



UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA

DISEÑO DE UN CONTROLADOR DIFUSO EN UN VEHÍCULO AÉREO NO
TRIPULADO TIPO QUADROTOR BASADO EN LMIs

JEFFERSON SARMIENTO ROJAS.

Universidad Santo Tomás
FACULTA DE INGENIERIA ELECTRÓNICA
BOGOTÁ

2016

DISEÑO DE UN CONTROLADOR DIFUSO EN UN VEHÍCULO AÉREO NO
TRIPULADO TIPO QUADROTOR BASADO EN LMIs

JEFFERSON SARMIENTO ROJAS

TEISIS DE MAESTRÍA.

DIRECTOR:

CARLOS ANDRES TORRES PINZÓN, Ph.D.

CODIRECTOR:

DIEGO ALEXANDER TIBADUIZA BURGOS, Ph.D.

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
INGENIERÍA ELECTRÓNICA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
BOGOTÁ

2017

Nota de Aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

BOGOTÁ, Fecha (15-01-2017).

DEDICATORIA:

A Dios, a mi Familia y mi esposa, Lina Rodríguez, mis más sinceros agradecimientos por la paciencia, colaboración y sabios consejos para desarrollar esta investigación.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron distintas personas, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

En primer lugar, agradezco a Dios y a mi familia por acompañarme todos los días en esta etapa de mi vida. A mi director de tesis Carlos Andrés Torres Pinzón y a mi co-director Diego Alexander Tibaduiza Burgos, por las horas dedicadas a mi trabajo de grado para optar el título de magíster en ingeniería electrónica sin contemplación y disponibilidad inmejorable. Los aportes y la exigencia que depositaron en esta investigación me han engrandecido y beneficiado no solo para mi desempeño académico y profesional si no al crecer a nivel personal.

Contenido

1	INTRODUCCIÓN	19
1.1	ESTADO DEL ARTE.	21
1.2	CONSIDERACIONES INICIALES.	28
1.3	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	28
1.4	JUSTIFICACIÓN.....	30
1.5	OBJETIVOS.....	32
1.6	OBJETIVO GENERAL.....	32
1.7	OBJETIVOS ESPECIFICOS.....	32
2	REFERENTES CONCEPTUALES.....	33
2.1	Modelo Matemático.	33
2.2	Sistemas de Control Automático.....	34
2.2.1	Control de Actitud de un Quadrotor.	35
2.2.2	Control Difuso Takagi Sugeno T-S.	36
2.3	DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES (LMIs).	39
2.4	QUADROTOR VEHICULO AEREO DE CUATRO MOTORES....	42

2.4.1	Funcionamiento de vuelo:.....	43
2.4.2	COMPONENTES ELECTRÓNICOS:.....	44
2.4.3	MOTORES Y ETAPA DE POTENCIA:	50
2.4.4	BATERIA.	52
2.4.5	OTROS COMPONENTES NECESARIOS PARA EL VUELO.	53
3	MODELO MATEMÁTICO	56
3.1	PRINCIPIOS BÁSICOS DE FUNCIONAMIENTO.....	56
3.2	MODELO CINEMÁTICO:.....	59
3.3	CINEMÁTICA TRASLACIONAL.	61
3.3.1	MOVIMIENTO DE GUIÑADA.	61
3.3.2	MOVIMIENTO DE ALABEO.	63
3.3.3	MOVIMIENTO DE CABECEO	66
3.4	MOVIMIENTO ROTACIONAL.	70
3.5	MODELO DINÁMICO.	71
3.5.1	DINÁMICA TRASLACIONAL.....	72
3.5.2	DESCRIPCIÓN DE FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL QUADROTOR.	74
3.6	DINÁMICA DE MOTORES.	76
3.6.1	Implementación en simulación.....	78
3.7	Dinámica Rotacional.....	78
3.8	Representación en variables de estado:.....	82
4	PARAMETRIZACIÓN DEL QUADROTOR.....	84
4.1.1	Medidas:	84

4.1.2	Peso.....	85
4.1.3	CALCULO DE INERCIA.	86
4.2	VALIDACIÓN.....	87
4.3	RESPUESTA EN LAZO ABIERTO ANGULO ROLL Y PITCH.....	88
4.4	RESPUESTA EN LAZO ABIERTO ANGULO YAW.....	89
5	CONTROL BASADO EN DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES PARA REGULAR LA ACTITUD DEL QUADROTOR.....	92
5.1	DEFINICIÓN DE RESTRICCIONES LMI:.....	95
5.1.1	ESTABILIDAD CUADRÁTICA.	95
5.1.2	PARÁMETROS INCIERTOS.	96
5.2	RESTRICCIÓN LMI PARA LA NORMA H^∞	97
5.3	RESTRICCIÓN PARA LA UBICACIÓN DE POLOS.....	98
5.3.1	RESTRICCIÓN PARA LA TASA DE DECAIMIENTO.....	99
5.3.2	RESTRICCIÓN PARA LA LIMITACIÓN DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO \mathcal{L}	99
5.3.3	RESTRICCIÓN PARA LA LIMITACIÓN DE LA FRECUENCIA NATURAL ω_0	99
5.4	Formulación LMI para la restricción en la entrada de control: ...	100
5.5	CONTROL DEL ÁNGULO ROLL PITCH y YAW UTILIZANDO LMIs.	101
5.6	Simulación de Controlador LMI Robusto para Roll, Pitch y Yaw:	107
5.7	Implementación y Discusión de Resultados:	110

6	CONTROL DIFUSO T-S LMI PARA LA ACTITUD DE UN QUADROTOR.....	114
6.1	Modelo Difuso T-S del Quadrotor:	116
6.1.1	Validación del modelo:.....	122
6.2	CONTROL DIFUSO TAKAGI-SUGENO.....	127
6.2.1	Estabilidad para sistemas difusos T-S en lazo abierto.....	129
6.2.2	Estabilidad para sistemas difusos T-S en lazo Cerrado:.....	130
6.3	Formulaciones de diseño LMI para el Control difuso T-S.....	131
6.3.1	Formulación LMI para el diseño de control H_{∞}	132
6.3.2	Formulación LMI para la tasa de decaimiento.	133
6.3.3	Formulación LMI para la Restricción en la Entrada de Control.	134
6.4	Simulación de Controlador Difuso T-S LMI Robusto para Roll, Pitch y Yaw:	135
6.4.1	Modelo Simulink.....	139
6.5	Implementación y Discusión de Resultados.	145
7	DISCUSIÓN Y RESULTADOS.....	150
8	CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....	155
9	BIBLIOGRAFÍA	161
10	Anexos.....	169

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Comparación de algoritmos de control en Quadrotores.	26
Tabla 2. Medidas Quadrotor.....	84
Tabla 3. Distribución General de Peso Quadrotor.....	85

LISTA DE GRÁFICAS

Grafica 1: Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad del motor 2 al 75% de su velocidad y motor 4 al 25 % de su velocidad.	88
Grafica 2. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad del motor 4 al 75% de su velocidad y motor 2 al 25 % de su velocidad.	88
Grafica 3. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad de los motores 2 y 4 al 50% de su velocidad y los motores 1 y 3 al 15 % de su velocidad.	90
Grafica 4. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad de los motores 1 y 3 al 50% de su velocidad y los motores 2 y 4 al 15 % de su velocidad.	90
Grafica 5. Respuesta del ángulo Yaw Frente a la estrategia de control LMI robusta con un setpoint 5 grados.	108
Gráfica 6. Respuesta del ángulo Pitch Frente a la estrategia de control LMI robusta con un setpoint 10 grados.	109
Gráfica 7. Respuesta del ángulo Roll Frente a la estrategia de control LMI robusta con un setpoint 20 grados.	109
Grafica 8. Resultados de implementación física de controlador LMI Angulo Yaw.	112
Grafica 9. Resultados de implementación física de controlador LMI Angulo Pitch.	112
Grafica 10. Resultados de implementación física de controlador LMI Angulo Roll.	113
Grafica 11. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente al Angulo YAW.	124
Grafica 12. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente la velocidad angular del Angulo Yaw.	124

Grafica 13. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente al Angulo Pitch.	125
Grafica 14.. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente al Angulo Roll.	126
Grafica 15. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente la velocidad angular del Angulo Roll.	126
Grafica 16..Respuesta del ángulo Yaw Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI	142
Grafica 17.Respuesta del ángulo Pitch Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI	142
Grafica 18.Respuesta del ángulo Roll Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI	143
Grafica 19. Algoritmo general de implementación controlador difuso T-S quadrotor.	146
Grafica 20. Resultados de implementación física de controlador Difuso T-S LMI Angulo Yaw.....	147
Grafica 21. Resultados de implementación física de controlador Difuso T-S LMI Angulo Pitch.....	148
Grafica 22. Resultados de implementación física de controlador Difuso T-S LMI Angulo Roll.....	148
Grafica 23. Respuesta del ángulo Yaw Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI Implementado.....	151
Grafica 24. Respuesta del ángulo Pitch Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI Implementado.....	151
Grafica 25. Respuesta del ángulo Roll Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI Implementado.....	152
Grafica 26. Control Estabilidad Medido en los tres ejes de Rotación.	154

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Sistema Básico de Control Automático.	35
figura 2. Esquema de control de actitud. Adaptado de (Mejías et al., 2006).....	36
Figura 3. Vehículo Quadrotor, descripción de su estructura componentes y funcionamiento.....	42
Figura 4. Descripción de los movimientos de un Quadrotor. Tomado de (Nonami et al., 2010, p. 64)	43
Figura 5. Tarjeta de Control de Vuelo Multiwii All in One PRO 2.0v. Recuperado de (“Multiwii and Megapirate AIO Flight Controller w/FTDI (ATmega 2560) V2.0 (US Warehouse)”, 2016)	46
Figura 6. Unidad de medición Inercial IMU MPU 6050. Especificaciones. Recuperado de (“GY-521 MPU6050 3 ejes Aceleración giroscopio Módulo 6DOF - Azul - Free Shipping - DealExtreme”, s/f)	47
Figura 7. Motor Motor Brushless Turnigy T1811 y Especificaciones técnicas. Recuperado de (“Turnigy 1811 brushless Outrunner 2900kv (EU Warehouse)”, s/f).....	51
Figura 8. Controladores Electrónicos de Velocidad. Recuperado de (“TURNIGY Plush 6A /.8bec/6g Speed Controller (EU Warehouse)”, s/f).....	52
Figura 9. batería Turnigy nano-tech 850mah 2S 25.....	53
Figura 10. Hélices sentido de giro pusher y puller.	54
Figura 11. Quadrotor configuración en Cruz.	57
Figura 12. Variación de velocidad en motores $\Omega+\Delta A$	59
Figura 13. Ángulos de Euler .Retomado de (Maria Elena Gavilan & Jose Daniel Muñoz, 2006, p. 2)	60

Figura 14. Movimiento de Guiñada (YAW).....	61
Figura 15. Diagrama de rotación del ángulo YAW.	62
Figura 16 Rotación sobre el ángulo Yaw teniendo en cuenta que este ángulo gira sobre el eje Z	62
Figura 17. Movimientos en el eje θ izquierda y derecha.....	64
Figura 18. Rotación sobre del ángulo Pitch.....	64
Figura 19. Rotación sobre el ángulo pitch teniendo en cuenta que en este ángulo gira sobre el eje Y.	65
Figura 20. rotación sobre del ángulo Roll.....	67
Figura 21. Rotación sobre el ángulo Roll teniendo en cuenta que en este ángulo se gira sobre el eje X.	67
Figura 22. Medidas Físicas del Quadrotor.	85
Figura 23. Banco de pruebas.	87
Figura 24. Diagrama bloques simulink.	87
Figura 25. Esquema de un sistema en variables de estado y Control.	93
Figura 26. Region S Ubicación de polos.	99
Figura 27. Región de Ubicación de Polos.	105
Figura 28. Implementación controladores LMI (Roll, Pitch y YAW) en Simulink.	108
Figura 29. Diagrama bloques simulink modelo difuso T-S quadrotor.....	123
Figura 30. Región de Ubicación de Polos $S(\alpha)$	134
Figura 31. Implementación controladores difusos T-S LMI (Roll, Pitch y YAW) en Simulink.	140
Figura 32. Interior de bloque control difuso LMI Roll y definición del bloque o función para el cálculo de las ganancias F_i dependiendo el valor de las variables de estado en la entrada.	141

LISTA DE ANEXOS.

Anexo 1. Video: CONTROL LMI ROLL.....	172
Anexo 2. Video: CONTROL LMI PITCH.....	172
Anexo 3. Video: CONTROL LMI YAW.....	172
Anexo 4. Video: CONTROL DIFUSO T-S LMI ROLL.....	172
Anexo 5. Video: CONTROL DIFUSO T-S LMI PITCH.....	172
Anexo 6. Video: CONTROL DIFUSO T-S LMI YAW.....	172

Glosario Siglas y Acrónimos.

<i>Actitud</i>	Posición del quadrotor respecto a los ángulos Roll, Pitch y Yaw.
<i>DOF</i>	<i>Degrees of Freedom</i>
<i>GPS</i>	<i>Sistema de posicionamiento global.</i>
<i>GDL</i>	<i>Grados de libertad</i>
<i>Hovering</i>	<i>Quadrotor suspendido en el aire.</i>
<i>IMU</i>	<i>Unidad de medición inercial</i>
<i>LMI</i>	<i>Linear matrix inequality</i>
<i>LQR</i>	<i>Linear quadratic regulator</i>
<i>MEMS</i>	<i>Micro Electromechanical Systems</i>
<i>MIMO</i>	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
<i>PID</i>	<i>Proporcional-Integral –Derivative</i>
<i>UAV</i>	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
<i>UAS</i>	<i>Unmanned Aircraft System</i>
<i>VTOL</i>	<i>Vertical Take-off Landing</i>

RESUMEN

La presente investigación estuvo enfocada en la implementación de estrategias de control en vehículos aéreos no tripulados, específicamente estrategias de control robusto basadas en LMIs y estrategias de control difuso Takagi Sugeno basadas en LMIs, para mejorar la eficiencia en estado hovering de los vehículos aéreos de cuatro rotores, los cuales son conocidos por su complejidad al momento de un vuelo autónomo. Lo que se logró en esta investigación fue la total autonomía de este tipo de aeronaves en su estado hovering, es decir en vuelo suspendido en el aire; facilitando así el uso de este tipo de aeronaves no tripuladas en todo tipo de ambientes y para diferentes campos de acción. En este trabajo se presentan resultados fiables tanto en simulación como en pruebas experimentales; se muestra la eficiencia de las técnicas de control robustas implementadas en un quadrotor.

Capítulo 1.

1 INTRODUCCIÓN

Una aeronave no tripulada (UAV: Unmanned Aerial Vehicle, UAS: Unmanned Aircraft System o UAVS: Unmanned Aircraft Vehicle System) es aquella capaz de realizar un vuelo sin necesidad de tener un piloto a bordo de la aeronave; aunque es necesario, hasta el presente día, maniobrarlo desde un mando de control que por lo general está ubicado en tierra. Por consiguiente, al concebir los vehículos UAV como un sistema, se deben tener en cuenta dos partes principales; primero, el vehículo UAV, y segundo, el control de mando del mismo (Magdaleno & Luis, 2013)

En los últimos años diversas investigaciones se han enfocado en convertir este tipo de vehículos en vehículos autónomos tanto en su vuelo en estado suspendido en aire como en las misiones para las cuales son utilizados; esto quiere decir que en el futuro no se concebirá el vehículo quadrotor como dos sistemas independientes, sino como un vehículo completamente autónomo en donde la tarea del piloto estará limitada a programar la misión del vehículo aéreo no tripulado.

Las técnicas de control en sistemas electrónicos son utilizadas para mejorar el desempeño y estabilidad de los mismos. Varias técnicas de control se han creado con el objetivo de automatizar sistemas, teniendo como objetivo final mejorar el rendimiento de los mismos buscando las condiciones óptimas de desempeño (Villalón, 2015). Los quadrotores son un tipo de vehículos aéreos no tripulados que actualmente son utilizados debido a su facilidad de despegue y aterrizaje vertical

(VTOL); sin embargo, son un sistema ideal para aplicar leyes de control debido a su no linealidad y su comportamiento inestable ante perturbaciones externas, por lo general variables ambientales.

En los últimos años se han propuesto varios modelos matemáticos que describen el comportamiento del Quadrotor; la mayor parte de ellos obtienen el modelo dinámico tomando el vehículo como un cuerpo rígido y utilizando modelos matemáticos obtenidos a partir de la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange y las leyes de Newton; sin embargo, la mayoría de modelos obtenidos teóricamente no han sido aplicados o fallan al momento de ser implementados (Zulu & John, 2014).

La importancia de automatizar este tipo de sistemas nace debido a su dinámica de fácil despegue y aterrizaje vertical. Actualmente grandes empresas que proveen servicios de tecnología y mensajería, enfocan investigaciones en áreas de aplicación de drones y sistemas de control, además entidades gubernamentales de todo el mundo ven este tipo de aeronaves como la solución al monitoreo de incendios forestales; no obstante, su limitada autonomía no permite que desempeñen esta tarea de una manera eficiente.

Durante años, el control de vehículos aéreos no tripulados para alcanzar una autonomía óptima se ha convertido en un reto en la implementación de las leyes de control por su complejidad en el modelo matemático y su poca autonomía sin la presencia de un piloto. Varias estrategias de control se han implementado en vehículos tipo quadrotor, desde estrategias de control clásico como controladores PID, hasta algoritmos de control modernos como las desigualdades matriciales lineales (LMIs), que han sido planteadas con el fin de resolver el problema de estabilidad del quadrotor, ya que se basan en el criterio de estabilidad según Lyapunov.

En este trabajo se buscó implementar estrategias de control robusto a partir de la formulación de restricciones LMIs a partir del modelo matemático planteado a través del modelo Euler – Lagrange y el modelo difuso T-S. Primero se implementará en simulación el modelado y control propuesto, y luego, mediante resultados experimentales se verificarán los resultados. Para el diseño del controlador se comenzará con la elección de varios requerimientos de diseño como restricciones que se deben cumplir y se planteará una función de optimización la cual asegura un buen desempeño dinámico en la planta.

1.1 ESTADO DEL ARTE.

Una aeronave no tripulada (UAV: Unmanned Aerial Vehicle, UAS: Unmanned Aircraft System o UAVS: Unmanned Aircraft Vehicle System) es aquella capaz de realizar un vuelo sin necesidad de tener un piloto a bordo de la aeronave. La mayoría de este tipo de vehículos se maniobra desde un mando de control que por lo general está ubicado en tierra, por ende, el sistema total se asume teniendo en cuenta las dos partes.

Es importante considerar que esta definición podría incluir algunos casos que quedan fuera del concepto subyacente de UAV; por ejemplo, los globos aerostáticos utilizados con fines meteorológicos responden a la definición, pero no son considerados como UAV dada su no controlabilidad. Lo mismo se puede decir de los misiles auto pilotados o con control remoto, entre otros (Qi, Feng, Liu, Yang, & Li, 2016).

Un Quadrotor se puede definir como una aeronave que se eleva y se desplaza por el movimiento de cuatro motores ubicados en los extremos de una estructura en forma de cruz o equis dependiendo su configuración. Es por esto que normalmente se utiliza el nombre Quadrotor, aunque también es conocido como Quadricóptero, Quadrirotor o Dron, este último siendo su nombre más comercial. El

vehículo dispone de 4 motores con sus respectivas hélices y se utiliza la velocidad de los motores para controlar la estabilidad y movimientos del vehículo aéreo (Lukmana & Nurhadi, 2015).

El vehículo Quadrotor se considera una alternativa eficaz a los altos costos y la complejidad de los helicópteros estándar. El uso de cuatro rotores para crear empuje diferencial hace que la nave sea capaz de flotar y moverse sin el complejo sistema de vuelo en un solo rotor estándar. El Quadrotor se clasifica como un sistema subactuado debido al hecho de que sólo cuatro actuadores (rotores) se utilizan para controlar todos los seis grados de libertad (DOF) (Jabbari, Oriolo, & Bolandi, 2012).

Desde el primer Quadrotor en 1921 (Gabriel Leos Monroy, 2014, p. 22), las estrategias de control han sido objeto de interés por su importancia y complejidad al momento de implementarse en este tipo de vehículos. De aquí, que diferentes estrategias de control se han implementado a partir de dicha fecha con el objetivo de estabilizar el Quadrotor en sus seis grados de libertad, y de esta manera lograr una autonomía en sus ángulos de rotación.

A principio de los años noventa, este tipo de vehículos ya podían verse en el ámbito militar y civil a una escala muy superior (Pallett & Ahmad, 1993). Principalmente se trabajaba en estos vehículos con propósitos de búsqueda y vigilancia pero con complicaciones a la hora de controlarlos, puesto que las teorías de control lineal desarrolladas para robots totalmente actuados no se aplicaban a sistemas no lineales subactuados (Fantoni & Lozano, 2002, p. 18).

Gracias al avance de la Micro Electromechanical Systems o más conocida MEMS surge la necesidad de implementar y generar estrategias de control para estos vehículos a una escala miniatura, esto ligado con el desarrollo de las teorías de control avanzadas y sistemas computacionales de cálculo avanzado que permitieron la linealización en puntos de operación de sistemas que hasta entonces

no lo eran. Debido al problema de la no linealidad de este tipo de vehículos UAV, diferentes investigadores en el área de control automático, robótica y mecatrónica desarrollaron leyes de control no lineales para controlar la dinámica de dichos vehículos (Bouabdallah, Murrieri, & Siegwart, 2004).

En los últimos años, se han propuesto varios modelos de Quadrotor; la mayor parte de ellos obtienen el modelo dinámico tomando el vehículo como un cuerpo rígido y utilizando modelos matemáticos obtenidos a partir de la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange y las leyes de Newton. Sin embargo, la mayoría de modelos obtenidos teóricamente no han sido aplicados o fallan a la hora de implementarlos (Castillo, García, Lozano, & Albertos, 2007a).

Las estrategias de control permiten el comportamiento autónomo de un vehículo en vuelo estacionario; en el trabajo propuesto por Argentim, Rezende, Santos, & Aguiar se abordó el problema de la estabilidad de un Quadrotor desde varias estrategias clásicas de control, PID diseñado por respuesta en frecuencia y PID incremental (Argentim, Rezende, Santos, & Aguiar, 2013). En dicho trabajo se concluye que a pesar de tener el modelo matemático que describe el sistema, los controladores PID entregan una respuesta rápida pero el buen funcionamiento de este controlador solo se garantiza en un rango muy pequeño.

En otro trabajo,(Liu, Bai, Lu, & Zhong, 2013) los autores pretenden controlar la actitud de un quadrotor mediante la implementación de un controlador PD con un algoritmo de auto sintonización, lo que permite que esta sintonización sea exitosa en un ambiente controlado o en ambientes similares; sin embargo, se concluyó que la implementación de la auto sintonía requiere un proceso de hardware demasiado alto, sobre todo si se quiere que esté en la tarjeta de control del vehículo. De igual manera, existe la posibilidad de que la ganancia produzca en el sistema una acción de control suficientemente grande para superar los niveles físicamente limitados por el Quadrotor. Además, tiene la peculiaridad de no alcanzar el setpoint deseado en

algunas oportunidades, debido a que la planta no es lineal y el integrador es nulo; esto se debe a que existe un valor de ganancia que hace que el sistema se vuelva inestable, por eso la no linealidad del sistema podría ser resuelta implementando estrategias de control robustas (Lengerke, Gonzalez, & Beltrán, 2013).

Otras técnicas de control que se han utilizado para este propósito es la técnica de control lineal LQR; Castillo, Garcia, Lozano, & Albertos (2007) concluyen que después de realizar las pruebas y ajustes del controlador de forma manual, con este tipo de controladores se logra un diseño adecuado, aunque no lo suficiente para poner el Quadrotor en vuelo estacionario de manera automática (Castillo et al., 2007a).

En el trabajo realizado por Mauricio Peña, Carlos Vivas y Carol Rodríguez, se buscaba modelar físicamente la dinámica del vehículo Quadrotor como un sistema lineal teniendo en cuenta algunos fenómenos aerodinámicos de las hélices para luego realizar la linealización del modelo (Peña Giraldo, Vivas Gonzales, & Rodríguez Feliciano, 2010). Luego, llegaron a la conclusión de que, aunque el modelo propuesto sirve para tener referencia de la dinámica del vehículo, este es un sistema no lineal e inestable dependiente de parámetros externos a él y se debe implementar estrategias de control no lineal como solución para garantizar la autonomía en vuelo de un Quadrotor.

El problema del Quadrotor como un sistema no lineal, dio lugar a que se haya estudiado dicho problema desde otras áreas del conocimiento; una de estas es la inteligencia artificial desde la rama de control difuso en la cual se propone un modelo de control de sistemas a través de la interpretación del modelo por parte del operador y el control del sistema a partir del conocimiento del modelo a través de reglas semánticas dadas por el operador experto de la planta o sistema.

Por otro lado, en el trabajo presentado por E. Abbasi y M.J. Mahjoob se propone el estado en hovering del Quadrotor a través del ajuste de las ganancias

de un controlador PD usando un sistema difuso tipo Mandami; se ajustan las ganancias y con esto se controla el Quadrotor teniendo un rango establecido para estas dos variables del controlador. En simulaciones se muestra la efectividad de esta técnica; sin embargo, esta estrategia depende mucho de la experiencia del operador (Abbasi, Mahjoob, & Shafiekhani, 2014).

Otras estrategias de control más avanzadas se han implementado en este tipo de vehículos logrando así resultados más eficaces que a los que se llegaban con las estrategias de control clásicas lineales. Dentro de los controladores implementados en este tipo de vehículos encontramos los controladores LQR (Linear Quadratic Regulator) y controladores basados en modo deslizante.

En el trabajo propuesto por Yiqun, Jun, Bin, Youmin, & Jianliang, (2015) se diseña un controlador en modo deslizante y un controlador backstepping. En este artículo se comparan estas dos leyes junto con la estrategia de control PID y se llega a la conclusión que los tres controladores arrojan resultados similares para los tres ángulos de control. Aunque se logra estabilizar el quadrotor en los tres ángulos, los resultados no son los esperados, sobre todo por tratarse de una planta no lineal, sensible a perturbaciones y dependiente a variables externas. En este mismo artículo se sugiere implementar una estrategia de control robusto en donde las perturbaciones y las incertidumbres sean contempladas dentro del modelo o por lo menos dentro de la ley de control.

Debido a las incertidumbres que pueden presentar este tipo de vehículos al momento de encontrarse en vuelo estacionario; como lo es la dinámica de las hélices, la presión atmosférica, y otros factores externos al modelo, actualmente existen investigaciones, como la presentada por Zulu & John (2014), exponen algunas estrategias de control implementadas en quadrotores. En dicha investigación se presenta una tabla en la cual se resume con exactitud las

estrategias de control más utilizadas en vehículos aéreos no tripulados tipo quadrotor.

Tabla 1. Comparación de algoritmos de control en Quadrotores.

Algoritmos de control		Robusto	Adaptativo	Óptimo	Inteligente	Convergencia Rápida	Precisión	sencillo	Rechazo de perturbaciones	Gestión de parámetros no modelados	Ajuste manual Ganancias	Señal de ruido	Perdida de energía
1	PID	1	0	0	0	1	1	1	2	0	0	2	2
2	PID inteligente	1	0	0	2	1	1	1	1	0	0	0	1
3	LQR	0	2	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
4	LQG	0	2	2	0	1	1	0	0	2	0	1	0
5	L1	0	2	2	0	1	2	2	0	1	0	0	0
6	H1	2	1	2	0	2	0	1	0	0	1	0	0
7	SMC	1	2	1	0	2	2	2	1	2	1	0	0
8	FBL	1	1	0	0	2	2	2	1	1	1	0	1
9	Backstepping	0	2	0	0	2	0	1	0	2	1	0	0
10	Fuzzy Logic	1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	1	0
11	Neural networks	1	2	2	2	1	1	1	0	1	1	0	0
12	Genetic	1	2	2	2	1	1	1	0	1	2	0	0
0=>Bajo, 1=>promedio, 2=> alto .						1 a 5 Lineales y 6 a 12 no lineales							

Recuperado de *A Review of Control Algorithms for Autonomous Quadrotor* (Zulu & John, 2014, p. 8).

Según la **Tabla 1.**, se puede observar como diversas estrategias de control han sido utilizadas en vehículos quadrotores, y como cada día crece la necesidad de encontrar una estrategia de control que permita mantener la actitud del quadrotor de una manera estable, sin que lo afecte las perturbaciones o cambios de ambiente; por ende en la actualidad varias estrategias de control óptimo están siendo utilizadas como alternativa a dichas incertidumbres y no linealidad que caracteriza a este tipo de sistemas.

Por otro lado, se encuentra el uso de desigualdades matriciales lineales aplicadas al análisis de sistemas dinámicos, aunque las LMI no fueron creadas con

propósitos de optimizar estrategias de control, en la actualidad son utilizados para la solución de problemas de optimización convexa permitiendo así resolver muchos problemas en los sistemas de control en donde su solución se presenta de forma numérica (Tanaka & Wang, 2004a). En el trabajo propuesto por Ryan y Kim (2013), se utilizan las desigualdades matriciales lineales con el fin de sintonizar las ganancias PID, con el fin de estabilizar un quadrotor desde la reformulación de estos a través de LMI (Ryan & Kim, 2013). Esto facilita el diseño de las estrategias de control con la utilización de herramientas de software y el uso de tool-box en las mismas.

Otras alternativas han intentado resolver el problema de control de la actitud del sistema quadrotor. Se ha intentado abordar desde la teoría de control basada en lógica difusa que se basa en reglas difusas a partir del conocimiento de un experto, además de tener en cuenta el modelo. Esta estrategia de control se presenta como una teoría que ha alcanzado madurez y que se viene implementando en múltiples sistemas no lineales como alternativa al modelo y control de los mismos. La lógica difusa basa su funcionamiento a través de reglas lingüísticas entregadas por el experto, y a partir de esto, se controla el sistema de una manera más comprensible para el ser humano; sin embargo, estas estrategias de control se caracterizan por tener un alto costo de software y hardware al momento de ser implementadas.

Es por esta razón que las teorías de control modernas pueden ser útiles al momento de controlar la actitud de este tipo de vehículos, ya que estas estrategias nos permiten incorporar dentro del modelo del sistema varios requerimientos de diseño expresado como restricciones, y así poder asegurar un comportamiento óptimo que asegure el desempeño dinámico de la planta; además permite incluir incertidumbres del sistema o del ambiente lo cual conlleva a la obtención de un control robusto.

1.2 CONSIDERACIONES INICIALES.

El vehículo UAV tipo Quadrotor es un tipo de vehículo aéreo no tripulado, el cual es utilizado en la actualidad gracias a sus funcionalidades de despegue, su aterrizaje vertical y vuelo estacionario, de esta manera logra mantenerse constante en un punto. A estos vehículos también se les conoce como vehículos tipo VTOL (Vertical Take Of Landing), los cuales presentan muchas ventajas en diferentes áreas de aplicación y se puede observar como hoy en día son utilizados para la inspección en desastres naturales, en grabación de video o toma de fotos en superficies irregulares y de difícil acceso, en procesos de cartografía para la creación de mapas obteniendo registros audiovisuales, y en procesos de vigilancia; sin contar la serie de beneficios que estos vehículos han aportado al desarrollo e implementación de diferentes estrategias de control debido a la complejidad del modelo y la no linealidad del mismo.

Este trabajo se desarrolló con el vehículo UAV tipo Quadrotor y es importante resaltar las problemáticas que surgieron a la hora de implementar estrategias de control en este tipo de vehículos; como la no linealidad del sistema, cambios de posición de las hélices debido al cambio en la actitud, el control de sus cuatro rotores, las perturbaciones del medio que afectan su funcionamiento y sus seis grados de libertad.

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

La necesidad de utilizar los vehículos aéreos no tripulados tipo quadrotor de manera autónoma ha venido creciendo actualmente. Hoy en día este tipo de vehículos tiene diversas áreas de aplicación y en la mayoría de estas se requiere que el vehículo

realice una misión de una manera autónoma sin que un piloto este controlando su estabilidad.

En función de solucionar la problemática mencionada anteriormente diversos grupos de investigación y empresas del sector han venido trabajando desde las estrategias de control clásicas, en las cuales se pretende abordar el sistema a partir del modelado matemático aproximado y el desempeño de estos vehículos de una manera autónoma en un punto de operación. Aunque estas teorías han aportado en el conocimiento del modelo físico del vehículo, han dado como resultado un modelo no lineal y dependiente de variables externas que no se incluyen al momento de implementar este tipo de controladores.

Estudios recientes concluyen que, aunque el sistema es estable en un ambiente con condiciones particulares, al modificar el ambiente o tan solo la posición del vehículo, el sistema ya no es estable (Bo, Xin, Hui, & Ling, 2016). Por esta razón, al momento de pensar en controlar un vehículo UAV tipo quadrotor es que surgen los siguientes interrogantes: ¿Cuáles son los alcances en términos dinámicos a la hora de implementar diferentes estrategias de control para estabilizar un vehículo UAV y mantenerlo a una altura determinada? ¿Cuál es el aporte que realizan las teorías de control robusto al ser implementadas en vehículos aéreos UAV tipo Quadrotor?, como contribución a la solución de este problema, el propósito de esta investigación es implementar la estrategia de control moderno difuso Takagi-Sugeno basada en LMIs a partir del modelo matemático del Quadrotor y así, poder compararla con la estrategia de control robusto LMI con el fin de observar el grado de estabilidad que estas estrategias aportan al ser implementadas en este tipo de vehículos.

1.4 JUSTIFICACIÓN.

El control automático es quizá una de las ramas de la electrónica más importante en los últimos años debido al avance que ha tenido gracias al desarrollo de herramientas computacionales y de hardware que permiten realizar operaciones matemáticas complejas (Moreno, 1999). Varias técnicas de control se han creado con el objetivo de automatizar sistemas, teniendo como objetivo final mejorar el rendimiento buscando las condiciones óptimas de desempeño (Amadori, 2016).

Existen varias técnicas clásicas de control tales como P, PD, PID y Control por realimentación de estados, que han sido utilizadas en los procesos de automatización, debido a su sencillez en la implementación, su diseño y sus excelentes resultados al momento de ponerlos en ejecución (Gómez, 2015). Gracias al desarrollo computacional que han tenido y al avance de la tecnología se han podido implementar técnicas de control un poco más avanzadas, como control no lineal, control robusto, control adaptativo y control predictivo, las cuales han permitido generar procesos de automatización en sistemas no lineales; es por ello que estas teorías de control están enfocadas a este tipo de sistemas.

Uno de dichos sistemas es el vehículo UAV tipo Quadrotor; vehículos que son utilizados en la actualidad gracias a sus funcionalidades de despegue, su aterrizaje vertical y vuelo estacionario, manteniendo así constante el vehículo en un punto. Estos vehículos presentan muchas otras ventajas en términos de áreas de aplicación: en desastres naturales, en grabación de video o toma de fotos en superficies irregulares, en procesos de cartografía y en procesos de vigilancia. Según (Beltrán, 2014) los beneficios que traen los drones al momento de utilizarlos en las tareas diarias facilita la labor de las personas evitando el riesgo que estas corren al momento de estar en superficies de difícil acceso o que requieran esfuerzo físico por parte de las personas, lo que es evidente en el campo de la agronomía.

Por otro lado, la velocidad a la que pueden viajar estos vehículos se puede aprovechar en primeros auxilios, en el caso de accidentes de tránsito, o emergencias. Uno de los principales objetivos es utilizar estos vehículos para el envío de medicamentos y kits de primeros auxilios.

Un aspecto particular de nuestro contexto colombiano, específicamente la ciudad de Bogotá, es cuando llega la época de verano y se desatan incendios forestales en los cerros. En el 2016, la consejería distrital de las TIC abrió un concurso “Reto de Innovación IEEE Piensa en Bogotá 2016” en donde se buscaba dar solución a esta problemática con el uso de drones debido a sus características de vuelo; de igual manera, la serie de beneficios que estos vehículos han aportado al desarrollo e implementación de diferentes estrategias de control debido a su complejidad del modelo.

Por último, teniendo en cuenta que en el grupo MEM de la Facultad de Ingeniería Electrónica no existen trabajos desarrollados en el área de vehículos aéreos no tripulados; esta investigación tomará como referentes las investigaciones en modelado y control de sistema, tales como Design and control of an exoskeleton in rehabilitation tasks for lower limb (Velandia, Celedón, Tibaduiza, Torres-Pinzón, & Vitola, 2016); Artificial immune system (AIS) for damage detection under variable temperature conditions (Anaya Vejar, Burgos, Alexander, & Pozo Montero, 2016) y A bioinspired methodology based on an artificial immune system for damage detection in structural health monitoring (Anaya, Tibaduiza, & Pozo, 2015).

Este trabajo se desarrollará con base al vehículo UAV tipo Quadrotor y es importante resaltar las problemáticas que surgen a la hora de implementar estrategias de control en este tipo de vehículos; como la no linealidad del sistema, cambios de posición de las hélices debido al cambio en la actitud, el control de sus cuatro rotores, las perturbaciones del medio que afectan su funcionamiento y sus seis grados de libertad (Gonçalves et al., 2013).

1.5 OBJETIVOS

1.6 OBJETIVO GENERAL.

Diseñar y analizar estrategias de control difuso Takagi-Sugeno, utilizando desigualdades matriciales lineales en vehículos aéreos no tripulados tipo Quadrotor.

1.7 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

- Realizar el acondicionamiento de los sensores necesarios para la adquisición de las variables de estado del vehículo quadrotor.
- Diseñar e implementar un controlador robusto basado en LMI's para regular la actitud de un quadrotor.
- Construir el modelo Takagi-Sugeno del vehículo quadrotor.
- Diseñar e implementar un controlador difuso LMI para la regulación del quadrotor teniendo en cuenta requerimientos de diseño tales como: rechazo a perturbaciones, localización de polos en lazo cerrado y limitación en el esfuerzo de control.
- Comprobar y comparar experimentalmente en un quadrotor real las técnicas de control difuso LMI con las técnicas de control LMI.

Capítulo 2.

2 REFERENTES CONCEPTUALES.

En esta parte de la investigación se expondrán algunos referentes conceptuales sobre los cuales está sustentada esta investigación. Se presentan algunas nociones conceptuales que permitirán establecer nociones teóricas de los conceptos de ingeniería aplicados en este trabajo de investigación; de igual manera la conceptualización de la parte técnica y practica del proyecto.

2.1 Modelo Matemático.

El modelado de sistemas es una parte fundamental en los sistemas de control debido a que en este se pretende representar el sistema real a partir de ecuaciones que describan su dinámica. Para el caso de los sistemas de control se suele representar los sistemas en variables de estado o funciones de transferencia, ambas técnicas tienen la particularidad de entregar el comportamiento del sistema en el tiempo; para el caso de esta investigación se utilizará la representación del modelo a través de ecuaciones de estado. Como sabemos, el modelo del quadrotor es complejo de construir; con el fin de simplificar la obtención del modelo se utilizará el método de Lagrangiano y una serie de simplificaciones, los cuales describen el quadrotor como un todo, en vez de seccionarlo como se hace con el método de Newton.

$$L(q, \dot{q}) = Ek_{trans} - Ek_{rot} - Ep \quad (2-1).$$

Las dos ecuaciones usadas que entregan el comportamiento dinámico del quadrotor son: la ecuación general de Lagrangiano donde L establece que la energía producida por el quadrotor es igual a la energía traslacional (E_{ktrans}) más la energía rotacional E_{krot} restada por la energía potencial del sistema (E_p).

La ecuación de movimiento de Lagrangiano es usada para obtener las fuerzas no conservativas generalizadas (f_ε) y momentos (T_n) del quadrotor (Biever, 2015):

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = \begin{bmatrix} f_\varepsilon \\ T_n \end{bmatrix} \quad (2-2).$$

2.2 Sistemas de Control Automático.

En la actualidad el concepto de sistema de control presenta una multiplicidad de definiciones; ello se debe principalmente a que la construcción del mismo se ha dado desde diversos campos interdisciplinarios de la ingeniería y las matemáticas. Sin embargo y según Kuo (1995) un sistema de control automático es aquel que logra controlar las salidas en alguna forma prescrita mediante las entradas a través de los elementos del sistema de control.

Existen dos tipos de control automático en la actualidad: los sistemas de control en lazo abierto y los sistemas de control en lazo cerrado, siendo estos últimos los más utilizados en procesos industriales y de robótica, básicamente un sistema de control de lazo cerrado se caracteriza porque “el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema”(Ogata, 2003, p. 20).

La utilización de un tipo de control u otro, depende de la naturaleza del sistema, es decir que si se conoce el comportamiento del sistema y sus salidas son fáciles de predecir se recomienda utilizar control en lazo abierto; por el contrario, si no se conoce el comportamiento del sistema y sus salidas son difíciles de predecir se utiliza control en lazo cerrado, como es el caso de esta investigación, en donde se pretende controlar un sistema no lineal y dependiente de múltiples variables para predecir su salida en términos generales. En la Figura 1, se muestra la configuración básica de un controlador en lazo cerrado, nótese que se está realizando una comparación constante entre la entrada y la salida, a través del lazo de realimentación el cual por lo general está compuesto de sensores de medición inercial que permiten medir las variables del sistema en todo momento, calculado la diferencia entre estos y realizando un control dependiente del valor de referencia entregado en la entrada, por lo general un ángulo para el caso del quadrotor.

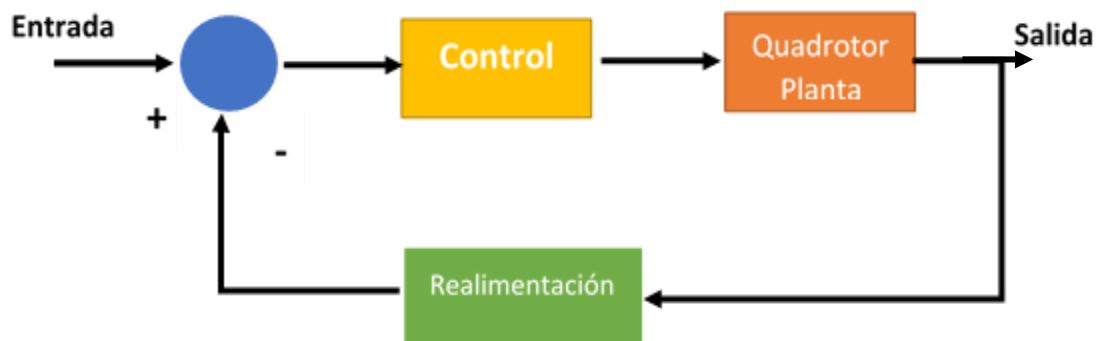


Figura 1. Sistema Básico de Control Automático.

2.2.1 Control de Actitud de un Quadrotor.

En la aviación se le conoce al término de actitud como el estado de la aeronave frente a su movimiento de alabeo cabeceo y guiñada (Roll, Pitch y YAW) para el caso de los helicópteros. Por lo general, en las aeronaves tripuladas el piloto es el encargado de mantener el avión estable observando el indicador de actitud de la aeronave, para el caso de los vehículos aéreos no tripulados es en la tarjeta de

control en donde se implementa el control de actitud para garantizar el estado estable de la aeronave suspendida en el aire como se muestra en Mejías, Saripalli, Campoy, & Sukhatme, 2006, en donde se realiza un control en los ángulos ROLL PITCH y YAW con el fin de estabilizar un vehículo aéreo no tripulado (véase Figura 2). Los controladores de velocidad y posición son responsables de generar las referencias apropiadas para el controlador de actitud para mantener una posición y velocidad deseadas.

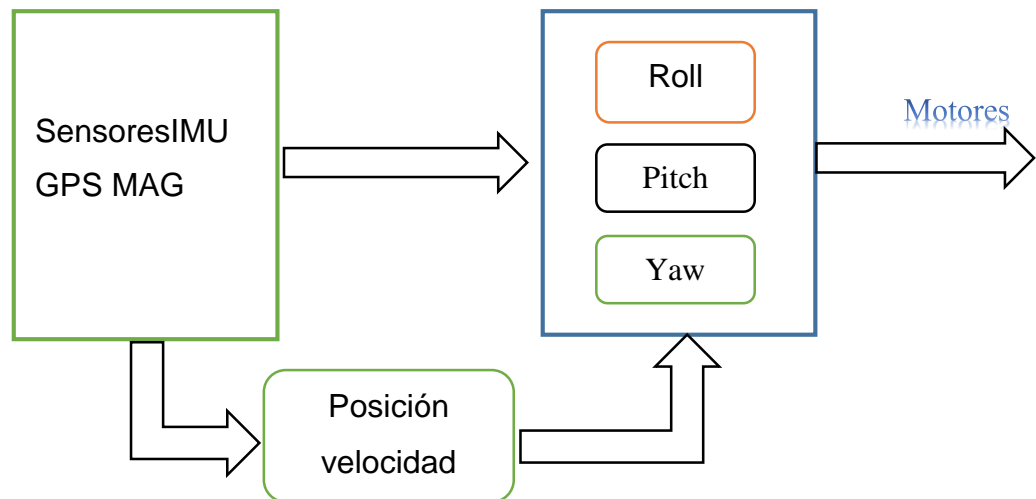


Figura 2. Esquema de control de actitud. Adaptado de (Mejías et al., 2006).

2.2.2 Control Difuso Takagi Sugeno T-S.

El control difuso nace como una extensión de la lógica difusa que se presenta como una alternativa al control de sistemas complejos matemáticamente y los cuales presentan múltiples variaciones al momento de ponerlos en marcha. Básicamente en la actualidad las estrategias de control difuso T-S se utilizan para

modelar sistemas complejos no lineales por medio del planteamiento de un sistema como un conjunto de subsistemas lineales, de esta manera se logra controlar y modelar sistemas complejos a través de simples reglas de condición IF-THEN.

La mayoría de controladores difusos han sido diseñados basados en la experiencia de operadores humanos o conocimiento de la ingeniería de control; por lo general se utiliza el controlador difuso tipo Mandami, el cual basa todo su procesamiento en la declaración de conjuntos antecedentes, reglas y conjuntos consecuentes, y a partir de una definición eficiente entre conjuntos y reglas se logra controlar el sistema. En el caso de que un operador no pueda describir lingüísticamente que tipo de acción tomó en una situación particular, se realiza una forma para modelar las acciones de control usando datos numéricos (Takagi & Sugeno, 1985).

Esencialmente, el enfoque de control difuso en su mayoría está basado en la experiencia de operadores, pero el modelo Takagi Sugeno propone un modelo matemático el cual representa el comportamiento de la planta real. Existen dos formas de calcular el modelo TS de los sistemas como lo propone (Tanaka & Wang, 2004a, p. 19), a través de encontrar el modelo usando la relación de datos entre la entrada y la salida, y de la derivación de ecuaciones no lineales, lo que permite aplicar esta estrategia de control a todo tipo de sistemas sustentando su comportamiento desde un modelo que representa claramente el sistema.

La representación general según (Tanaka & Wang, 2004a) de un modelo difuso T-S está dada por:

$$\dot{x}(t) = Aix(t) + BwiW(t) + BuiU(t), \quad (2-3).$$

$$y(t) = Eix(t) + DywiW(t) + DyuiU(t), i = 1, 2, \dots, r. \quad (2-4).$$

$$z(t) = Cix(t) + DwiW(t) + DuiU(t), \quad (2-5).$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $w \in \mathbb{R}^{m \times 2}$, $z \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ Y $y \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ son las variables de estado, de control, de perturbación, de salida medida respectivamente y salida controlada. El número de reglas IF-THEN presentadas en el modelo, $A_i, B_{wi}, B_{ui}, C_i, D_{wi}, D_{ui}, D_{ywi}, D_{yui}$ y E_i son matrices reales constantes con dimensiones apropiadas; $\theta_j(x)$ and u_{ij} ($i=1, \dots, r$, $j=1, \dots, p$), son respectivamente las variables locales y los conjuntos difusos.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta) [A_i x(t) + B_{wi} w(t) + B_{ui} u(t)], \quad (2-6).$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta) [C_i x(t) + D_{wi} w(t) + D_{ui} u(t)], \quad (2-7).$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta) [E_i x(t) + D_{ywi} w(t) + D_{yui} u(t)], \quad (2-8).$$

La definición de un modelo difuso T-S brinda la ventaja de que un sistema total puede ser visto utilizando lógica difusa y todas sus operaciones como un conjunto de subsistemas que presentan el mismo comportamiento que el sistema real; de esta manera podremos ver el quadrotor como varios subsistemas desagregados por ejes y así facilitar el diseño e implementación de las estrategias de control.

2.3 DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES (LMIs).

Una desigualdad matricial lineal es una clase importante de restricciones convexas las cuales han surgido con bastante importancia durante los últimos años ya que se pueden resolver múltiples problemas numéricamente. Sus áreas de aplicación van desde la solución a problemas de ingeniería de control, identificación de modelos de sistemas y diseño estructural (VanAntwerp & Braatz, 2000). Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan J. Laub, & Mahmoud Chilali (1995) plantean en su libro tres factores por los cuales las LMI han sido apetecidas en diversas investigaciones.

- Una variedad de especificaciones de diseño y restricciones pueden ser expresadas como LMIs.
- Una vez que un problema ha sido formulado en términos de LMIs puede ser resuelto exactamente por algoritmos de optimización convexa eficientes.
- Los problemas con múltiples restricciones u objetivos carecen de soluciones analíticas, mientras que si se plantea en términos de marco LMI estas múltiples restricciones y objetivos permanecen manejables. Esto hace al diseño LMI una alternativa valiosa para métodos analíticos clásicos.

La característica principal de las formulaciones LMIs es la habilidad para combinar varias restricciones de diseño u objetivos de una manera numéricamente tratable; en la actualidad son utilizados en los sistemas de control automático cuya solución analítica es desconocida o no la tienen. El campo de aplicación se extiende a diversas técnicas, como control robusto, control óptimo y control difuso entre otros, (Peláez, Palacio, & Sellier, 2004). Para el caso de esta investigación se utilizarán las LMIs puesto que permiten diseñar sistemáticamente sistemas de control difuso

TS lineales con un desempeño deseado en términos de amortiguamiento en lazo cerrado (Korba, Babuska, Verbruggen, & Frank, 2003).

Una desigualdad matricial según (Peláez et al., 2004),(Korba et al., 2003) y (Tanaka & Wang, 2004a, p. 29) está definida por:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m X_i F_i > 0 \quad (2-9).$$

Donde:

$X=[X_1, X_2, \dots, X_m]$ es una secuencia ordenada de variables o parámetros, también llamadas variables de optimización.

$F_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i=0, \dots, m$ son matrices simétricas constantes dadas.

">" representa definición negativa.

La ecuación (2-3). significa que $F(x)$ es una matriz definida positiva, en alguna literatura también se define como $F(x) \geq 0$ la cual representa una condición semi-definida positiva, además podemos observar que las restricciones $F(x) < 0$ y $F(x) > B(x)$ son casos especiales de la ecuación (2-9). Las LMIs se pueden definir como restricciones convexas en F desde $F(y) < 0$ y $F(z) < 0$ implica que $A\left(\frac{y+z}{2}\right) < 0$ como resultado tenemos que:

- Las LMIs presentan una solución a un conjunto de viabilidades, es un sub grupo de \mathbb{R}^m convexo, además de encontrar una solución F que satisface la desigualdad (2-9). por medio de una optimización convexa.
- La convexidad presenta una importante consecuencia en los sistemas. Aunque la definición general de LMIs (2-9). no presenta una solución analítica, esta puede ser resuelta numéricamente encontrando una solución

si llega a existir. Por el contrario, si las LMIs no encuentran alguna solución para el sistema, el problema de optimización correspondiente es expresado como no solucionable (Petr Korba, 2000).

Un sistema de restricciones LMIs puede ser considerado como un LMIs singular desde:

$$\left\{ \begin{array}{l} F1(x) > 0 \\ \vdots \\ Fk(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) := \text{diag}\{F1(x) \dots Fk(x)\} \quad (2-10).$$

Donde $\text{diag}\{F1(x) \dots Fk(x)\}$ denota diagonal de la matriz con $F1(x) \dots Fk(x)$ en su diagonal. Por lo tanto, múltiples restricciones LMI pueden ser impuestas en el vector de variables de decisión F sin afectar la convexidad de la misma. En la mayoría de aplicaciones de control las LMIs no surgen naturalmente en la forma canónica, sino en la forma implícita (G, P, & Patiño, 2008)

$$\mathcal{L}(F1 \dots, FN) < R(F1 \dots, PN) \quad (2-11).$$

Donde en la parte izquierda de la desigualdad $\mathcal{L}(\cdot)$ y en la parte derecha de la desigualdad $R(\cdot)$, son funciones afines de algunas matrices de variables $F1(x) \dots Fn(x)$.

$$A^T P + PA < 0 \quad (2-12).$$

Donde P es una matriz simétrica, cabe resaltar que este modo de definir las LMIs es equivalente al definir las mediante la ecuación (2-9).

De esta manera en esta investigación el uso de LMIs se utilizarán con el fin de atender directamente requerimientos de diseño de control como lo son requerimientos de diseño tales como: rechazo a perturbaciones, localización de polos en lazo cerrado y limitación en el esfuerzo de control.

2.4 QUADROTOR VEHICULO AEREO DE CUATRO MOTORES.

Un quadrotor es un tipo de vehículo aéreo no tripulado que se caracteriza por su despegue y aterrizaje vertical; esto se logra gracias el empuje generado por sus cuatro rotores que son controlados por medio de la tarjeta controladora de vuelo, véase Figura 3. En la actualidad también se les conoce como quadricoptero, quadrirotor o dron, el cual es su nombre más comercial. Como otra característica importante se puede resaltar que este tipo de vehículos no poseen un piloto a bordo por lo que están clasificados dentro de la categoría de los vehículos aéreos (UAV), lo más destacado de este tipo de vehículos es que logran el vuelo a través de sus seis grados de libertad solo con cuatro rotores, por lo que se considera un sistema sub-actuado (Raffo, 2011).

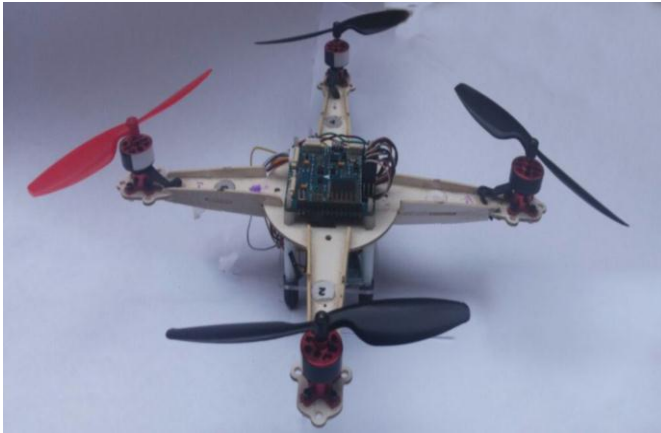


Figura 3. Vehículo Quadrotor, descripción de su estructura componentes y funcionamiento.

El quadrotor es un vehículo aéreo no tripulado el cual se identifica por su versatilidad al momento del despegue y aterrizaje vertical. Se puede observar que en la actualidad este tipo de vehículos son muy utilizados en diferentes áreas de aplicación debido a todas las cualidades anteriormente mencionadas.

En esta investigación se utilizó el quadrotor clasificado como un micro vehículo aéreo MAV's de la Figura 3, como planta experimental para la implementación de las estrategias de control, aunque se realizarán las respectivas validaciones y modelado como aproximación al modelo real del mismo; se contrastó el comportamiento en simulación versus la implementación en cada estrategia de control.

2.4.1 Funcionamiento de vuelo:

Los vehículos aéreos no tripulados los cuales basan su vuelo a través de rotores y hélices se pueden clasificar por el número de motores y hélices que poseen para sustentar su vuelo en el aire. Existen los vehículos desde una hélice hasta 8 hélices como se muestra en (Nonami, Kendoul, Suzuki, Wang, & Nakazawa, 2010). El quadrotor basa su dinámica de vuelo en el aumento y disminución de la velocidad de cada uno de sus cuatro motores.

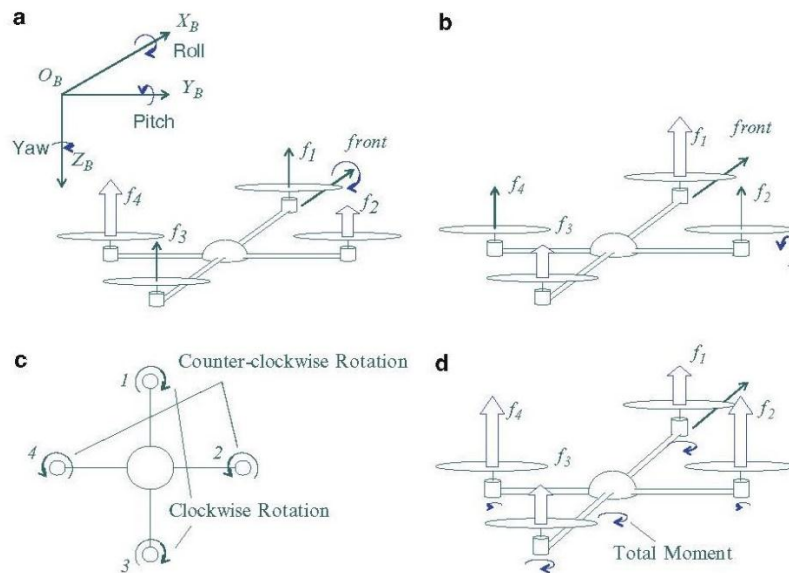


Figura 4. Descripción de los movimientos de un Quadrotor. Tomado de (Nonami et al., 2010, p.

Los motores en la Figura 4 están numerados como: No. 1 el motor de delante y luego hacia la derecha en dirección de las manecillas del reloj hasta el No. 4. El ascenso se obtiene gracias a la fuerza total de todos los motores. La rotación del ángulo del eje X es generada por la diferencia de velocidad rotacional entre el motor No. 2 y el motor No. 4, así como el ángulo de actitud alrededor del eje X del marco del quadrotor cambia, el empuje se convierte en el componente de fuerza en dirección Y. Utilizando el mismo principio, mediante el uso de la diferencia de velocidad rotacional entre el motor No. 1 y No. 3, es posible controlar la dirección X de la estructura del avión. De igual manera, los motores No. 1 y No. 3 están girando hacia la derecha, mientras que los motores No. 2 y No. 4 están girando en la dirección opuesta (en sentido contrario a las manecillas del reloj). La rotación alrededor del eje Z (Yaw) del marco del quadrotor es controlado para contrarrestar el momento (Nonami et al., 2010).

En esta investigación se utilizará la dinámica del quadrotor respecto a su estructura en el planteamiento del modelo matemático del sistema, ya que al ver su funcionamiento seccionado por ejes se puede desagregar este para el diseño de los controladores difusos T-S con el fin de facilitar los cálculos el momento de modelar el sistema, diseñar el controlador e implementar el mismo en la plataforma experimental.

2.4.2 COMPONENTES ELECTRÓNICOS:

Para mantener el vuelo del quadrotor en el aire es necesario la utilización de componentes electrónicos que permiten controlar el quadrotor; la parte electrónica del quadrotor es la más importante si se quiere mantener el quadrotor en vuelo estable o suspendido en el aire ya que a través de la tarjeta de control y sus

sensores se puede controlar, siempre y cuando exista una estrategia de control implementada en la tarjeta de control.

- *Tarjeta de Control:*

La tarjeta de control de vuelo es una tarjeta la cual fue desarrollada para aplicaciones con vehículos aéreos multirrotores. La tarjeta de control Multiwii All in One PRO 2.0v se escogió debido a su gran capacidad de hardware; con esto nos referimos a un microcontrolador ATMEGA 2560, sensores integrados y su fácil interacción con dispositivos periféricos como lo son el módulo bluetooth, el sensor ultrasonido, módulo GPS y su capacidad al tener la unidad de medición inercial y la brújula integradas en la misma. Esta tarjeta se programa bajo Arduino el cual es una plataforma de desarrollo de hardware gratuita.



Multiwii AIO PRO 2.0v
Micro controlador ATMEGA2560
Salidas hasta 8 Motores.
Entradas hasta 8 canales para receptor estándar.
4 puertos seriales.
2 salidas para estabilización de video.
Puerto externo de comunicación I2C.
MPU6050 6 ejes giroscopio/acelerómetro con unidad procesadora de movimiento.
HMC5883 3 ejes magnetómetro digital.
Programación por FT232RQ USB-UART.

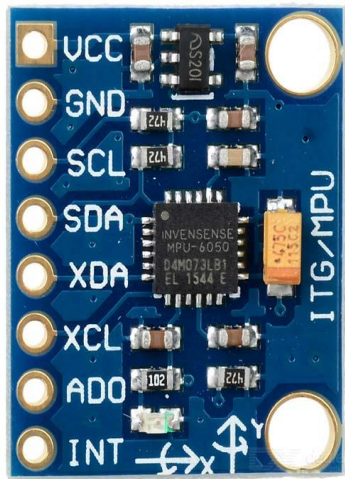
Figura 5. Tarjeta de Control de Vuelo Multiwii All in One PRO 2.0v. Recuperado de (“Multiwii and Megapirate AIO Flight Controller w/FTDI (ATmega 2560) V2.0 (US Warehouse)”, 2016)

- Unidad de medidas inerciales (IMU).

Una Unidad de Medidas Inerciales (IMU o UMI en español) es en general un sistema cerrado que es usado para detectar la orientación, localización y movimiento. La IMU se encuentra en la mayoría de vehículos UAV y normalmente este dispositivo usa una combinación de acelerómetros y sensores de velocidad angular (giróscopos) para calcular la posición angular de cada uno de los ángulos de navegación y la velocidad con la que cambian cada uno de los mismos. En esta investigación se utilizará la IMU de referencia MPU6050 la cual es fabricada por la compañía Invensense, este sensor esta a su vez integrado a la tarjeta de control de vuelo.

La IMU que se utilizó para esta investigación cuenta con seis grados de libertad, contiene un acelerómetro con una precisión programable, además de un giroscopio con medición en los tres ejes. Este sensor opera con un voltaje nominal de 3.3 voltios y se comunica a través del protocolo I2C a una velocidad de

transferencia máxima de 400 kHz, además de poseer un procesador digital de movimiento el cual permite hacer una reprocesamiento de datos antes de ser enviados a la unidad de control. Sus descripciones generales se encuentran en la siguiente figura:



Modelo	MPU6050
Acelerómetro	3 ejes
Giroscopio	3 ejes
Protocolo	I2C
Procesador Digital de Movimiento (DMP)	Si

Figura 6. Unidad de medición Inercial IMU MPU 6050. Especificaciones. Recuperado de (“GY-521 MPU6050 3 ejes Aceleración giroscopio Módulo 6DOF - Azul - Free Shipping - DealExtreme”, s/f)

- Giroscopio:

En la dinámica de vuelo se habló de los ángulos que posee el quadrotor a través de los tres ejes de referencia, para medir estos tres ángulos (YAW, PITCH y ROLL) también conocidos como ángulos de navegación, es necesario implementar un sensor que permita medir estos ángulos de una manera precisa y constante. La mayoría de los quadrotores basan su estabilidad a través de la medición de la velocidad con la que giran estos ángulos, esta variable se logra medir por medio de un Giroscopio el cual tiene la capacidad de adquirir las orientaciones angulares o

sus cambios usando las fuerzas Coriolis que surgen con la rotación del sistema no inercial de coordenadas. Dado que la Tierra gira con una velocidad angular significativa, cualquier sistema de referencia conectado a la superficie de la Tierra es, en el mejor de los casos, solo una aproximación de un sistema de coordenadas inercial; por lo tanto, las aplicaciones de navegación orientada en sistemas aeroespaciales necesitan ajustes debido al vector de rotación terrestre (Kempe, 2011, p. 364). En el caso de la presente investigación, el giroscopio se utilizará para medir las velocidades con las que giran los ángulos de Euler, es decir, tendrá la capacidad de medir las variables de estado correspondientes a la velocidad en los tres ángulos (YAW, PITCH y ROLL). Las características del giroscopio contenido en la IMU MPU6050 se obtuvieron de la hoja de datos del fabricante del dispositivo y se presentan a continuación:

- Sensores de velocidad angular (giroscopios) de salida digital X, Y y Z con un rango de escala de 250, ± 500 , ± 1000 y ± 2000 ° / seg programable por el usuario
 - La señal de sincronización externa conectada al pin FSYNC soporta sincronización de imagen, vídeo y GPS
 - Los ADC de 16 bits integrados permiten el muestreo simultáneo de giroscopios
 - Mayor estabilidad de polarización y sensibilidad de la temperatura reduce la necesidad de calibración del usuario
 - Mejora del rendimiento del ruido de baja frecuencia
 - Filtro de pasa bajo digitalmente programable
 - Corriente de funcionamiento del giroscopio: 3.6mA
 - Corriente en espera: 5 μ A
 - Factor de escala de sensibilidad calibrado en fábrica Autoprueba del usuario
- Acelerómetro:

Por otra parte, los acelerómetros convierten las fuerzas de aceleración en deflexiones o desviaciones de estrés. Las deflexiones o estrés son transformadas

en señales eléctricas que deberán representar de manera relativamente óptima el vector de aceleración \bar{a} . Los algoritmos más comunes para su estimación son simples procedimientos de filtrado lineal que eliminan el ruido de las reacciones capturadas. Desde un punto de vista más general, un sensor inercial es un sistema, en el que la señal de salida depende de seis fuerzas inerciales causadas por tres aceleraciones lineales y tres señales de tasa o sus desviaciones: $\bar{X}_{in}^T = [a_x, a_y, a_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]$ (Kempe, 2011, p. 283).

El acelerómetro en esta investigación se utilizará para realizar la medición de los respectivos ángulos de navegación yaw, pitch y Roll respectivamente; cabe resaltar que los cálculos totales de los ángulos de navegación no se obtienen directamente del acelerómetro, sino que se realiza una combinación de medidas entre el acelerómetro y giroscopio para determinar con mayor exactitud el ángulo de rotación de los tres ejes.

Las características del acelerómetro contenido en la IMU MPU6050 se obtuvieron de la hoja de datos del fabricante y se presentan a continuación:

- Acelerómetro de triple eje de salida digital con un rango programable de escala completa de $\pm 2g$, $\pm 4g$, $\pm 8g$ y $\pm 16g$
- Los ADC de 16 bits integrados permiten el muestreo simultáneo de acelerómetros sin necesidad de multiplexor externo
- Corriente de funcionamiento normal del acelerómetro: $500\mu A$
- Corriente de modo acelerómetro de baja potencia: $10\mu A$ a $1,25Hz$, $20\mu A$ a $5Hz$, $60\mu A$ a $20Hz$, $110\mu A$ a $40Hz$
- Detección y señalización de orientación
- Detección de toque
- Interrupciones programables por el usuario
- Interrupción de alto-G

- Autotest de usuario

2.4.3 MOTORES Y ETAPA DE POTENCIA:

Los vehículos aéreos no tripulados que utilizan motores para lograr su sustentación en el aire por lo general utilizan motores de tipo Brushless, los cuales son un tipo de motor DC pero sin escobillas, lo que les permite ser más eficientes puesto que pueden llegar a altas velocidades ahorrando consumo de energía debido a que no existe rozamiento alguno viéndose esto reflejado en el consumo de energía, factor muy crítico para este tipo de vehículos. Básicamente “la principal ventaja es que las relaciones par-intensidad y velocidad-frecuencia son lineales en estos motores” (Singh & Kumar, 2016). Los motores Brushless también presentan ciertas características que los distinguen de un motor DC común; una de ellas es su peso debido a que son ligeros, presentan altas potencias y a su vez alto rango de velocidad que, si buscáramos un motor DC equivalente con las mismas características se vería reflejado en peso y tamaño.

Los motores, junto con las hélices, son los componentes físicos que permiten que el quadrotor despegue y se mantenga en el aire, por ende, de este par de componentes depende en gran medida la estabilidad y rapidez del quadrotor. Los motores del vehículo quadrotor serán los Turnigy T1811 Brushless de la Figura 7, cabe resaltar que estos motores ya vienen con el quadrotor de referencia Turnigy Micro Quad V1 distribuido por la empresa Hobby King. Esta investigación se propone un reto puesto que si se observa en su tabla de especificaciones son motores rápidos lo que conlleva a que el procesamiento del control se realice con mayor agilidad.

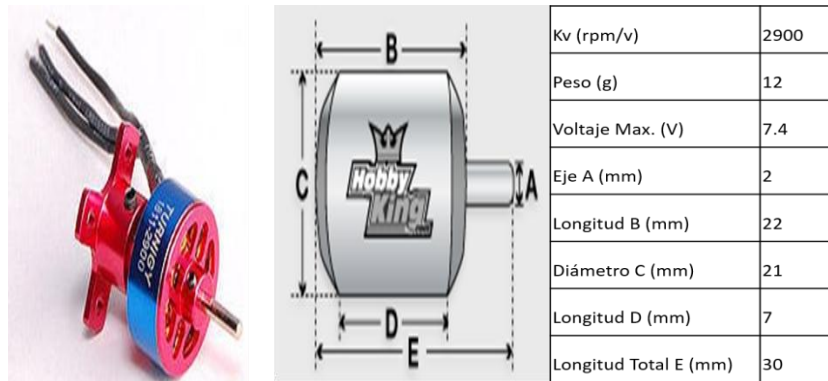


Figura 7. Motor Motor Brushless Turnigy T1811 y Especificaciones técnicas. Recuperado de (“Turnigy 1811 brushless Outrunner 2900kv (EU Warehouse)”, s/f).

Por ser un tipo de motores especiales, los motores Brushless necesitan una etapa de potencia especial para poder lograr el giro, el encargado de hacer esta conmutación entre los embobinados del motor es el controlador electrónico de velocidad (ESC), estos circuitos son los encargados de hacer la tarea principal para el funcionamiento del motor. Esencialmente, la función del ESC es controlar la velocidad de los rotores a través de la variación de señales de PWM que llegan a estos desde la tarjeta controladora de vuelo, de igual manera que los motores, estos ESC de Referencia TURNIGY Plush 6A Speed Controller Figura 8, vienen integrados con la plataforma bajo la cual se realizó esta investigación. De igual manera, esto posee un reto ya que para poder iniciar el ESC (Rivera & Sofia, 2015), es necesario realizar una programación inicial la cual depende de una frecuencia máxima y mínima de giro establecida por el fabricante que se debe calcular experimentalmente por ser de hardware de vehículos para hobbies.

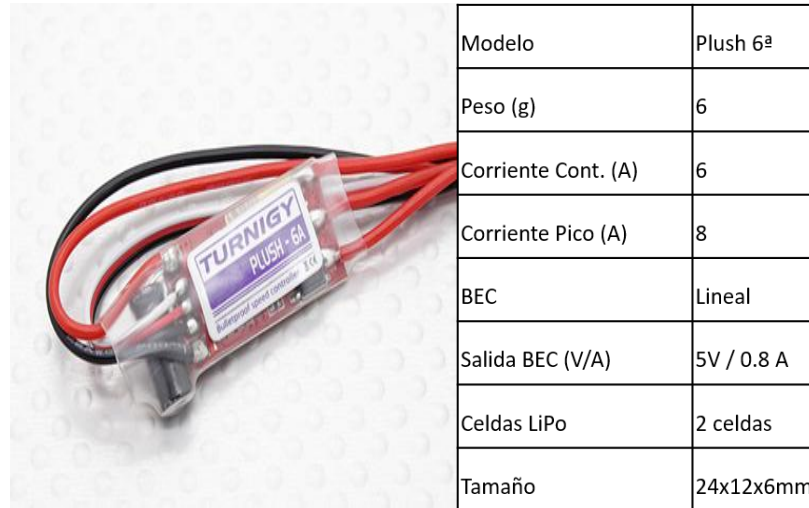


Figura 8. Controladores Electrónicos de Velocidad. Recuperado de (“TURNIGY Plush 6A /.8bec/6g Speed Controller (EU Warehouse)”, s/f).

2.4.4 BATERIA.

Las baterías más utilizadas en este tipo de aeronaves son de polímero de litio (LiPo) ya que son ensambladas con múltiples celdas conectadas en serie y poseen una densidad de carga muy superior a otras baterías, además de tener un peso ligero. La elección de la batería no solo depende de la duración de la misma, en este caso dependerá también del empuje máximo de los motores ya que la duración de la batería es proporcional a su peso.

Estas baterías están seccionadas por celdas representadas con la letra s, cada celda posee un voltaje nominal de 3.7v, un voltaje máximo de 4.2v y un voltaje mínimo de 3v. En el mercado se consiguen generalmente de 1s que corresponderá a 3.7v, de 2s que corresponderá a 7.4 y así hasta 6s.

La batería Turnigy nano-tech 850mah 2S 25 se eligió para el quadrotor ya que es recomendada por el fabricante y posee las siguientes características generales.



Figura 9. batería Turnigy nano-tech 850mah 2S 25.

2.4.5 OTROS COMPONENTES NECESARIOS PARA EL VUELO.

La hélice es uno de los componentes que afectan la dinámica del vuelo del quadrotor ya que el desempeño de la misma, cuando el quadrotor está en vuelo, depende directamente del material que estén construidas. Por lo general en algunos países se prohíbe el uso de este tipo de aeronaves con hélices metálicas por el peligro que representan para las personas, como es el caso de Colombia según circular reglamentaria para los R/PAS No. 002. Generalmente, encontramos que este tipo de vehículos poseen sus hélices en fibra de carbono, esto permite que la hélice al estar girando a altas revoluciones no se deforme.

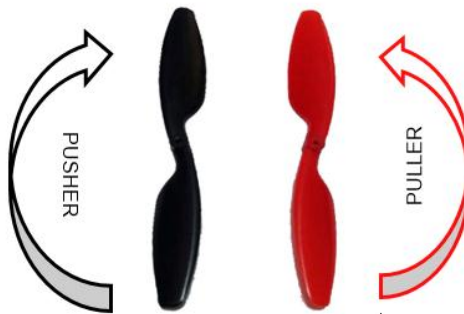


Figura 10. Hélices sentido de giro pusher y puller.

Existen dos tipos de hélices para el caso del quadrotor Puller o Puscher como se muestra en la Figura 10. Hélices sentido de giro pusher y puller. Su nombre o clasificación se da gracias a la posición del ángulo de ataque de la hélice, las hélices adquiridas se muestran en la Figura 10. Hélices sentido de giro pusher y puller. poseen un número en el centro, el cual determinará el sentido de giro de la hélice que corresponderá con el sentido de giro del motor. En el caso de las hélices pusher, estas están comercialmente identificadas con el número 1 y en el caso de las hélices Puller, estas están marcadas con el número 2.

2.4.6 Criterios de selección

Se seleccionó este modelo en particular debido a los factores que se listan a continuación:

- 1- Éste modelo en particular es el más completo en cuanto a hardware ya que incluye el marco, los ESC's (etapas de potencia), motores, tarjeta de control y un juego de hélices a bajo costo 99 dólares.
- 2- Configuración. Posee la configuración más básica de este tipo de aeronaves al contar con cuatro motores en "cruz" que lo hacen un sistema mucho más estable que los tricópteros y con menos consumo de energía que los

multicopteros (sistemas de más de cuatro motores) lo que ofrece mayor autonomía de vuelo.

- 3- Tamaño y peso. Con menos de una libra (sin batería) y 25 cm de largo y ancho es más portable y fácil de acoplar en bases o soportes para las pruebas de funcionamiento y experimentación.
- 4- Programación. Cuenta con soporte para programar en la plataforma arduino lo que facilita el desarrollo del algoritmo de control, ya que posee librerías que facilitan el uso de hardware de la tarjeta.
- 5- Es un modelo el cual es vendido comercialmente al público y utiliza un algoritmo PID para lograr su estado en hovering; sin embargo, esto acarrea muchos problemas sobre todo cuando se modifica el punto de operación, por ende, se pretendió automatizar dicho quadrotor con otra estrategia de control utilizando una tarjeta de control programable recomendada por el fabricante del dispositivo.

Capítulo 3.

3 MODELO MATEMÁTICO

En este capítulo se describirá el modelo matemático básico y complejo del quadrotor. En la primera parte se realiza una descripción breve del funcionamiento del quadrotor con el fin de dar a entender los principios básicos que rigen los movimientos de la aeronave; así como la influencia que ejercen los motores y las hélices en dichos movimientos. En la segunda parte se encontrará el modelo matemático en detalle utilizando el método Euler y Lagrange para hallar la dinámica traslacional y el método Newton Euler para calcular la dinámica rotacional del quadrotor; la descripción del modelo cinemático incluyendo el planteamiento de la cinemática traslacional y cinemática rotacional del quadrotor. Por último, se encontrará el modelo dinámico describiendo la dinámica rotacional y traslacional del mismo, y se presenta el modelo a través de variables de estado. De igual manera, se realizará la implementación de dicho modelo en Matlab y Simulink, y se ejecutará la validación del mismo.

3.1 PRINCIPIOS BÁSICOS DE FUNCIONAMIENTO.

El quadrotor basa su funcionamiento básico en el aumento y disminución de la velocidad de sus motores; esto permite clasificar al quadrotor como un vehículo sub-actuado puesto que los movimientos que realiza este vehículo se centran en que posee seis grados de libertad (arriba, abajo, al frente, atrás, lado izquierdo y lado

derecho respectivamente) y posee solo cuatro motores para lograr dichos desplazamientos. Como se mencionó anteriormente existen dos configuraciones utilizadas en este tipo de vehículos: la configuración en equis y la configuración en cruz. Se puede observar en la Figura 11, que esta configuración permite simplificar el análisis y encontrar el modelo que mejor se aproxime a la dinámica real del quadrotor si se selecciona. Esto se concluye por dos razones fundamentales: la primera es su simetría y fácil interpretación de los actuadores que se involucran en movimientos básicos, y la segunda es que facilita el modelo matemático al involucrar menos actuadores en sus movimientos.

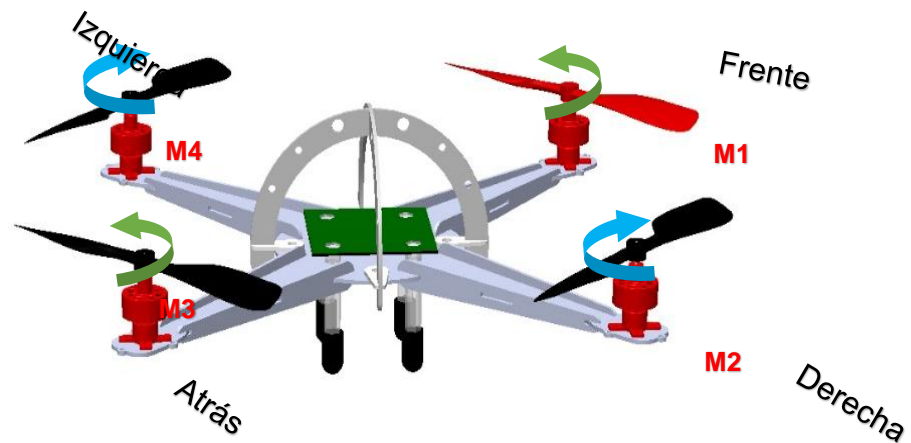


Figura 11. Quadrotor configuración en Cruz.

El quadrotor logra su vuelo gracias a la variación de velocidad en los motores y la fuerza que generan cada par de motor/ hélices ancladas a este en cada eje ($F_{m1}..F_{m4}$). A diferencia de los helicópteros, este tipo de vehículos no necesita un rotor de cola para controlar su rotación en el mismo eje, sino que, en vez de esto, se vale de una relación entre sus rotores y hélices. Las hélices del frente y atrás (M1 y M3) del quadrotor giran en contra de las manecillas de reloj, al igual que el ángulo de ataque da las hélices; por otro lado, los motores de la izquierda y la derecha (M2

y M4) giran a favor de las manecillas del reloj al igual que el ángulo de ataque de estas hélices, permitiendo así que exista un torque diferencial entre los dos ejes impidiendo la rotación del vehículo sobre el mismo eje, y logrando romper la fuerza de gravedad (g) y consiguiendo que el vehículo se mantenga en el aire.

En la configuración de las Figura 4 y Figura 11 se observa como el quadrotor puede ser desagregado por ejes que coinciden con los mismos planteados en un plano cartesiano de tres dimensiones (X , Y , Z). Con el fin de analizar sus movimientos y seleccionar fácilmente las variables a controlar, esta configuración se plantea como una alternativa de análisis de este tipo de vehículos, ya que se puede obtener de una manera sencilla la variación de los ángulos en cada uno de los ejes, además de la altura del quadrotor.

Los movimientos en el aire del quadrotor se basan también en la variación de la aceleración de sus rotores; si se quiere lograr un desplazamiento de este en el aire, basta con reducir en pequeñas proporciones la velocidad ΔA en uno de ellos. Si observamos la Figura 12 se pueden observar los diferentes movimientos que se pueden lograr según la variación de cada uno; si se quiere obtener un movimiento hacia delante del quadrotor basta con reducir la velocidad del motor uno en pequeñas proporciones logrando que se genere un ángulo en este eje para así permitir el desplazamiento en esta dirección gracias al empuje del motor tres, y en sentido contrario si se quiere lograr un desplazamiento hacia atrás. Cabe destacar que las variaciones de ΔA deberán ser muy pequeñas para evitar saturaciones en los motores.

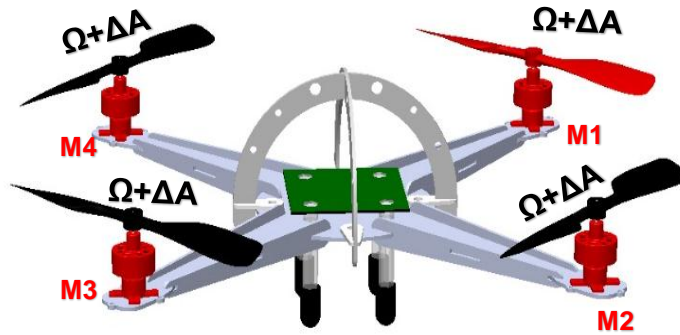


Figura 12. Variación de velocidad en motores $\Omega + \Delta A$.

ΔA : Es una variación positiva que se le suma a la constante de aceleración Ω representando un incremento con respecto al motor contiguo a su eje para lograr el movimiento, siendo esta positiva siempre.

3.2 MODELO CINEMÁTICO:

Análisis según las leyes de Newton Euler:

Cualquier cuerpo rígido en el aire puede ser descrito utilizando tres ángulos, las rotaciones son escritas en términos de matrices de rotación R_a , R_b y R_c , así una rotación general puede ser escrita como $R_t = R_a R_b R_c$. Los ángulos que dan origen a dichas matrices son llamados ángulos de Euler; los ángulos de Euler constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia normalmente móvil de ejes ortogonales. Respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijos, los ángulos de Euler Yaw (ψ), Pitch (θ) y Roll (ϕ) especifican la orientación del sistema fijo al cuerpo relativo al sistema fijo al espacio, y por tanto actúan como tres coordenadas generalizadas.

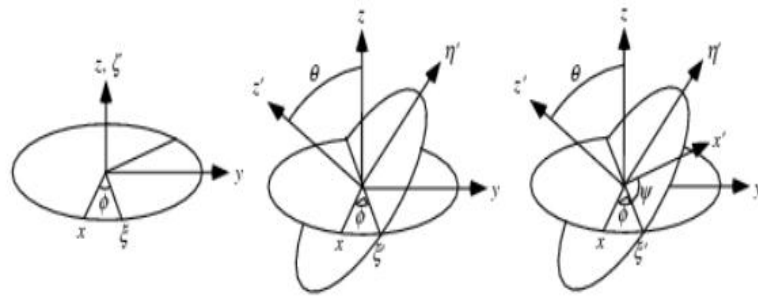


Figura 13. Ángulos de Euler .Retomado de (Maria Elena Gavilan & Jose Daniel Muñoz, 2006, p. 2)

La cinemática del quadrotor puede ser descrita mediante los ángulos de Euler, ya que mediante estos es posible describir como es el movimiento de éste suspendido en el aire, respecto a los ángulos Yaw (ψ), Pitch (θ) y Roll (ϕ) o ángulos de Euler. Para el análisis cinemático se describieron dos sistemas de referencia: marco del cuerpo y marco inercial (Pizetta, Brandão, & Sarcinelli-Filho, 2015), por esta razón es necesario definir la cinemática traslacional del quadrotor con el fin de caracterizar el desplazamiento del quadrotor a través de los ejes XYZ.

3.3 CINEMÁTICA TRASLACIONAL.

3.3.1 MOVIMIENTO DE GUIÑADA.

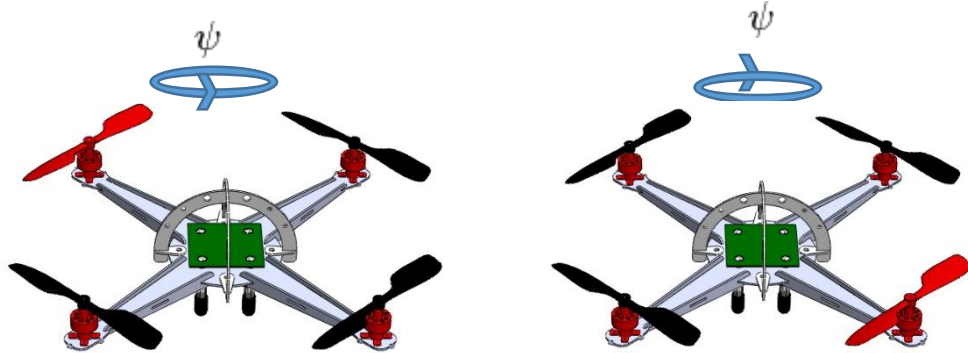


Figura 14. Movimiento de Guiñada (YAW)

Este movimiento es quizás uno de los más complejos al momento que el quadrotor está en vuelo, ya que en este movimiento influyen los cuatro motores para poder lograrlo. El movimiento consiste en hacer rotar el quadrotor sobre sus mismos ejes como se observa en la Figura 14. Movimiento de Guiñada (YAW); dicho movimiento se genera realizando la variación de velocidades dependiendo el sentido de giro de los motores, es decir, si queremos que el quadrotor gire en sentido de las manecillas del reloj bastará con aumentar la variable ΔA de los motores 2 y 4 respectivamente. Si se quiere que el quadrotor gire a favor de las manecillas de reloj será necesario aumentar la variable ΔA en los motores 1 y 3.

Lo que se busca con el análisis de Euler de un cuerpo rígido en el aire es expresar la rotación del cuerpo teniendo en cuenta un sistema de referencia; para el caso de la rotación sobre el eje Z_1 del cuerpo en movimiento, teniendo en cuenta como se ven afectados los demás ejes por esta rotación se *plantea el diagrama para la rotación sobre el eje Z o la variación del ángulo YAW.*

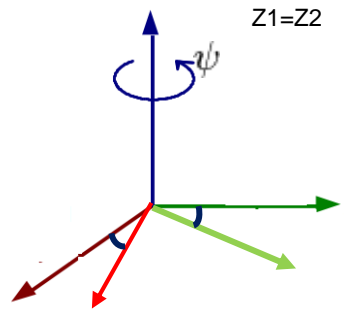


Figura 15. Diagrama de rotación del ángulo YAW.

En la figura anterior se observa como la rotación en el eje Z respecto al eje de referencia afecta a los ejes X y Y respectivamente. Para un mejor análisis de dicho movimiento bastará con enfocarse en los ejes donde se genera un cambio en el cuerpo respecto al marco de referencia.

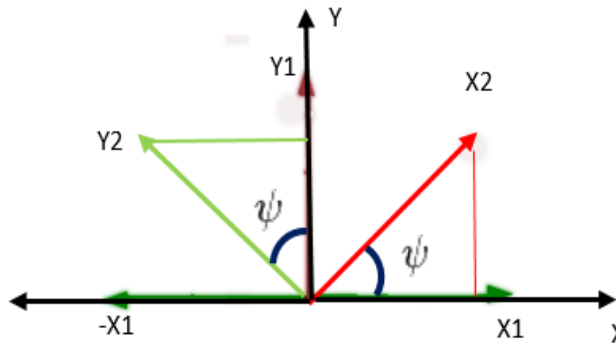


Figura 16 Rotación sobre el ángulo Yaw teniendo en cuenta que este ángulo gira sobre el eje Z

Si queremos representar el sistema de coordenadas del cuerpo libre X_1 , Y_1 y Z_1 , respecto al eje de coordenadas X_2 , Y_2 y Z_2 , y teniendo en cuenta la ortogonalidad entre los dos sistemas de referencia, las ecuaciones de rotación para el ángulo Yaw son:

$$X2 = \text{Cos}\Psi * X1 + \text{Sen}\Psi * Y1 + 0 * Z1 \quad (3-1).$$

$$Y2 = -\text{Sen}\Psi * X1 + \text{Cos}\Psi * Y1 + 0 * Z1 \quad (3-2).$$

$$Z2 = 0 + 0 + Z1 \quad (3-3).$$

Por lo general, este sistema de coordenadas de rotación sobre un ángulo se expresa matricialmente R1 con el objetivo de simplificar los cálculos. A continuación, se presenta la matriz de rotación para en ángulo YAW movimiento de guiñada.

$$\begin{bmatrix} X2 \\ Y2 \\ Z2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\Psi & \text{Sen}\Psi & 0 \\ -\text{Sen}\Psi & \text{Cos}\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{bmatrix} \quad (3-4).$$

3.3.2 MOVIMIENTO DE ALABEO.

Este movimiento se utiliza para realizar desplazamientos a la izquierda y derecha, y se involucran dos motores para poder lograrlo. El movimiento consiste en hacer rotar el quadrotor sobre el eje y como se observa en la Figura 17, el movimiento se genera realizando la variación de velocidades en los motores 2 y 4, pero si se quiere que el quadrotor gire a la izquierda se aumentará la variable ΔA y se mantendrá constante la velocidad del motor 2, se realiza el mismo procedimiento de manera inversa si se quiere un giro a la derecha.

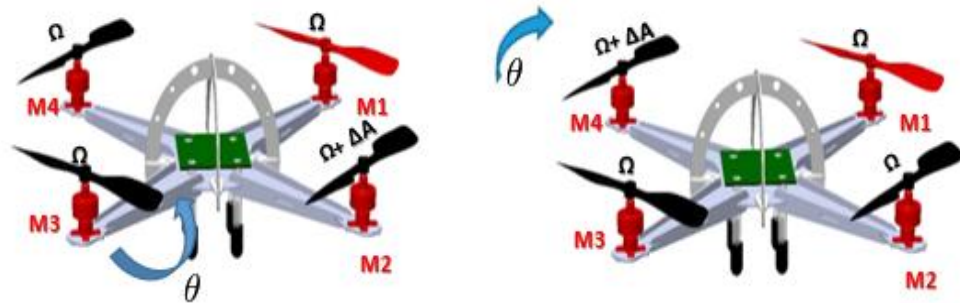


Figura 17. Movimientos en el eje θ izquierda y derecha.

Este movimiento también se describe mediante una matriz de rotación definida mediante los ángulos de Euler. En este caso se busca expresar de forma matricial la rotación sobre el eje Y, y cómo es la influencia de éste en los otros dos ejes de rotación respecto al marco de referencia.

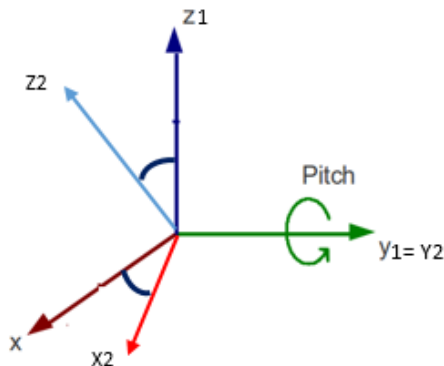


Figura 18. Rotación sobre del ángulo Pitch.

La Figura 18 muestra como está rotando el eje respecto al marco de referencia y como es el movimiento respecto a los ejes X y Z del marco de rotación. Al igual que el caso anterior, basta con analizar el movimiento sobre los dos ejes que tienen un movimiento al variar el ángulo Pitch.

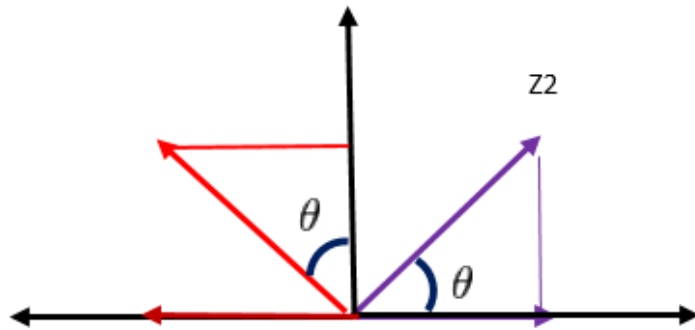


Figura 19. Rotación sobre el ángulo pitch teniendo en cuenta que en este ángulo gira sobre el eje Y.

Si se quiere representar el sistema de coordenadas del cuerpo libre X_1 , Y_1 y Z_1 respecto al eje de coordenadas X_2 , Y_2 y Z_2 , y teniendo en cuenta la ortogonalidad entre los dos sistemas de referencia, las ecuaciones de rotación para el ángulo Pitch son:

$$X_2 = \text{Cos}\theta * X_1 + 0 * Y_1 + \text{sen}\theta * Z_1 \quad (3-5).$$

$$Y_2 = 0 + Y_1 + 0 * Z_1 \quad (3-6).$$

$$Z_2 = -\text{sen}\theta * X_1 + 0 * Y_1 + \text{Cos}\theta * Z_1 \quad (3-7).$$

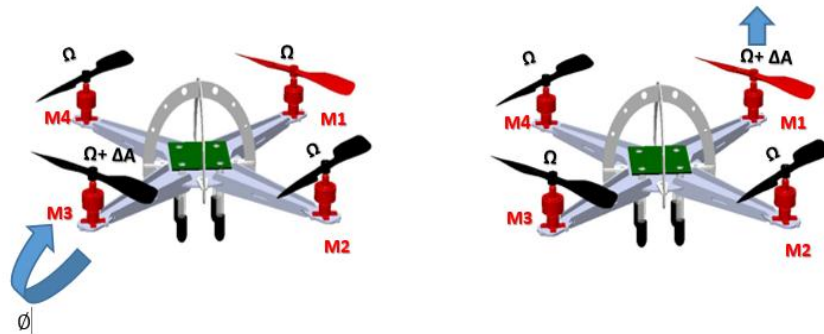
El ángulo Pitch expresado matricialmente se expresa como R_2 :

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & 0 & \text{Sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}\theta & 0 & \text{Cos}\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (3-8).$$

3.3.3 MOVIMIENTO DE CABECEO

El quadrotor es un vehículo que se caracteriza por su simetría entre ejes debido a que su forma es una cruz; cada brazo del quadrotor posee la misma distancia entre el centro del quadrotor y el final de cada eje donde se encuentran los motores; es por esto que este movimiento es muy similar al movimiento sobre el eje Y, solo que en este caso la rotación está dada sobre el eje X y su ángulo de Euler correspondiente será Roll.

La variación del ángulo Roll permite que el quadrotor se desplace hacia delante y hacia atrás; esto se logra gracias a la variación de la velocidad de los motores M1 y M3 respectivamente. Si se quiere que el quadrotor se desplace hacia adelante bastará con reducir la constante de velocidad ΔA en el motor uno y si se quiere que el quadrotor se desplace hacia atrás bastará con realizar la operación contraria, reducir la constante de velocidad ΔA en el motor 3.



Este movimiento también se describe mediante una matriz de rotación definida mediante ángulos de Euler, en este caso se busca expresar de forma matricial la rotación sobre el eje X y como es la influencia de este en los otros dos ejes de rotación respecto al marco de referencia.

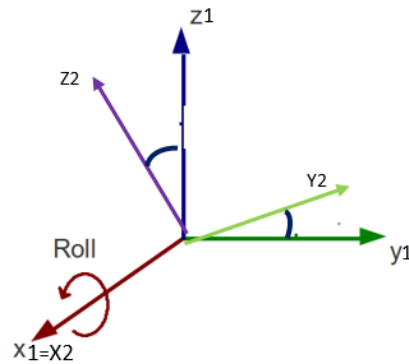


Figura 20. rotación sobre del ángulo Roll.

La Figura 20 muestra como está rotando el eje respecto al marco de referencia y cómo es el movimiento respecto a los ejes Y y Z del marco de rotación; al igual que el caso anterior basta con analizar el movimiento sobre los dos ejes que tienen un movimiento al variar el ángulo Roll.

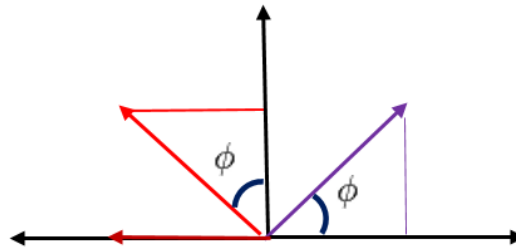


Figura 21. Rotación sobre el ángulo Roll teniendo en cuenta que en este ángulo se gira sobre el eje X.

Si se quiere representar el sistema de coordenadas del cuerpo libre X_1 , Y_1 y Z_1 respecto al eje de coordenadas X_2 , Y_2 y Z_2 , y teniendo en cuenta la ortogonalidad entre los dos sistemas de referencia las ecuaciones de rotación para el ángulo Roll son:

$$X2 = X1 + 0 * Y1 + 0 * Z1 \quad (3-9).$$

$$Y2 = 0 + \text{Cos}\varnothing * Y1 + \text{Sen}\varnothing * Z1 \quad (3-10).$$

$$Z2 = 0 - \text{Sen}\varnothing * Y1 + \text{Cos}\varnothing * Z1 \quad (3-11).$$

La variación del ángulo Roll expresado matricialmente se define mediante R3 como:

$$\begin{bmatrix} X2 \\ Y2 \\ Z2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}\varnothing & \text{sin}\varnothing \\ 0 & -\text{Sen}\varnothing & \text{Cos}\varnothing \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{bmatrix} \quad (3-12).$$

La rotación total del sistema teniendo en cuenta sus tres ángulos [R] de giro, se define como la matriz resultante de multiplicación de las tres matrices de rotación [Yaw]*[Pitch]*[Roll]; así la matriz de rotación que representa el quadrotor está definida por (Pizetta et al., 2015).

$$Rt = \begin{pmatrix} \text{Cos}\theta * \text{Cos}\Psi & \text{Cos}\Psi * \text{Sen}\theta * \text{Sen}\varnothing - \text{Cos}\varnothing * \text{Sen}\Psi & \text{Sen}\varnothing * \text{Sen}\Psi + \text{Cos}\varnothing * \text{Cos}\Psi * \text{Sen}\theta \\ \text{Cos}\theta * \text{Sen}\Psi & \text{Cos}\varnothing * \text{Cos}\Psi + \text{Sen}\varnothing * \text{Sen}\theta * \text{Sen}\Psi & \text{Cos}\varnothing * \text{Sen}\theta * \text{Sen}\Psi + \text{Cos}\Psi * \text{Sen}\varnothing \\ -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta * \text{Sen}\varnothing & \text{Cos}\theta * \text{Cos}\varnothing \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{bmatrix} \quad (3-13).$$

La matriz de rotación general describe la variación de todos los ángulos de movimiento de un quadrotor unidos en un sistema matricial, el cual dependerá de la variación de velocidad de los motores si se quiere afectar alguno de estos ángulos. Otro factor fundamental que se debe tener en cuenta a la hora de modelar el sistema es la velocidad de giro de los ángulos, puesto que el empuje de las hélices generaría una velocidad de giro alta en el eje que por lo general llega a afectar la estabilidad del quadrotor.

Si se definen los vectores de posición y velocidades de los dos marcos de referencia se dará la siguiente notación de variables con el fin de mejorar la representación matemática. Las ecuaciones de estado se presentan en términos de derivadas con el fin de obtener el comportamiento a través del tiempo del sistema; en este caso se quiere obtener un vector de estado que contenga las traslaciones, velocidad y aceleraciones de las mismas, así como rotaciones, velocidades angulares y aceleraciones angulares que definan el comportamiento del quadrotor.

Vector posición del quadrotor respecto al marco de la tierra:

$$[\phi \ \theta \ \psi \ X \ Y \ Z] \quad (3-14).$$

Vector velocidades del quadrotor respecto al marco de la tierra:

$$[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}] \quad (3-15).$$

Vector aceleraciones del quadrotor respecto al marco de la tierra:

$$[\ddot{\phi} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\psi} \ \ddot{X} \ \ddot{Y} \ \ddot{Z}] \quad (3-16).$$

Vector velocidades lineales y angulares respecto al marco del cuerpo:

$$[u \ v \ w \ p \ q \ r] \quad (3-17).$$

Vector aceleraciones:

$$[\dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r} \ \dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w}] \quad (3-18).$$

Para entregar las velocidades respecto al marco referencial de inercia, la matriz de rotación es multiplicada por el vector de velocidades del marco del cuerpo con respecto al marco de inercia, es decir:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = R * \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix} \quad (3-19).$$

De tal forma que la velocidad en el marco de referencia de inercia estará definida por:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta * \cos\Psi & \cos\Psi * \text{Sen}\theta * \text{Sen}\phi - \cos\phi * \text{Sen}\Psi & \text{Sen}\phi * \text{Sen}\Psi + \cos\phi * \cos\Psi * \text{Sen}\theta \\ \cos\theta * \text{Sen}\Psi & \cos\phi * \cos\Psi + \text{Sen}\phi * \text{Sen}\theta * \text{Sen}\Psi & \cos\phi * \text{Sen}\theta * \text{Sen}\Psi + \cos\Psi * \text{Sen}\phi \\ -\text{Sen}\theta & \cos\theta * \text{Sen}\phi & \cos\theta * \cos\phi \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix} \quad (3-20).$$

3.4 MOVIMIENTO ROTACIONAL.

La cinemática rotacional describe el movimiento de rotación del cuerpo con respecto al marco de referencia de la tierra o inercial; lo que se busca es establecer una relación de velocidades para cada ángulo, es decir la razón de cambio de cada ángulo de Euler teniendo en cuenta las matrices de rotación en cada ángulo. Como primer paso se deben calcular las velocidades angulares del cuerpo como se describe en (Raffo & Almeida, 2016), se igualan las rotaciones de cada eje descritas por los ángulos de Euler $[\Psi \theta \phi]$ con la velocidad angular del cuerpo en cada eje $[p \ q \ r]$ teniendo en cuenta la incidencia de esta en las respectivas matrices de rotación.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R3' * \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R3' * R2' * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (3-21).$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^T \quad (3-22).$$

$$* \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi * \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi * \cos\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-23).$$

La matriz (3-23). se describe como la matriz de velocidades angulares W del cuerpo. El objetivo de la cinemática rotacional es obtener una matriz en función de las derivadas de los ángulos de Euler, para esto se deriva la ecuación anterior y se obtiene que (Li, Li, & Zheng, 2016):

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi * \tan\theta & \cos\phi * \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{-\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3-24).$$

Debido a la dinámica del vehículo quadrotor y el empuje producido por el torque generado entre el motor y la hélice se debe hallar el comportamiento de velocidad del cuerpo; es decir, se calcula que tan rápido está cambiando la posición del cuerpo respecto a cada uno de sus ejes. Para esto, se debe tener en cuenta que la adquisición de esta variable en casi todos los quadrotores y vehículos aéreos no tripulados se obtiene de un sensor IMU el cual entrega dicha velocidad en unidades de ángulos de Euler.

3.5 MODELO DINÁMICO.

El principio de mantener este tipo de vehículos en el aire consiste en acelerar sus cuatro rotores a la misma velocidad en el mismo instante de tiempo, con esto

“idealmente” el quadrotor lograría estar estable en el aire. El problema se encuentra en que en la realidad no todos los rotores giran a la misma velocidad, es por esto que en este tipo de vehículos se necesita un modelo que describa cada una de las fuerzas que intervienen a la hora de poner en marcha el quadrotor.

Al igual que en el modelo cinemático, el modelo dinámico del quadrotor esta descrito por el modelo de la dinámica traslacional y el modelo de la dinámica rotacional se describe según la descripción del modelo por medio de dos sistemas de referencia, el del cuerpo y el marco de referencia de la tierra.

3.5.1 DINÁMICA TRASLACIONAL

La dinámica traslacional del quadrotor busca describir el movimiento del quadrotor con respecto a las aceleraciones que se presenta al momento de poner en vuelo el mismo. En este caso el modelo dinámico traslacional busca obtener ecuaciones que describan las velocidades y posiciones lineales y angulares del sistema. Para describir las ecuaciones traslacionales del sistema es necesario reordenar la ecuación del Lagrangiano según esta descrita de la siguiente manera.

$$L=T-U \quad (3-25).$$

T se define como la energía potencial

U se define como la energía cinética

La ecuación de Lagrange se define como (Santibáñez, 2003, p. 63):

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T m \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} * \dot{n}^T * I \dot{n} - mgz \quad (3-26).$$

Donde:

m: es la masa del quadrotor.

g: fuerza gravitacional.

η : vector de ángulos de Euler

ε : Vector de aceleraciones

I: Inercia de cada eje

Teniendo en cuenta que existen dos sistemas de referencia, el marco inercial y el marco del cuerpo se definen q , n , ε como

$$q = [X \ Y \ Z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (3-27).$$

$$\varepsilon = [X \ Y \ Z]^T \text{ y } \eta = [\phi \ \theta \ \psi] \quad (3-28).$$

Por lo tanto, la matriz se puede separar como:

$$q = [\varepsilon \ n]^T \quad (3-29).$$

$$\varepsilon * \varepsilon^T = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (3-30).$$

$$n * n^T = \phi^2 + \theta^2 + \psi^2 \quad (3-31).$$

Entonces la ecuación del Lagrange para el quadrotor estaría definida por:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m(\dot{X} + \dot{Y} + \dot{Z}) + \frac{1}{2} * I(\phi^2 + \theta^2 + \psi^2) - mgz \quad (3-32).$$

Por último, la inercia se encuentra en cada uno de los ejes. La ecuación quedaría como:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m(\dot{X} + \dot{Y} + \dot{Z}) + \frac{1}{2} * (\phi^2 I_{xx} + \theta^2 I_{yy} + \psi^2 I_{zz}) - mgz \quad (3-33).$$

3.5.2 DESCRIPCIÓN DE FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL QUADROTOR.

Al igual que las definiciones por el Lagrangiano, las fuerzas que actúan sobre el quadrotor se dividen en dos: las fuerzas que actúan sobre el marco de referencia inercial y las torques que actúan sobre el marco de referencia del cuerpo.

$$F_{\varepsilon} = [F_x \ F_y \ F_z] \quad (3-34).$$

$$T = [T_{\phi} \ T_{\theta} \ T_{\psi}] \quad (3-35).$$

Entonces:

$$F = [F_{\varepsilon} \ T] \quad (3-36).$$

Debido a que se considera el quadrotor como una estructura rígida en el aire, se observa cómo las fuerzas de empuje de los 4 rotores idealmente actuarían sobre el eje z para lograr mantener el quadrotor estable, de tal forma que:

$$F = [0 \ 0 \ F]^T \quad (3-37).$$

Sin embargo, es necesario definir como dicha fuerza actúa sobre los otros ejes de tal forma que se debe multiplicar por la matriz de rotación.

$$F_{\varepsilon} = R_t * F \quad (3-38).$$

El método de Lagrange busca modelar el sistema a través de derivadas parciales de q y \dot{q} , de esta manera se puede expresar el sistema de forma matricial como Teppo Luukkonen,(2011).

$$\frac{d}{dt} * \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} m\ddot{X} \\ m\ddot{Y} \\ m\ddot{Z} \\ I_{xx}\ddot{\phi} + I_{xx}\dot{\phi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} + I_{yy}\dot{\theta} \\ I_{zz}\ddot{\psi} + I_{zz}\dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-39).$$

$$\frac{d}{dt} * \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = [0 \ 0 \ -mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3-40).$$

De tal forma que, si calculamos la matriz que nos define las aceleraciones, velocidades y traslaciones a través de los ejes X Y Z del quadrotor, la matriz estaría representada por:

$$m\ddot{X} = U1 * e3 * w \quad (3-41).$$

$$m * \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = U1 \begin{bmatrix} \text{sen}\phi * \text{sen}\psi + \text{cos}\phi * \text{cos}\psi * \text{sen}\theta \\ \text{cos}\phi * \text{sen}\theta * \text{sen}\psi + \text{cos}\psi * \text{sen}\phi \\ \text{cos}\theta * \text{cos}\phi \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3-42).$$

Donde U1= Es la sumatoria de fuerzas de los 4 rotores o aceleración total del quadrotor.

e3= Tercera columna de la matriz de rotación que describe el comportamiento de traslación a través del eje Z.

De esta forma, las ecuaciones que describen la dinámica traslacional del quadrotor están dadas por:

$$\ddot{X} = \frac{1}{m} * [\text{sen}\phi * \text{sen}\psi + \text{cos}\phi * \text{cos}\psi * \text{sen}\theta] * U1 \quad (3-43).$$

$$\ddot{Y} = \frac{1}{m} * [\text{cos}\phi * \text{sen}\theta * \text{sen}\psi + \text{cos}\psi * \text{sen}\phi] * U1 \quad (3-44).$$

$$\ddot{Z} = \frac{1}{m * g} * [\text{cos}\theta * \text{cos}\phi] * U1 \quad (3-45).$$

De las ecuaciones anteriores se debe tener en cuenta que el componente de la gravedad solo se multiplicó sobre el eje Z ya que solo este eje se verá afectado por la presencia de la fuerza de la gravedad.

3.6 DINÁMICA DE MOTORES.

Si se quiere obtener el torque que genera la rotación Roll ϕ del quadrotor a través del eje Y, primero se identifican los motores M1 y M3 los cuales son los actuadores en dicho movimiento y se establece una ecuación que defina el comportamiento después del cambio de la velocidad en ambos; de igual manera sucede con el torque que genera el cambio de posición Pitch θ a través del eje x el cual involucra los motores M2 y M4 respectivamente.

$$T_{\phi} = (F_{m3} - F_{m1}) * L \quad (3-46).$$

$$T_{\theta} = (F_{m2} - F_{m4}) * L \quad (3-47).$$

Donde L es la distancia el centro del rotor al centro de la estructura del quadrotor o el radio del mismo.

Para calcular el toque en el ángulo de rotación yaw ψ se debe tener en cuenta que los actuadores son los 4 motores, solamente que el giro obedecerá a la configuración de las hélices en cuanto al sentido de giro y de arrastre de las mismas.

$$T_{\psi} = (F_{m2} + F_{m4}) - (F_{m1} - F_{m3}) \quad (3-48).$$

La dinámica de los actuadores que siguen los actuadores en el sistema (Ai-Omari, Jaradat, & Jarrah, 2013).

$$U1=Fm1+Fm2+Fm3+Fm4 \quad (3-49).$$

$$U2=(Fm3 - Fm1) * L \quad (3-50).$$

$$U3=(Fm2 - Fm4) * L \quad (3-51).$$

$$U4=(Fm2 + Fm4) - (Fm1 - Fm3) \quad (3-52).$$

Ya obtenido el modelo de cómo actúan las fuerzas sobre el quadrotor es necesario definir el par rotacional de cada motor y como este actúa sobre los movimientos rotacionales del mismo; para esto es necesario involucrar la dinámica del par motor/Hélice de cada motor mediante la ecuación.

$$Fmi = \frac{1}{2} p * CD * A * v^2 \quad (3-53).$$

Donde:

p= densidad del aire.

A=área transversal de la hélice

CD= constante adimensional de ajuste (para este caso se tomó como 1)

Entonces el par de cada motor rotacional estará dado por la ecuación:

$$TD = \frac{1}{2} R^3 * p * CD * A * w^2 \quad (3-54).$$

Donde:

R: es el radio de la Hélice.

W: velocidad angular de la Hélice.

$$K: \frac{1}{2} R^3 * p * CD * A$$

De esta manera la dinámica de los cuatro motores estará definida por:

$$U1=w1+w2+w3+w4 \quad (3-55).$$

$$U_2 = (w_3 - w_1) * L * K \quad (3-56).$$

$$U_3 = (w_2 - w_4) * L * k \quad (3-57).$$

$$U_4 = (w_2 + w_4) - (w_1 - w_3) * b \quad (3-58).$$

Donde b es el coeficiente de arrastre del quadrotor.

3.6.1 Implementación en simulación.

Para la implementación es necesario relacionar w con voltaje en el motor para esto utilizamos la relación que existe entre KV y RPM:

$$1kv = 1RPM * V$$

Para el caso de nuestros motores, sabemos que giran a 2900kv y por experimentación se encontró que al anclar la hélice al motor estas revoluciones se reducían a la mitad. De este modo tenemos que:

$$w = \frac{2900}{2} * \frac{\pi}{30} * V \quad (3-59).$$

3.7 Dinámica Rotacional.

Para definir la ecuación que define la dinámica rotacional del quadrotor es necesario definir el segundo componente del vector F , es decir, los torques que actúan sobre el marco del cuerpo y su comportamiento en el quadrotor. La dinámica rotacional obedece a los principios de funcionamiento del quadrotor descritos en la primera parte de este capítulo; sin embargo, en este punto se realizará una formalización matemática a dichos funcionamientos.

Según Rubio, Cruz, Zamudio, & Salinas, (2014), basándose en la ecuaciones de Newton Euler define que la dinámica rotacional está definida por la ecuación:

$$J\ddot{n} = -\dot{n} \times Jn + \dot{F}ext \quad (3-60).$$

La inercia del quadrotor está definida a partir de asumir el quadrotor como un cuerpo rígido en una matriz de 3X3 definida por:

$$J = \begin{bmatrix} Ixx & Iyx & Izx \\ Ixy & Iyy & Izy \\ Ixz & Iyz & Izz \end{bmatrix}; Jdiag = \begin{bmatrix} Ixx & 0 & 0 \\ 0 & Iyy & 0 \\ 0 & 0 & Izz \end{bmatrix} \quad (3-61).$$

Donde Jdiag define la inercia del quadrotor.

Por otro lado, las fuerzas externas Fext del quadrotor están definidas por:

$$Fext = \begin{bmatrix} Tx' \\ Ty' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{bmatrix} \quad (3-62).$$

Donde Tx, Ty y Tz están definidas por las ecuaciones (3-46).,(3-47).y (3-48). Y Tx' y Ty' están definidas por:

$$\begin{aligned} Tx' &= -Jp\Omega \\ Ty' &= Jp\Omega \end{aligned} \quad (3-63).$$

Donde Jp es la inercia de par motor Hélice; y Ω estar dado por la ecuación:

$$\Omega = w2 + w4 - w1 - w3 \quad (3-64).$$

Donde W está definida por las ecuaciones (3-59). Para cada rotor, obsérvese que los ejes X y Y del quadrotor se ven directamente afectados por la dinámica del eje Z esto se debe a que para controlar el giro sobre el propio eje del quadrotor necesita de sus cuatro rotores.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3-46)., (3-47)., (3-48). y (3-61). y realizando la respectiva sustitución en la ecuación (3-62). se obtiene que (Araar & Aouf, 2014)

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{\theta}\dot{\psi}(I_z - I_y) \\ \dot{\phi}\dot{\psi}(I_x - I_z) \\ \dot{\phi}\dot{\theta}(I_z - I_x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{x'} \\ T_{y'} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (3-65).$$

Para finalizar tenemos que las variables de estado que describen la rotación del quadrotor. Dichas variables están definidas por:

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi} * \frac{(I_y - I_z)}{I_x} - \frac{Jp}{I_x} \Omega + \frac{U2}{I_x} \quad (3-66).$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi} * \frac{(I_x - I_z)}{I_y} - \frac{Jp}{I_y} \Omega + \frac{U3}{I_y} \quad (3-67).$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta} * \frac{(I_y - I_x)}{I_z} + \frac{U4}{I_y} \quad (3-68).$$

Por último, las ecuaciones que definen el sistema completo retomando las ecuaciones (3-43)., (3-44)., (3-45)., (3-66)., (3-67). y (3-68). (Naidoo, Stopforth, & Bright, 2011), se definen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} * [\text{sen}\phi * \text{sen}\psi + \text{cos}\phi * \text{cos}\psi * \text{sen}\theta] * U1 \\ \frac{1}{m} * [\text{cos}\phi * \text{sen}\theta * \text{sen}\psi + \text{cos}\psi * \text{sen}\phi] * U1 \\ \frac{1}{m * g} * [\text{cos}\theta * \text{cos}\phi] * U1 \\ \dot{\theta}\dot{\psi} * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} - \frac{Jp}{Ix} \Omega + \frac{U2}{Ix} \\ \dot{\phi}\dot{\psi} * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} - \frac{Jp}{Iy} \Omega + \frac{U3}{Iy} \\ \dot{\phi}\dot{\theta} * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} + \frac{U4}{Iy} \end{bmatrix} \quad (3-69).$$

Para efectos de simplificar el modelo se puede asumir que $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}] \approx [\dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r}]$, es decir que las velocidades de giro respecto al marco de la tierra y las velocidades angulares respecto al marco del cuerpo son aproximadamente iguales para ángulos que estén entre $-\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6}$; de esta manera el sistema descrito en la ecuación (3-69). estaría dado por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} * [\text{sen}\phi * \text{sen}\psi + \text{cos}\phi * \text{cos}\psi * \text{sen}\theta] * U1 \\ \frac{1}{m} * [\text{cos}\phi * \text{sen}\theta * \text{sen}\psi + \text{cos}\psi * \text{sen}\phi] * U1 \\ \frac{1}{m * g} * [\text{cos}\theta * \text{cos}\phi] * U1 \\ \dot{\theta}\dot{\psi} * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} - \frac{Jp}{Ix} \Omega + \frac{U2}{Ix} \\ \dot{\phi}\dot{\psi} * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} - \frac{Jp}{Iy} \Omega + \frac{U3}{Iy} \\ \dot{\phi}\dot{\theta} * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} + \frac{U4}{Iy} \end{bmatrix} \quad (3-70).$$

3.8 Representación en variables de estado:

La representación en variables de estado permite obtener el comportamiento del quadrotor en todo instante de tiempo.

Donde las variables de estado de la ecuación (3-70). Se definen como:

$$\begin{aligned} X1 &= \phi, & X2 &= \dot{\phi}, & \dot{X1} &= X2, & \dot{X2} &= \ddot{\phi} \\ X3 &= \theta, & X4 &= \dot{\theta}, & \dot{X3} &= X4, & \dot{X4} &= \ddot{\theta} \\ X5 &= \psi, & X6 &= \dot{\psi}, & \dot{X5} &= X6, & \dot{X6} &= \ddot{\psi} \end{aligned} \quad (3-71).$$

De esta manera el sistema de ecuación se reescribe de la forma:

$$\dot{X2} = X4X6 * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} - \frac{Jp}{Ix} \Omega + \frac{U2}{Ix}$$

$$\dot{X4} = X2X6 * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} - \frac{Jp}{Iy} \Omega + \frac{U3}{Iy}$$

$$\dot{X6} = X2X4 * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} + \frac{U4}{Iz}$$

De esta manera la representación matricial de estado estaría dada por la siguiente ecuación (3-72)

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X6 * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} & 0 & X4 * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & X6 * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} & 0 & 0 & 0 & X2 * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & X4 * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} & 0 & X2 * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \\ X6 \end{pmatrix} \quad (3-73)$$

$$Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad Bw = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{jp}{I} * \Omega \\ 0 \\ \frac{jp}{I_y} * \Omega \\ 0 \\ \frac{jp}{I_z} * \Omega \end{bmatrix}$$

Donde Bw corresponde a la matriz de perturbación dada por la dinámica de las hélices y el giro de los cuatro motores.

Capítulo 4.

4 PARAMETRIZACIÓN DEL QUADROTOR.

La caracterización de los parámetros físicos del sistema es una parte fundamental a la hora de diseñar controladores ya que esto permite el conocimiento completo de las posibles variables físicas que afectan al sistema, es por esto que en esta sección se describirán en detalle las variables físicas del quadrotor, como lo son: peso, medidas e inercia con el fin de ser utilizadas en secciones posteriores para el diseño de controladores.

4.1.1 Medidas:

A continuación, se describe las medidas físicas del quadrotor.

Tabla 2. Medidas Quadrotor.

Ancho	25 cm
Largo	25cm
Alto	8.5cm

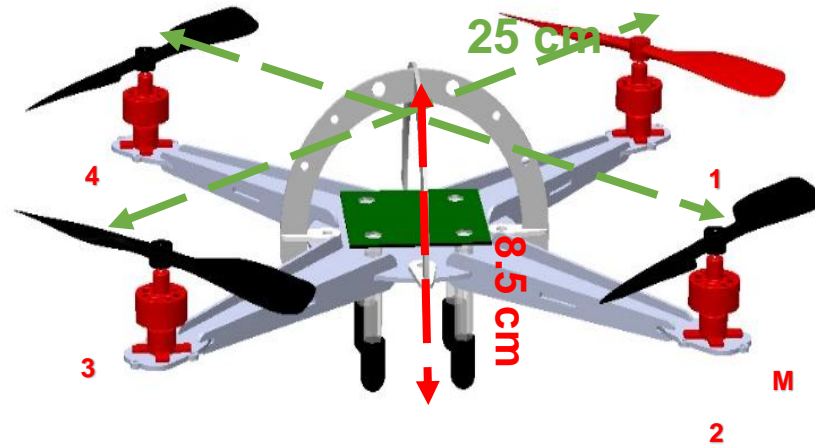


Figura 22. Medidas Físicas del Quadrotor.

4.1.2 Peso.

A continuación, se presenta una tabla general en donde se hace la suma del peso total del Turnigy Micro Quad con accesorios incluidos. Este factor de peso es muy importante en los vehículos UAV ya que este será proporcional al tiempo de vuelo, a la velocidad de reacción e inclusive al momento de implementar un controlador para la estabilidad.

Tabla 3. Distribución General de Peso Quadrotor.

NOMBRE	Peso (gr)	Subtotal Peso
Turnigy 1811 brushless Outrunner 2900kv	12g	48g
TURNIGY Plush 6A / .8bec/6g Speed Controller	6g	24g
Turnigy Integrated PCB Micro-Quad (KIT)	145g	145g
5030 Propellers	3g	12g
Polymer Lithium Ion Battery - 1000mAh 7.4v (Sale)	85g	85g
Hobbyking KK2.0 Multi-rotor LCD Flight Control Board (EU Warehouse)	21g	21g

Multiwii and Megapirate AIO Flight Controller w/FTDI (ATmega 2560) V2.0	14,2g	14,2g
Multiwii MWC FC Bluetooth Module Programmer (Android compatible)	7g	14g
Ultrasonic Module HC-SR04 Arduino	8,5g	8,5g
	Total	371.7g

4.1.3 CALCULO DE INERCIA.

Para hallar el modelo del quadrotor son necesarias algunas descripciones físicas del mismo con el fin de obtener un modelo más descriptivo. Para esto se halla el momento de inercia del mismo.

La masa de los motores (M) es igual a 12g y el largo del dron es de 25 cm; estos datos son importantes para calcular el momento de inercia del quadrotor.

$$I = \sum Mm * L \quad (4-1).$$

La inercia del eje o del soporte de los motores no se tendrá en cuenta ya que la estructura está diseñada en un material muy ligero como lo es la baquelita de 1 mm, así el momento de inercia total es:

$$Im1 = 0.12 * 0.125^2 = 0.00187$$

$$Im3 = 0.00187$$

$$It = 0.00375 \text{ kgm}^2$$

4.2 VALIDACIÓN.

Para realizar la validación del modelo fue necesario utilizar un banco de pruebas en el cual se validó el modelo matemático anteriormente planteado que fue implementado en simulink (Figura 24). La idea de la experimentación es validar la respuesta en ambos casos del sistema en lazo abierto, en los tres ejes observando la respuesta de los tres ángulos ROLL PITCH y YAW en lazo abierto.



Figura 23. Banco de pruebas.

En las figuras anteriores se muestra la configuración del banco de pruebas para cada uno de los ejes de rotación. A continuación se validan con los resultados obtenidos en la simulación.

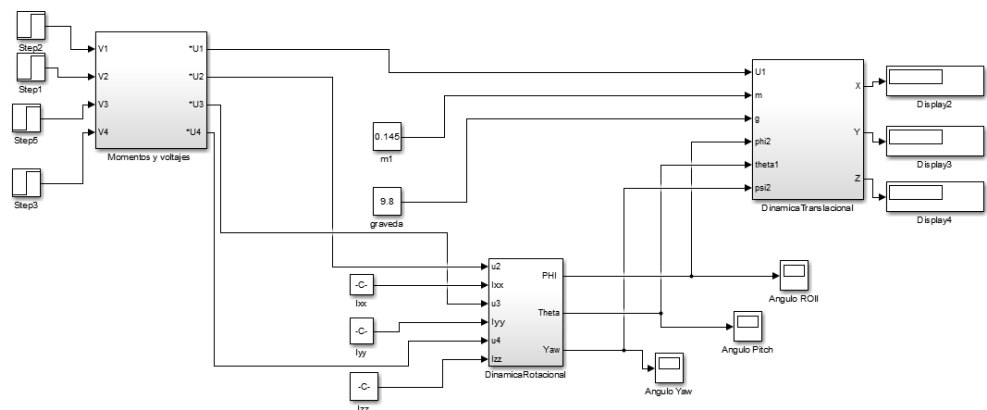
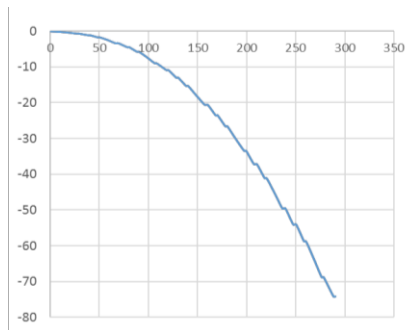


Figura 24. Diagrama bloques simulink.

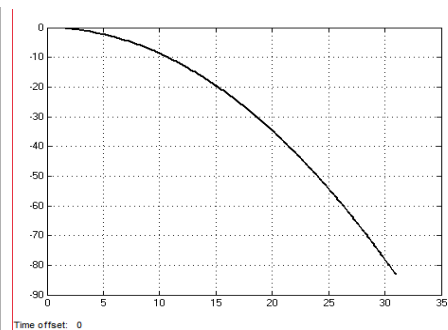
4.3 RESPUESTA EN LAZO ABIERTO ANGULO ROLL Y PITCH.

Para el caso del ángulo Pitch se validó el modelo mediante la aplicación de un impulso en los motores 2 y 4, y para generar el movimiento de la planta se programó la señal del PWM de uno a un 75 % de la velocidad máxima del motor y el otro a un 25% de ésta; de esta manera se tomaron los datos arrojados por la planta física y se realizaron las simulaciones en simulink. Luego se invirtió el proceso con el motor del frente, los datos arrojados en la simulación y banco de pruebas se muestran en la Gráfica 1 y Gráfica 2.

Resultado Experimental

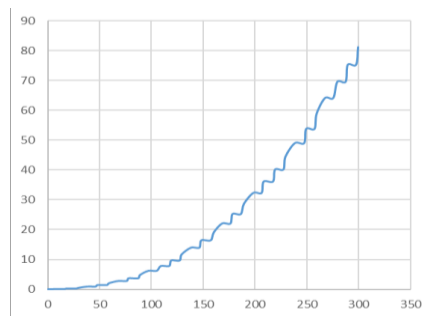


Resultado Simulación

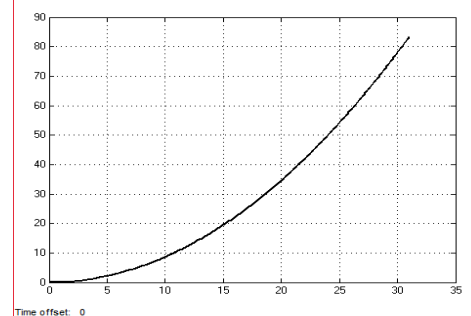


Gráfica 1: Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad del motor 2 al 75% de su velocidad y motor 4 al 25 % de su velocidad.

Resultado Experimental



Resultado Simulación



Gráfica 2. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad del motor 4 al 75% de su velocidad y motor 2 al 25 % de su velocidad.

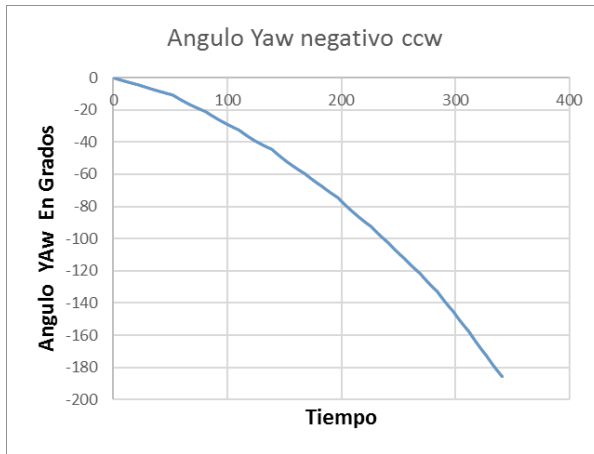
En las Gráfica 1 y Gráfica 2 se muestra la respuesta del sistema a un impulso, siguiendo en los casos de la simulación y la experimentación una trayectoria similar; sin embargo, se puede observar que para el caso de la experimentación la respuesta del sistema fue mucho más rápida.

Para el caso del ángulo Roll se realizó la misma experimentación del ángulo Pitch solo que en este caso los actuadores fueron el motor 1 y el motor 3, obteniendo una respuesta equivalente, esto se presenta debido a la simetría del quadrotor y la desagregación por ejes planteada en este trabajo.

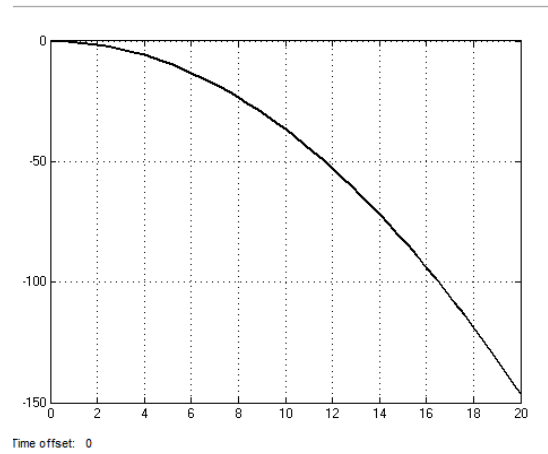
4.4 RESPUESTA EN LAZO ABIERTO ANGULO YAW.

Para el caso del ángulo YAW se validó el modelo mediante la aplicación de un impulso en el par de motores (2-4) y (1-3). Para generar el movimiento de la planta se programó la señal del PWM de un par de rotores al 50% de la velocidad máxima de estos y el otro par de rotores a un 15% de la velocidad máxima; de esta manera se toman los datos arrojados por la planta física, se realizan las simulaciones en el software simulink y luego se invierte el proceso con el par de motores variando la velocidad en la misma proporción; los datos arrojados en la simulación y banco de pruebas se muestran en la *Grafica 3* y *Grafica 4*. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad de los motores 1 y 3 al 50% de su velocidad y los motores 2 y 4 al 15 % de su velocidad. Se muestra la respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad de los motores (1 y 3) al 50% de su velocidad y los motores (2 y 4) al 15 % de su velocidad.

Resultado Experimental



Resultado Simulación



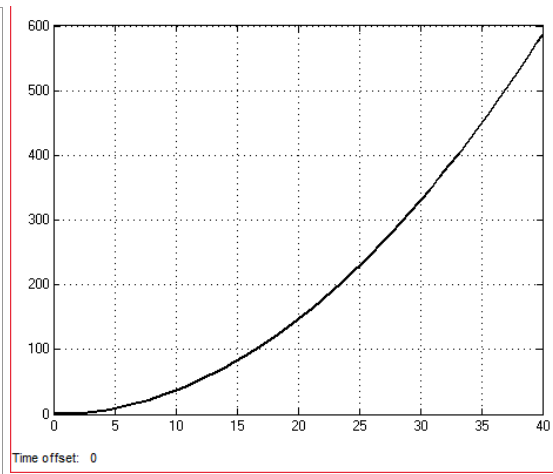
Grafica 3. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad de los motores 2 y 4 al 50% de su velocidad y los motores 1 y 3 al 15 % de su velocidad.

Cabe resaltar que se utilizó el 50% de la velocidad de los pares de motores puesto que para este movimiento se utilizan pares de motores para poder lograrlo.

Resultado Experimental



Resultado Simulación



Grafica 4. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad de los motores 1 y 3 al 50% de su velocidad y los motores 2 y 4 al 15 % de su velocidad.

Como se puede observar en las Grafica 3. Respuesta en lazo abierto del sistema físico y simulado con velocidad de los motores 2 y 4 al 50% de su velocidad y los motores 1 y 3 al 15 % de su velocidad. y Grafica 4, si se compara con las respuestas de las gráficas Gráfica 1 y Gráfica 2, la dinámica en el ángulo YAW es mucho más rápida que en los ángulos ROLL y PITCH; esto se debe a que para lograr un movimiento alrededor del eje Z es necesario utilizar 2 actuadores para que se logre el giro ya sea a favor o en contra de las manecillas del reloj.

Capítulo 5.

5 CONTROL BASADO EN DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES PARA REGULAR LA ACTITUD DEL QUADROTOR.

El progreso de las herramientas computacionales ha permitido el desarrollo y análisis de estrategias de control robustas. Existen diferentes sistemas no lineales que son difíciles de calcular analíticamente, sobre todo cuando son sistemas de tipo MIMO como es el caso del quadrotor, en donde su actitud en el aire depende por lo general de seis entradas de control, una consigna para cada par de ángulo y velocidad de cada eje y cuatro salidas los cuatro motores; la mayoría de este tipo de sistemas se aborda desde las estrategias de control clásicas las cuales arrojan resultados no óptimos para dichos problemas. De aquí surge la necesidad de abordar dichos problemas con estrategias de control robusto y algoritmos de optimización calculados a través de métodos numéricos computacionales.

En este capítulo se abordará el problema de controlar la actitud de un quadrotor utilizando la técnica de realimentación de estados donde el cálculo de las ganancias de realimentación por cada estado se calculará utilizando desigualdades lineales matriciales con el objetivo de calcular las ganancias más óptimas que permiten controlar cada eje del quadrotor y con esto la actitud total de este.

Al igual que el planteamiento del modelo matemático para el caso del diseño de los controladores se planteará la estrategia de seccionar por ejes el quadrotor, es decir se realizará el diseño de un controlador por cada eje, se diseñarán tres

controladores los cuales se encargarán de controlar los tres ángulos de navegación Yaw, Pitch y Roll y las velocidades asociadas a estos utilizando la técnica de realimentación de estados como se plantea en las ecuaciones (5-1),(5-2) y (5-3); de igual manera se tendrá en cuenta la simetría el quadrotor con el fin de ahorrar procesos de cálculo e implementación de los mismos en el sistema físico.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BwW(t) + BuU(t) \tag{5-1}.$$

$$y(t) = Cyx(t) + DywW(t) + DyuU(t) \tag{5-2}.$$

$$z(t) = Cz x(t) + DzwW(t) + DzuU(t), \tag{5-3}.$$

Para el caso de cada eje del quadrotor es necesario plantear la implementación del controlador a través de realimentación de estados como se muestra señalado en la Figura 25 por una línea punteada roja la cual representa el modelo presentado a través de variables de estado de cada eje del quadrotor descritas en la ecuación (3-73). Es de aclarar que por cada eje del quadrotor se tendrán dos variables de estado, por ejemplo, las variables de estado que describen el ángulo ROLL son el ángulo y la velocidad con la que cambia este a través del tiempo este.

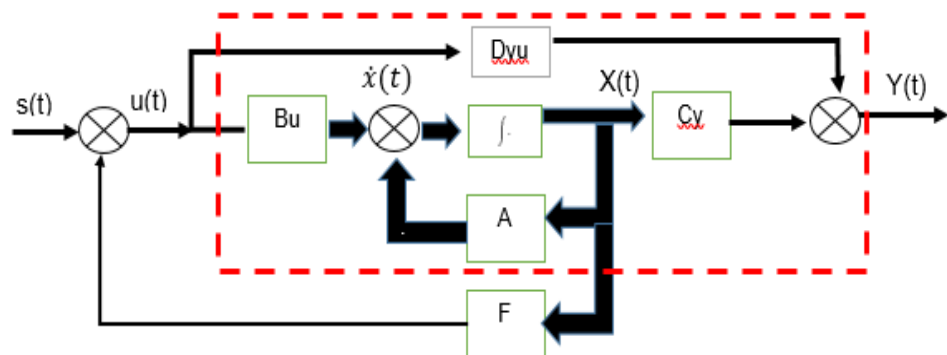


Figura 25. Esquema de un sistema en variables de estado y Control.

La ley de control que se describe en la ecuación anterior está definida por:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (5-4).$$

En la Figura 25 se muestra el lazo de control donde F es un vector de ganancias el cual obedece a la ley de control de la ecuación (5-4)., la cual se multiplica por cada estado del sistema. El diseño del controlador dependerá de la selección del valor de esas ganancias para controlar el sistema. El planteamiento de estos requerimientos a través de LMIs se plantea como una solución para la selección de dichas ganancias; dentro del diseño de los controladores se tendrán en cuenta dos requerimientos importantes: Como primer requerimiento de optimización del controlador diseñado se formulará LMIs optimizando la norma H_{∞} la cual busca solucionar el problema de la atenuación entre la perturbación de entrada y la salida regulada del sistema; sin embargo según Araar & Aouf (2014) este control no garantiza el comportamiento transitorio adecuado del sistema puesto que es muy sensible a perturbaciones externas constantes las cuales están presentes, por ende es necesario implementar otras restricciones formuladas a través de desigualdades lineales matriciales. Como segunda restricción formulada para el diseño de nuestros controladores se tendrá en cuenta la ubicación de polos del sistema para mantener la respuesta del quadrotor en el estado transitorio y con esto tener control sobre la tasa de decaimiento y el factor de amortiguamiento que se presenta en este tipo de sistemas.

De tal forma que se sustituye el modelo LTI planteado en (5-1)., (5-2)., y (5-3). en la ecuación (5-4). se tiene que:

$$\dot{x}(t) = (Ax(t) + BuF)x(t) \quad (5-5).$$

5.1 DEFINICIÓN DE RESTRICCIONES LMI:

Los controladores robustos LMI permiten modelar la no linealidad de un sistema y las incertidumbres presentadas en el mismo, para el caso del quadrotor se pueden modelar incertidumbres como modificaciones en el punto de operación, dinámica no lineal no considerada en el modelo planteado en el capítulo 3, así como imprecisiones en los parámetros del mismo. Como se sabe las restricciones LMIs permiten a los sistemas dinámicos garantizar la estabilidad mediante el planteamiento de LMI, para el caso de esta investigación se plantearán restricciones LMIs con el fin de garantizar la permanencia del sistema en un punto de operación, incluir en la ley de control incertidumbres paramétricas, plantear la norma H^∞ como una solución a la minimización de perturbaciones externas y garantizar la respuesta transitoria del sistema mediante la técnica de ubicación de polos. Cabe resaltar que la definición de las LMI para el sistema están definidas en tiempo continuo puesto que según el método de Tustin o transformación bilineal, esta técnica es útil cuando se quiere obtener la dinámica deseada del sistema partiendo de un sistema continuo (véase Higuera Martínez & Salamanca, 2011). La investigación de Higuera Martínez & Salamanca (2011) comprueba que las restricciones LMI pueden plantearse en tiempo continuo existiendo una correlación con el tiempo discreto (véase de forma detallada en Chang, Park, Lee, & Joo, 2002).

5.1.1 ESTABILIDAD CUADRÁTICA.

La estabilidad en un sistema dinámico puede definirse como la respuesta estable del sistema a través de un punto de operación a lo largo del tiempo. La estabilidad cuadrática planteada por (Liapounoff, 1947, p. 27) plantea una estrategia eficiente que permite encontrar una función escalar que, como en el caso de la energía de un sistema mecánico, sea decreciente continuamente a medida que evolucione

hasta llegar a un punto de equilibrio donde no se reduce más (Boyd, El Ghaoui, Feron, & Balakrishnan, 1994, p. 14)

El planteamiento de estabilidad de Lyapunov a través de una restricción LMI puede ser planteada como (Olalla, Leyva, El Aroudi, Garcés, & Queinnec, 2010):

$$A^T W + W A + Y^T B u^T + B u Y < 0 \quad (5-6).$$

Siendo $w = w^T > 0$. De esta manera, puede obtenerse un vector de ganancias F que estabilice el sistema, si existe una matriz simétrica definida positiva W tal que cumpla con la condición anteriormente planteada.

5.1.2 PARÁMETROS INCIERTOS.

Como se mencionó anteriormente el planteamiento de restricciones LMIs permite incluir parámetros inciertos en el modelo. La representación de estos sistemas puede ser vista como la extensión de sistemas LTIs con matrices dependientes linealmente de parámetros inciertos, es decir:

$$\dot{x}(t) = A(p)x(t) + Bw(p)W(t) + Bu(p)U(t) \quad (5-7).$$

$$y(t) = Cy(p)x(t) + Dyw(p)W(t) + Dyu(p)U(t) \quad (5-8).$$

$$z(t) = Cz(p)x(t) + Dzw(p)W(t) + Dzu(p)U(t), \quad (5-9).$$

Donde $p = [p_1, \dots, p_{np}]$, es el vector de agrupación de parámetros inciertos del sistema. Cada parámetro incierto p_i se encuentra limitado entre un valor mínimo y un valor máximo es decir $[p_{min}, p_{max}]$, las posibles combinaciones de los valores mínimos y máximos del vector p definen un politopo convexo con $2^n p$; es decir el

politopo¹ se formará con las combinaciones de incertidumbres descritas para el sistema. Por lo tanto, si se aplica el teorema de estabilidad de Lyapunov teniendo en cuenta las incertidumbres del sistema, la restricción LMI estaría planteada de la siguiente forma:

$$A_i^T W + W A_i + Y^T B u_i^T + B u_i Y < 0 \quad (5-10).$$

Donde i representa el número posible de combinaciones de sistemas resultantes del planteamiento de las incertidumbres.

5.2 RESTRICCIÓN LMI PARA LA NORMA H^∞ .

Teniendo en cuenta lo descrito en la Figura 25 y la definición de la norma H^∞ la formulación en lazo cerrado del sistema LTI está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B u * F) x(t) + B w w(t) \\ z(t) &= (C z + D z u * F) x(t) + D z w w(t) \end{aligned} \quad (5-11).$$

La norma H^∞ de un sistema se puede observar como una función de desempeño que evalúa el nivel de atenuación mínimo de una perturbación externa sobre la salida, lo que se calcula hallando la máxima ganancia RMS o norma H^∞ de la función $H(s)$ de $W(t)$ a $z(t)$ tal como se presenta en (Olalla et al., 2010):

$$\|H(s)\|_\infty \Delta \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \quad (5-12).$$

¹ Un politopo es la generalización del concepto Polígono (2D), o poliedro (3D) a cualquier otra dimensión.

Donde $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ representa la norma infinita y la norma euclidiana respectiva.

Esto significa que cualquier frecuencia de la señal de la perturbación no será más grande que γ , el siguiente teorema planteado en (Boyd et al., 1994), traza un planteamiento para la restricción LMIs de la norma H_∞ para sistemas de lazo cerrado.

“El sistema definido por la ecuación (5-11). es asintóticamente estable para algunas ganancias de realimentación F y $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$ si y solo si existe una matriz simétrica definida positiva W tal que (Olalla et al., 2010)”.

$$\begin{bmatrix} AW + WA^T + BuY + y^T Bu^T & Bw & WCz^T + Y^T Dzu^T \\ Bw^T & -\gamma c^{II} & 0 \\ CzW + DzuY & 0 & -\gamma^{II} \end{bmatrix} < 0 \quad (5-13).$$

$$W = P^{-1} \text{ y } F = YW^{-1}$$

5.3 RESTRICCIÓN PARA LA UBICACIÓN DE POLOS.

La técnica de ubicación de polos en sistemas dinámicos permite regular la respuesta transitoria de los mismos, a partir de la ubicación de polos se puede diseñar para los sistemas dinámicos lineales, la tasa de decaimiento, el factor de amortiguamiento y su frecuencia natural. Lo que se busca con las restricciones LMIs para la ubicación de polos consiste en ubicar los polos del sistema en el semiplano izquierdo ubicándolos en regiones específicas y forzar a que se mantengan en la misma, y de esta manera garantizar un factor mínimo de amortiguamiento $\mathcal{L} = \cos(\theta)$, una mínima tasa de decaimiento α y una máxima frecuencia natural máxima $W_o = r\sin(\theta)$ (véase Figura 26); esto permitirá garantizar en cada controlador planteado un sobre paso máximo, el tiempo de respuesta y el tiempo de establecimiento.

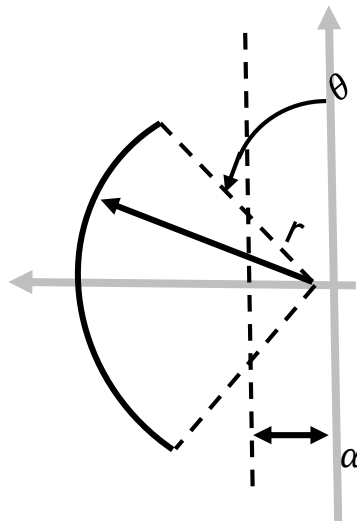


Figura 26. Region S Ubicación de polos.

El teorema plantea (Olalla et al., 2010) que los polos de lazo cerrado del sistema con una retroalimentación de estado $u=Kx$ dentro de la región $S(a, p, 0)$ si existe una matriz simétrica definida positiva W y una matriz Y como tal.

5.3.1 RESTRICCIÓN PARA LA TASA DE DECAIMIENTO.

$$AW + WA^T + BuY + Y^T Bu^T + 2 \alpha W < 0 \quad (5-14).$$

5.3.2 RESTRICCIÓN PARA LA LIMITACIÓN DEL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO \mathcal{L}

$$\begin{bmatrix} \cos \theta (AW + WA^T + BuY + Y^T Bu^T) & \sin \theta (AW - WA^T + BuY - Y^T Bu^T) \\ \sin \theta (-AW + WA^T - BuY + Y^T Bu^T) & \cos \theta (AW + WA^T + BuY + Y^T Bu^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (5-15)$$

5.3.3 RESTRICCIÓN PARA LA LIMITACIÓN DE LA FRECUENCIA NATURAL ω_0 .

$$siendo F = YW^{-1} \begin{bmatrix} -rW & WA^T + Y^T Bu^T \\ AW + BuY & rW \end{bmatrix} < 0 \quad (5-16).$$

5.4 Formulación LMI para la restricción en la entrada de control:

Esta restricción se plantea generalmente para restringir los valores de la señal de entrada, esta restricción LMI se plantea debido a que las teorías de control clásicas no restringen el valor de las ganancias F ya que un valor muy grande de estas podría saturar el sistema, logrando una inestabilidad inminente del sistema, por lo tanto el objetivo de esta restricción es restringir el esfuerzo de control $\|u(t)\|_2 \leq u$ a lo largo de una trayectoria para alguna condición desde $x(0)$ que se encuentre dentro de un elipsoide $x(0)^T P x(0)$.

Si se asume que la condición inicial $x(0)$ del sistema planteado es conocida, la restricción de acotamiento del esfuerzo de control $\|u(t)\|_2 \leq u$ es aplicada en todo tiempo $t \geq 0$ si existe una matriz simétrica definida positiva W tal que satisfaga las siguientes LMIs (Yaz, 1998).

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5-17).$$

$$\begin{bmatrix} W & Y^T \\ Y & u^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5-18).$$

Para finalizar, el algoritmo de control robusto planteado en esta investigación consiste en encontrar las ganancias de realimentación F que garantice un mínimo de atenuación entra la perturbación de entrada y la salida regulada, minimizando la restricción planteada en la sección 5.2, de igual manera el algoritmo de control deberá satisfacer la restricción de ubicación de polos planteada en la sección 5.3 y por último la restricción en el esfuerzo de control 5.4, para cada vértice de la representación politópica.

5.5 CONTROL DEL ÁNGULO ROLL PITCH y YAW UTILIZANDO LMIs.

El control para los ángulos estará basado en la técnica de realimentación de estados debido a su facilidad de implementación, este diseño tendrá en cuenta ciertas restricciones basadas en desigualdades lineales matriciales que permiten optimizar la respuesta de los mismos mejorando aspectos tan fundamentales como error de estado estacionario, rechazo a perturbaciones e incertidumbres en el sistema.

Teniendo en cuenta lo descrito en la Figura 25 y la definición de la norma H^∞ de la sección 5.2.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + Bu * F) x(t) + Bw w(t) \\ z(t) &= (Cz + Dzu * F) x(t) + Dzw w(t)\end{aligned}\tag{5-19}.$$

Donde:

$w(t)$ = Vector de Perturbaciones.

$z(t)$ = Vector de salidas controladas.

Bw = Matriz de Perturbación.

Cz = Matriz de salida medible.

Dzu = Matriz de transmisión directa.

El vector de estado estable define los valores de cada estado en los que el sistema es estable; para este caso, de las variables de estado de los ángulos Roll y Pitch, se realiza un solo cálculo ya que por su simetría y distribución de peso uniforme es posible; es decir, las ganancias en ambos ángulos de rotación se diseñarán con los mismos parámetros físicos.

Las variables de estado para los ángulos ROLL y PITCH utilizando la técnica de desagregación de ejes las ecuaciones de estado estarán definidas por (Carrillo, López, Lozano, & Pégard, 2012, p. 39), (Castillo, García, Lozano, & Albertos, 2007b) y (Naidoo et al., 2011).

$$\begin{bmatrix} \ddot{\Psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\dot{\Psi} * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} - \frac{Jp}{Ix}\Omega + \frac{U2}{Ix} \\ \dot{\theta}\dot{\Psi} * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} - \frac{Jp}{Iy}\Omega + \frac{U3}{Iy} \\ \dot{\theta}\dot{\theta} * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} + \frac{U4}{Iz} \end{bmatrix} \quad (5-20).$$

Si se observa el sistema de la ecuación anterior y lo comparamos con el sistema planteado en la ecuación (3-71), se ve como el modelo se puede aproximar a un modelo lineal asumiendo las siguientes consideraciones.

- Esta investigación está enfocada a estabilizar el quadrotor en sus tres ángulos de rotación (YAW, PITCH y ROLL) por ende los términos correspondientes a las aceleraciones lineales que describen las trayectorias del quadrotor (X, Y y Z) no se tienen en cuenta para el cálculo de los controladores.
- Si se asume que los movimientos del quadrotor en sus tres ángulos de rotación se encuentran en estado hovering, es decir el quadrotor completamente estable suspendido en el aire, los términos $\frac{Jp}{Ix}\Omega$ definidos en las ecuaciones (3-63). y (3-64). pueden ser eliminados ya que en este estado son muy pequeños comparados con los términos $\frac{U2}{Ixx}$, $\frac{U3}{Iyy}$ y $\frac{U4}{Izz}$ de las ecuación.

- Por último, en estado hovering las velocidades que experimenta el quadrotor en cada eje son casi nulas, por ende, los términos que describe las velocidades angulares en cada eje pueden ser asumidos como cercanos a cero. $\dot{\phi} \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$ y $\dot{\psi} \approx 0$.

$$\frac{d^2\phi}{dt} = \frac{1}{I_{xx}} * U2 - I_{xx}\dot{\phi} \quad (5-21).$$

$$x1 = \phi \quad x1' = \dot{\phi} \quad (5-22).$$

$$x2 = \dot{\phi} \quad x2' = \ddot{\phi} \quad (5-23).$$

$$f1 = (x2, f) = 0 \quad (5-24).$$

$$0 = \frac{1}{I_{xx}} * U2 - I_{xx}\dot{\phi} \quad (5-25).$$

$$\frac{1}{I_{xx}} * U2 = I_{xx}\dot{\phi} \quad (5-26).$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I_{xx}^2} * U2 \quad (5-27).$$

Por ende, el vector de estado estable es para Roll Y Pitch:

$$X_{pitch} = \left[0 \quad \frac{1}{I_{xx}^2} \quad 0 \right] \quad (5-28).$$

$$X_{roll} = \left[0 \quad \frac{1}{I_{yy}^2} \quad 0 \right]$$

Para el ángulo YAW estará definido por:

$$X = \left[0 \quad \frac{1}{I_{zz}^2} \quad 0 \right] \quad (5-29).$$

En el vector de estado estable se puede observar que existe una tercera variable de estado la cual corresponde a una variable integral la cual se diseña con el fin de eliminar el error de estado estacionario. Teniendo en cuenta lo anterior y

los valores físicos descritos en la sección 4 la representación numérica discretizada con un tiempo de muestreo de 5 ms para cada ángulo Roll y Pitch, por ende, las variables de estado estarían dadas por:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 1.0002 & 0 \\ 0.05 & 0.0013 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.365 \\ 13.05 \\ 0.0054 \end{pmatrix} \quad (5-30).$$

Para el caso del ángulo Yaw extraía dada de la forma.

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 1.0004 & 0 \\ 0.05 & 0.0013 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5695 \\ 22.7808 \\ 0.0095 \end{pmatrix} \quad (5-31).$$

Para la matriz de perturbación se asume que un motor está girando el doble de la velocidad del otro, esto hará que el ángulo del sistema varíe en su punto de equilibrio, este fenómeno se presenta en los ejes de rotación X y Y como se planteó en la experimentación realizada para validar el modelo en la sección 4.2.

$$B_{wXY} = [0 \ 2 * W \ 0] \quad (5-32).$$

Dónde: $W = W_1 \dots W_4$ dependiendo el eje que se esté controlando.

Para el caso del eje de Rotación en Z, la matriz de perturbación estará dada por la disminución de la velocidad de un par de rotores, ya sea M1 y M3 o M2 y M4, estará dada por:

$$B_{wZ} = [0 \ 2 * (-(w_1 - w_3)) \ 0]' \quad (5-33).$$

Para la matriz de salida medible, se requiere medir y controlar el ángulo de la planta a través de la variación de velocidad de los motores; por ende, la matriz de salida medible para todos los ejes estará definida por:

$$C_y = [0 \ 1 \ 0]; \quad (5-34).$$

Por último, la matriz de transición directa como:

$$D_{yu} = [0]; \quad (5-35).$$

La región seleccionada de polos se encuentra en la región acotada entre S $\alpha=1$, $r_o= 377$, $teta= 0.4363$ para el caso de los ángulos Pitch y Roll. Retomando la Figura 26, la región delimitada para la ubicación de polos de los ángulos Pitch y Roll estaría dada por:

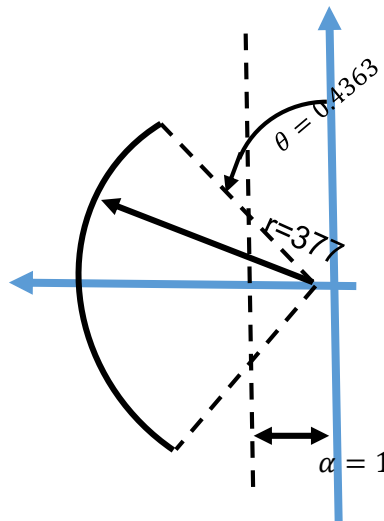


Figura 27. Región de Ubicación de Polos.

El control robusto permite calcular restricciones del sistema en cuanto a la ubicación de polos, restricciones como la tasa de decaimiento, el factor de amortiguamiento y restricciones para la frecuencia natural de sistema; estas son

restricciones que se utilizan para estabilizar el sistema, además de esto el control robusto basa su teoría en incluir incertidumbres y perturbaciones dentro del modelo matemático para el diseño del mismo. En el quadrotor se presentan algunas incertidumbres como: incertidumbres como modificaciones del punto de trabajo o set point en cualquiera de sus seis grados de libertad, imprecisión en los parámetros medidos, y sobre todo la dinámica no lineal no considerada dentro del modelo.

Para el caso de los ángulos pitch y Roll, se tendrán en cuenta incertidumbres encontradas en la entrada del sistema con el fin de que el punto de operación del quadrotor pueda estar representado por un modelo politópico; es decir, el controlador para el sistema trabajará en un área delimitada por rangos de las incertidumbres p_1 y p_2 planteadas para el sistema. De esta forma el sistema quedará definido por:

Roll y Pitch:

$$U_2 = (1450 * \pi/30 * Pi - (1450 * \pi/30 * Pi * L * K) \quad (5-36).$$

Para YAW:

$$U_4 = (1450 * \pi/30 * Pi + 1450 * \pi/30 * Pi,) - (1450 * \pi/30 * Pi - 1450 * \pi/30 * Pi) \quad (5-37).$$

Donde pi estará variando entre cuatro valores que formarán un sistema politópico.

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 1.0002 & 0 \\ 0.05 & 0.0013 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.365 \\ 13.05 \\ 0.0054 \end{pmatrix} U_2 \quad (5-38).$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 1.0002 & 0 \\ 0.05 & 0.0013 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.365 \\ 13.05 \\ 0.0054 \end{pmatrix} U_4 \quad (5-39).$$

Se define p1 y p2 los cuales representan la variación en el ciclo de trabajo en los motores del quadrotor y que estarán definidas entre los valores:

$$p1 = [1 \ 0.3]$$

$$p2 = [-1 \ -0.3]$$

El símbolo del menos indica que la variación de ciclo de trabajo en un motor se verá reflejada en el otro inversamente para lograr el equilibrio. De esta forma tendremos un área de trabajo delimitada por el cálculo del controlador teniendo en cuenta las incertidumbres de la variación del ciclo de trabajo.

Los resultados y ganancias halladas para el controlador LMI incluyendo incertidumbres y paramétricas en la entrada fueron:

$$fRoll = [1.3550 \ 0.1108 \ 8] \quad (5-40).$$

$$fYaw = [1.1410 \ 0.1131 \ 3.95]$$

Donde cada ganancia estará multiplicando a las variables de estado en todo momento con el fin de garantizar la estabilidad del quadrotor en todo momento.

5.6 Simulación de Controlador LMI Robusto para Roll, Pitch y Yaw:

Para la simulación de los controladores diseñados se parte del esquema planteado en la Figura 24, en donde se representa el sistema en modelo de bloques en lazo abierto, en este caso se planteará una realimentación de variables de estados multiplicadas por unas ganancias de realimentación de la ecuación (5-40)., de esta manera se cumplen la ley de control planteada en la ecuación (5-4). A continuación se muestra la implementación en simulink y los resultados obtenidos para los tres ángulos.

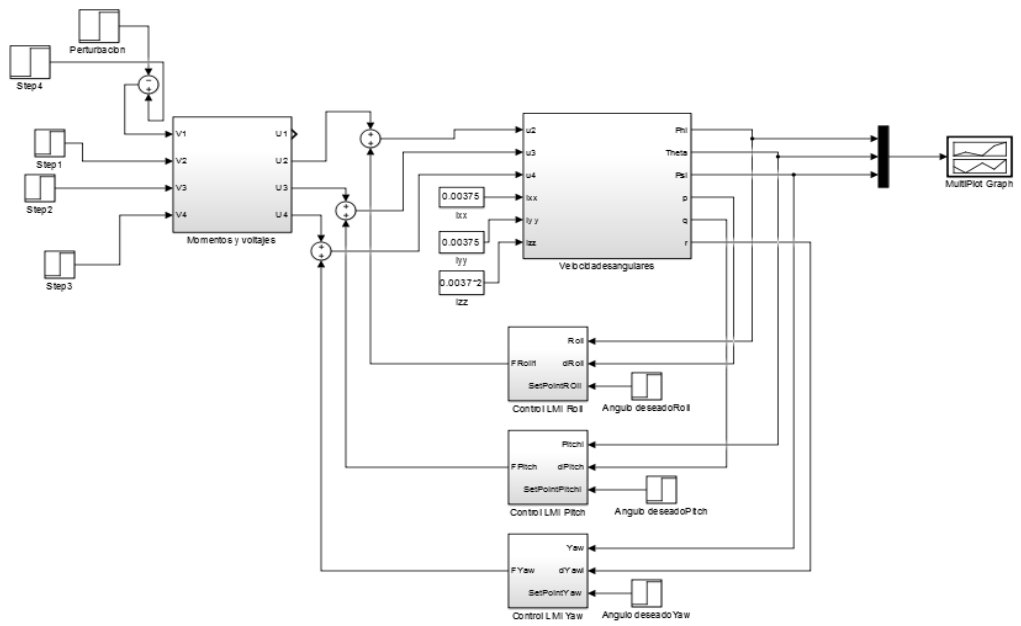
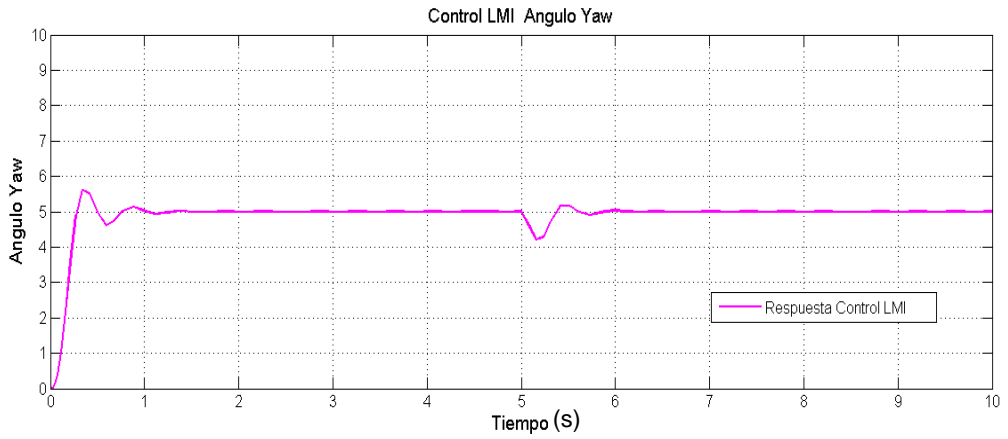
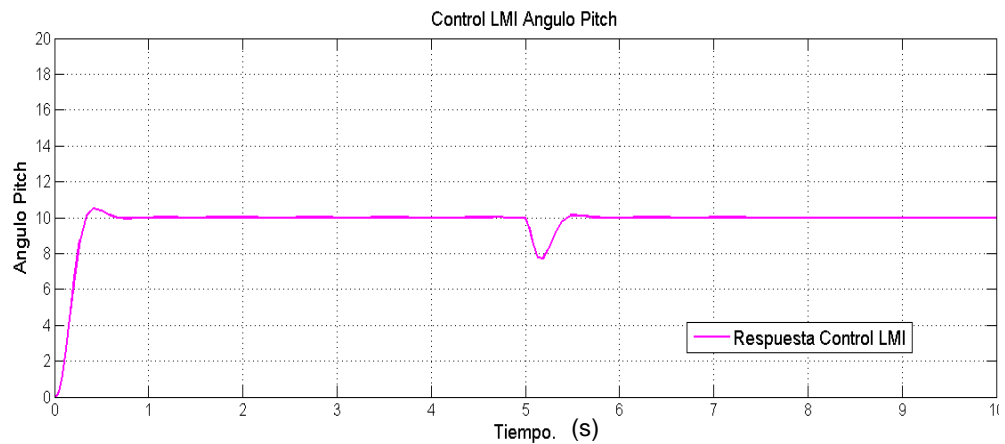


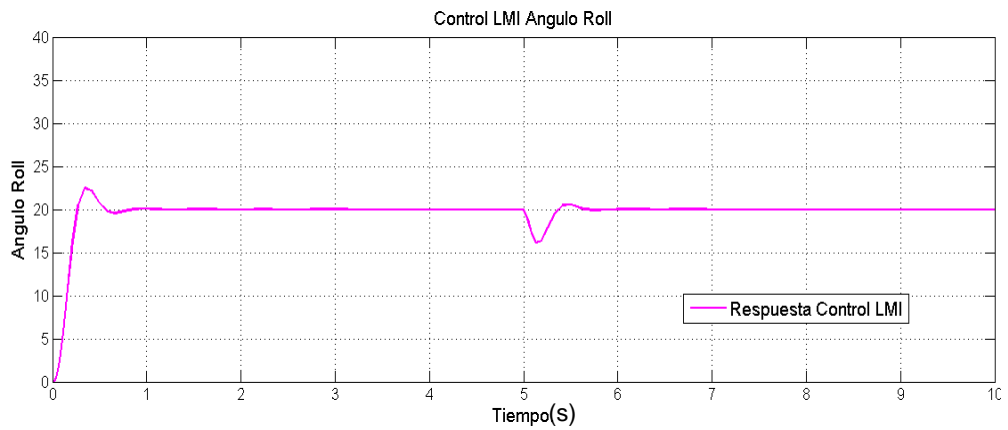
Figura 28. Implementación controladores LMI (Roll, Pitch y YAW) en Simulink.



Grafica 5. Respuesta del ángulo Yaw Frente a la estrategia de control LMI robusta con un setpoint 5 grados.



Gráfica 6. Respuesta del ángulo Pitch Frente a la estrategia de control LMI robusta con un setpoint 10 grados.



Gráfica 7. Respuesta del ángulo Roll Frente a la estrategia de control LMI robusta con un setpoint 20 grados.

En las gráficas anteriores se puede observar como las incertidumbres incluidas en esta sección dentro del sistema, hace comportar al sistema estable frente a perturbaciones externas; sin embargo, se presentan algunos sobre picos del 2.5 % en la respuesta transitoria del sistema y cuando se realiza la perturbación externa. Cabe resaltar que estas simulaciones se realizaron sin tener en cuenta las no linealidades presentes en el sistema y de manera independiente a cada controlador, por lo cual se planteó un modelo alternativo teniendo en cuenta algunas

consideraciones iniciales. En el capítulo 3, se mostrará una estrategia de control no lineal la cual tendrá en cuenta estas no linealidades al momento de plantear el modelo y diseñar el controlador permitiendo así una mejor respuesta sobre todo en la implementación en el sistema físico.

5.7 Implementación y Discusión de Resultados:

La implementación del controlador se realizó en la quadrotor descrito en la sección 4 del presente documento además de utilizar el banco de pruebas descrito en la Figura 23, teniendo en cuenta la misma estrategia de suspensión de ejes utilizada en la validación del modelo matemático aproximado.

Para la implementación del controlador en el quadrotor se utilizó la tarjeta Multiwii and Megapirate AIO Flight Controller, la cual está diseñada para volar este tipo de vehículos aéreos no tripulados, ya que incluye sensores como acelerómetro y giroscopio, los cuales son de vital importancia para el control de dichos vehículos, además de incluir un microcontrolador atmega 2560 que se programa mediante la plataforma de desarrollo arduino.

De igual manera, se desarrolló una aplicación en Android, con la cual se ajustaron las ganancias del controlador mientras el sistema se encuentra en funcionamiento, permitiendo así una mejor aproximación de las ganancias halladas en el diseño del controlador sobre todo la ganancia que multiplicará al término integral.

Se diseñó el controlador a partir de la multiplicación de las variables de estado por las ganancias calculadas por el algoritmo LMI planteado y calculado en Matlab. Con la suma de estas, se halla una ganancia de realimentación total que realimentará el sistema por cada eje; las ecuaciones que describen el controlador implementadas en el microcontrolador son:

$$U1 = \text{AnguloX} * F[0]$$

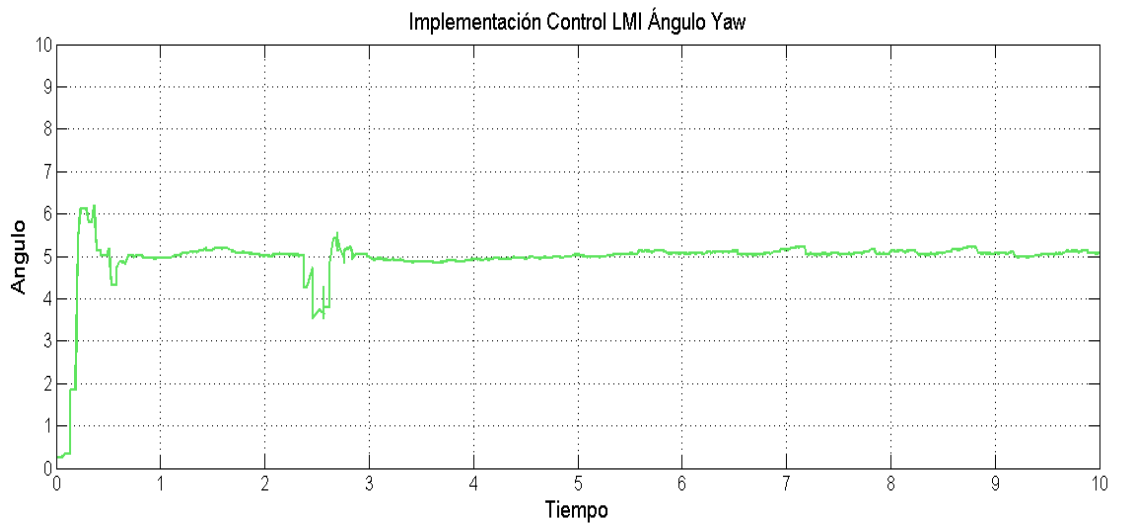
$$U2 = \text{gyroXrate} * F[1]$$

$$U3 += (F[2] * Tm * \text{error}) \text{ "la sumatoria de error acumulado"}$$

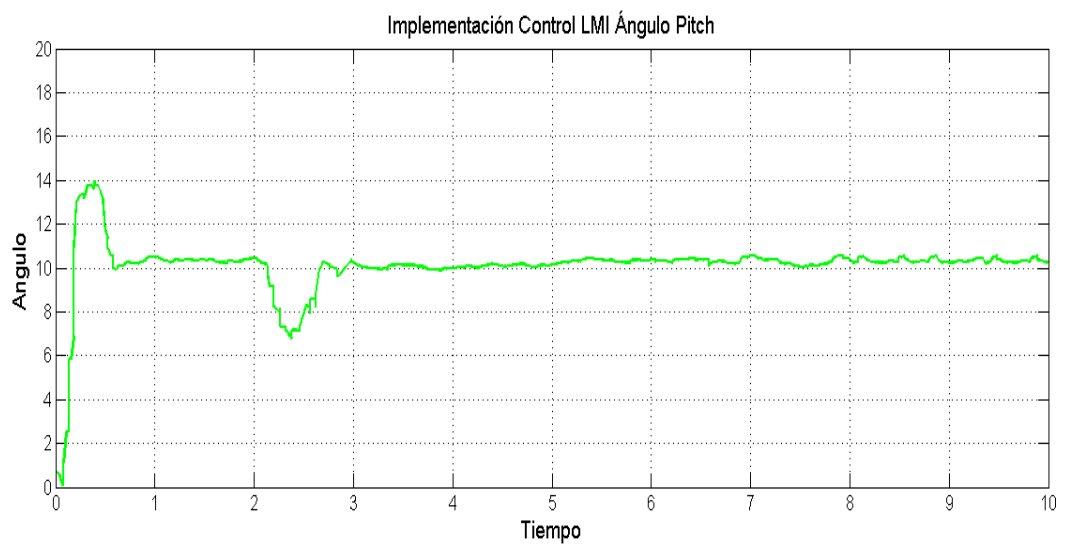
$$UT = U1 + U2 + U3 \text{ "Señal de control"}$$

Donde AnguloX y gyroXrate se obtienen a partir de la lectura del sensor MPU 6050 a un intervalo de muestra de 4- 5 ms, cabe resaltar que para el termino integral se realizaron algunos ajustes en cuanto a limitadores de ganancia para no causar saturación en el sistema, es decir se limita la salida de este término entre un valor máximo y mínimo.

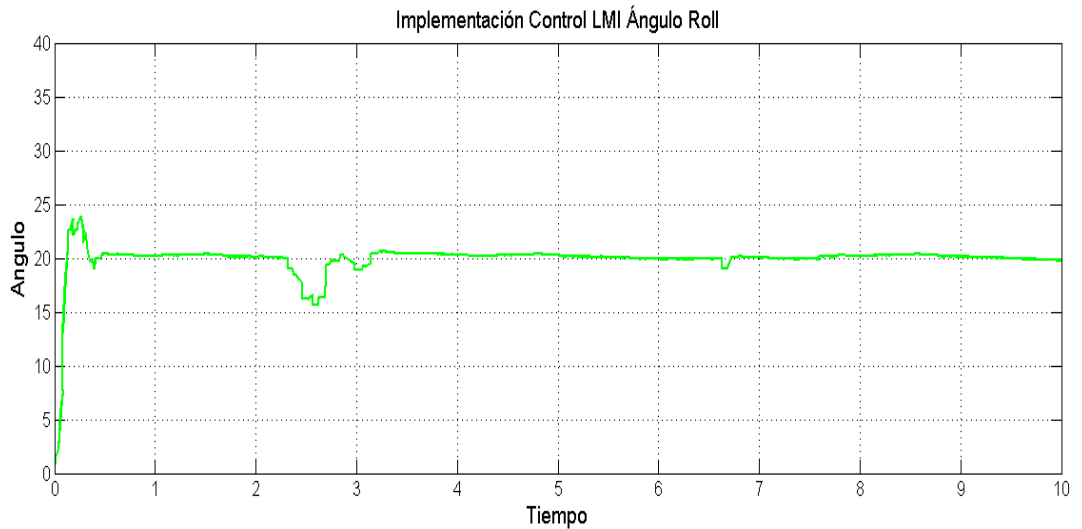
Para graficar la respuesta del sistema se desarrolló una aplicación en Processing la cual permite obtener el comportamiento de las variables de estado, en este caso los ángulos de rotación, mientras el sistema está en ejecución. Estos datos son transmitidos a la computadora vía puerto serial permitiendo así el adecuado ajuste de las ganancias calculadas por el algoritmo LMI (Véase Anexo 1, Anexo 2 Y Anexo 3). Esta aplicación a su vez permite capturar los datos obtenidos durante la ejecución de la prueba del controlador de esta manera los resultados se graficaron y se muestran a continuación.



Grafica 8. Resultados de implementación física de controlador LMI Angulo Yaw.



Grafica 9. Resultados de implementación física de controlador LMI Angulo Pitch.



Gráfica 10. Resultados de implementación física de controlador LMI Angulo Roll.

Si se observa en la Grafica 8, Grafica 9 y Gráfica 10, existe una similitud con las simulaciones presentadas en las Grafica 5, Gráfica 6 y Gráfica 7 en cuanto a la respuesta transitoria del sistema, la cual corroborará la robustez de esta técnica de control a través de la realimentación de estados teniendo en cuenta restricciones LMI como la estabilidad cuadrática, ubicación de polos en lazo cerrado y esfuerzo de control, con el fin de garantizar la regulación automática de cada uno de los ángulos presentes en la dinámica del quadrotor. En cuanto a las perturbaciones se observa que, aunque no coinciden en tiempos de ejecución, su respuesta es similar debido a que al momento de la implementación es difícil hacer coincidir dicho tiempo.

Capítulo 6.

6 CONTROL DIFUSO T-S LMI PARA REGUAR LA ACTITUD DE UN QUADROTOR.

La lógica difusa es una rama de la inteligencia artificial que basa su teoría en el planteamiento de teorías acerca de imitar el pensamiento humano y representarlo en ecuaciones matemáticas comprensibles para la máquina, la lógica difusa se encarga de modelar situaciones comunes de la vida cotidiana como caminar, corre, estacionar el coche, etc., en sistemas computacionales; básicamente se encarga de representar el pensamiento del humano en modelos matemáticos comprensibles para la máquina.

Alguna de las aplicaciones de la lógica difusa está enfocada en la automatización de sistemas ya que por la naturaleza de su funcionamiento permite incluir en el modelo analítico del sistema conocimientos del experto. Estos conocimientos no pueden ser modelados matemáticamente o son muy complejos de incluir en el modelo del sistema; de esta manera se logran incorporar parámetros a través de una base de reglas de conocimiento las cuales son el componente fundamental dentro del control difuso las reglas difusas tienen como representación general.

IF<Antecedente> THEN <Consecuente>

De esta manera se pueden representar cualquier sistema de control a través de reglas simples en donde se puede representar el sistema en su totalidad. El antecedente es la parte de la regla que deben cumplir las variables y el consecuente es la acción que se debe cumplir si el antecedente se cumple, de esta manera en sistemas de control se pueden encontrar reglas difusas como:

IF<El error es Grande> THEN <Ganancia es Grande>

IF<El error es Medio> THEN <Ganancia es Media>

IF<El error es Pequeño> THEN <Ganancia es Pequeña>

Estas reglas pasan a través de un motor de inferencia difusa el cual es el encargado de convertir las variables lingüísticas entregadas por el usuario en valores numéricos correspondientes al valor del antecedente ingresado.

El utilizar la lógica difusa en los sistemas de control da lugar a lo que conocemos como sistemas de control difuso; de esta manera se plantean dos técnicas de control, el control difuso basado en inferencia tipo Mandami y el control difuso basado en inferencia Takagi Sugeno. Ambas estrategias de control se diferencian en que el control difuso basado en inferencia Mandami basa su funcionamiento en la utilización de conjuntos difusos en la entrada y salida del sistema, y el control difuso con inferencia Takagi Sugeno tiene la capacidad de representar sistemas no lineales a través de sistemas lineales simples ya que el consecuente de cada regla se define como una combinación lineal o una función lineal de las variables de entrada. A diferencia del modelo tipo Mandami el modelo Takagi Sugeno no considera defusificador ya que cada entrada del sistema tiene una salida exacta.

6.1 Modelo Difuso T-S del Quadrotor:

El modelo difuso T-S está basado en la definición de una serie de reglas con las cuales se pretende modelar el sistema completo como una serie de subsistemas lineales según (Tanaka & Wang, 2004b, p. 36) el modelo difuso parte del modelo de reglas como se presenta a continuación.

If $z_1(t)$ is M_{ij} and ... $z_p(t)$ is M_i THEN

$$\begin{cases} x(t+1) = A_i X(t) + B_i u(t), & i = 1, 2, \dots, r; \\ y(t) = C_i X(t), & i = 1, 2, \dots, r. \end{cases} \quad (6-1).$$

Donde M_{ij} son los conjuntos difusos y r es el número de reglas establecido para modelar el sistema, $x(t)$ es el vector de estados, $u(t)$ es el vector de entradas del sistema, $y(t)$ es el vector de salida, A_i es la matriz cuadrada de elementos y $z_1(t)$... $z_p(t)$ son conocidas como las variables de premisa. Cada ecuación lineal consecuente representada por c es conocida como un sub sistema.

La salida del modelo difuso puede ser inferida a través de:

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i X(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (6-2).$$

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (6-3).$$

El objetivo de esta investigación es garantizar la estabilidad del quadrotor respecto a sus tres ángulos de rotación o ángulos de Euler (YAW, PITCH y ROLL) teniendo en cuenta la velocidad con la que giran cada uno de estos en todo momento. De esta manera la representación matricial de estado estaría dada por la siguiente ecuación (3-72). En lo que respecta a la dinámica rotacional del quadrotor

y teniendo en cuenta que en este modelo se describen no linealidades del sistema que se pueden ver como subsistemas; es decir un sistema difuso por cada velocidad de Eje o Angulo de Euler utilizando el planteamiento difuso T-S para describir el comportamiento del quadrotor.

Se define que:

$$I1 = \frac{Iy-Iz}{Ix}, I2 = \frac{Ix-Iz}{Iy}, I3 = \frac{Iy-Ix}{Iz} \quad (6-4).$$

La representación en variables de estado para el Angulo YAW está dada por:

$$\dot{X}6 = \begin{bmatrix} X4 * I3 & 0 \\ 0 & X2 * I3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ Izz \end{bmatrix} * u4 \quad (6-5).$$

Para el Angulo Roll estará dada por:

$$\dot{X}4 = \begin{bmatrix} X6 * I2 & 0 \\ 0 & X4 * I2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ Iyy \end{bmatrix} * u3 \quad (6-6).$$

Y por último para la velocidad del ángulo Pitch

$$\dot{X}2 = \begin{bmatrix} X4 * I1 & 0 \\ 0 & X6 * I1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ Ixx \end{bmatrix} * u2 \quad (6-7).$$

Donde las no linealidades del sistema se presentan en las variables de estado X2, X4 y X6 presentes en la matriz A(x) con respecto a las demás variables de estado que se tendrán en cuenta a la hora de realizar el cálculo de controlador.

Sobre estas variables se plantea el modelo difuso T-S se plantea teniendo en cuanto los pasos definidos en (Torres-Pinzón & Leyva, 2009).

Donde el primer paso consiste en definir las variables de programación las cuales se definen mediante la ecuación.

$$\dot{\check{x}}(t + 1) = A(\delta(t))x(t) + Bu(\delta(t))\check{d}(t) \quad (6-8).$$

Para el caso del quadrotor las variables de programación se definen mediante la ecuación.

$$[\dot{\emptyset} \ \dot{\theta}] = [\delta 1(t) \ \delta 2(t)] = [X2 \ X4] \quad (6-9).$$

$$[\dot{\emptyset} \ \dot{\Psi}] = [\delta 1(t) \ \delta 3(t)] = [X2 \ X6] \quad (6-10).$$

$$[\dot{\theta} \ \dot{\Psi}] = [\delta 2(t) \ \delta 3(t)] = [X4 \ X6] \quad (6-11).$$

De este modo los sistemas para cada una de las velocidades angulares que se definen en la ecuación anterior estará definido por las siguientes ecuaciones:

$$A\delta 3(t) = \begin{bmatrix} \delta 3(t) * I3 & 0 \\ 0 & \delta 1(t) * I3 \end{bmatrix} + \left[\frac{U4}{Izz} \right] * \delta 3(t) \quad (6-12).$$

$$A\delta 2(t) = \begin{bmatrix} \delta 3(t) * I2 & 0 \\ 0 & \delta 2(t) * I2 \end{bmatrix} + \left[\frac{U3}{Iyy} \right] * \delta 2(t) \quad (6-13).$$

$$A\delta 1(t) = \begin{bmatrix} \delta 3(t) * I1 & 0 \\ 0 & \delta 2(t) * I1 \end{bmatrix} + \left[\frac{U2}{Ixx} \right] * \delta 1(t) \quad (6-14).$$

Se puede observar en las ecuaciones (6-32). y (6-33). y (6-34). que las matrices $Bu2.\delta 1(t)$ a $Bu3.\delta 3(t)$ son Constantes puesto que las variables de programación solo están presentes en las matrices $A1\delta(t)$ a $A3\delta(t)$

Como segundo paso se obtienen los sub-modelos no lineales a partir de la regla $r = 2^p$ donde p es la cantidad de variables de programación seleccionadas en el modelo y r corresponde a la cantidad de sub-modelos los cuales están definidos por valores de extremos mínimos y máximos para cada sub-modelo.

$$\begin{aligned}\delta 1(t) &= (\delta 1min, \delta 1max) \\ \delta 2(t) &= (\delta 2min, \delta 2max) \\ \delta 3(t) &= (\delta 3min, \delta 3max)\end{aligned}\tag{ 6-15}.$$

Donde las posibles combinaciones de los valores extremos de cada variable de programación están definidas por:

$$\begin{aligned}(\delta 1min, \delta 2min), (\delta 1max, \delta 2min) \\ (\delta 1min, \delta 2max), (\delta 1max, \delta 2max)\end{aligned}\tag{ 6-16}.$$

$$\begin{aligned}(\delta 1min, \delta 3min), (\delta 1max, \delta 3min) \\ (\delta 1min, \delta 3max), (\delta 1max, \delta 3max)\end{aligned}\tag{ 6-17}.$$

$$\begin{aligned}(\delta 2min, \delta 3min), (\delta 2max, \delta 3min) \\ (\delta 2min, \delta 3max), (\delta 2max, \delta 3max)\end{aligned}\tag{ 6-18}.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6-16). y reemplazando los valores en las ecuaciones (6-12) a (6-14) y teniendo en cuenta que la matriz Bu es constante en todos los subsistemas se obtienen los modelos:

$$A1 = \begin{bmatrix} I1 * \delta 2min & 0 \\ 0 & I1 * \delta 1min \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U2 \\ Ixx \end{bmatrix}\tag{ 6-19}.$$

$$A2 = \begin{bmatrix} I1 * \delta2min & 0 \\ 0 & I1 * \delta1max \end{bmatrix} + \left[\frac{U2}{Ixx} \right] \quad (6-20).$$

$$A3 = \begin{bmatrix} I1 * \delta2max & 0 \\ 0 & I1 * \delta1min \end{bmatrix} + \left[\frac{U2}{Ixx} \right] \quad (6-21).$$

$$A4 = \begin{bmatrix} I1 * \delta2max & 0 \\ 0 & I1 * \delta1max \end{bmatrix} + \left[\frac{U2}{Ixx} \right] \quad (6-22).$$

$$A5 = \begin{bmatrix} I2 * \delta3min & 0 \\ 0 & I2 * \delta1min \end{bmatrix} + \left[\frac{U3}{Iyy} \right] \quad (6-23).$$

$$A6 = \begin{bmatrix} I2 * \delta3min & 0 \\ 0 & I2 * \delta1max \end{bmatrix} + \left[\frac{U3}{Iyy} \right] \quad (6-24).$$

$$A7 = \begin{bmatrix} I2 * \delta3max & 0 \\ 0 & I2 * \delta1min \end{bmatrix} + \left[\frac{U3}{Iyy} \right] \quad (6-25).$$

$$A8 = \begin{bmatrix} I2 * \delta3max & 0 \\ 0 & I2 * \delta1max \end{bmatrix} + \left[\frac{U3}{Iyy} \right] \quad (6-26).$$

$$A9 = \begin{bmatrix} I3 * \delta3min & 0 \\ 0 & I3 * \delta2min \end{bmatrix} + \left[\frac{U4}{Izz} \right] \quad (6-27).$$

$$A10 = \begin{bmatrix} I3 * \delta3min & 0 \\ 0 & I3 * \delta2max \end{bmatrix} + \left[\frac{U4}{Izz} \right] \quad (6-28).$$

$$A11 = \begin{bmatrix} I3 * \delta3max & 0 \\ 0 & I3 * \delta2min \end{bmatrix} + \left[\frac{U4}{Izz} \right] \quad (6-29).$$

$$A12 = \begin{bmatrix} I3 * \delta3max & 0 \\ 0 & I3 * \delta2max \end{bmatrix} + \left[\frac{U4}{Izz} \right] \quad (6-30).$$

Como tercer paso se definen las funciones de pertenencia para cada variable de programación a partir de los extremos definidos en el paso anterior.

$$\begin{aligned} \eta_{small}(\delta1) &= \frac{\delta1max - \delta1}{\delta1max - \delta1min} & \eta_{big}(\delta1) &= 1 - \eta_{small}(\delta1) \\ \eta_{small}(\delta2) &= \frac{\delta2max - \delta2}{\delta2max - \delta2min} & \eta_{big}(\delta2) &= 1 - \eta_{small}(\delta2) \\ \eta_{small}(\delta3) &= \frac{\delta3max - \delta3}{\delta3max - \delta3min} & \eta_{big}(\delta3) &= 1 - \eta_{small}(\delta3) \end{aligned} \quad (6-31).$$

Como cuarto paso se construirá la base de reglas Ri donde (i=1,2,3,...,n) de los modelos difuso T-S; para el caso del quadrotor la base de reglas estará definida por 8 reglas difusas.

$$R1: \text{ If } \delta1 \text{ is small and } \delta2 \text{ is small then} \quad (6-32).$$

$$\dot{\check{x}}6(t) = A1\check{x}(t) + Bu2\check{d}(t)$$

R2: *If δ_1 is big and δ_2 is small then* (6-33).
 $\dot{\check{x}}_6(t) = A_2\check{x}(t) + Bu_2\check{d}(t)$

R3: *If δ_1 is small and δ_2 is big then* (6-34).
 $\dot{\check{x}}_6(t) = A_3(t) + Bu_2\check{d}(t)$

R4: *If δ_1 is big and δ_2 is big then* (6-35).
 $\dot{\check{x}}_6(t) = A_4\check{x}(t) + Bu_2\check{d}(t)$

R5: *If δ_1 is small and δ_3 is small then* (6-36).
 $\dot{\check{x}}_4(t) = A_5\check{x}(t) + Bu_3\check{d}(t)$

R6: *If δ_1 is big and δ_3 is small then* (6-37).
 $\dot{\check{x}}_5(t) = A_6\check{x}(t) + Bu_3\check{d}(t)$

R7: *If δ_1 is small and δ_3 is big then* (6-38).
 $\dot{\check{x}}_4(t) = A_7(t) + Bu_3\check{d}(t)$

R8: *If δ_1 is big and δ_3 is big then* (6-39).
 $\dot{\check{x}}_4(t) = A_8\check{x}(t) + Bu_3\check{d}(t)$

R9: *If δ_2 is small and δ_3 is small then* (6-40).
 $\dot{\check{x}}_2(t) = A_9(t) + Bu_4\check{d}(t)$

R10: *If δ_2 is big and δ_3 is small then* (6-41).
 $\dot{\check{x}}_2(t) = A_{10}(t) + Bu_4\check{d}(t)$

R11: *If δ_2 is small and δ_3 is big then* (6-42).
 $\dot{\check{x}}_2(t) = A_{11}(t) + Bu_4\check{d}(t)$

R12: *If δ_2 is big and δ_3 is big then* (6-43).
 $\dot{\check{x}}_2(t) = A_{12}(t) + Bu_4\check{d}(t)$

Teniendo en cuenta la ecuación (6-8).El modelo difuso del quadrotor puede ser escrito como.

$$\check{x}(t + 1) = \sum_{i=1}^r h_i(A_i\check{x}(t) + B_{ui}(t)\check{d}(t)) \quad (6-44).$$

$$\check{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(\delta_1, \delta_2, \delta_3) A_i \check{x}(t) \right) + B_u \check{d}t \quad (6-45).$$

Donde h_i está definida como:

$$\begin{aligned} h_1(\delta_1, \delta_2) &= \eta_{small}(\delta_1) * \eta_{small}(\delta_2) \\ h_2(\delta_1, \delta_2) &= \eta_{big}(\delta_1) * \eta_{small}(\delta_2) \\ h_3(\delta_1, \delta_2,) &= \eta_{small}(\delta_1) * \eta_{big}(\delta_2) \\ h_4(\delta_1, \delta_2) &= \eta_{big}(\delta_1) * \eta_{big}(\delta_2) \\ h_5(\delta_1, \delta_3) &= \eta_{small}(\delta_1) * \eta_{small}(\delta_3) \\ h_6(\delta_1, \delta_3) &= \eta_{big}(\delta_1) * \eta_{small}(\delta_3) \\ h_7(\delta_1, \delta_3) &= \eta_{small}(\delta_1) * \eta_{big}(\delta_3) \\ h_8(\delta_1, \delta_3) &= \eta_{big}(\delta_1) * \eta_{big}(\delta_3) \\ h_9(\delta_2, \delta_3) &= \eta_{small}(\delta_2) * \eta_{small}(\delta_3) \\ h_{10}(\delta_2, \delta_3) &= \eta_{big}(\delta_2) * \eta_{small}(\delta_3) \\ h_{11}(\delta_2, \delta_3) &= \eta_{small}(\delta_2) * \eta_{big}(\delta_3) \\ h_{12}(\delta_2, \delta_3) &= \eta_{big}(\delta_2) * \eta_{big}(\delta_3) \end{aligned} \quad (6-46).$$

6.1.1 Validación del modelo:

Para realizar la validación del modelo se utiliza los mismos parámetros expuestos en la sección 4. La idea de la validación consiste en que nuestro modelo difuso diseñado tenga un comportamiento similar al planteado en la Gráfica 1 y Gráfica 2 para los ángulos (Yaw, Pitch y Roll) teniendo en cuenta los mismos parámetros de simulación, y las no linealidades presentes en este modelo, de esta manera se realizó la implementación en simulink la cual se presenta a continuación.

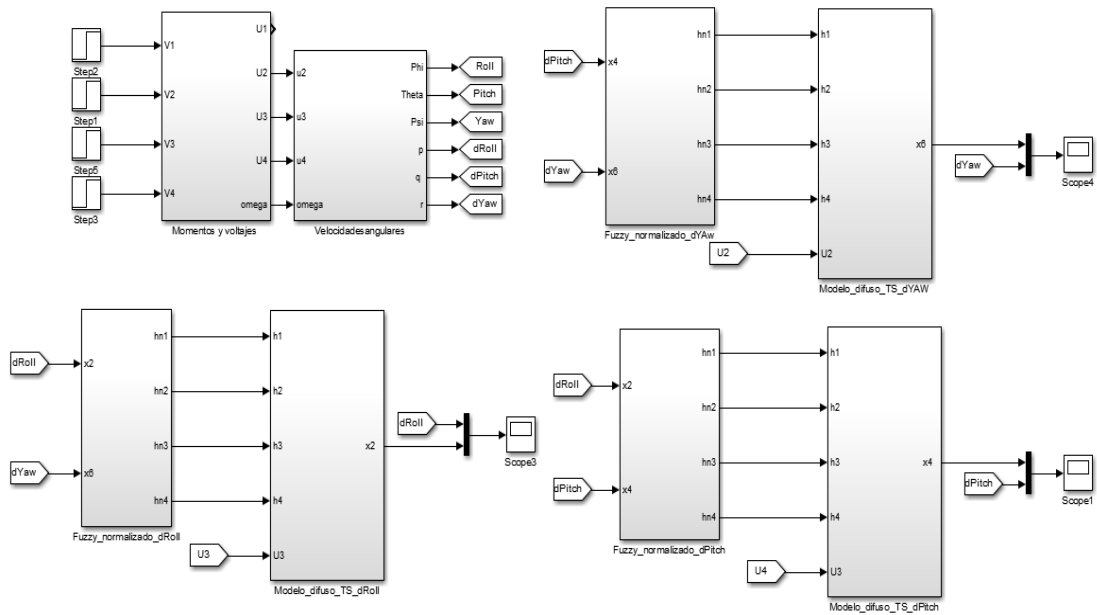
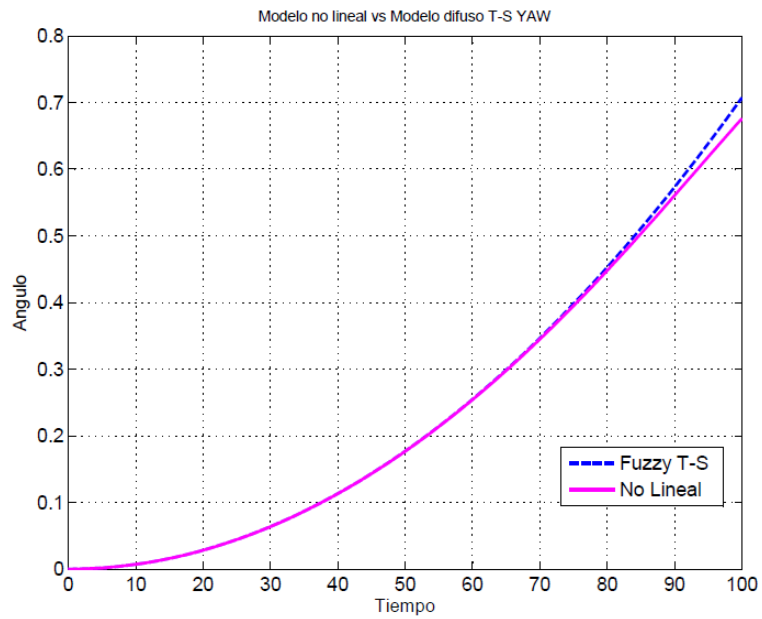
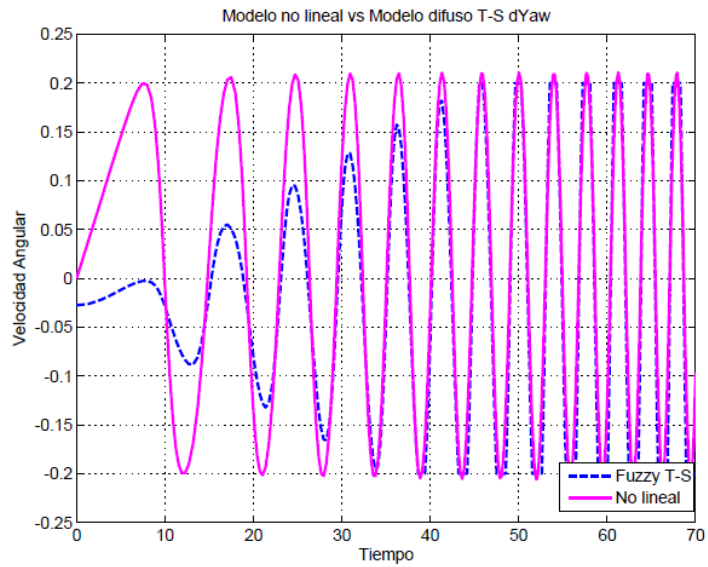


Figura 29. Diagrama bloques simulink modelo difuso T-S quadrotor.

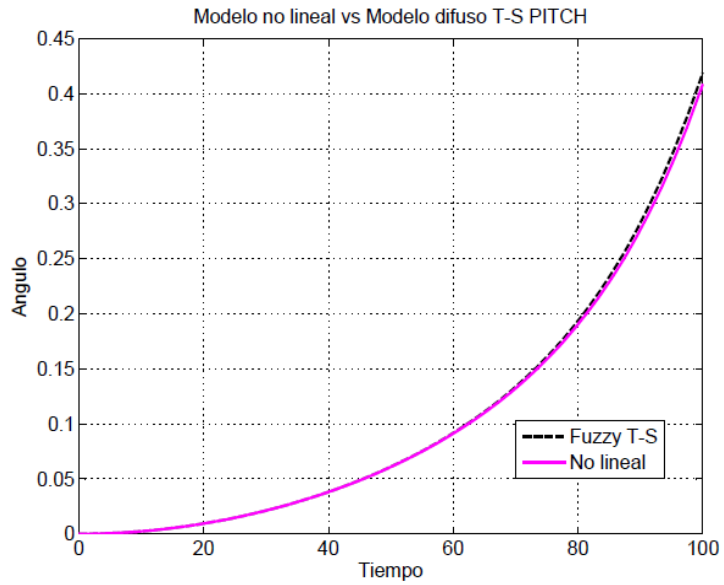
La validación del modelo no lineal descrito en la figura anterior y el modelo difuso T-S comparando los resultados en lazo abierto de las variables no lineales del sistema, es decir las velocidades angulares para (YAW, PITCH y ROLL) y sus ángulos correspondientes se muestran a continuación se muestran los resultados.



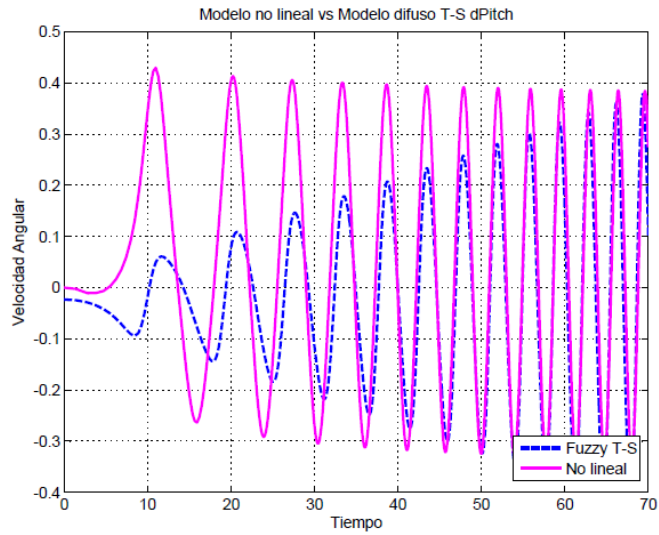
Grafica 11. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente al Angulo YAW.



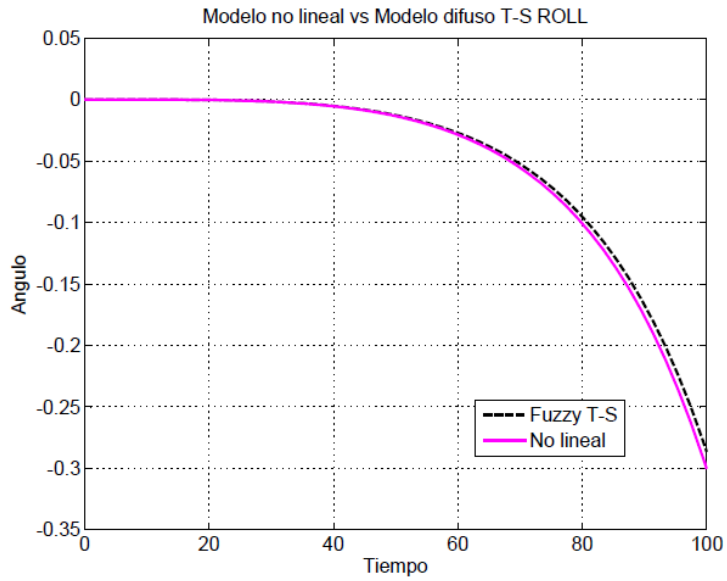
Grafica 12. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente la velocidad angular del Angulo Yaw.



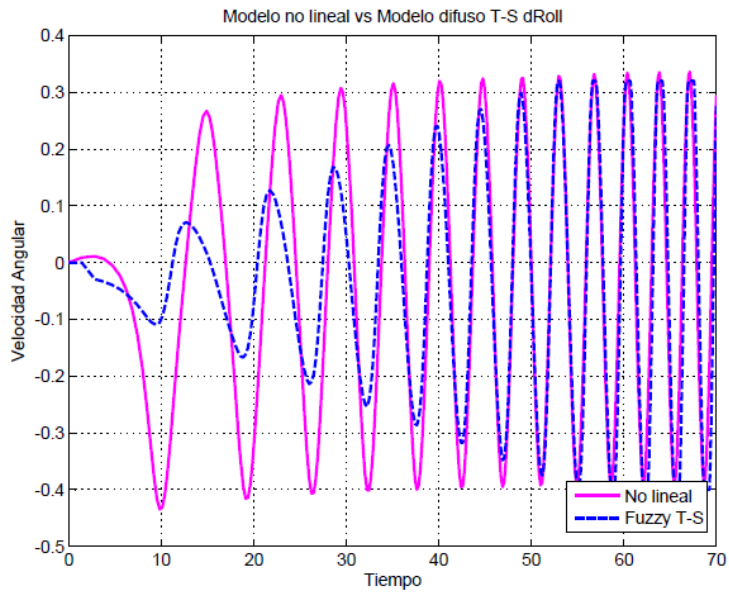
Grafica 13. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente al Angulo Pitch.



Grafica 12. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente la velocidad angular del Angulo Pitch



Grafica 14.. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente al Angulo Roll.



Grafica 15. Resultado de la variable de estado del modelo no lineal y difuso T-S en lazo abierto correspondiente la velocidad angular del Angulo Roll.

Se puede observar de la Grafica 11 a la Grafica 15 la correlación que existe entre el modelo no lineal de cada variable de estado con el modelo difuso T-S correspondiente a las mismas variables de estado, para el caso de las velocidades angulares existe una correlación total después de cierto tiempo de transición.

6.2 CONTROL DIFUSO TAKAGI-SUGENO.

El control TAKAGI-SUGENO (T-S) es considerado actualmente como una técnica de control que plantea una solución al control de los sistemas no lineales, ya que este tipo de sistemas pueden ser planteados como una serie de sub sistemas lineales con el fin de poder aplicar técnicas de control a los mismos. Una de dichas técnicas que ha ganado gran popularidad en los últimos años debido al avance de las herramientas computacionales es el control difuso T-S LMI.

Actualmente, la estrategia de control T-S es muy utilizada para controlar sistemas no lineales, al utilizar dicha estrategia se permite observar el sistema no lineal como la suma de varios sistemas lineales, permitiendo así simplificar la obtención de un modelo matemático complejo que describa el comportamiento del sistema. Con el modelo difuso T-S se permite incluir en el modelo dinámicas difíciles de modelar tradicionalmente.

Como se observó en las gráficas Grafica 11 a Grafica 15, el modelo del quadrotor es un sistema altamente no lineal, sobre todo en lo que respecta a sus velocidades angulares. En esta sección se planteará como alternativa para el control del quadrotor la metodología PDC (Compensación distribuida paralela), ya que esta técnica nos permite diseñar diferentes controladores; en este caso uno por cada eje de rotación del quadrotor, los cuales actuaran al tiempo con el fin de estabilizar el quadrotor o mantenerlo en estado hovering, de esta manera se tendrán tres sub

modelos lineales uno por cada eje de rotación (Yaw, Pitch y Roll) que a su vez incluyen las respectivas velocidades angulares asociadas a estos, y se diseñará un controlador por cada ángulo de rotación y velocidad angular asociada a esos. Esto se logra gracias al planteamiento del modelo difuso del quadrotor visto en la sección anterior.

De esta manera por cada regla establecida en el planteamiento del modelo difuso se establecerá una relación con cada regla del control establecida para el modelo, de esta manera entre el modelo y el control difuso compartirán los mismos conjuntos difusos de los antecedentes del modelo como se define en (Lin, Wang, Lee, & He, 2007, p. 181). Así, el diseño del control difuso T-S planteado mediante la metodología CDP se define en las siguientes ecuaciones:

$$R_i: \text{IF } \delta_1 \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } \delta_j \text{ is } M_{ji} \text{ Then } u(t) = F_i x(t) \quad i=1, \dots, r \quad (6-47).$$

De esta manera según (Lin et al., 2007, p. 182) el modelo difuso T-S del sistema total puede ser planteado por la ecuación:

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i} = \sum_{i=1}^r h_i F_i x(t) \quad (6-48).$$

6.2.1 Estabilidad para sistemas difusos T-S en lazo abierto.

Para calcular la estabilidad del sistema al igual que en la sección 5.1.1 se utiliza las funciones de Lyapunov cuadráticas ya que estas también son aplicables a sistemas difusos T-S si se considera el sistema en lazo abierto con $u(t) = 0$ se obtiene que:

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\delta(t)) A_i x(t) \quad (6-49).$$

De igual manera, como se planteó en la sección 5.1.1, para asegurar la estabilidad asintótica del sistema se puede lograr si se tienen en cuenta una función cuadrática de la forma $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. Si se calcula la derivada temporal y se tienen en cuenta la ecuación (6-49). se obtiene que (Tanaka & Wang, 2004b, p. 38).

$$\dot{V}(t) = x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r h_i(\delta(t)) A_i \right] x(t) < 0 \quad (6-50).$$

Y si se tienen en cuenta que $h_i > 0$ y $\sum_{i=1}^r h_i(\delta(t)) = 1$ el sistema es asintóticamente estable si existe una matriz común P tal que:

$$\begin{cases} A_i^T P + P A_i < 0 \\ P > 0 \end{cases} \quad i=1, \dots, r \quad (6-51).$$

Donde P es una matriz simétrica definida positiva $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, la ecuación anterior indica que se debe encontrar una función Lyapunov común a todos los subsistemas A_i diseñados en el modelo difuso T-S.

6.2.2 Estabilidad para sistemas difusos T-S en lazo Cerrado:

Si se tiene en cuenta el planteamiento de la ecuación (6-20). y se reemplaza en la ecuación (6-48). se describe la dinámica del sistema en lazo cerrado y estaría dado por:

$$\dot{x}(t) = h_i(\delta) \left[A_i \left(\sum_{j=1}^r h_j(\delta) F_j x(t) \right) + B_i x(t) \right] \quad (6-52).$$

Los cambios solo afectaran a la matriz A del sistema ya que en esta se presentan las no linealidades del sistema la matriz B será constante para todos los subsistemas.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\delta) h_j(\delta) [A_i F_j + B_i] x(t) \quad (6-53).$$

De esta manera y teniendo en cuenta lo expresado en (Tanaka & Wang, 2004b, p. 86) la ecuación anterior puede ser descrita como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i^2(\delta) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{j=1}^r \sum_{i>j}^r h_i(\delta) h_j(\delta) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \quad (6-54).$$

Donde para el sistema $G_{ij} = A_i F_j + B_i$

Si se define una desigualdad matricial para establecer la condición de estabilidad asintótica, se toma la definición de estabilidad en lazo abierto definida en la sección 6.2.1 y se aplica al sistema difuso T-S definido en la ecuación (6-54). se obtienen que.

$$x(t)^T = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2(\delta) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) + 2 \sum_{j=1}^r \sum_{i>j} h_i(\delta) h_j(\delta) \left[\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] \right\} x(t) < 0 \quad (6-55).$$

En (Tanaka & Wang, 2004b, p. 87) se establecen ciertos Teoremas y se comprueba su efectividad. Algunos de estos teoremas serán herramientas fundamentales a la hora de diseñar un controlador difuso para nuestro sistema.

Teorema 1: El equilibrio del sistema difuso planteado en (6-54). es asintóticamente estable si existe una matriz simétrica definida positiva P tal que :

$$\begin{aligned} p &> 0 \\ G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0 \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &\leq 0, \quad j > i \end{aligned} \quad (6-56).$$

Donde la definición anterior se cumple si y solo si $h_i(\delta) \cap h_j(\delta) \neq 0, \forall t$.

Si se reescribe la ecuación anterior de forma lineal basta con multiplicar por P^{-1} en ambos lados de la desigualdad, definiendo así una nueva variable en ambos lados de la desigualdad precisando una nueva variable $W = p^{-1}$.

Teorema 2: el sistema difuso T-S planteado en la ecuación (6-54). es asintóticamente estable para algunas ganancias de realimentación F_i si existe una matriz simétrica definida positiva W tal que:

$$\begin{aligned} A_i W + W A_i^T + B_i Y_i + Y_i^T B_i^T &< 0, \quad i = 1, \dots, r \\ A_i W + W A_i^T + A_j W + W A_j^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + B_j Y_i + Y_i^T B_j^T &\leq 0 \quad i < j < r \end{aligned} \quad (6-57).$$

Siendo $Y_i = F_i W$ de modo que para $W > 0$, se tiene que $F_i = Y_i W^{-1}$

6.3 Formulaciones de diseño LMI para el Control difuso T-S.

En este se plantean restricciones LMI al controlador Difuso con el fin de mejorar la dinámica del quadrotor. Las condiciones de diseño que se formulan a través de las restricciones LMI son: garantizar una tasa de decaimiento, limitación en el esfuerzo de control y rechazo a perturbaciones.

6.3.1 Formulación LMI para el diseño de control H^∞ .

Si se considera el sistema difuso T-S incluyendo perturbaciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(A_i x(t) + B_i u(t) + B_i w(t)) \\ z(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\delta)(C_i x(t) + D_i u(t) + D_i w(t)) \end{aligned} \quad (6-58).$$

Donde al igual que lo definido en la sección 5.2 donde el mínimo nivel de atenuación se puede lograr si:

$$\frac{\sup \|z\|_{L2}}{\|w(t)\|_{L2} \neq 0} < \gamma$$

De igual manera se define un teorema el cual garantizará una máxima norma H^∞ de la relación Salida Perturbaciones.

Teorema 3: El sistema difuso planteado en (6-54). es asintóticamente estable si para algunas ganancias de realimentación F_i y $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$ si existe una matriz simétrica definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \{ A_i W + W A_i^T + A_j W + W A_j^T + \} \right) & \frac{B w_i + B w_j}{2} & W \left(\frac{(C z_i + C z_j)^T}{2} \right) \\ \frac{(B w_i + B w_j)^T}{2} & -\gamma I I & 0 \\ \left(\frac{C z_i + C z_j}{2} \right) W & 0 & -I I \end{bmatrix} < 0 \quad (6-59).$$

Donde $W = P^{-1} y F i = Y i W^{-1}$

6.3.2 Formulación LMI para la tasa de decaimiento.

En el diseño de controladores difuso tipo T-S se debe tener en cuenta el comportamiento transitorio solo la tasa de decaimiento, como es conocido este factor se encuentra directamente relacionado con la velocidad de respuesta del sistema que para el caso del quadrotor es fundamental por considerarse una planta rápida debido a dinámica de sus actuadores.

El propósito de esta formulación LMI es encontrar el mayor α tal que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0 \quad (6-60).$$

De esta manera, una condición suficiente que cumpla con el requerimiento de la ecuación anterior para todas las trayectorias será:

$$\dot{V}(x) < 2 \alpha V(x) \quad (6-61).$$

El Teorema que se define a continuación se conoce como una representación especial de la ubicación de polos sobre el sistema en lazo cerrado dentro de la región $S(\alpha)$. A continuación, se muestra una representación gráfica de este caso:

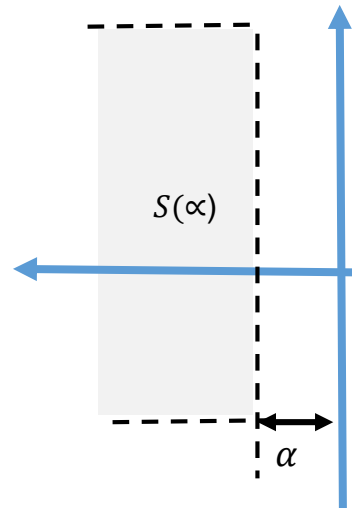


Figura 30. Región de Ubicación de Polos $S(\alpha)$.

Teorema 4: Los polos en lazo cerrado del sistema difuso planteado en (6-54), se ubican en la región $S(\alpha)$ si existe una matriz simétrica definida positiva W tal que:

$$\begin{aligned}
 & A_i W + W A_i^T + B_i Y_i + Y_i^T B_i^T + 2 \alpha W < 0, \quad i = 1, \dots, r \\
 & A_i W + W A_i^T + A_j W + W A_j^T + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + B_j Y_i + Y_i^T B_j^T + 4 \alpha W \leq 0 \quad i < j < r \\
 & \text{Siendo } F_i = Y_i W^{-1}
 \end{aligned} \tag{6-62}$$

6.3.3 Formulación LMI para la Restricción en la Entrada de Control.

Por último, se define un teorema el cual tiene en cuenta la limitación del sistema; en este caso el quadrotor frente a las señales de control que inciden sobre este. Si bien este problema es conocido dentro del campo de los sistemas automáticos, no es trivial de solucionar ya que un mal cálculo o restricción sobre esta causaría inestabilidad en el sistema.

Teorema 5: Asumiendo que las condiciones iniciales del sistema difuso planteado en (6-54). son $x(0)$ la restricción de acotamiento en el esfuerzo de control $\|u(t)\|_2 < \mu$ es aplicada en todo tiempo $t \geq 0$ si existe una matriz simétrica definida positiva W tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} W & Yi^T \\ Yi & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6-63).$$

Donde $W = P^{-1}$ y $Yi = FiW$.

6.4 Simulación de Controlador Difuso T-S LMI Robusto para Roll, Pitch y Yaw:

Para el diseño del controlador Robusto difuso T-S de deben resolver las desigualdades lineales matriciales planteadas en las ecuaciones (6-59). , (6-62). y (6-63). Con el fin de minimizar y optimizar el controlador se pretende encontrar los W y Yi que minimicen las perturbaciones en el sistema para que garantice las limitaciones acerca de la tasa de decaimiento y reduzca el esfuerzo en el control.

Con la solución de este algoritmo de control o con la solución de las respectivas LMI se encontrarán las ganancias Fi o la combinación de estas que mejor estabilice el sistema o subsistemas en los cuales se dividió el modelo del quadrotor.

En el caso del quadrotor, se controlaron los ángulos de rotación, y a su vez la velocidad con la que giran los mismos. Se diseñó una alternativa para el control de este tipo de vehículos a partir del modelo difuso de los mismos, teniendo en cuenta los parámetros físicos del mismo los cuales fueron presentados en la sección (3-11).

A cada uno de los subsistemas encontrados a partir de modelo difuso T-S se le adicionó un término integral con el fin de eliminar el error de estado

estacionario en todos los ángulos de navegación. De esta manera, el sistema difuso completo para el quadrotor se define en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\check{x}(t) &= A\check{x}(t) + Bw\check{W}(t) + BuU(\delta(t))\check{d}(t) \\ \check{z}(t) &= Cz\check{x}(t) + Dzw\check{W}(t) + Dzu\check{d}(t)\end{aligned}\quad (6-64).$$

Donde:

$$\check{x}(t) = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \dot{\emptyset} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \check{w}(t) = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \dot{\emptyset} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \check{z} = [\emptyset \quad \theta \quad \psi] \quad \delta(t) = \begin{bmatrix} \dot{\emptyset} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\psi} * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} & 0 & \dot{\theta} * \frac{(Iy - Iz)}{Ix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\psi} * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} & 0 & 0 & 0 & \dot{\emptyset} * \frac{(Ix - Iz)}{Iy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dot{\theta} * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} & 0 & \dot{\emptyset} * \frac{(Iy - Ix)}{Iz} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Bu = \begin{bmatrix} \frac{U2}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U3}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U4}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

$$Bw = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{jp}{I_x} * \Omega \\ 0 \\ \frac{jp}{I_y} * \Omega \\ 0 \\ \frac{jp}{I_z} * \Omega \end{bmatrix}$$

$$Cz = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad D_{yw} = [0] \quad D_{yd} = [0]$$

Como se planteó al inicio de esta sección, se diseñó un controlador difuso para cada ángulo o eje de rotación, teniendo en cuenta el planteamiento de restricciones LMI de tal forma que se pueda encontrar unas ganancias F_i para cada variable de estado incluyendo la variable integral que minimice la norma H_∞ , satisfaciendo el esfuerzo de control y la tasa de decaimiento para todos los submodelos lineales planteados mediante el modelo difuso T-S. Los valores de α y μ seleccionados para el controlador son $\alpha = 4s^{-1}$ y $\mu = 6$, es decir que el sistema tendrá un tiempo máximo de establecimiento de 4α s, de igual manera el valor umbral de saturación de la señal de control, corresponde a $\mu = 6$.

Si se resuelve el algoritmo de optimización planteado al inicio de esta subsección el cual consiste en desarrollar las restricciones LMI para cada una de los ángulos de rotación y las velocidades angulares asociados a estos, se desarrollaron

las restricciones LMI con el toolbox de Matlab (Pascal Gahinet et al., 1995, p. 162) para el desarrollo de este tipo de desigualdades matriciales.

De esta manera, se obtienen las ganancias de realimentación para cada uno de los controladores difusos planteados teniendo en cuenta las restricciones LMI ganancias de control difuso T-S $\{F_1, \dots, F_r\}$:

Las ganancias calculadas para el controlador LMI difuso T-S para el ángulo Yaw son:

$$F_1 = [32.4625 \quad 0.2128 \quad 9.2076]$$

$$F_2 = [40.0440 \quad 0.3865 \quad 11.3539]$$

$$F_3 = [48.1779 \quad 0.4759 \quad 13.6463]$$

$$F_4 = [113.4304 \quad 1.2961 \quad 32.0011]$$

Las ganancias calculadas para el controlador LMI difuso T-S para el ángulo Pitch son:

$$F_5 = [27.9511 \quad 0.2039 \quad 7.0310]$$

$$F_6 = [32.8532 \quad 0.2801 \quad 8.2594]$$

$$F_7 = [34.1380 \quad 0.2900 \quad 8.5791]$$

$$F_8 = [65.1500 \quad 0.8164 \quad 16.2951]$$

Las ganancias calculadas para el controlador LMI difuso T-S para el ángulo Roll son:

$$F_9 = [37.4608 \quad 0.1917 \quad 13.6693]$$

$$F_{10} = [36.3478 \quad 0.2367 \quad 13.2763]$$

$$F11 = [37.0744 \quad 0.2252 \quad 13.5397]$$

$$F12 = [65.4798 \quad 0.6350 \quad 23.8342]$$

La ley de control difuso T-S incluyendo restricciones LMI para cada uno de los ángulos planteados estará definida por (Tanaka & Wang, 2004b, p. 36)

$$uYaw(t) = h1F1 + h2F2 + h3F3 + h4F4 \quad (6-65).$$

$$uPitch(t) = h5F5 + h6F6 + h7F7 + h8F8 \quad (6-66).$$

$$uRoll(t) = h9F9 + h10F10 + h11F11 + h12F12 \quad (6-67).$$

6.4.1 Modelo Simulink.

A continuación, se presenta el esquemático en simulink para cada uno de los controladores difusos T-S con restricciones LMI y sus resultados correspondientes. A su vez se presenta la comparación directa con el diseño del controlador robusto LMI planteado en la sección 5 de este documento, además las simulaciones y discusión de resultado acerca de los resultados de ambas estrategias de control aplicadas para regular la actitud de un vehículo aéreo no tripulado tipo Quadrotor.

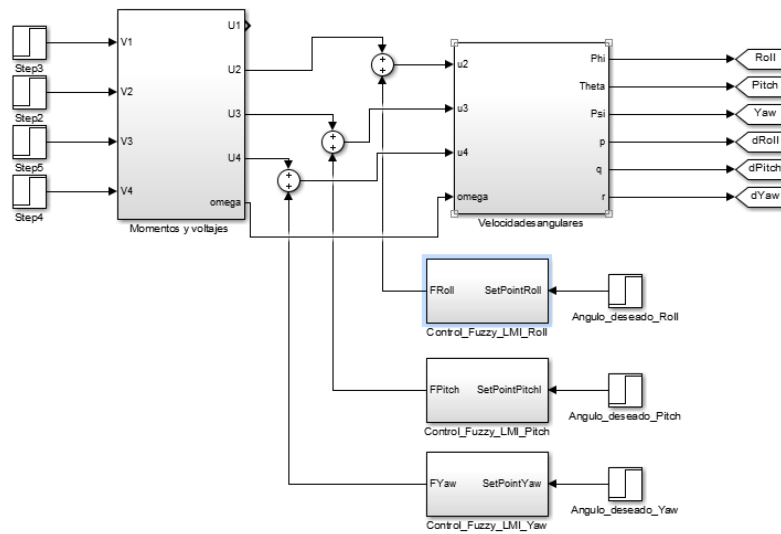


Figura 31. Implementación controladores difusos T-S LMI (Roll, Pitch y YAW) en Simulink.

Donde cada uno de los bloques, control difuso LMI Roll, control difuso LMI Pitch y control difuso LMI Yaw están compuestos en su interior por una función que calcula las mejores ganancias F_i de acuerdo al valor de las entradas o variables de estado para cada ángulo, teniendo en cuenta las funciones de membresía definidas en la ecuación (6-11).. A continuación, se muestra el esquemático para el ángulo Roll.

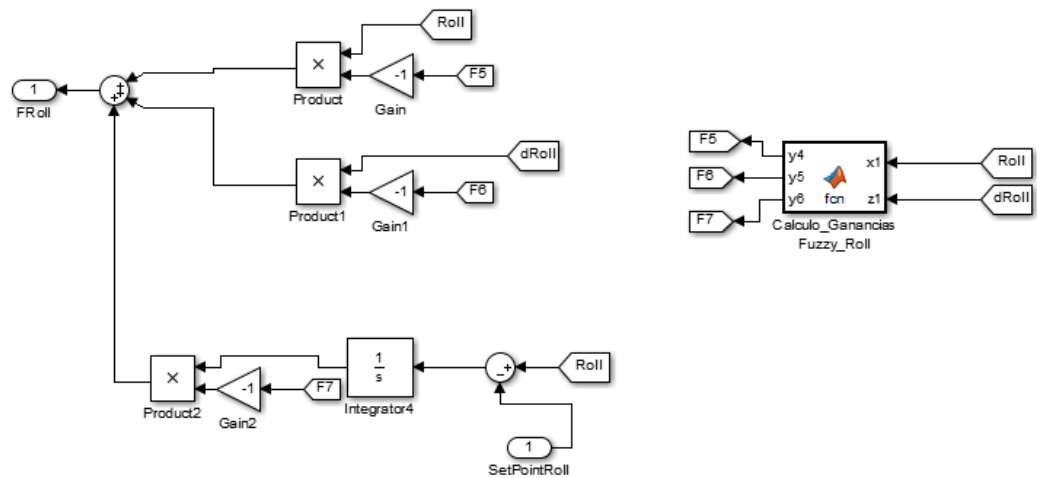
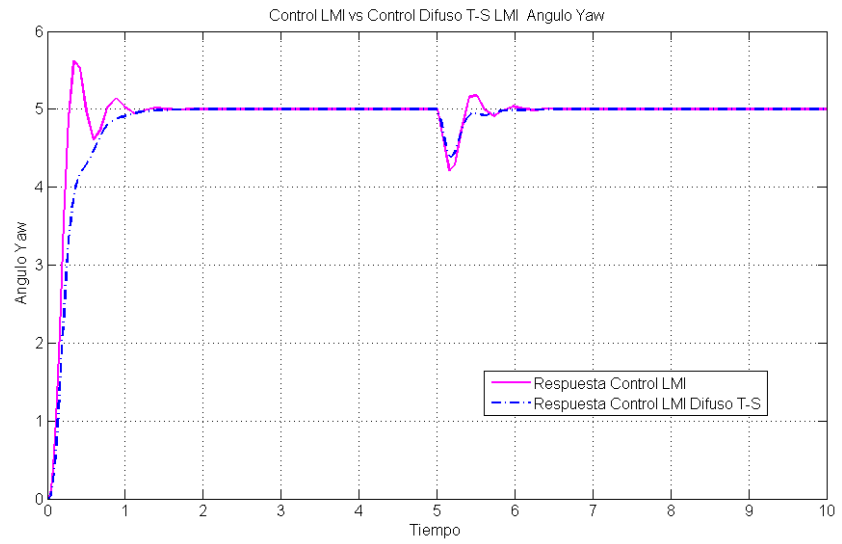


Figura 32. Interior de bloque control difuso LMI Roll y definición del bloque o función para el cálculo de las ganancias F_i dependiendo el valor de las variables de estado en la entrada.

De acuerdo a la figura anterior, se observa que el bloque definido como cálculo de ganancias difusas Roll posee en su interior una función que itera de acuerdo al valor que tomen las variables de estado Roll y dRoll con las funciones de pertenencia definidas en la ecuación (6-11), hallando de esta manera las ganancias más óptimas que se adapten al sistema siempre y cuando estén contempladas para los vectores ganancias F definidas para este ángulo, es decir las ganancias F_9, \dots, F_{12} . Cabe resaltar que para los otros dos ejes de rotación Yaw y Pitch se sugirió el mismo algoritmo; sin embargo, se cambió el valor de los vectores de las ganancias F según lo arrojado como resultado al resolver las LMI para cada uno de estos, y los mínimos y máximos de las funciones de pertenencia.

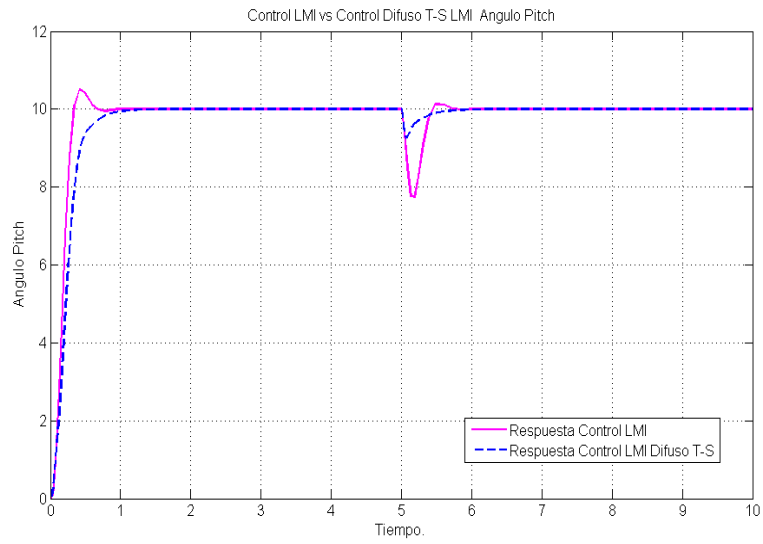
De esta manera se obtuvieron los siguientes resultados en Simulación:

- Para el ángulo de Rotación Yaw



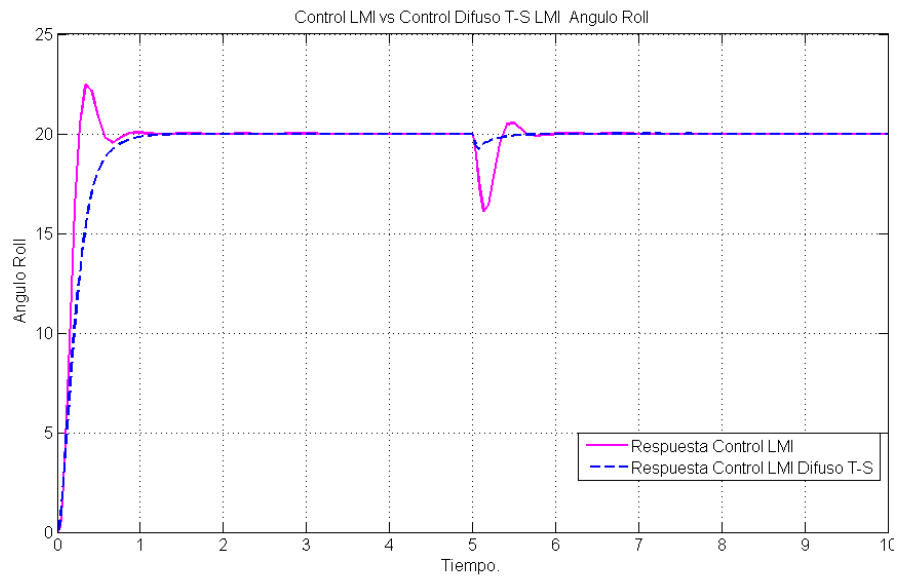
Grafica 16..Respuesta del ángulo Yaw Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI

- Para el ángulo de Rotación Pitch



Grafica 17.Respuesta del ángulo Pitch Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI

- Para el ángulo de Rotación Roll.



Grafica 18. Respuesta del ángulo Roll Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI

La simulación consistió en realizar la implementación de la estrategia de control difusa T-S planteada en este capítulo para cada uno de los ejes de manera simultánea, ya que durante el proceso se observó la incidencia que se tienen al implementar un controlador entre los ejes. Para esto, la técnica de control difuso T-S presenta ciertas ventajas sobre la estrategia de control robusta LMI ya que cuando el sistema se ve afectado por cambios en sus parámetros iniciales, es necesario realizar la ponderación entre varios conjuntos de vectores de ganancias con el fin de garantizar la estabilidad del sistema en sus tres ejes de rotación, esto se debe ya que este es un sistema extremadamente sensible a los cambios de su dinámica y perturbaciones (en este caso simuladas).

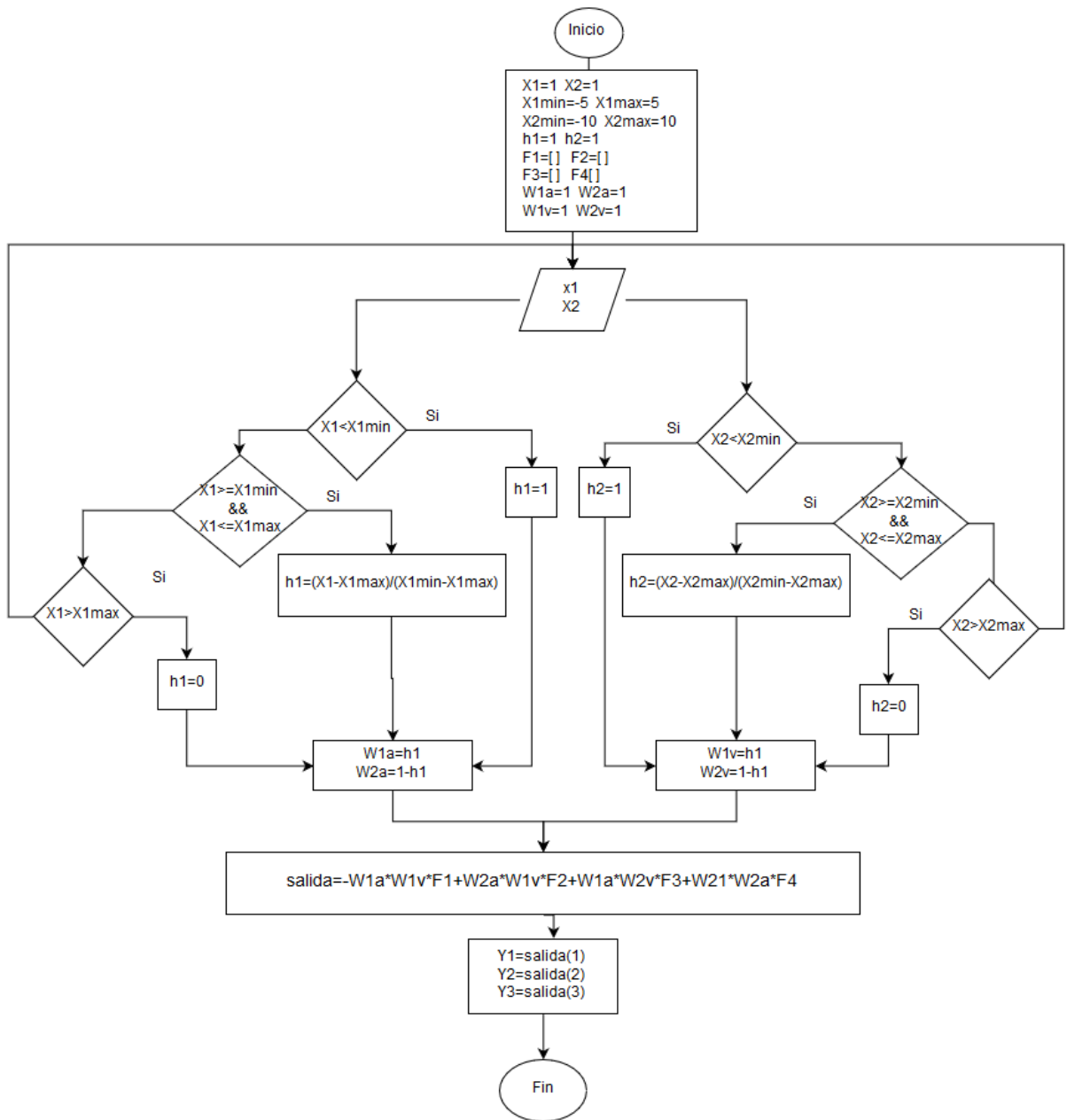
En la simulación el setpoint establecido para los ángulos fue: YAW=5 grados Pitch = 10 grados y Roll=20 grados. Se escogieron valores angulares los cuales no son tan usuales para el quadrotor puesto que no es común que gire tantos grados a la vez en sus tres ejes de rotación; sin embargo, esto sirve para comprobar la robustez de ambas estrategias de control en simulación.

Según la Grafica 176, Grafica 17 y Grafica 18 se puede observar en las dos estrategias de control (control robusto LMI y Control Difuso T-S LMI) una respuesta adecuada en estado estacionario, ya que en los tres ángulos de rotación no se presenta error de estado estacionario. Para el caso de la respuesta transitoria del sistema se observa como la estrategia de control robusta LMI responde más rápido a este cambio; no obstante, se observa a la vez como se presentan sobrepicos en las gráficas lo cual no es óptimo para estabilizar el quadrotor. Por otro lado, la estrategia de control Difuso T-S LMI disminuye notablemente el sobre pico para cada uno de los ángulos sin afectar el tiempo de respuesta presente en cada uno de los ángulos, esto a su vez se debe a la ponderación a través de los vectores de realimentación de velocidades angulares ya que permite al sistema estar bajo área de operación delimitado por los vectores de ganancias.

En la Grafica 176, Grafica 17 y Grafica 18 se simuló una perturbación en cada una de las entradas del sistema es decir en (u_2 , u_3 y u_4), con el fin de comprobar la respuesta de las estrategias de control simuladas frente a perturbaciones. De igual manera, se presentó la misma respuesta que en el caso de la respuesta transitoria del sistema, ya que la estrategia de control difuso T-S LMI presentó mejores resultados al atenuar estas perturbaciones de una manera eficiente, a diferencia de control LMI que corrige el cambio provocado por la perturbación, pero genera a su vez grandes sobre picos al momento de realizarla.

6.5 Implementación y Discusión de Resultados.

Al igual que en la sección 5.7 la implementación se realizó utilizando el mismo quadrotor y con la misma tarjeta de control; sin embargo, el algoritmo de control cambia puesto que en este controlador existen un conjunto de vectores de ganancias sobre las cuales el sistema decide cuál utilizar dependiendo la región en donde se encuentre, operando el algoritmo definido del cálculo de ganancias descrito anteriormente. Dicha función itera de acuerdo al valor que tomen las variables de estado de cada uno de los ángulos con las funciones de pertenencia definidas para cada uno de estos, hallando de esta manera las ganancias más óptimas que se adapten al sistema siempre y cuando estén contempladas para los vectores ganancias F definidas para cada ángulo, es decir las ganancias F_1, \dots, F_{16} . Cabe resaltar que para los todos los ejes de rotación se implementó el mismo algoritmo; sin embargo, se cambió el valor de los vectores de las ganancias F según lo arrojado como resultado al resolver el algoritmo de optimización LMI para cada uno de estos, y los mínimos y máximos de las funciones de pertenencia. A continuación, se presenta el algoritmo general de implementación.



Grafica 19. Algoritmo general de implementación controlador difuso T-S quadrotor.

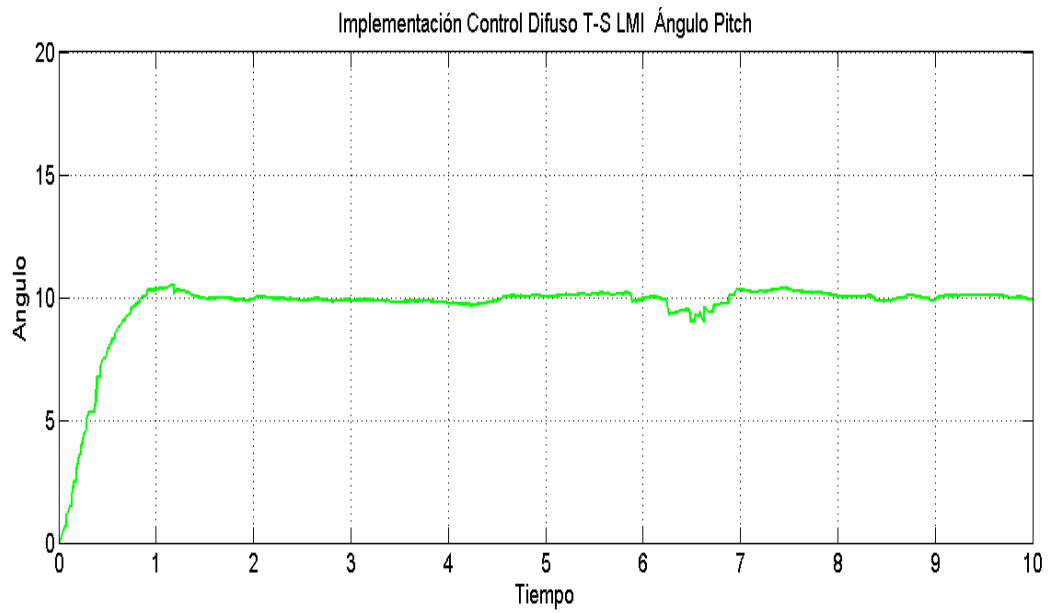
El objetivo del algoritmo es iterar de acuerdo al valor de las variables de estado las funciones de pertenencia multiplicadas por los vectores de ganancias mostrados en la sección. 6.4 de esta manera calcular las mejores ganancias para

el sistema, es decir el controlador está acotado por una región en donde se garantiza su óptimo funcionamiento.

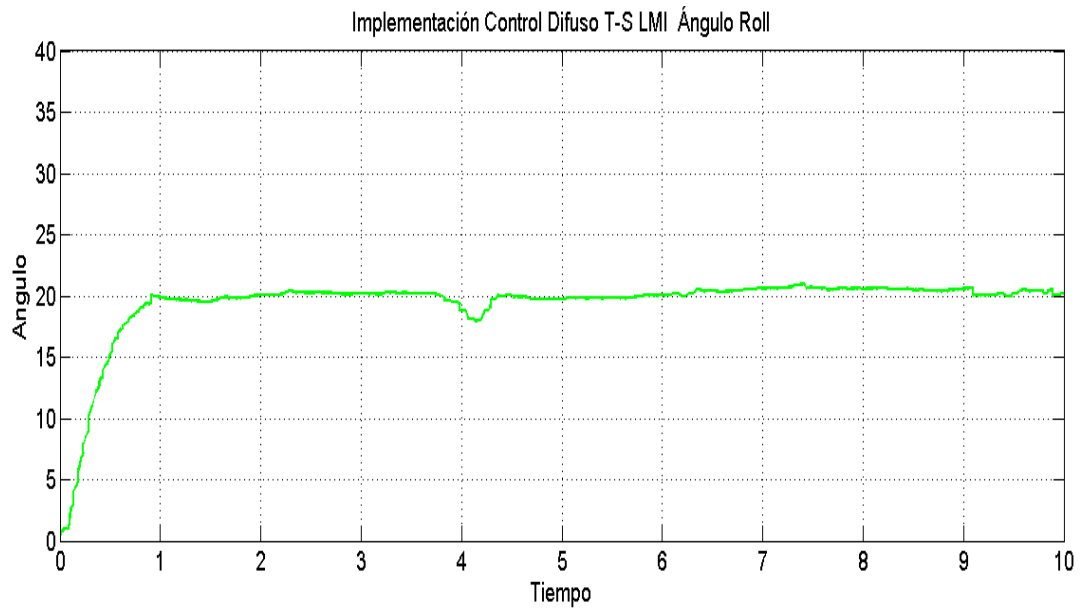
De igual manera, para graficar la respuesta del sistema se desarrolló una aplicación en Processing la cual permite obtener el comportamiento de las variables de estado, en este caso los ángulos de rotación, mientras el sistema está en ejecución. Estos datos son transmitidos a la computadora vía puerto serial permitiendo así el adecuado ajuste de las ganancias calculadas por el controlador difuso T-S (Véase Anexo 4, Anexo 5 Y Anexo 6). Esta aplicación a su vez permite capturar los datos obtenidos durante la ejecución de la prueba del controlador y de esta manera, los resultados se graficaron y se muestran a continuación.



Grafica 20. Resultados de implementación física de controlador Difuso T-S LMI Angulo Yaw.



Grafica 21. Resultados de implementación física de controlador Difuso T-S LMI Angulo Pitch.



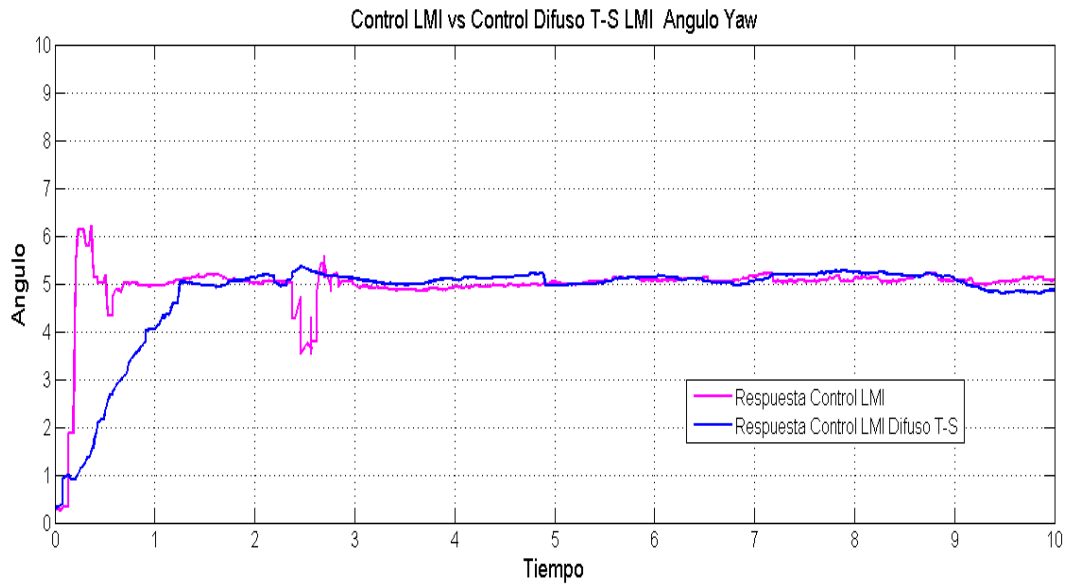
Grafica 22. Resultados de implementación física de controlador Difuso T-S LMI Angulo Roll.

Según los resultados obtenidos al momento de implementar el controlador, se observa como existe correlación entre la simulación planteada en la Grafica 16, Grafica 17 y Grafica 18, y los datos obtenidos mediante la experimentación mostrados en la Grafica 20, Grafica 21 y Grafica 22. En lo que respecta a la respuesta transitoria del sistema, si se observa la Grafica 20 en donde se implementó el controlador difuso LMI para el ángulo yaw, la respuesta es similar a la de la simulación, pero no exacta; esto se debe a que en el momento de encender los 4 rotores para controlar este movimiento ocurrió cierta interferencia en la toma de datos debido al colchón de aire que producen al momento de tener los cuatro rotores encendidos. Con respecto a la experimentación de los ángulos Pitch y Roll (véase Grafica 21 y Grafica 22), se ve una relación similar con lo que se observa en las simulaciones de las Grafica 17 y Grafica 18 teniendo en cuenta las mismas características en simulación planteadas. Cabe resaltar que el tiempo de la simulación y la experimentación en donde se aplica la perturbación no coincide debido a que es complejo calcular el mismo tiempo en el sistema físico; sin embargo, se observa que ambas señales presentan una forma de onda muy similar para ambos casos.

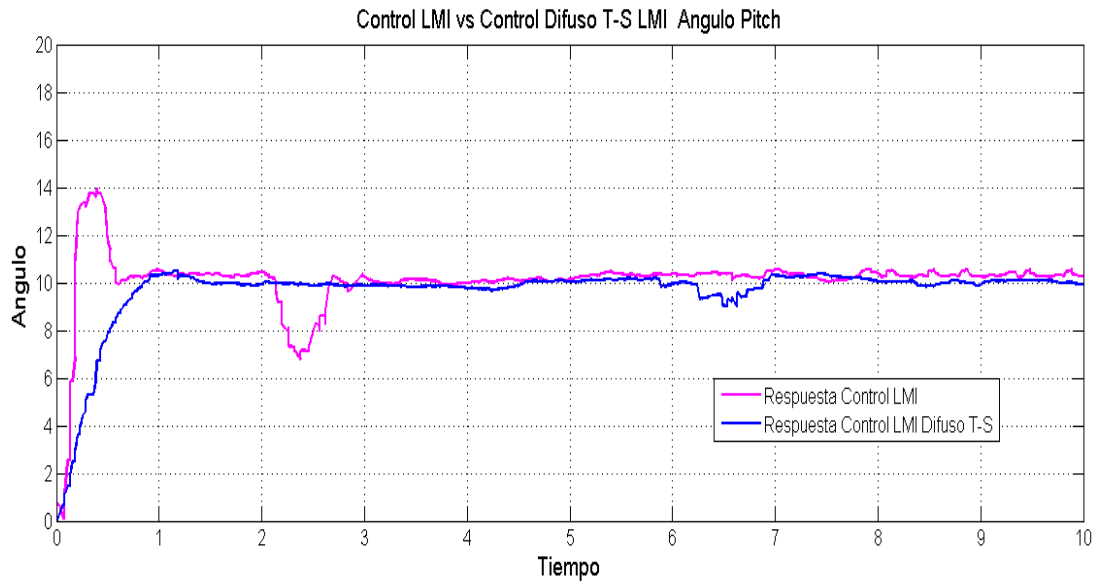
Capítulo 7.

7 DISCUSIÓN Y RESULTADOS.

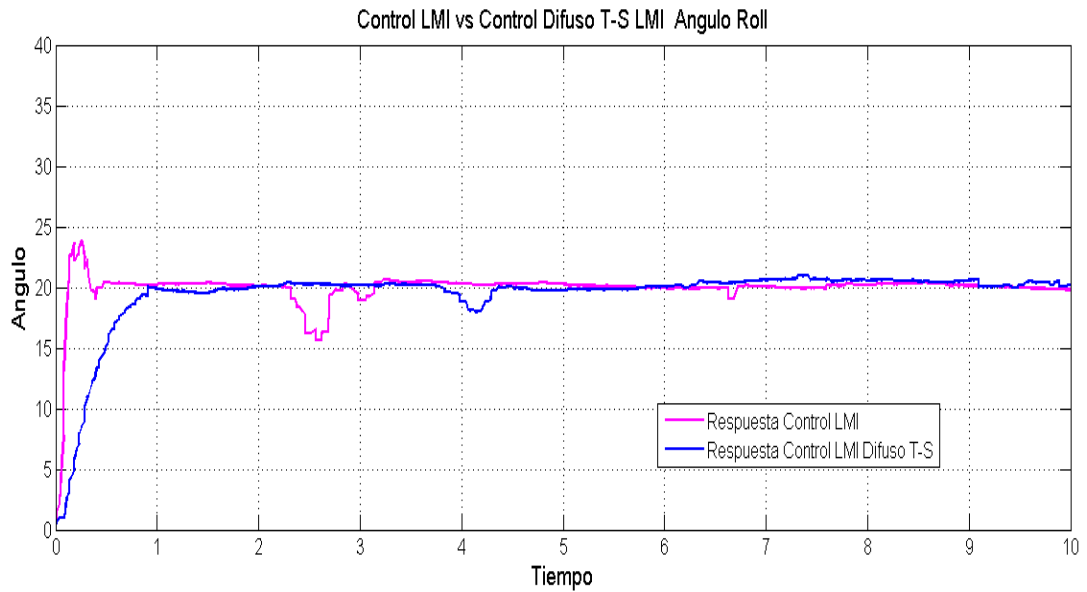
Los datos experimentales son la herramienta con la cual se comparan las dos estrategias de control planteadas en esta investigación, si es bien conocido que la simulación nos da un acercamiento al comportamiento real del sistema y que con esta se pueden diseñar estrategias de control, se observa que en la práctica influyen diferentes aspectos que no son fáciles de simular y que afectan la dinámica real del sistema. Es por esto que los datos obtenidos del sistema físico nos entregan una visión más real del comportamiento del sistema ya que esto nos proporcionan información como pérdida de ruido en los datos censados, incidencia del tiempo de muestreo y demás variables que son importantes a tener en cuenta a la hora de implementar estrategias de control, sobre todo en este tipo de quadrotores que por la dinámica de sus actuadores generan ruido en transmisión de las señales correspondientes a los ángulos de rotación de las mismas, enviadas a la computadora para su respectiva visualización e interpretación como se muestra a continuación.



Grafica 23. Respuesta del ángulo Yaw Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI Implementado.



Grafica 24. Respuesta del ángulo Pitch Frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI Implementado



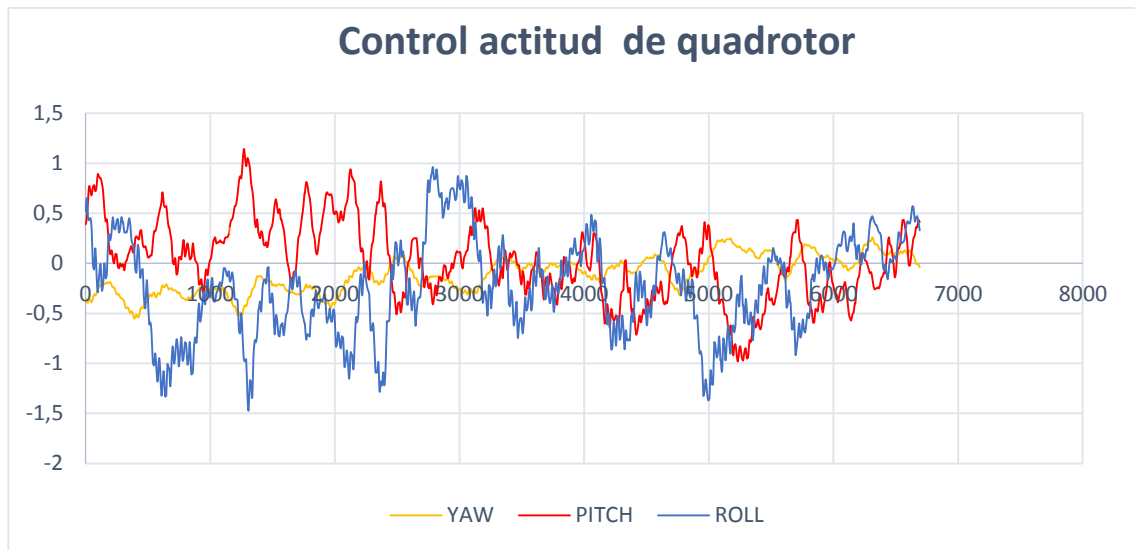
Grafica 25. Respuesta del ángulo Roll frente a dos estrategias de control LMI robusta y control difuso T-S LMI Implementado.

Una vez diseñados los controladores robustos LMI y Difusos LMI T-S para controlar la actitud del quadrotor se presentan ciertas ventajas y desventajas al momento de implementar ambas estrategias de control, sobre todo en este tipo de aeronaves. Si se comparan los resultados obtenidos para cada ángulo de rotación se observa que la estrategia de control Difuso T-S basada en LMI presenta mejor comportamiento dinámico en el sistema que la estrategia de control Robusta LMI, sobre todo a lo que respecta a sobre picos de la señal en el estado transitorio del sistema debido a que el quadrotor es una planta rápida que idealmente está suspendida en el aire. Un sobre pico de dos o más grados en cada ángulo generaría un desplazamiento no deseado del vehículo y con esto posibles choques en su ambiente de vuelo; otra ventaja es que el rechazo a perturbaciones externas es notorio en este controlador, aunque las perturbaciones realizadas

experimentalmente son fuertes, el comportamiento del sistema es satisfactorio frente a estas, lo que ratifica la robustez de esta estrategia de control.

Por último y quizás la ventaja más importante, es el modelo planteado puesto que al modelar el sistema a través de lógica difusa, este permite sub dividir el sistema en sistemas lineales lo cual permite incluir aspectos no lineales del modelo matemático en el sistema y así diseñar una estrategia de control teniendo en cuenta las mismas, mientras que en el modelo robusto LMI fue necesario realizar una serie de simplificaciones y descarte de las variables que hacen el sistema no lineal para poder diseñar la estrategia de control. Por otro lado, la estrategia de control robusta LMI presenta ciertas ventajas frente a la estrategia de Control Difuso T-S basado en LMI, una de estas es el tiempo de respuesta en el régimen transitorio, aunque genera sobrepicos al momento de implementar la misma. Otra de las ventajas que presenta, es su facilidad de implementación comparada con la implementación del controlador Difuso T-S LMI; sin embargo, hay que realizar un ajuste de ganancias para lograr un mejor rendimiento.

A continuación, se presenta el control difuso implementado para controlar los tres ejes de rotación.



Grafica 26. Control Estabilidad Medido en los tres ejes de Rotación.

Se puede observar en la gráfica, como al implementar el controlador difuso TS basado en LMI, el sistema se vuelve más estable reduciendo el error y la estabilidad del quadrotor. Mientras el error en el banco de pruebas estaba entre -3 a 3, paso a estar entre -1.5 y 1.5 grados en vuelo hovering. Para el caso de todos los ángulos, esto se debe a que el controlador Difuso T-S se anticipa corrigiendo el error de las variables de estado de velocidades angulares antes de que este afecte los ángulos de rotación; también se puede observar en los videos de anexo como se puede incrementar la velocidad de los rotores sin que haya afectación en la estabilidad del quadrotor.

Capítulo 8.

8 CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

En esta investigación se presentaron dos formas de modelar el vehículo aéreo no tripulado tipo quadrotor: una el modelo matemático presentado en el capítulo 3 en donde se modela el sistema por medio de las ecuaciones de Euler LaGrange. En esta sección se entrega un aporte en cuanto a la explicación primordial del funcionamiento del vuelo de quadrotor llegando al modelo matemático del sistema a través de la representación de ecuaciones de estado; en el capítulo 4 se valida el modelo a través del acondicionamiento de los sensores necesarios para la adquisición de las variables de estado del vehículo quadrotor real; esto permitió validar este modelo través de la metodología descrita en la sección 4.2, en la cual se constató la correlación entre los datos de la simulación en Matlab con los datos adquiridos por la planta real para cada uno de los ejes de rotación del quadrotor.

Como segunda forma de modelado del sistema quadrotor, se presentó el modelo a través de lógica difusa, más específicamente utilizando el método Takagi Sugeno, el cual se construyó con la metodología propuesta por (Torres-Pinzón & Leyva, 2009). De esta manera, se logró modelar el quadrotor como una serie de sub modelos lineales construidos con base a reglas difusas entregadas a partir del modelo matemático y la experiencia del operador del vehículo quadrotor. Los resultados al momento de validar este modelo del quadrotor fueron satisfactorios puesto que al comparar los resultados del modelo difuso T-S diseñado con los datos del modelo matemático no lineal existe una relación en su comportamiento a través del tiempo, en sus magnitudes de velocidad y magnitudes angulares (véase Grafica

11 a Grafica 15). De esta manera, se comprobó el comportamiento de ambos modelos bajo los mismos parámetros iniciales en la simulación, así se obtuvieron dos modelos confiables que sirvieron como base para diseñar e implementar estrategias de control que permitieron garantizar la estabilidad del quadrotor.

Para la implementación de los controladores se utilizó el dron descrito en las secciones 2.4 y 4, éste quadrotor tiene múltiples ventajas al momento de implementar estrategias de control, como su plataforma de acceso libre en la tarjeta de vuelo y en los controladores de velocidad de los motores, ya que estos permiten ser programados fácilmente de acuerdo a los requerimientos del diseño. Esto permite que sea una plataforma apta para la experimentación en este tipo de vehículos y sea indicada para cuando se está empezando a programar estos vehículos; esto se debe a que sus motores no generan tanto torque y el material de sus hélices permiten el riesgo de accidente al momento de poner en marcha el vehículo disminuya. Una desventaja que presenta este tipo de vehículos es el material en el que está construido su marco puesto que es de baquela la cual se quiebra fácilmente al momento de sufrir choques; sin embargo, esta es fácil de reparar, por esta razón se construyeron bancos de prueba y se controló las experimentaciones con el fin de evitar daños en el quadrotor.

En esta investigación se propuso la utilización de dos estrategias de control con el fin de asegurar la actitud o estado en hovering del quadrotor y así garantizar la dinámica en sus tres ejes de rotación, en presencia de perturbaciones. Para el caso de ambas estrategias de control, se utilizó la metodología por realimentación de estados, ambas basadas en desigualdades matriciales lineales. De igual forma, se tuvieron en cuenta requerimientos de diseño tales como especificaciones transitorias, tiempo de establecimiento, sobre pico máximo, perturbaciones externas, nivel de rechazo de perturbaciones, estabilidad robusta y error de estado estacionario.

En el capítulo 5 de esta investigación, se diseñó e implementó un controlador robusto basado en LMI's para regular la actitud de un quadrotor; se realizó una aproximación a la formulación de restricciones a través de desigualdades matriciales lineales y representación de incertidumbres paramétricas del sistema para el caso de la entrada. Se diseñó el controlador robusto para cada uno de los ejes de rotación teniendo en cuenta cada uno de estos aspectos fundamentales en la dinámica de sistemas automáticos como lo son: rechazo a perturbaciones externas, localización de polos en lazo cerrado y limitación en el esfuerzo de control. Cabe resaltar que esta estrategia de control es solo aplicable a sistemas lineales o con estabilidad en rango pequeño de operación; para esto fue necesario realizar al modelo no lineal planteado una serie de aproximaciones acercando nuestro modelo a un modelo lineal (véase sección 5.5) lo cual es un gran aporte si se quiere implementar estrategias de control lineal en este tipo de sistemas.

De igual manera, en este capítulo se presentó la metodología de diseño utilizando toolbox de Matlab LMI e implementación de este controlador en el quadrotor; se constató su validez mediante la comparación de resultados obtenidos a través de la simulación de Matlab (véase Gráfica 5, Gráfica 6 y Gráfica 7), y los resultados obtenidos en el sistema físico (véase Gráfica 8, Gráfica 9 y Gráfica 10). En ambos casos se obtuvo una respuesta satisfactoria y similar para la regulación de la actitud del quadrotor; sin embargo, esta estrategia presentó algunos inconvenientes en cuanto a sobre paso máximo en la respuesta transitoria del sistema y el rechazo a perturbaciones en cada ángulo de rotación puesto que presentó valores demasiado altos para este tipo de sistema. Al igual que en el diseño de controladores clásicos, se tuvo en cuenta el valor de las ganancias encontradas ya que no todas podrán ser implementadas, y se constató que esta estrategia de control permite mejorar el comportamiento dinámico del sistema incluyendo incertidumbres paramétricas.

En el capítulo 6 se diseñó e implementó un controlador difuso LMI para la regulación del quadrotor teniendo en cuenta requerimientos de diseño tales como: rechazo a perturbaciones, localización de polos en lazo cerrado y limitación en el esfuerzo de control en un vehículo quadrotor que fue considerado como un sistema MIMO garantizando así la estabilidad en cada uno de sus ejes o ángulos de rotación respecto a la dinámica de los cuatro rotores. Igualmente, se presentó como se diseñó el controlador a partir del modelo difuso modelo Takagi-Sugeno del vehículo quadrotor visto en la sección 6.1, teniendo en cuenta sus reglas y funciones de pertenencia. De esta manera el controlador difuso diseñado para regular la estabilidad del quadrotor permitió un comportamiento óptimo en cuanto a los requerimientos de diseño establecidos como regulación de la tasa de decaimiento, limitación en el esfuerzo de control, y rechazo a perturbaciones; cabe resaltar que los anteriores requerimientos de diseño del controlador difuso se realizaron utilizando desigualdades matriciales lineales con el fin de garantizar el comportamiento óptimo del quadrotor, así la metodología planteada en este capítulo expone en detalle la implementación del controlador a través del algoritmo descrito en la Grafica 19 y sus resultados pueden ser vistos en las gráficas: Grafica 1920 Grafica 1921 y Grafica 1922.

En este trabajo se diseñaron e implementaron dos estrategias de control robustas en un quadrotor; ambas estrategias presentaron ciertas ventajas frente a estrategias de control clásicas, esto comparado con los resultados presentados en la Tabla 1. De las estrategias implementadas en esta investigación se pudo apreciar que la estrategia de control difuso T-S LMI muestra un comportamiento más adecuado para controlar el quadrotor que la estrategia de control robusta LMI. Sin embargo, la estrategia de control T-S presenta cierta complejidad al momento de su implementación, en el capítulo 7 se compararon experimentalmente las técnicas de control difuso LMI con las técnicas de control LMI y su desempeño en el sistema quadrotor obteniendo como resultado el establecimiento de la estrategia de control

difusa basada en LMI como una solución óptima a sistemas no lineales tipo MIMO; esto comparado con la estrategia de control LMI en donde se tuvieron que asumir ciertas consideraciones para linealizar el modelo y a partir de la misma diseñar la estrategia de control. Se muestra como esta técnica presenta ciertas desventajas en cuanto al rechazo de perturbaciones en su respuesta transitoria como en su respuesta de estado estacionario; de igual manera se constató la validez de los modelos diseñados comparando las respuestas de las simulaciones realizadas en la sección 6.4 con los resultados obtenidos en la sección 6.5.

8.1 Futuras líneas de investigación.

En esta investigación se presentó cómo la utilización de desigualdades lineales matriciales LMI se puede implementar con el fin de mejorar la estabilidad de vehículos aéreos no tripulados, por ende, se propone como futuras líneas de investigación los siguientes ítems.

- Control del sistema quadrotor a partir de visión artificial, implementación de controladores basados en LMI.
- Implementación de sistemas de telemetría que permitan incluir control de posición de vehículos aéreos no tripulados basados incluyendo en estas desigualdades lineales matriciales, además de una migración a plataformas de control computacionalmente más potentes (multitarea) y comparar resultados.
- Implementación de controles autónomos de altura para el desarrollo de sistemas automáticos para desplazamiento de trayectorias de vehículos aéreos no tripulados utilizando lógica difusa y desigualdades lineales matriciales.
- Implementación de las estrategias de control LMI y LMI difusa presentadas en esta investigación en diferentes configuraciones de vehículos aéreos no

tripulados como helicópteros de doble hélice, tri-copteros y Multicopteros (más de cuatro rotores).

9 BIBLIOGRAFÍA

- Abbasi, E., Mahjoob, M., & Shafiekhani, A. (2014). Attitude control using an extended classifier system algorithm for offline auto-tuning of a PID controller. En *2014 Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM)* (pp. 930–935). <https://doi.org/10.1109/ICRoM.2014.6991024>
- Ai-Omari, M. A. R., Jaradat, M. A., & Jarrah, M. (2013). Integrated simulation platform for indoor quadrotor applications. En *2013 9th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA)* (pp. 1–6). <https://doi.org/10.1109/ISMA.2013.6547379>
- Araar, O., & Aouf, N. (2014). Full linear control of a quadrotor UAV, LQ vs H_∞; En *2014 UKACC International Conference on Control (CONTROL)* (pp. 133–138). <https://doi.org/10.1109/CONTROL.2014.6915128>
- Argentim, L. M., Rezende, W. C., Santos, P. E., & Aguiar, R. A. (2013). PID, LQR and LQR-PID on a quadcopter platform. En *2013 International Conference on Informatics, Electronics Vision (ICIEV)* (pp. 1–6). <https://doi.org/10.1109/ICIEV.2013.6572698>
- Beltrán, C. F. (2014). Drones aplicados al agro, sistemas de emergencias y atención de desastres. *Telemática*, 2.

- Bo, G., Xin, L., Hui, Z., & Ling, W. (2016). Quadrotor helicopter Attitude Control using cascade PID. En *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)* (pp. 5158–5163). <https://doi.org/10.1109/CCDC.2016.7531919>
- Bouabdallah, S., Murrieri, P., & Siegwart, R. (2004). Design and control of an indoor micro quadrotor. En *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04* (Vol. 5, p. 4393–4398 Vol.5). <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2004.1302409>
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Carrillo, L. R. G., López, A. E. D., Lozano, R., & Pégard, C. (2012). *Quad rotorcraft control: Vision-based hovering and navigation*. Springer Science & Business Media.
- Castillo, P., García, P., Lozano, R., & Albertos, P. (2007a). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 4(1), 41–57. [https://doi.org/10.1016/S1697-7912\(07\)70191-7](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(07)70191-7)
- Castillo, P., García, P., Lozano, R., & Albertos, P. (2007b). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 4(1), 41–57. [https://doi.org/10.1016/S1697-7912\(07\)70191-7](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(07)70191-7)

- Chang, W., Park, J. B., Lee, H. J., & Joo, Y. H. (2002). LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 149(4), 297–302. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:20020430>
- Fantoni, I., & Lozano, R. (2002). *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. London: Springer London. Recuperado a partir de <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-0177-2>
- G, A. A., P, C. A. T., & Patiño, C. R. (2008). Diseño de un estabilizador de sistemas de potencia difuso basado en la técnica LMI. Recuperado el 15 de septiembre de 2016, a partir de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84920454007>
- Gonçalves, F. S., Bodanese, J. P., Donadel, R., Raffo, G. V., Normey-Rico, J. E., & Becker, L. B. (2013). Small scale UAV with birotor configuration. En *2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)* (pp. 761–768). <https://doi.org/10.1109/ICUAS.2013.6564758>.
- Higuera Martínez, O. I., & Salamanca, J. M. (2011). CONTINUOUS AND DISCRETE CONTROL DESIGN BASED ON LMI. *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada*, 2(18).
- Jabbari, H., Oriolo, G., & Bolandi, H. (2012). Dynamic IBVS control of an underactuated UAV. En *2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)* (pp. 1158–1163). <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2012.6491126>

- Kempe, V. (2011). *Inertial MEMS: Principles and Practice*. Cambridge University Press.
- Korba, P., Babuska, R., Verbruggen, H. B., & Frank, P. M. (2003). Fuzzy gain scheduling: controller and observer design based on Lyapunov method and convex optimization. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(3), 285–298. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2003.812680>
- Kuo, B. C. (1995). *Automatic Control Systems*. Prentice Hall.
- Liapounoff, A. M. (1947). *Probleme General de La Stabillite Du Mouvement*. (Am-17). Princeton University Press.
- Li, J., Li, R., & Zheng, H. (2016). Quadrotor modeling and control based on linear active disturbance rejection control. En *2016 35th Chinese Control Conference(CCC)*(pp.10651–10656). <https://doi.org/10.1109/ChiCC.2016.7555045>
- Lin, C., Wang, G., Lee, T. H., & He, Y. (2007). *LMI approach to analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay*. Springer Science & Business Media.
- Liu, H., Bai, Y., Lu, G., & Zhong, Y. (2013). Robust attitude control of a quadrotor helicopter with unknown parameters. En *Control Conference (CCC), 2013 32nd Chinese* (pp. 2633–2637).
- Lukmana, M. A., & Nurhadi, H. (2015). Preliminary study on Unmanned Aerial Vehicle (UAV) Quadcopter using PID controller. En *2015 International*

Conference on Advanced Mechatronics, Intelligent Manufacture, and Industrial Automation (ICAMIMIA) (pp. 34–37).

<https://doi.org/10.1109/ICAMIMIA.2015.7507997>

Magdaleno, R., & Luis, J. (2013). Integración de sistemas electrónicos de comunicación, sensado y control remoto en vehículos aéreos no tripulados.

Mejías, L., Saripalli, S., Campoy, P., & Sukhatme, G. S. (2006). Visual servoing of an autonomous helicopter in urban areas using feature tracking. *Journal of Field Robotics*, 23(3–4), 185–199. <https://doi.org/10.1002/rob.20115>

Naidoo, Y., Stopforth, R., & Bright, G. (2011). Quad-Rotor Unmanned Aerial Vehicle Helicopter Modelling & Control. *Adv Robotic*, 8(4), 139–149.

Nonami, K., Kendoul, F., Suzuki, S., Wang, W., & Nakazawa, D. (2010). *Autonomous flying robots: Unmanned aerial vehicles and micro aerial vehicles*. Springer Science & Business Media.

Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.

Olalla, C., Leyva, R., El Aroudi, A., Garcés, P., & Queinnec, I. (2010). LMI robust control design for boost PWM converters. *IET Power Electronics*, 3(1), 75. <https://doi.org/10.1049/iet-pel.2008.0271>

Pallett, T. J., & Ahmad, S. (1993). Adaptive neural network control of a helicopter in vertical flight. En *The First IEEE Regional Conference on Aerospace Control Systems, 1993. Proceedings* (pp. 264–268). <https://doi.org/10.1109/AEROCS.1993.720939>

- Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan J. Laub, & Mahmoud Chilali. (1995). *LMI Control Toolbox* (MathWorks, Vol. 1).
- Peláez, M. J., Palacio, V. H. G., & Sellier, A. G. (2004). Introducción a las desigualdades lineales matriciales y su aplicación en control automático. *Ingeniería*, 10(2), 30–37.
- Peña Giraldo, M. V., Vivas Gonzales, E. C., & Rodríguez Feliciano, C. I. (2010). Modelamiento dinámico y control LQR de un quadrotor. *Avances: Investigacion en Ingeniería*, (13), 71–86.
- Petr Korba. (2000). *A gain-Scheduling approach to model-Based fuzzy control*. (Vol. V1).
- Pizetta, I. H. B., Brandão, A. S., & Sarcinelli-Filho, M. (2015). Modelling and control of a quadrotor carrying a suspended load. En *2015 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)* (pp. 249–257). <https://doi.org/10.1109/RED-UAS.2015.7441014>
- Qi, D., Feng, J. F., Liu, A., Yang, J., & Li, Y. L. (2016). Overview on the development and key technologies of water-air UAV. En *2016 2nd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR)* (pp. 213–218). <https://doi.org/10.1109/ICCAR.2016.7486728>
- Raffo. (2011). *Robust control strategies for a QuadRotor helicopter: an underactuated mechanical system* (<http://purl.org/dc/dcmitype/Text>). Universidad de Sevilla.

- Raffo, G. V., & Almeida, M. M. de. (2016). Nonlinear robust control of a quadrotor UAV for load transportation with swing improvement. En *2016 American Control Conference (ACC)* (pp.3156–3162). <https://doi.org/10.1109/ACC.2016.7525403>
- Rivera, D., & Sofia, R. (2015). Análisis y diseño de un sistema de control de una plataforma aérea no tripulada mediante una aplicación móvil. Recuperado a partir de <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/29927>
- Rubio, J. de J., Cruz, J. H. P., Zamudio, Z., & Salinas, A. J. (2014). Comparison of two quadrotor dynamic models. *IEEE Latin America Transactions*, *12*(4), 531–537. <https://doi.org/10.1109/TLA.2014.6868851>
- Ryan, T., & Kim, H. J. (2013). LMI-Based Gain Synthesis for Simple Robust Quadrotor Control. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, *10*(4), 1173–1178. <https://doi.org/10.1109/TASE.2013.2259156>
- Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, *SMC-15*(1), 116–132. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>
- Tanaka, K., & Wang, H. O. (2004a). *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- Tanaka, K., & Wang, H. O. (2004b). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons.

- Teppo Luukkonen. (2011, agosto 22). Modelling and control of quadcopter. *Aalto University*, 26.
- Torres-Pinzón, C. A., & Leyva, R. (2009). Fuzzy control in DC-DC converters: An LMI approach. En *35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics, 2009. IECON '09* (pp. 510–515).
<https://doi.org/10.1109/IECON.2009.5414974>
- VanAntwerp, J. G., & Braatz, R. D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10(4), 363–385.
[https://doi.org/10.1016/S0959-1524\(99\)00056-6](https://doi.org/10.1016/S0959-1524(99)00056-6)
- Yaz, E. E. (1998). Linear matrix inequalities in system and control theory. *Proceedings of the IEEE*, 86(12), 2473–2474.
<https://doi.org/10.1109/JPROC.1998.735454>
- Yiqun, D., Jun, F., Bin, Y., Youmin, Z., & Jianliang, A. (2015). Position and heading angle control of an unmanned quadrotor helicopter using LQR method. En *Control Conference (CCC), 2015 34th Chinese* (pp. 5566–5571).
<https://doi.org/10.1109/ChiCC.2015.7260508>
- Zulu, A., & John, S. (2014). A review of control algorithms for autonomous quadrotors. *Open Journal of Applied Sciences*, 04(14), 547–556.
<https://doi.org/10.4236/ojapps.2014.414053>

10 Referencias

- Aldo Amadori,. (2016, septiembre 17). ABC de la automatización. Recuperado el 17 de septiembre de 2016, a partir de <http://www.aie.cl/ca-abc>.
- Anaya, M., Tibaduiza, D. A., & Pozo Montero, F. (2015). A bioinspired methodology based on an artificial immune system for damage detection in structural health monitoring. *Shock and Vibration*, 2015, e648097. <https://doi.org/10.1155/2015/648097>
- Anaya, M., Tibaduiza, D., & Pozo Montero, F. (2016). Artificial immune system (AIS) for damage detection under variable temperature conditions. Presentado en Proceedings of the 8th European Workshop on Structural Health Monitoring. Recuperado a partir de <http://upcommons.upc.edu/handle/2117/91466>
- Biever, E. (2015). Controlling of a single drone. Hovering the drone during flight modes.
- Francisco Salas Gómez. (2015, octubre). Control de procesos con controladores PID industriales. Recuperado a partir de http://www.esi2.us.es/~fsalas/asignaturas/LCA3T_05_06/PID_IND.pdf
- Gabriel Leos Monroy. (2014, junio). *Implementación de una aeronave no tripulada de despegue vertical de cuatro rotores*. Universidad nacional autónoma de México, México. Recuperado a partir de

<http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/4770/Tesis.pdf?sequence=1>

GY-521 MPU6050 3 ejes Aceleración giroscopio Módulo 6DOF - Azul - Free Shipping - DealExtreme. (s/f). Recuperado el 18 de septiembre de 2016, a partir de <http://www.dx.com/es/p/gy-521-mpu6050-3-axis-acceleration-gyroscope-6dof-module-blue-154602#.V94L4a0nIWQ>

Lengerke, O., Gonzalez, H., & Beltrán, S. A. (2013). Control PID de altura de un quadrotor. *Revista Colombiana de Computación - RCC*, 12(2).

Multiwii and Megapirate AIO Flight Controller w/FTDI (ATmega 2560) V2.0 (US Warehouse). (2016, septiembre 17).

Ramon Piedrafita Moreno. (1999). Evolución Histórica de la Ingeniería de Control.

Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Educación.

Singh, B., & Kumar, R. (2016). Simple brushless DC motor drive for solar photovoltaic array fed water pumping system. *IET Power Electronics*, 9(7), 1487–1495. <https://doi.org/10.1049/iet-pel.2015.0852>

Turnigy 1811 brushless Outrunner 2900kv (EU Warehouse). (s/f). Recuperado el 18 de septiembre de 2016, a partir de http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/uh_viewitem.asp?idproduct=36383

TURNIGY Plush 6A /.8bec/6g Speed Controller (EU Warehouse). (s/f). Recuperado el 18 de septiembre de 2016, a partir de

http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/_31692_TURNIGY_Plush_6A_8bec_6g_Speed_Controller_EU_Warehouse_.html?strSearch=Plush%20A%20Speed%20Controller

- Velandia, C., Celedón, gH., Tibaduiza, D. A., Torres-Pinzón, C., & Vitola, J. (2016). Design and control of an exoskeleton in rehabilitation tasks for lower limb. En *2016 XXI Symposium on Signal Processing, Images and Artificial Vision (STSIVA)* (pp. 1–6). <https://doi.org/10.1109/STSIVA.2016.7743341>.
- Villalón, R. (2015). Lecciones de control automático para el diario vivir. Recuperado a partir de <http://www.aie.cl/files/file/comites/ca/articulos/noviembre-06.pdf>

11 Anexos

Anexo 1. Video: CONTROL LMI ROLL.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=ln-yKGykFA>

Anexo 2. Video: CONTROL LMI PITCH.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=RykiUjLL1Mo>

Anexo 3. Video: CONTROL LMI YAW.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=3F-ac3LZNKE>

Anexo 4. Video: CONTROL DIFUSO T-S LMI ROLL.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=ln-yKGykFA>

Anexo 5. Video: CONTROL DIFUSO T-S LMI PITCH

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=tQhpdFgyyXo&t=7s>

Anexo 6. Video: CONTROL DIFUSO T-S LMI YAW.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=2n-d7tXMqmq>

Anexo 7. Video: Control de estabilidad.

Link: www.youtube.com/watch?v=z-j0eJxK984