,1105
Coefficiente Variación	0,0782	0,0782	0,0782	0,0283	0,1174	0,1174
Asimetría	-2,288	-2,288	-2,288	-3,148	-1,727	-1,727
Error estándar de asimetría	0,393	0,393	0,393	0,393	0,393	0,393
Curtosis	4,481	4,481	4,481	8,371	1,903	1,903
Error estándar de curtosis	0,768	0,768	0,768	0,768	0,768	0,768
Mínimo	0,7	0,7	0,7	0,9	0,6	0,6
Máximo	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Nota: a: Índices no estadísticamente diferentes; * P < 0,05. Cálculos propios basados en el Apéndice B.

Finalmente, la Tabla 4, registra los índices de eficiencia técnica de escala para la EPM de Málaga los cuales variaron en el rango de 71,7% a 84,7% y no son estadísticamente significativos. Es decir la empresa tiene un amplio margen para aumentar el ingreso bruto en 15,3% o ahorrar recursos y costos en un 28,3% para producir el nivel actual de agua si operara a la escala óptima.

Estos resultados soportan la tesis de que la causa principal de la ineficiencia técnica global encontrada, se originan en las ineficiencias de escala. Esto lo confirma el hecho de que, de los 36 trimestres analizados, se encontraron 26 donde la empresa ha operado con rendimientos a escala crecientes y sólo 9 trimestres donde ha operado con rendimientos a escala decrecientes.

Tabla 4. Estadísticos descriptivos de los índices de eficiencia técnica de escala según los diferentes supuestos y métodos de estimación.

	ETE-P- RADIAL	ETE-P- NORADIAL	ETE-P- MIXTO	ET-E- IRADIAL	ETE-I- NORADIAL	ETE-I- MIXTO
Media	0,847a	0,847a	0,847a	0,825a	0,717a	0,717a
Error estándar de la media	0,0299	0,0299	0,0299	0,0302	0,0430	0,0430
Mediana	0,900	0,900	0,900	0,850	0,700	0,700
Moda	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Desviación estándar	0,1797	0,1797	0,1797	0,1811	0,2580	0,2580
Coefficiente Variación	0,2121	0,2121	0,2121	0,2195	0,3600	0,3600
Asimetría	-0,891	-0,891	-0,891	-0,671	-0,184	-0,184
Error estándar de asimetría	0,393	0,393	0,393	0,393	0,393	0,393
Curtosis	-0,297	-0,297	-0,297	-0,696	-1,447	-1,447
Error estándar de curtosis	0,768	0,768	0,768	0,768	0,768	0,768
Mínimo	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3
Máximo	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Nota: Cálculos **propios** adaptados en el Apéndice C.

Conclusiones

1. Las Empresas Publicas Municipales han registrados históricamente excedentes o márgenes brutos sobre los costos y gastos de operación y distribución de agua potable medidos a través del criterio del ingreso bruto. No obstante, el comportamiento del excedente dentro de los años presenta un patrón estacional debido a que los flujos de ingresos tienden a reducirse a lo largo del año mientras que los costos y gastos tienden a aumentar a través del año. Este patrón de comportamiento del excedente se considera que es atípico y no es congruente con la dinámica de operación normal de la empresa ni con el comportamiento de flujo de costos, los cuales deberían ser constante a lo largo del año.
2. A través del tiempo el ingreso bruto ha venido creciendo con una tasa anual de 9,8% y se ha venido duplicando cada 7,3 años; en contraste el costo de venta y producción ha aumentado el 17,1% anual duplicándose cada 4 años y por el contrario los gastos de administración han crecido a una tasa más baja del 5,8% anual duplicándose cada 12,3 años. Por estas razones el margen de excedentes ha venido decreciendo con el tiempo.
3. La eficiencia técnica global ha variado en el rango de 66,9% (si la empresa busca reducir costos) o a 81,9% (si la empresa se enfoca a aumentar el ingreso bruto); sin embargo no se encontraron diferencias significativas entre estos dos indicadores.
4. Lo anterior significa que la empresa podría reducir los costos de la empresa en un 33,1% sin disminuir la producción del producto si usara los recursos productivos en los niveles, combinaciones y formas empleadas por la empresa en los trimestres más eficientes.

5. Alternativamente la empresa podría aumentar la producción del agua sin aumentar la cantidad de insumos actual si produce el volumen de agua en los trimestres que son más efectivos.

Recomendaciones

1. La empresa necesita identificar los mecanismos para estabilizar los flujos de ingresos y egresos de la empresa con el fin de mantener un nivel estable en los excedentes.
2. La empresa debe buscar e identificar cual es el tamaño óptimo de operación y enfocarse a operar en ese nivel óptimo con los cual aseguraría el abastecimiento o suministro de agua potable a la totalidad de la población del casco urbano en cantidad y calidad.
3. Para mejorar la eficiencia global y según los resultados del estudio, la empresa necesita prestar los servicios operando a la escala óptima de producción debido a que la principal fuente de ineficiencia actual es no estar operando en su escala óptima; dados los altos índices de eficiencia técnica pura (94,2% y 96,7%) la empresa tiene un margen reducido para incrementar la producción de agua potable con los recursos y tecnología que actualmente tiene. Esto sugiere que la empresa deberá encontrar recursos adicionales que permitan la expansión de su tamaño de planta al nivel óptimo.
4. Dado que la empresa presenta niveles de excedentes o márgenes brutos relativamente importantes, se debería considerar la posibilidad de utilizar esos excedentes para financiar la expansión de la cobertura del servicio y mejorar la calidad o alternativamente para subsidiar el servicio de agua potable a los sectores de menores ingresos.

Bibliografía

- Afriat, S. (1972). Efficiency Estimation of Production Functions. *International Economic Review* 13 (3), 568-598.
- Agom, D. I., Ohen, B. S., Itam, K. O., & Inyang, N. N. (2012). Analysis of Technical Efficiency of Smallholders Cocoa Farmers in Cross River State, Nigeria. *International Journal of Management and Development* 2 (3), 177-185.
- Alabi, R. A., & Osifo, A. A. (2005). Population Density and Technical Efficiency of Cocoa Based Agroforestry. *Bowen Journal of Agriculture* 2 (2), 216-224.
- Alvarez, A. (2001). *La Medición de Eficiencia y la Productividad*. Madrid: Editorial Pirámide.
- Amos, T. T. (2007). An Analysis of Productivity and Technical Efficiency of Smallholders Cocoa Farmers in Nigeria. *Journal of Social Sciences* 15(2), 127-133.
- Aneani, F., Anchirinah, U. M., Asamoah, M., & Owusu-Ansah, F. (2011). Analysis of Technical Efficiency in Cocoa Production in Ghana. *African Journal of Food, Agriculture, Nutrition and Development* 11 (1), 132-140.
- Batesse, G. E., & Coelli, T. J. (1995). A model for technical inefficiency effects in a stochastic frontier production function for panel data. *Empirical Economics* 20 (1), 325-332.
- Berkelaar, M., Eikland, K., Dirks, J., & Notebaert, P. (2009). *Handbook MaxDEA for Data Envelopment Analysis*. Beijing: Beijing Realworld Software Company Ltd.
- Binam, J. N., Gockowski, J., & Nkamleu, G. B. (2012). Technical Efficiency and Productivity potencial of Cocoa Farmers in Western African Countries: A Meta Frontier Analysis. *The Development Economies* (46) 5, 242-263.
- Bravo-Ureta, B. E., & Pinheiro, A. (1993). Frontier Function Analysis of Efficiency in Developing Countries: A Survey of the Literature. *IV Congreso Latinoamericano y del Caribe de Economía Agrícola* (págs. 37-63). Villa el Mar, Chile: ALACEA.
- Camargo, S. R. (Octubre de 2015). *Revista del CLAD Reforma y Democracia*. Obtenido de Los Servicios Públicos Domiciliarios en Colombia: Su prestación, regulación y control: <http://old.clad.org/portal/publicaciones-del-clad/revista-clad-reforma-democracia/articulos/063-octubre-2015/Matias.pdf>

- Charnes, A; Cooper , W; Rhodes, E. (1978). *Measuring the efficiency of decision making units*. North-Holland Publishing Company ; European Journal of Operational Research.
- Chediak.P, F., & Valencia A., L. S. (Diciembre de 2008). *Metodología para medir la eficiencia mediante la tecnica del Analisis Envolvente de Datos DEA* . Obtenido de http://vip.ucaldas.edu.co/vector/downloads/Vector3_7.pdf
- Contaduría Nacional del Ministerio de Hacienda . (2016). *Sistema Consolidador de Hacienda e Información Pública CHIP*. Bogotá: Ministerio de Hacienda.
- Cooper , W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis*. Austin, TX: Springer Science & Business Media.
- Cuervo González, L. M. (2010). *Observatorio de la Economía Latinoamericana* . Obtenido de El Agua Potable como bien mayor: <http://www.eumed.net/coursecon/ecolat/co/10/lmcg.htm>
- Dzene, R. (2010). *What Drives Efficiency in the Ghanaian Cocoa Farm?* Greenhill, Accra: Ghana Institute of Management and Public Administration.
- Espigare Garcia, J., & Perez Lopez, J. A. (S.F). *Aguas residuales. Composicion*. Obtenido de cidta.usal.es/pdf:
http://cidta.usal.es/cursos/EDAR/modulos/Edar/unidades/LIBROS/logo/pdf/Aguas_Residuales_composicion.pdf
- Fare, R. S., Grosskopf, S., & Lovell, C. (1994). *Productivity Frontiers*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Farrell , M. J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistics Society* 120 (III), 259-275.
- Farrer, H. (1996). *Guia para la elaboracion del analisis de vulnerabilidad de sistemas de abastecimiento de agua potable y alcantarillado sanitario*. Obtenido de Centro Panamericano de Ingenieria Sanitaria y Ciencias del Ambiente (CEPIS): <http://www.bvsde.paho.org/eswww/fulltext/publica/guiaelab/guiaelab.html>
- Ferguson, C. E., & Gould, J. P. (s.f.). *Teoria Microeconomica* .
- Fernandez, D. (Diciembre de 2008). *Planes Estrategicos para el Sector de Agua Potable y Sanamiento*. Obtenido de Banco Interamericano de Desarrollo y Gobierno de Colombia: <http://idbdocs.iadb.org/wsdocs/getdocument.aspx?docnum=35503493>

- Ferro, G., Lentini, E., & Romero, C. A. (Febrero de 2011). *Eficiencia y su medicion en prestadores de servicios de agua potable y alcantarillado*. Obtenido de Comision Economica para America Latina y el Caribe (CEPAL) : http://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/37287/LCW385_es.pdf
- Fleming, E., & Lummani, J. (2001). *Analysis of Techical Efficiency of Samallholders Cocoa Farmers in the Gazelle Peninsula*. Armingdale: Ocasional Pape Centre for Economic Policy Analysis Department of Econometrics, University of New England .
- García Rubio, M. A. (2009). *La medición de la productividad y eficiencia de servicios de abastecimineto de agua potable de las ciudades andaluzas* . Granada : Tesis Doctoral Universidad de Granada.
- Gimbal, C., Batesse, G., & Fleming, E. (1995). The Inefficiency of Smallholders Cocoa Farmers in Papua New Guinea: A Stochastic Frontier Analysis. *Quarterly Journal of International Agriculture* 34(4), 337-357.
- Green, H. W. (1993). *Frontier Production Functions*. New York, NY: Working Paper EC-93-20 Stern School of Business NYU.
- Greene, W. H. (1980). Maximum Likelihood Estimation of Econometric Frontier Functions. *Journal odf Econometrics* 13, 27-56.
- Guman Raja, I., Arcas Lario, N., & Garcia Perez de Lema, D. (Agosto de 2006). *La eficiencia tecnica como medida de rendimiento de las cooperativas agrarias*. Obtenido de CIRIEC-España Revista de economia publica, social y cooperativa N° 55: <http://www.redalyc.org/pdf/174/17405511.pdf>
- Isaza, F. G. (Septiembre de 1997). *Revista de la Comision de Regulacion de Agua Potable y Saneamiento Basico*. Obtenido de Regulacion de Agua Potable y Saneamiento Basico: <https://serviciospublicos.files.wordpress.com/2008/08/resources5crevista5crevista2.pdf>
- Kyei, L., Foli, G., & Ankoh, J. (2011). Analysis of Factors Affecting the Technical Efficiency of Cocoa Farmers in the Offinso District - Ashanti Rgion, Ghana. *American Journal of Social Sciences and Management* 2 (2), 208-216.
- Marquez Contreras , T. E., Velasquez Gonzalez, A. R., Flores Guitierrez, J. O., Flores Marquez, S. L., & Garzon Martinez, H. J. (11 de Junio de 2015). *Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agricolas y Pecuarias de Mexico*. Obtenido de Factores determinantes en la eficiencia tecnica de explotaciones de frijol: <http://www.redalyc.org/pdf/2631/263138103001.pdf>

- Meeusen , W., & Van den Broeck, J. (1977). Efficiency estimation from Cobb-Douglas pproduction
- Nkamleu, G. B., Nyemeck, J., & Gockowski, J. (2010). *Technology Gap and Efficiency in Cocoa Production in West and Central Africa: Implications for Cocoa Sector Development*. Tunis, Tunisia: Working Papers Series No 104 African Development Bank.
- Ofori-Bah, A., & Asafu-Adjace, J. (2011). Scope of Economies and Technical Efficiency of Cocoa Agroforestry Systems in Ghana. *Ecological Economics* 70, 1508-1518.
- Ogunjobi, O. P. (1999). *Efficiency of Smalholders Cocoa Farmers In Ondo State, Nigeria*. Akure, Nigeria: MSc Thesis Federal University of Technology.
- Quindos Moran, M. D., Rubiera Morollon, F., & Vicente Cuervo, M. R. (S.F). *Analisis Envolvente dde Datos: Una aplicacion al sector de los servicios avanzados a las empresas del Principado de Asturias*. Obtenido de Universida de Oviedo: <http://www.uv.es/asepuma/XI/21.pdf>
- Ramirez , A. (2013). Analisis de eficiencia economica en fincas arroceras: aplicacion de una funcion frontera deterministica de ingresos brutos. *Lebret* 5, 213-240.
- Ramirez, A. (2013). Análisis de Eficiencia Económica de Fincas Arroceras: Aplicación de una Función Determinística de Ingresos Brutos Frontera. *Revista Lebret* (5), 210-243.
- Ramirez, F. A. (2016). *Proyecto Plan de Desarrollo Málaga 2016-2019 "Con nuestra gente y por sus derechos"*. Malaga. Obtenido de <http://cdim.esap.edu.co/BancoMedios/Documentos%20PDF/malaga-pd-2012-0215r.pdf>
- Ramirez, F. C. (2016). *Plan de Desarrollo Municipal 2016-2019*. Obtenido de Málaga-Santander: <http://malaga-santander.gov.co/apc-aa-files/64663833353338643530316634393535/plan-de-desarrollo-municipal-malaga-2016-2019.pdf>
- Richmond, J. (1974). Estimating the Efficiency of production. *Internationasl Economic Review* (15), 512-521.
- Romeu Yanes, A. I., & Rodriguez Treto, Y. (Julio de 2008). *Procedimiento para la evaluacion de la eficiencia tecnica en la transportacion de caña en las UBPC calleras de la provincia villa clara*. Obtenido de Universidad central "Marta Abreu" de las Villas : <http://www.monografias.com/trabajos-pdf4/procedimiento-evaluar-eficiencia-tecnica/procedimiento-evaluar-eficiencia-tecnica.pdf>

Schmidt, P. (1976). On the Estimation of Parametric Frontier Production function. *The Review of Economics and Statistics* , 238-239.

SSPD. (2012). *Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios*. Obtenido de Regimen Basico: <http://www.superservicios.gov.co/content/download/10545/86985>

Torres Cardenas, J. C., & Reynosa Carrero, A. C. (2011). *Analisis economico de la eficiencia de los servicios de Educacion secundaria en Bogota para los años 2005,2006 y 2007*. Obtenido de Universidad de la Salle - Bogota: <http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/handle/10185/12496/T10.11%20T636a.pdf?sequence=1>

Zellner, A., Kmenta, J., & Dreze, J. (1966). Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models . *Econometrica* 34, 214-223.

Apéndices

Apéndice A. Eficiencia Técnica Glogal

EFICIENCIA TECNICA GLOBAL						
OBSERVACION	ET-P-RADIAL	ET-P-NO RADIAL	ET-P-MIXTO	ET-I-RADIAL	ET-I-NO RADIAL	ET-I-MIXTO
1	0,8	0,8	0,8	0,8	0,5	0,5
2	0,7	0,7	0,7	0,7	0,5	0,5
3	0,9	0,9	0,9	0,9	0,7	0,7
4	1	1	1	1	1	1
5	0,7	0,7	0,7	0,7	0,5	0,5
6	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1
9	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3
10	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5
11	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6
12	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8
13	0,7	0,7	0,7	0,7	0,4	0,4
14	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5
15	0,8	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1
20	0,9	0,9	0,9	0,9	0,6	0,6
21	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0,3
22	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1
25	0,6	0,6	0,6	0,6	0,3	0,3
26	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4
27	0,8	0,8	0,8	0,8	0,5	0,5
28	1	1	1	1	0,7	0,7
29	0,8	0,8	0,8	0,8	0,4	0,4
30	0,8	0,8	0,8	0,8	0,4	0,4
31	0,9	0,9	0,9	0,9	0,6	0,6
32	1	1	1	1	1	1
33	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0,3
34	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4
35	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6
36	1	1	1	1	1	1

Apéndice B. Eficiencia Pura Técnica

EFICIENCIA PURA TECNICA						
OBSERVACION	ETP-P-RADIAL	ETP-P-NO RADIAL	ETP-P-MIXTO	ETP-I-RADIAL	ETP-I-NO RADIAL	ETP-I-MIXTO
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	0,8	0,8
13	1	1	1	1	1	1
14	0,7	0,7	0,7	1	0,8	0,8
15	0,9	0,9	0,9	1	0,8	0,8
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1
20	0,9	0,9	0,9	0,9	0,7	0,7
21	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1
26	0,8	0,8	0,8	1	0,9	0,9
27	0,9	0,9	0,9	1	0,8	0,8
28	1	1	1	1	0,8	0,8
29	0,8	0,8	0,8	0,9	0,6	0,6
30	0,8	0,8	0,8	0,9	0,7	0,7
31	1	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1	1
36	1	1	1	1	1	1

Apéndice C. Eficiencia de Escala

EFICIENCIA DE ESCALA						
OBSERVACION	ETE-P-RADIAL	ETE-P-NO RADIAL	ETE-P-MIXTO	ETE-I-RADIAL	ETE-I-NO RADIAL	ETE-I-MIXTO
1	0,8	0,8	0,8	0,8	0,5	0,5
2	0,7	0,7	0,7	0,7	0,5	0,5
3	0,9	0,9	0,9	0,9	0,7	0,7
4	1	1	1	1	1	1
5	0,7	0,7	0,7	0,7	0,5	0,5
6	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1
9	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3
10	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5
11	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6
12	1	1	1	1	1	1
13	0,7	0,7	0,7	0,7	0,4	0,4
14	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6	0,6
15	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,8
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	0,9	0,9	0,9
21	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0,3
22	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1
25	0,6	0,6	0,6	0,6	0,3	0,3
26	0,7	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5
27	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6
28	1	1	1	1	0,9	0,9
29	1	1	1	0,9	0,7	0,7
30	1	1	1	0,8	0,7	0,7
31	0,9	0,9	0,9	0,9	0,6	0,6
32	1	1	1	1	1	1
33	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0,3
34	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4
35	0,8	0,8	0,8	0,8	0,6	0,6
36	1	1	1	1	1	1