



Cartilla

de gradientes

Milton Hernando Triana Lozano



CARTILLA DE GRADIENTES

Cartilla

de gradientes

MILTON HERNANDO TRIANA LOZANO



Triana Lozano, Milton Hernando
Cartilla de gradientes / Milton Hernando Triana Lozano. - Villavicencio, Universidad Santo Tomás,
2026.

72 páginas, tablas y figuras

Incluye referencias bibliográficas

E-ISBN: 978-958-782-711-8

1. Matemáticas financieras - Enseñanza. 2. Finanzas matemáticas – Modelos financieros. 3. Finanzas -
Gradientes. I. Universidad Santo Tomás (Colombia)

SCDD edición 23

CO-ViUST 658.15



© Universidad Santo Tomás - Seccional Villavicencio, 2026

Ediciones USTA

Bogotá, D. C., Colombia

Carrera 9 n.º 51-11

Teléfono: (+601) 587 8797, ext. 2991

editorial@usantotomas.edu.co

Carrera 22 con calle 1 vía Puerto López

Villavicencio, Meta, Colombia

Teléfono: (+608) 6784260, ext. 4078

<http://www.ediciones.usta.edu.co>

<https://www.ustavillavicencio.edu.co/investigacion-publicaciones>

Director Dirección Investigación e Innovación: Dr. Héctor Fabio Restrepo Guerrero

Coordinación editorial: Julián Laverde Restrepo

Corrección de estilo: Fabián Andrés Gullaván Vera.

Universidad Santo Tomás - Seccional Villavicencio

Diagramación y ajuste de cubierta: Andrés Conrado Montoya Acosta

Hecho el depósito que establece la ley

E-ISBN: 978-958-782-711-8

Primera edición: 2026

Esta obra tiene una versión de acceso abierto disponible en el Repositorio Institucional de la
Universidad Santo Tomás: <https://repository.usta.edu.co/>

Universidad Santo Tomás. Vigilada MinEducación

Reconocimiento personería jurídica: Resolución 3645 del 6 de agosto de 1965, MinJusticia

Acreditación Institucional de Alta Calidad Multicampus: Resolución 014525 del 28 de julio de
2022, 8 años, MinEducación

Todos los derechos reservados

*Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio,
sin la autorización expresa del titular de los derechos.*

Contenido

1. Presentación	9
2. Gradientes	11
2.1. Generalidades de los gradientes	11
2.1.1. Definición	11
2.1.2. Clasificación	11
2.1.3. Nomenclatura	12
2.2. Gradiente aritmético o lineal	12
2.2.1. Aproximaciones iniciales a los gradientes aritméticos o lineales	12
2.2.2. Valor futuro (F) de un gradiente aritmético o lineal	15
2.2.3. Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente aritmético o lineal con valor futuro	17
2.2.4. Valor presente (P) de un gradiente aritmético o lineal	17
2.2.5. Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente aritmético o lineal con valor presente	21
2.3. Gradiente geométrico o exponencial	22
2.3.1. Valor futuro (F) con gradiente geométrico vencido	24
2.3.2. Valor presente (P) con gradiente geométrico	26
2.3.3. Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico con valor futuro	29
2.3.4. Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico con valor presente	31
2.4. Gradientes escalonados	34
2.4.1. Valor futuro en gradiente escalonado	35
2.4.2. Valor presente en gradiente escalonado	37
2.4.3. Valor de la primera intercuota (" r_1 ") en gradiente escalonado ..	40

3.	Apéndice 1. Ejercicios propuestos gradientes	47
4.	Bibliografía	63
5.	Anexos	65
5.1.	Anexo A. Matriz MILHER	65
5.2.	Anexo B. Tablas de amortización	66
5.3.	Anexo C. Tablas de capitalización	67

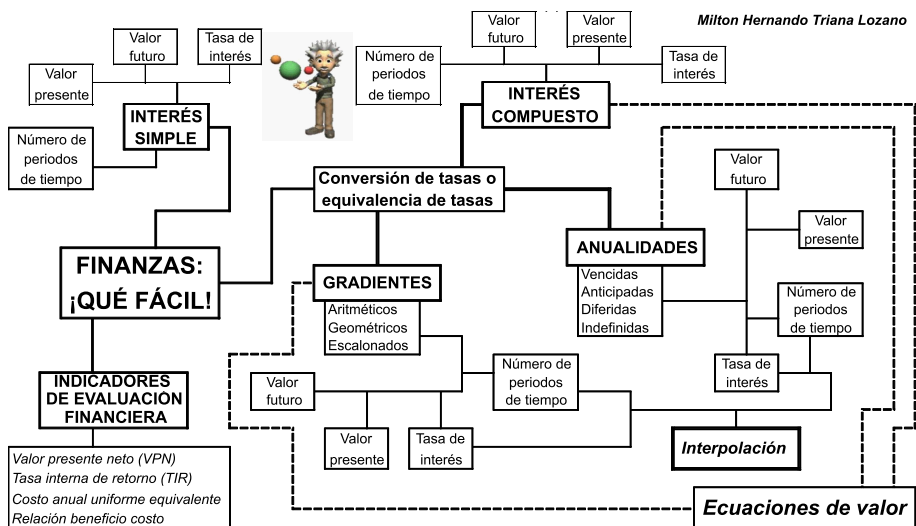


Figura 1. Visión general

1. Presentación

El estudio de los gradientes en matemáticas financieras resulta fundamental para la formación de profesionales que enfrentan escenarios de planeación, evaluación y toma de decisiones económicas en contextos reales. A diferencia de las anualidades o rentas de valor constante, los gradientes representan flujos de dinero que aumentan o disminuyen de manera sistemática a lo largo del tiempo, reflejando situaciones propias del mundo laboral y empresarial, donde los ingresos, los costos, las inversiones o los ahorros no permanecen estáticos, sino que evolucionan con el paso de los períodos.

Por ello, comprender y aplicar correctamente los gradientes permite a los profesionales analizar la viabilidad de proyectos, diseñar esquemas de ahorro o inversión que respondan a metas crecientes, calcular presupuestos que se ajusten a incrementos salariales o a la inflación, y proyectar obligaciones financieras que varían en el tiempo. En este sentido, el conocimiento de los gradientes no solo ofrece herramientas técnicas para realizar cálculos precisos, sino que también potencia la capacidad de interpretar fenómenos financieros dinámicos y de proponer soluciones ajustadas a la realidad económica.

Así, el dominio de este tema contribuye a fortalecer competencias analíticas y de gestión, necesarias en campos como la contaduría, la administración, la ingeniería económica y la gestión financiera, convirtiéndose en un pilar para el ejercicio profesional responsable y estratégico en entornos cada vez más complejos y cambiantes.

Bienvenidos y bienvenidas.

2. Gradientes

2.1 Generalidades de los gradientes

2.1.1 Definición

Un gradiente, también, es una serie de pagos que cumple con los siguientes requisitos.

- Cada uno de los pagos cumple con una ley de formación (el lineal o aritmético, y el geométrico o exponencial).
- Los desembolsos se efectúan a intervalos iguales de tiempo (misma periodicidad).
- Todos los pagos se trasladan al comienzo o al final a la misma tasa de interés efectiva y vencida, la cual tiene la misma periodicidad que los pagos.
- El número de pagos es igual al número de períodos, si no hay período de gracia (Baca Currea, 2007, p. 107).

2.1.2 Clasificación

Se puede decir que los gradientes son de tres clases.

- **Gradiente aritmético o lineal** cuando la serie de pagos crece (aumenta) o decrece (disminuye) periódicamente en el mismo valor (Meza Orozco, 2017, p. 376).
- **Gradiente geométrico o exponencial** cuando la serie de pagos crece o decrece periódicamente en el mismo porcentaje (Cano Morales, 2024, p. 274).
- **Gradiente escalonado**, que se refiere a una serie de pagos que permanece constante durante un período determinado y luego aumenta o disminuye periódicamente, ya sea en un valor constante o en un porcentaje fijo (Baca Currea, 2007, p. 123).

2.1.3 Nomenclatura

En la aplicación de las fórmulas se emplea la siguiente nomenclatura.

P: Valor presente, valor actual o capital inicial o principal.

F: Valor futuro, valor final, monto o dinero incrementado.

R₁: Primera cuota o primer abono periódico.

i: Tasa efectiva o periódica.

n: Número de períodos de tiempo del que consta una operación financiera.

L: Valor o monto constante en que crecen o decrecen los pagos del gradiente aritmético o lineal.

G: Valor relativo (porcentaje) constante en que crecen o decrecen los pagos del gradiente geométrico o exponencial. Si se enuncia en porcentaje se pasa a cifra decimal.

2.2 Gradiente aritmético o lineal

2.2.1 Aproximaciones iniciales a los gradientes aritméticos o lineales

En cuanto a finanzas, un gradiente aritmético, también conocido como gradiente lineal, se define como una serie de pagos periódicos que se incrementan o disminuyen en un valor constante exacto (Moreno Gómez y Suárez Caicedo, 2023). En los gradientes aritméticos, cada pago es igual al anterior más una constante positiva (“**L**”) o menos una constante negativa (“**-L**”). En el primer caso, el gradiente aritmético es creciente, mientras que en el segundo caso es decreciente.

Si se desea, entonces, hallar el valor de cualquiera de los pagos que conforman un gradiente aritmético o lineal, se utiliza la siguiente fórmula:

$$R_n = R_1 \pm L * (n - 1)$$

En donde.

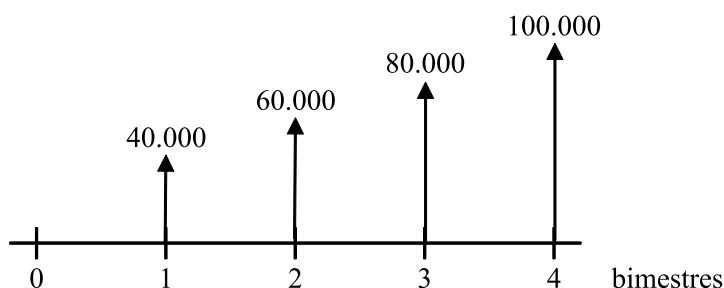
R_n: El valor del término o pago que se quiere hallar.

R₁: El valor de la primera cuota o pago de la serie del gradiente.

n: El número de término o pago de la serie del gradiente.

L: El valor constante, en que crece (positivo) o decrece (negativo) la serie del gradiente.

Para comprenderlo y aplicarlo, obsérvese el siguiente diagrama económico.



Por simple inspección se deduce que es un gradiente aritmético creciente, puesto que los pagos entre sí van aumentando y que el valor de cada uno de los pagos es:

$$R_1 = 40000 \quad R_2 = 60000 \quad R_3 = 80000 \quad R_4 = 100.000$$

Y que la constante positiva en que aumenta la serie de pagos de este gradiente creciente es de $L = 20000$.

Por lo que, si quisiera averiguar el tercer término o el valor de la tercera cuota de este gradiente, (aunque ya se sabe: $R_3 = \$80000$), se tendría en cuenta las variables.

$$R_3 = ? \quad R_1 = 40000 \quad n = 3 \quad L = 20000$$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$R_3 = 40000 + (3 - 1) * 20000 = 80000$$

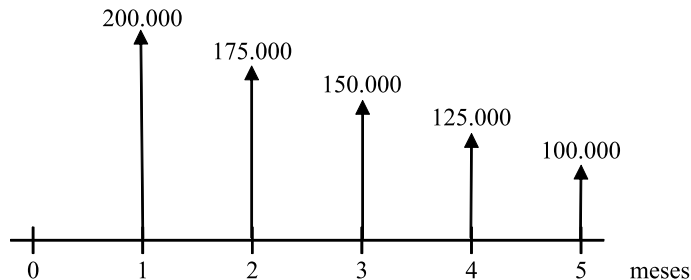
Ahora bien, si con la gráfica anterior no se conociera el valor constante (**L**) del gradiente aritmético o lineal, se podría determinar este valor tomando el importe de una cuota determinada y restándole el valor de la cuota anterior. Si el resultado es positivo, el gradiente es creciente; en cambio, si el resultado es negativo, el gradiente es decreciente. A continuación se presentan las variables necesarias para calcular el valor constante del gradiente aritmético o lineal:

$$R_1 = 40000 \quad R_2 = 60000 \quad L = ?$$

$$L = 60000 - 40000 = 20000.$$

Como da positivo el gradiente aritmético o lineal es creciente en este primer caso.

Por otro lado, funciona lo mismo para un gradiente aritmético o lineal decreciente y para ello obsérvese el siguiente horizonte económico.



Se puede también, por simple inspección, deducir que se trata de un gradiente aritmético decreciente ($L = -25000$), donde la constante es negativa, lo que indica que la serie de pagos de este gradiente decreciente disminuye. Esto se debe a que los pagos, en comparación entre sí, van decreciendo. El valor de cada uno de los pagos es:

$$R_1 = 200000 \quad R_2 = 175000 \quad R_5 = 100000.$$

Aunque si se decidiera, con las siguientes variables, hallar el valor constante (" L ") del gradiente aritmético o lineal.

$$R_1 = 200000 \quad R_2 = 175000 \quad L = ?$$

Véase su aplicación.

$$L = 175000 - 200000 = -25000.$$

Si se quisiera averiguar el cuarto término o el valor de la cuarta cuota de este gradiente, (que con anterioridad ya se sabe), se tendría en cuenta las variables:

$$R_1 = 200000 \quad n = 4 \quad L = -25000 \quad R_4 = ?$$

Y aplicando la fórmula se obtiene el valor requerido.

$$R_4 = 200000 + (4 - 1) * (-25000) = 125000.$$

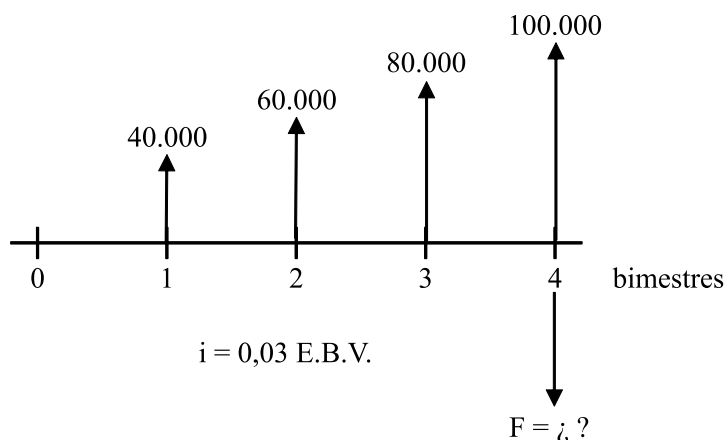
2.2.2 Valor futuro (F) de un gradiente aritmético o lineal

Para ello se cuenta con la siguiente fórmula:

$$F = R_1 * \frac{((1 + i)^n - 1)}{i} \pm \frac{L}{i} * \left(\frac{((1 + i)^n - 1)}{i} - n \right)$$

Tómese ahora una situación económica de 4 cuotas bimestrales que comienzan con un valor de \$40000 y que van aumentando bimestralmente en \$20000 (gradiente aritmético **creciente**) durante 8 meses (equivalente a 4 bimestres), a una tasa de interés del 3.00% EBV. Se nos solicita hallar el valor futuro.

Obsérvese el siguiente diagrama económico:



Las variables dadas son.

$n = 4$ bimestres $i = 0.03 \text{ EBV}$ $R_1 = 40000$ $L = 20000$ $F = ?$

Aplicando la fórmula:

$$F = 40000 * ((1 + 0.03)^4 - 1) / 0.03 + 20000 / 0.03 * (((1 + 0.03)^4 - 1) / 0.03 - 4).$$

$$F = 289763.08.$$

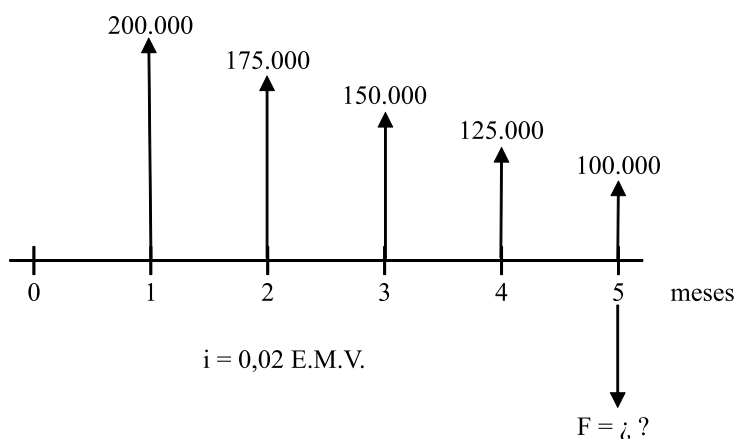
La tabla de capitalización permite comprobar tal resultado (tabla 1) y el proceso de su elaboración se encuentra al final como anexo.

Tabla 1. Tabla de capitalización, ejemplo 1 gradiente aritmético

n	ABONO	INTERESES	CAPITALIZACIÓ	SALDO
1	40.000,00	0,00	40.000,00	40.000,00
2	60.000,00	1.200,00	61.200,00	101.200,00
3	80.000,00	3.036,00	83.036,00	184.236,00
4	100.000,00	5.527,08	105.527,08	289.763,08

Por otro lado, analícese la siguiente nueva situación, en la que se plantean 5 cuotas que comienzan con \$200000 y van disminuyendo mensualmente en \$25000 (gradiente aritmético **decreciente**) durante 5 meses, a una tasa de interés del 2.00% EMV. Se nos solicita hallar, además, el valor futuro.

Obsérvese el diagrama económico:



Las variables dadas para este ejercicio son las siguientes:

$$n = 6 \text{ meses } i = 0.02 \text{ EMV } R_1 = 200000 \text{ L} = - 25000 \text{ F} = ?$$

Aplicando la fórmula respectiva se obtiene el debido resultado.

$$F = 200000 * ((1 + 0.02)^5 - 1) / 0.02 - 25000 / 0.02 * (((1 + 0.02)^5 - 1) / 0.02 - 5).$$

$$F = 785757.83.$$

La tabla de capitalización permite comprobar tal resultado (tabla 2) y el proceso de su elaboración se encuentra al final como anexo.

Tabla 2. Tabla de capitalización, ejemplo 2, gradiente aritmético

n	ABONO	INTERESES	CAPITALIZACIÓN	SALDO
1	200.000,00	0,00	200.000,00	200.000,00
2	175.000,00	4.000,00	179.000,00	379.000,00
3	150.000,00	7.580,00	157.580,00	536.580,00
4	125.000,00	10.731,60	135.731,60	672.311,60
5	100.000,00	13.446,23	113.446,23	785.757,83

2.2.3 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente aritmético o lineal con valor futuro

Para se posee la siguiente fórmula:

$$R_1 = \left(F * i - \pm L * \left(\frac{((1+i))^n - 1}{i} - n \right) \right) / (((1+i)^n - 1))$$

Tómese la situación planteada en el numeral 1.2.1 y en el caso inicial, donde se tiene un gradiente aritmético o lineal creciente. Las demás variables que se consideran para determinar el valor de la primera cuota son las siguientes:

$$F = 289763.08 \quad i = 0.03 \quad \text{EBV} \quad n = 4 \text{ bimestres} \quad L = 20000 \quad R_1 = ?$$

Se solicita hallar ahora el valor de la primera cuota en este gradiente lineal o aritmético, aplicando la fórmula indicada nos arroja el siguiente resultado:

$$R_1 = (289763.08 * 0.03 - 20000 * ((1 + 0.03)^4 - 1) / 0.03 - 4) / ((1 + 0.03)^4 - 1).$$

$$R_1 = 40.00.$$

Recuérdese que las respuestas finales de los ejercicios se redondean por defecto o por exceso a 2 posiciones decimales.

2.2.4 Valor presente (P) de un gradiente aritmético o lineal

2.2.4.1 Valor presente (P) de un gradiente aritmético o lineal vencido

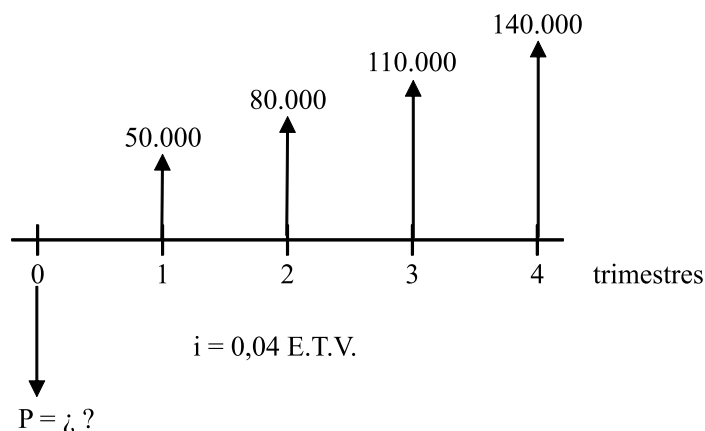
Para ello se tiene con la siguiente fórmula :

$$P = R_1 * \frac{(1 - (1+i)^{-n})}{i} \pm \frac{L}{i} * \left(\frac{(1 - (1+i)^{-n})}{i} - n * (1+i)^{-n} \right)$$

*

Plantéese una nueva situación en la que se tienen 4 cuotas que comienzan con \$50000 y aumentan, trimestralmente, en \$30000 (gradiente aritmético creciente) durante 1 año, a una tasa de interés del 4.00% ETV. Se solicita hallar el valor presente.

El diagrama económico es el siguiente.



Las variables dadas, entonces, son:

$n = 4$ trimestres $i = 0.04$ ETV $R_1 = 50000$ $L = 30000$ $P = ?$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P = 50000 * (1 - (1 + 0.04)^{-4}) / 0.04 + 30000 / 0.04 * ((1 - (1 + 0.04)^{-4}) / 0.04 - 4 * (1 + 0.04)^{-4}).$$

$$P = 339503.61.$$

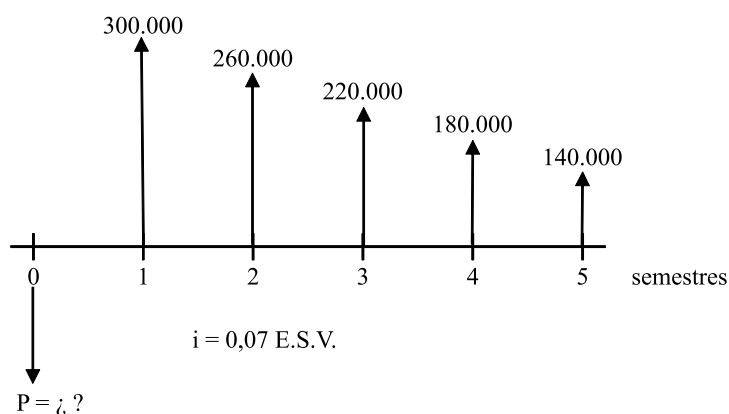
Después de redondear la respuesta a dos posiciones decimales (por exceso o por defecto), es importante señalar que la tabla de amortización permite verificar dicho resultado (tabla 3). El proceso de elaboración de esta tabla se presenta al final, en el anexo B.

Tabla 3. Tabla de amortización, ejemplo 1, gradiente aritmético

n	ABONO	INTERESES	AMORTIZACIÓN	SALDO
0				339.503,61
1	50.000,00	13.580,14	36.419,86	303.083,75
2	80.000,00	12.123,35	67.876,65	235.207,10
3	110.000,00	9.408,28	100.591,72	134.615,38
4	140.000,00	5.384,62	134.615,38	0,00

Ahora bien, en una situación diferente, se tiene una serie de pagos compuesta por 5 cuotas que comienzan con una primera cuota de \$300000. Estas cuotas disminuyen semestralmente en \$40000 (gradiente aritmético decreciente) durante 2 años y medio, a una tasa de interés del 7.00% ESV. Se nos solicita hallar el valor presente.

Y el horizonte económico es el siguiente:



Las variables dadas son:

$$n = 5 \text{ semestres } i = 0.07 \text{ ESV } R_1 = 300000 \text{ } L = -40000 \text{ } P = ?$$

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P = 300000 * (1 - (1 + 0.07)^{-5}) / 0.07 - 40000 / 0.07 * ((1 - (1 + 0.07)^{-5}) / 0.07 - 5 * (1 + 0.07)^{-5}).$$

$$P = 924192.64.$$

Se puede comprobar con una tabla de amortización (tabla 4).

Tabla 4. Tabla de amortización, ejemplo 2, gradiente aritmético

n	ABONO	INTERESES	AMORTIZACIÓN	SALDO
0				924.192,64
1	300.000,00	64.693,48	235.306,52	688.886,12
2	260.000,00	48.222,03	211.777,97	477.108,15
3	220.000,00	33.397,57	186.602,43	290.505,72
4	180.000,00	20.335,40	159.664,60	130.841,12
5	140.000,00	9.158,88	130.841,12	0,00

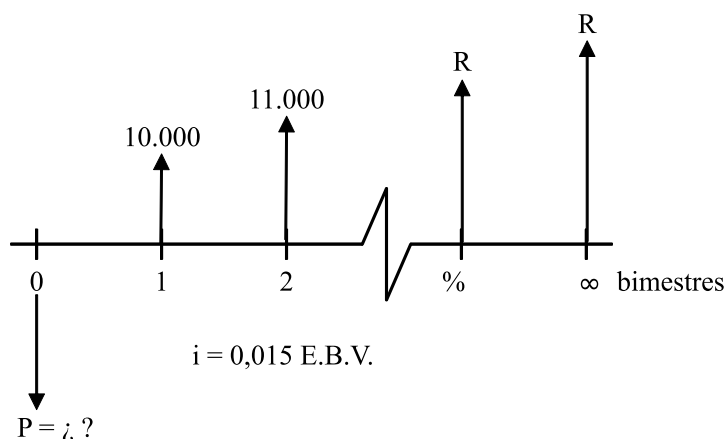
2.2.4.2 Valor presente (P) de un gradiente aritmético lineal perpetuo

Para hallarlo se emplea la siguiente fórmula, aunque cabe decir que son poco comunes estas situaciones.

$$P = \frac{R_1}{i} \pm \frac{L}{i^2}$$

Se puede, entonces, considerar un gradiente aritmético perpetuo o indefinido, aunque es muy poco probable que se presente este caso. Recuerde que se supone que el número de pagos es muy grande o se desconoce a cabalidad cuántos son, y estos van creciendo o decreciendo de manera lineal. Este tipo de gradiente puede ocurrir cuando se invierte un capital conocido y se retiran únicamente “los intereses”.

Véase el siguiente diagrama económico:



Las variables que se dan son las siguientes:

$$i = 0.015 \text{ EBV} \quad R_1 = 10000 \quad L = 1000 \quad P = ?$$

Aplicando la fórmula:

$$P = 10000 / 0.015 + 1000 / 0.015^2 = 5111111.1.$$

2.2.5 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente aritmético o lineal con valor presente

2.2.5.1 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente aritmético o lineal vencido con valor presente

Para hallarla se utiliza la siguiente fórmula:

$$R_1 = \frac{\left(P * i \pm L * \left(\frac{(1 - (1+i)^{-n})}{i} - n * (1+i)^{-n} \right) \right)}{(1 - (1+i)^{-n})}$$

Ahora bien, plantéese un gradiente aritmético o lineal decreciente con las siguientes variables:

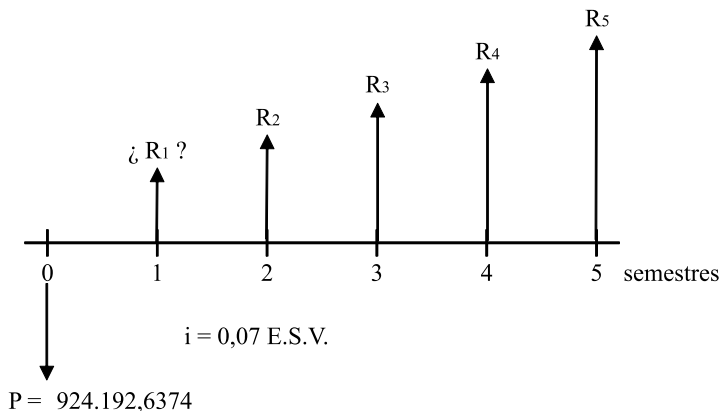
$P = 924192.6374$ $i = 0.07$ E.S.V. $n = 5$ semestres $L = -40000$ $R_1 = ?$

Aplicando la fórmula arroja el siguiente resultado para la primera cuota:

$$R_1 = (924192.6374 * 0.07 + 40000 * ((1 - (1 + 0.07)^{-5}) / 0.07 - 5 * (1 + 0.07)^{-5})) / (1 - (1 + 0.07)^{-5}).$$

$$R_1 = 300000.00.$$

El diagrama económico es el siguiente:

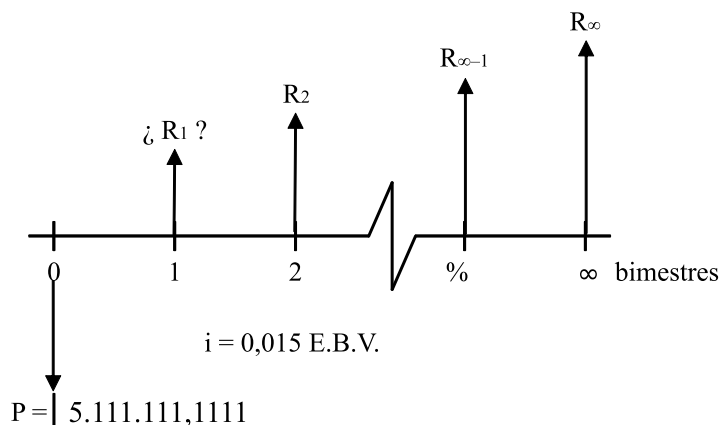


2.2.5.2 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente aritmético o lineal perpetuo con valor presente

Para hallarla se cuenta con la siguiente fórmula:

$$R1 = \frac{(P - \pm \frac{L}{i^2})}{i}$$

El diagrama económico quedaría de la siguiente forma:



Supóngase que las variables para un ejercicio son las siguientes:

$$P = 5111111.1111 \quad i = 0.015 \text{ EBV} \quad L = 1000 \quad R_1 = ?$$

Aplicando la fórmula nos arroja el siguiente resultado para la primera cuota:

$$R_1 = (5111111.111 - 10000 / 0.015^2) * 0.015 = 10000.00.$$

2.3 Gradiente geométrico o exponencial

Son series de pagos periódicos o flujos de caja que se incrementan o disminuyen en porcentajes constantes en períodos sucesivos de pago (García Santillán, 2014).

En los gradientes geométricos, cada pago o abono es igual al anterior multiplicado por un porcentaje constante, que puede ser positivo o negativo ($\pm G$). En el primer caso, el gradiente geométrico es creciente, mientras que en el segundo caso es decreciente. Si se desea hallar el valor de cualquiera de los pagos, se dispone de la siguiente fórmula:

$$R_n = R_1 * (1 \pm G)^{(n-1)}$$

En donde:

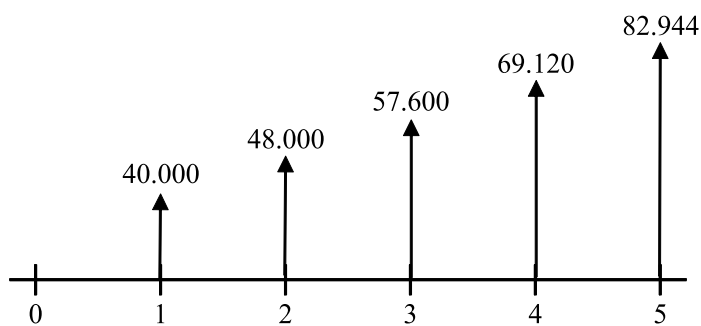
R_n : El valor del término o pago que se quiere hallar.

R_1 : El valor de la primera cuota o pago de la serie del gradiente.

n : El número de término o pago de la serie del gradiente.

G : El porcentaje constante, en que crece (signo positivo) o decrece (signo negativo) la serie del gradiente geométrico o exponencial.

Para comprenderlo y aplicarlo mejor, obsérvese el siguiente diagrama económico con el valor de las primeras cuatro cuotas de un gradiente geométrico creciente.



Por simple inspección se deduce que es un gradiente geométrico creciente, puesto que si fuera un gradiente aritmético, los pagos crecerían en un valor constante; sin embargo, es importante observar que el aumento no es igual en cada intervalo, sino que cada vez es mayor. Por ejemplo, entre el primer y el segundo pago hubo un crecimiento de \$8000; luego, entre el segundo y el tercero, el crecimiento fue de \$9600; y finalmente, entre el tercero y el cuarto, el aumento alcanzó los \$11520.

Los pagos entre sí van aumentando y que el valor de cada uno de los pagos es:

$$R_1 = 40000 \quad R_2 = 48000 \quad R_3 = 57600 \quad R_4 = 69120.$$

Para hallar, primero, el valor relativo o porcentaje en que crece o decrece la serie de pagos, se divide una cuota del gradiente entre la anterior y se le resta 1. Si el resultado es positivo, la serie es creciente, y si es negativo, es decreciente.

Supónganse las siguientes variables y se opera:

$$R_2 = 48000 \quad R_1 = 40000 \quad G = ?$$

$$G = (48000 / 40000) - 1 = 0.2.$$

Ahora bien, si se pretende averiguar el valor de una cuota o pago cualquiera de la serie, se tiene a la mano la siguiente fórmula:

$$R_n = R_1 * (1 \pm G)^{(n-1)}$$

Si en este caso, por ejemplo, se quisiera averiguar el tercer término o el valor de la tercera cuota de este gradiente, se tendría en cuenta las siguientes variables.

$$R_3 = ? \quad R_1 = 40000 \quad n = 3 \quad G = 0.2.$$

Aplicando la fórmula se obtiene.

$$R_3 = 40000 + (1 - 0.2)^{(3-1)} = 57600.$$

2.3.1 Valor futuro (F) con gradiente geométrico vencido

2.3.1.1 Valor futuro (F) con gradiente geométrico si el gradiente es diferente de la tasa de interés ($G \neq i$)

Para hallarlo se emplea la siguiente fórmula:

$$F = R_1 * \left(\frac{(1 \pm G)^n - (1 + i)^n}{(\pm G - i)} \right) \text{ si } G \neq i$$

Considérese ahora una situación económica en la que se tiene una serie de pagos compuesta por 4 cuotas bimestrales, las cuales crecen un 20% bimestralmente, siendo la primera de \$40000. Si se trabaja con una tasa de interés del 3% efectivo bimestral, EBV se solicita calcular el valor futuro.

Las variables, entonces, que se tienen son:

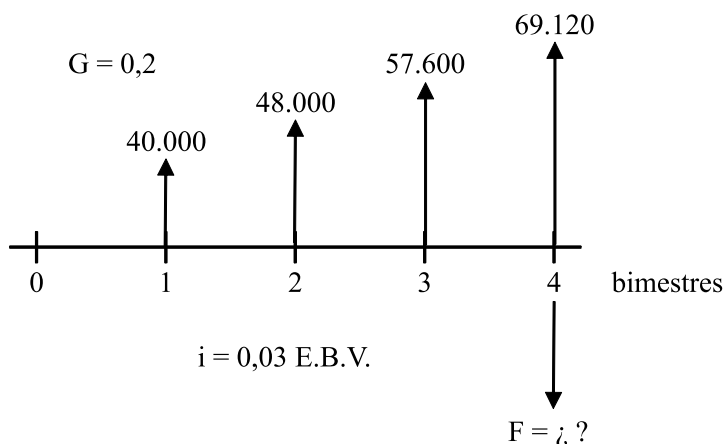
$$i = 0.03 \quad \text{EBV} \quad n = 4 \text{ bimestres} \quad G = 0.2 \quad R_1 = 40000 \quad F = ?$$

Aplicando la fórmula nos arroja el siguiente resultado para el valor futuro:

$$F = 40000 * ((1 + 0.2)^4 - (1 + 0.03)^4) / (0.2 - 0.03).$$

$$F = 223080.28.$$

Obsérvese el respectivo diagrama económico:



La tabla de capitalización permite comprobar tal resultado (tabla 5).

Tabla 5. Tabla de capitalización, ejemplo 1, gradiente geométrico

n	ABONO	INTERESES	CAPITALIZACIÓN	SALDO
1	40.000,00	0,00	40.000,00	40.000,00
2	48.000,00	1.200,00	49.200,00	89.200,00
3	57.600,00	2.676,00	60.276,00	149.476,00
4	69.120,00	4.484,28	73.604,28	223.080,28

2.3.1.2 Valor futuro (F) con gradiente geométrico si el valor del gradiente es igual a la tasa de interés ($G = i$)

Para hallarlo se cuenta con la siguiente fórmula, un poco más simplificada:

$$F = R_1 * n * (1 + i)^{(n-1)} \text{ si } G = i$$

Ahora bien, supóngase otra situación económica en la que se tienen 3 cuotas mensuales crecientes en un 15% mensualmente, siendo la primera de ellas de \$100000. Se trabajará con una tasa de interés del 15% EMV y se calculará, también, el valor futuro.

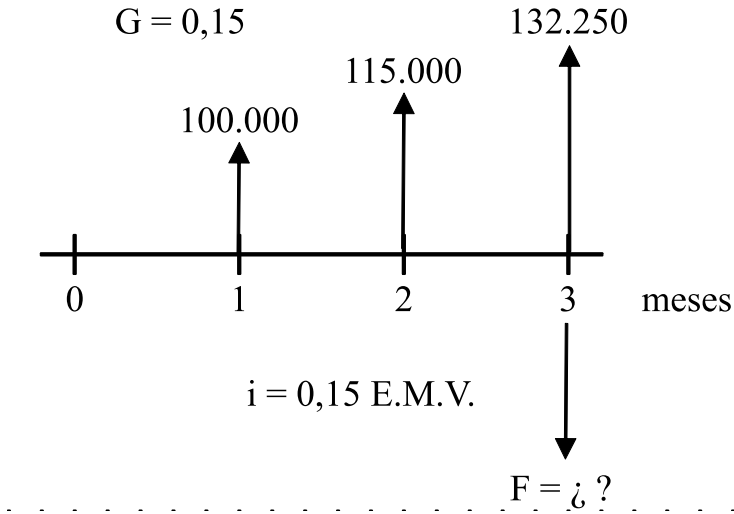
Las variables que se dan son:

$$i = 0.15 \text{ EMV } n = 3 \text{ meses } G = 0.15 \text{ } R_1 = 100000 \text{ } F = ?$$

Aplicando la fórmula nos arroja el siguiente resultado para el valor futuro:

$$F = 100000 * 3 * (1 + 0.15)^{(3-1)} = 396750.00.$$

Con el siguiente diagrama económico se puede ejemplificar tal situación económica.



La tabla de capitalización permite comprobar tal resultado (tabla 6).

Tabla 6. Tabla de capitalización, ejemplo 2, gradiente geométrico

n	ABONO	INTERESES	CAPITALIZACIÓN	SALDO
1	100.000,00	0,00	100.000,00	100.000,00
2	115.000,00	15.000,00	130.000,00	230.000,00
3	132.250,00	34.500,00	166.750,00	396.750,00

2.3.2 Valor presente (P) con gradiente geométrico

2.3.2.1 Valor presente (P) con gradiente geométrico vencido si el gradiente es diferente de la tasa de interés ($G \neq i$)

Para hallar se tiene la siguiente fórmula:

$$P = R1 * \left(\frac{(1 \pm G)^n * (1 + i)^{-n} - 1}{(\pm G - i)} \right) \text{ si } G \neq i$$

Plantéese, ahora, una situación en la que se tiene una serie de pagos decrecientes del 5% con 6 cuotas trimestrales, siendo la primera de ellas de \$500000. Considerando una tasa de interés del 4% ETV, se solicita calcular el valor presente de esta serie de pagos.

Las variables son:

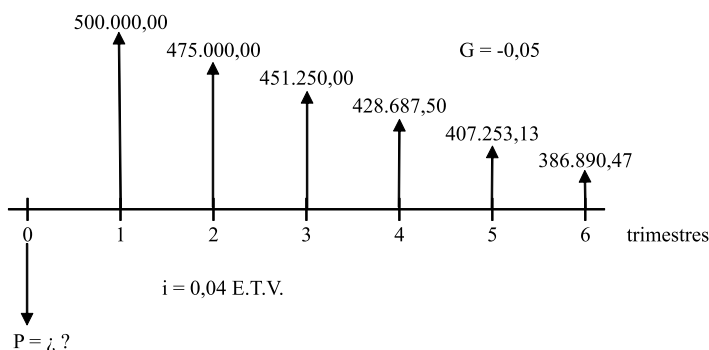
$$G = -0.05 \quad R_1 = 500000 \quad i = 0.04 \quad \text{ETV} \quad n = 6 \text{ semestres} \quad P = ?$$

Aplicándose la fórmula arroja el siguiente resultado para el valor futuro:

$$P = 500000 * ((1 - 0.05)^6 * (1 + 0.04)^{-6} - 1) / (-0.05 - 0.04).$$

$$P = 2328034.45.$$

El horizonte económico hubiese sido el siguiente:



La tabla de amortización permite comprobar tal resultado (tabla 7).

Tabla 7. Tabla de amortización, ejemplo 1, gradiente geométrico

n	ABONO	INTERESES	AMORTIZACIÓN	SALDO
0				2.328.034,45
1	500.000,00	93.121,38	406.878,62	1.921.155,83
2	475.000,00	76.846,23	398.153,77	1.523.002,06
3	451.250,00	60.920,08	390.329,92	1.132.672,14
4	428.687,50	45.306,89	383.380,61	749.291,53
5	407.253,13	29.971,66	377.281,46	372.010,07
6	386.890,47	14.880,40	372.010,07	0,00

2.3.2.2 Valor presente (P) con gradiente vencido si el valor del gradiente es igual al valor de la tasa de interés ($G = i$)

Para hallarlo se posee la siguiente fórmula:

$$P = R_1 * \frac{n}{(1 + i)} \quad \text{si } G = i$$

Plantéese, ahora, una nueva situación en la que se tienen una serie de 4 cuotas semestrales crecientes en un 10% mensual, siendo la primera de ellas de \$60000, y con una tasa de interés pactada del 10% EMV. Se solicita hallar el valor presente de dicha situación.

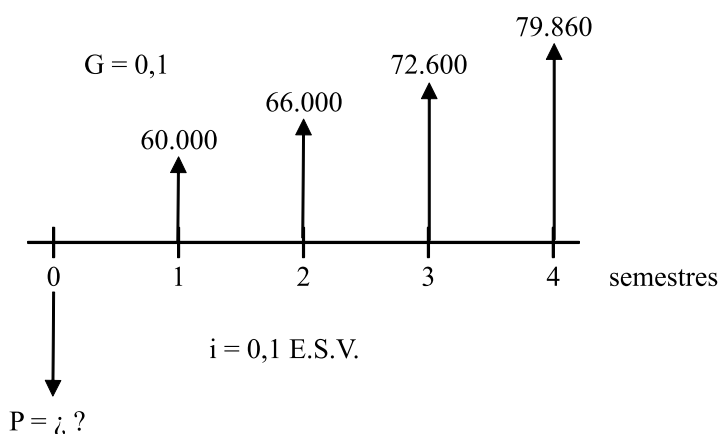
Las variables que se nos dan son:

$$i = 0.1 \text{ E.S.V. } n = 3 \text{ semestres } G = 0.1 \quad R_1 = 60000 \quad P = ?$$

Aplicando la fórmula nos arroja el siguiente resultado para el valor futuro:

$$P = 60000 * 4 / (1 + 0.1) = 218181.8182.$$

El diagrama económico sería el siguiente:



Se puede demostrar realizando la tabla de amortización (tabla 8).

Tabla 8. Tabla de amortización, ejemplo 2, gradiente geométrico

n	ABONO	INTERESES	AMORTIZACIÓN	SALDO
0				218.181,82
1	60.000,00	21.818,18	38.181,82	180.000,00
2	66.000,00	18.000,00	48.000,00	132.000,00
3	72.600,00	13.200,00	59.400,00	72.600,00
4	79.860,00	7.260,00	72.600,00	0,00

2.3.2.3 Valor presente (P) con gradiente geométrico perpetuo o indefinido

Para hallar el **valor presente** con **gradiente geométrico perpetuo** y sabiendo el valor de la **primera cuota**, se poseen las 2 siguientes fórmulas, de las cuales solo se aplica la primera, dado que su resultado es finito, mientras que la otra produce un resultado “infinito”:

$$P = \frac{R_1}{(i - \pm G)} \text{ si } G < i$$

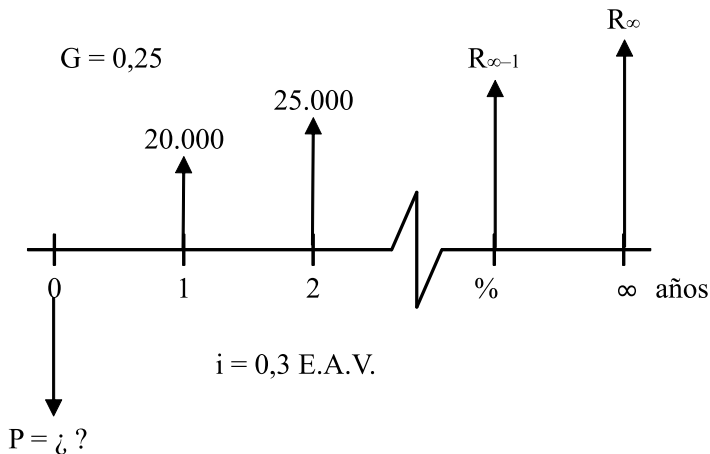
$$P = \infty \text{ si } G \geq i$$

Ahora, en una nueva situación, se tiene una serie indefinida de pagos con cuotas crecientes en un 25%, donde la primera de ellas es de \$20000. Se ha pactado una tasa de interés del 30%. Dado que el valor porcentual del gradiente geométrico es menor que la tasa de interés, se solicita hallar el valor presente.

Véanse las variables:

$$i = 0.3 \text{ EAV } G = 0.25 \text{ } R_1 = 20000 \text{ } P = ?$$

En esta situación, obsérvese el horizonte económico es el siguiente:



Resolviendo la fórmula se tiene que:

$$P = 20000 / (0.3 - 0.25) = 400000.$$

2.3.3 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico con valor futuro

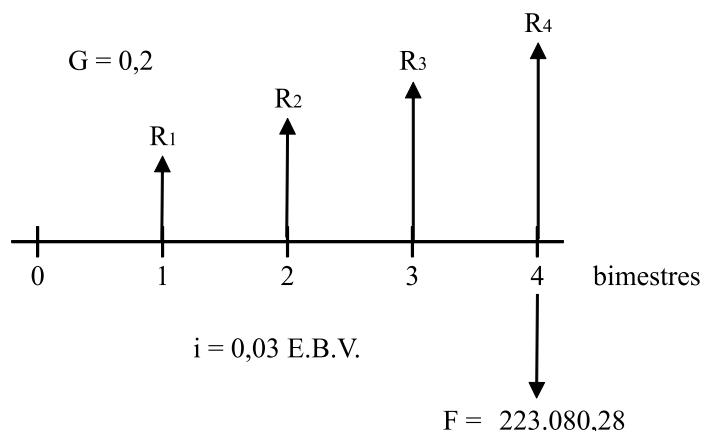
2.3.3.1 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico vencido con valor futuro si el valor del gradiente es diferente a la tasa de interés ($G \neq i$)

Para hallar el valor se posee la siguiente fórmula:

$$R1 = F * \frac{(\pm G - i)}{((1 \pm G)^n - (1 + i)^n)} \text{ si } G \neq i$$

Ahora se plantea una situación económica en la que se pretende reunir, al cabo de 8 meses, la suma de \$223080.28 mediante cuotas bimestrales que aumentan un 20% bimestralmente. Se considera una tasa de interés del 3% EBV.

Y el diagrama económico sería el siguiente:



Se solicita hallar el valor de la primera cuota y las variables que se nos dan son:

$F = 223080.28$ $i = 0.03$ EBV $n = 4$ bimestres $G = 0.2$ $R_1 = ?$

Aplicando la fórmula nos arroja el siguiente resultado para el valor futuro.

$$R_1 = 224080.28 * (0.2 - 0.03) / ((1 + 0.2)^4 - (1 + 0.03)^4) = 40000.$$

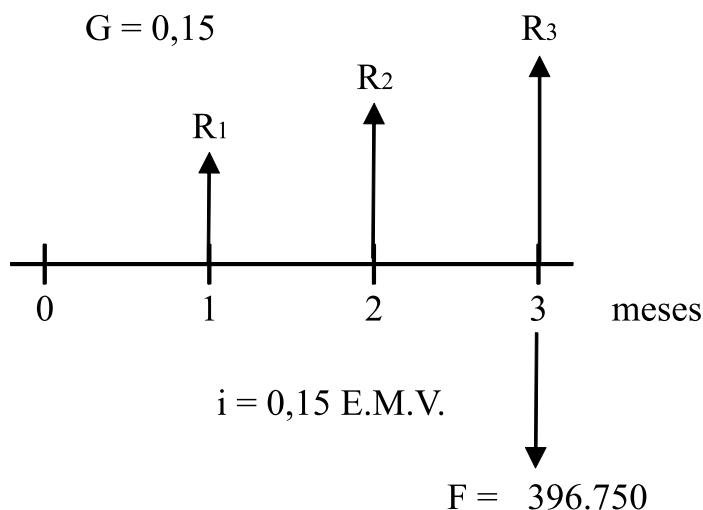
2.3.3.2 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico con valor futuro, sabiendo que el gradiente es igual a la tasa de interés ($G = i$)

Para hallarla se utiliza la siguiente fórmula:

$$R1 = \frac{F}{(n * (1 + i)^{(n-1)})} \text{ si } G = i$$

De igual forma, en una nueva situación en la que se conocen tres cuotas mensuales crecientes, cada una incrementándose en un 15%, se pretende alcanzar un valor futuro de \$396750 al finalizar 3 meses, con una tasa de interés pactada del 15% EMV Se busca hallar el valor de la primera cuota, utilizando la fórmula correspondiente.

Sin embargo, véase el horizonte económico generado por esta situación.



Las variables dadas son:

$$F = 396750.00 \quad i = 0.15 \text{ EMV} \quad n = 3 \text{ meses} \quad G = 0.15 \quad R_1 = ?$$

Aplicando la fórmula arroja el siguiente resultado para el valor futuro:

$$R_1 = 396750 / (3 * (1 + 0.15)^{(3-1)}) = 100000.$$

2.3.4 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico con valor presente

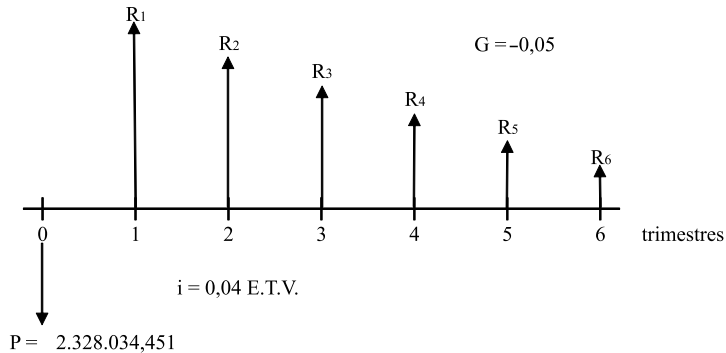
2.3.4.1 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico vencido con valor presente si el gradiente es diferente de la tasa de interés ($G \neq i$)

Para hallarla se cuenta con la siguiente fórmula:

$$R_1 = P * \frac{(\pm G - i)}{((1 \pm G)^n * (1 + i)^{-n} - 1)} \quad \text{si } G \neq i$$

Plantéese, ahora, una situación en la que se tiene una serie de pagos decrecientes geoméricamente en un 5%, con 6 cuotas trimestrales, siendo la primera de ellas de \$500000. La tasa de interés es del 4% ETV y se debe calcular el valor presente.

El horizonte económico es el siguiente:



Las variables son:

$$G = -0,05 \quad i = 0,04 \text{ E.T.V.} \quad n = 6 \text{ semestres} \quad P = 2328034,451 \quad R_1 = ?$$

Y aplicando la fórmula nos arroja el siguiente resultado para el valor futuro:

$$R_1 = 2328034,451 * (-0,05 - 0,04) / ((1 - 0,05)^6 * (1 + 0,04)^{-6} - 1) = 500,0$$

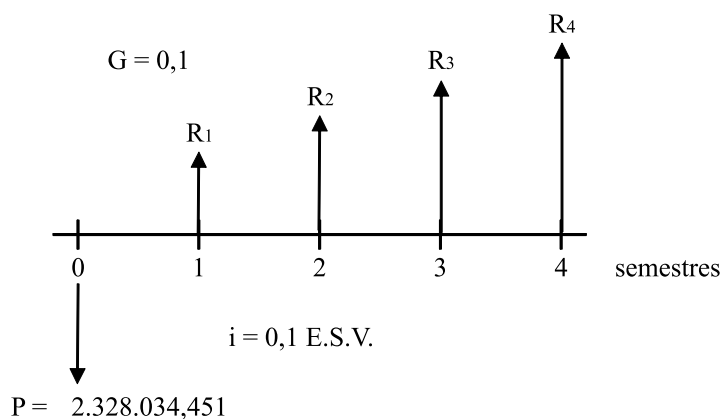
2.3.4.2 Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico vencido con valor presente si el gradiente es igual a la tasa de interés ($G = i$)

Para hallarse tiene la siguiente fórmula:

$$R_1 = P * \frac{(1 + i)^n}{n} \quad G = i$$

Supóngase que se tiene una deuda de \$2328034.451 que se cancela con 4 cuotas semestrales crecientes, cada una incrementada en un 10% respecto a la anterior. Se trabaja con una tasa de interés del 10% EMV. Con esta información, se solicita hallar el valor de la primera cuota.

El horizonte económico es el siguiente:



Las variables dadas son:

$$P = 2328034.451 \quad i = 0.1 \text{ E.S.V.} \quad n = 4 \text{ semestres} \quad G = 0.1 \quad R_1 = ?$$

Aplicando la fórmula arroja el siguiente resultado para la primera cuota:

$$R_1 = 2328034.451 * (1 + 0.1) / 4 = 60000.$$

Valor de la primera cuota (R_1) de un gradiente geométrico perpetuo con valor presente .

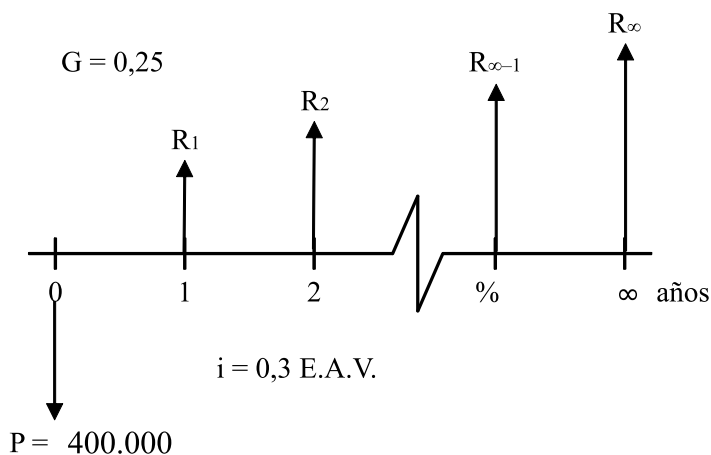
2.3.4.3 Si el gradiente es menor a la tasa de interés ($G < i$)

Para hallarla se emplea la siguiente fórmula:

$$R_1 = P * (i - \pm G) \text{ si } G < i$$

Ahora, en una nueva situación, hay una serie indefinida de pagos en la que las cuotas crecen en un 25%. Considerando una tasa de interés del 30% y un valor presente de \$400000, se establece que el valor porcentual del gradiente geométrico es menor que la tasa de interés. Esto se debe a que, si el gradiente geométrico fuera mayor o igual a la tasa de interés, la fórmula correspondiente no aplicaría y no sería necesario calcular su valor, puesto que si es mayor o igual no aplica y no se precisaría su valor), y se nos solicita hallar el valor de la primera cuota.

El diagrama económico es el siguiente:



Véanse las variables:

$$P = 400000 \quad i = 0.3 \text{ EAV} \quad G = 0.25 \quad R_1 = ?$$

Resolviendo la fórmula se tiene:

$$P = 400000 * (0.3 - 0.25) = 20000.$$

2.4 Gradientes escalonados

Estas series de pagos son una forma especial de combinar tanto las anualidades como los gradientes. Se trata de series de cuotas en las que hay una sub-serie o serie temporal de pagos similares, al cabo de los cuales se genera un incremento o decremento (ya sea aritmético o geométrico). Esta serie temporal constante se repite y así sucesivamente hasta el final del plazo establecido (Asturias Corporación Universitaria, 2019).

Las variables denotadas pueden ser las siguientes.

F: valor futuro (sigue siendo la misma).

P: valor presente (sigue siendo la misma).

r_1 : primera intercuota.

n: número de períodos (o de escalones).

m: número de interperíodos (“períodos” en el escalón).

i: tasa de interés efectiva (periódica).

H: interescalón aritmético.

G: interescalón geométrico.

2.4.1 Valor futuro en gradiente escalonado

2.4.1.1 Valor futuro (F) en gradiente escalonado aritmético sabiendo el valor de la primera intercuota (“r₁”)

La fórmula que se utiliza es la siguiente:

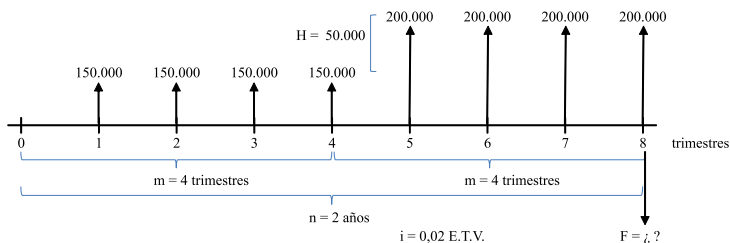
$$F = r_1 * \frac{((1+i)^{n*m} - 1)}{i} \pm \frac{H}{i} * \left(\frac{((1+i)^{n*m} - 1)}{((1+i)^m - 1)} - n \right)$$

Para explicarlo, se toma una situación en la que se pretende reunir una cierta suma de dinero mediante pagos trimestrales al final de 2 años. Dichos pagos permanecen constantes en el primer año, con un valor de \$150000, y para el segundo año, estos pagos aumentan en \$50000, estableciéndose en \$200000. Si se pacta una tasa de interés del 2.00% ETV, se debe calcular el valor que se reúne al final de dicho lapso (valor futuro).

Las variables son:

i = 0.02 ETV H = 50000 r₁ = 150000 n = 2 años m = 4 trimestres F = ¿?

El diagrama económico es el siguiente:



Al resolver la fórmula se tiene:

$$F = 150000 * (1.02^8 - 1) / 0.02 + 50000 / 0.02 * ((1.02^8 - 1) / (1.02^4 - 1) - 2).$$

$$F = 1493525.758.$$

La tabla de capitalización demuestra la veracidad de tal resultado (tabla 9).

Tabla 9. Tabla de capitalización, ejemplo
1, gradiente aritmético escalonado

n	ABONO	INTERESES	CAPITALIZACIÓN	SALDO
1	150.000,00	0,00	150.000,00	150.000,00
2	150.000,00	3.000,00	153.000,00	303.000,00
3	150.000,00	6.060,00	156.060,00	459.060,00
4	150.000,00	9.181,20	159.181,20	618.241,20
5	200.000,00	12.364,82	212.364,82	830.606,02
6	200.000,00	16.612,12	216.612,12	1.047.218,14
7	200.000,00	20.944,36	220.944,36	1.268.162,51
8	200.000,00	25.363,25	225.363,25	1.493.525,76

2.4.1.2 Valor futuro (F) en gradiente escalonado geométrico sabiendo el valor de la primera intercuota (“ r_1 ”)

La fórmula que se emplea si el interés es diferente al gradiente ($G \neq (1+i)^m$) es:

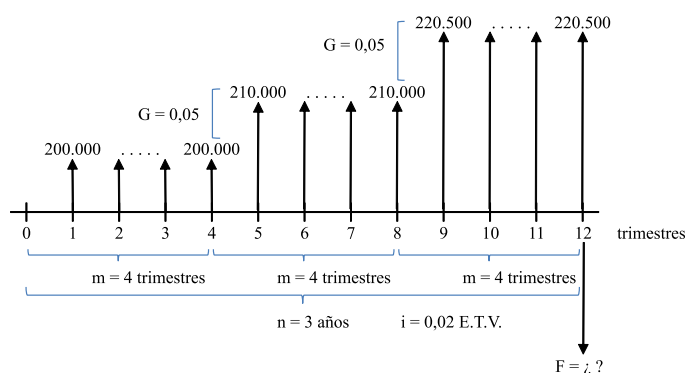
$$F = r_1 * \frac{((1 \pm G)^n - (1 + i)^{n*m}) * ((1 + i)^m - 1)}{(i * (1 \pm G - (1 + i)^m))} \text{ si } G \neq (1 + i)^m$$

Y la fórmula si el interés es igual al gradiente ($G = (1+i)^m$) es:

$$F = r_1 * \pm G * n * \frac{(1 + i)^{n*m}}{(i * (1 \pm G))} \text{ si } G = (1 + i)^m$$

Para explicarlo, se presenta una situación en la que se reunirá una suma de dinero mediante abonos trimestrales durante 3 años. Estos pagos son constantes en el primer año, con un valor de \$200000, y aumentan anualmente en un 5%, manteniéndose uniformes durante cada año. Si se pacta una tasa de interés del 2.00% ETV, se debe calcular el valor futuro al final de dicho período.

El diagrama económico es el siguiente:



Las variables son:

$$r_1 = 200000 \quad i = 0.02 \text{ ETV} \quad G = 0.05 \quad n = 3 \text{ años} \quad m = 4 \text{ trimestres} \quad F = ?$$

Resolviendo la fórmula:

$$F = 200000 * (1.05^3 - 1.02^{12}) * (1.02^4 - 1) / (0.02 * (1 + 0.05 - 1.02^4)).$$

$$F = 2811524.52.$$

Y la tabla de capitalización lo puede comprobar (tabla 10).

Tabla 10. Tabla de capitalización, ejemplo
2, gradiente geométrico escalonado

n	ABONO	INTERESES	CAPITALIZACIÓN	SALDO
1	200.000,00	0,00	200.000,00	200.000,00
2	200.000,00	4.000,00	204.000,00	404.000,00
3	200.000,00	8.080,00	208.080,00	612.080,00
4	200.000,00	12.241,60	212.241,60	824.321,60
5	210.000,00	16.486,43	226.486,43	1.050.808,03
6	210.000,00	21.016,16	231.016,16	1.281.824,19
7	210.000,00	25.636,48	235.636,48	1.517.460,68
8	210.000,00	30.349,21	240.349,21	1.757.809,89
9	220.500,00	35.156,20	255.656,20	2.013.466,09
10	220.500,00	40.269,32	260.769,32	2.274.235,41
11	220.500,00	45.484,71	265.984,71	2.540.220,12
12	220.500,00	50.804,40	271.304,40	2.811.524,52

2.4.2 Valor presente en gradiente escalonado

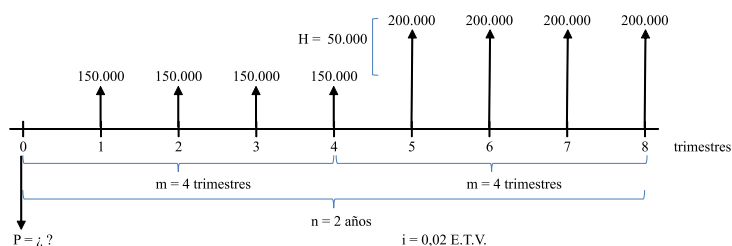
2.4.2.1 Valor presente (P) en gradiente escalonado aritmético sabiendo el valor de la primera intercuota (“ r_1 ”)

La fórmula que se puede emplear es la siguiente :

$$P = r_1 * \frac{(1 - (1 + i)^{-n*m})}{i} \pm \frac{H}{i} * \left(\frac{(1 - (1 + i)^{-n*m})}{((1 + i)^m - 1)} - n * (1 + i)^{-n*m} \right)$$

Para explicarlo, se toma una situación en la que se desea pagar un préstamo con pagos trimestrales durante dos años. Dichos pagos permanecen constantes en el primer año por un valor de \$150000 y, para el segundo año, estos pagos aumentan en \$50000, manteniéndose uniformes a un valor de \$200000. Si se pactó una tasa de interés del 2% ETV, se debe hallar el valor del capital prestado.

Obsérvese el siguiente diagrama económico que ilustra la situación.



Las variables son:

$i = 0.02$ ETV $H = 50000$ $r_1 = 150000$ $n = 2$ años $m = 4$ trimestres $P = ?$

Resolviendo la fórmula:

$$P = 150000 * (1 - 1.02^{-8}) / 0.02 + 50000 / 0.02 * ((1.02^{-8} - 1) / (1.02^4 - 1) - 2 * 1.02^{-8}).$$

$$P = 1274709.85.$$

La tabla de amortización así lo comprueba (tabla 11).

Tabla 11. Tabla de amortización, ejemplo 1, gradiente aritmético escalonado

n	ABONO	INTERESES	AMORTIZACIÓN	SALDO
0				1.274.709,85
1	150.000,00	25.494,20	124.505,80	1.150.204,05
2	150.000,00	23.004,08	126.995,92	1.023.208,13
3	150.000,00	20.464,16	129.535,84	893.672,29
4	150.000,00	17.873,45	132.126,55	761.545,74
5	200.000,00	15.230,91	184.769,09	576.776,65
6	200.000,00	11.535,53	188.464,47	388.312,19
7	200.000,00	7.766,24	192.233,76	196.078,43
8	200.000,00	3.921,57	196.078,43	0,00

2.4.2.2 Valor presente (P) en gradiente escalonado geométrico sabiendo el valor de la primera intercuota (" r_1 ")

La fórmula que se emplea si el interés es diferente al gradiente ($G \neq (1+i)^m$) es:

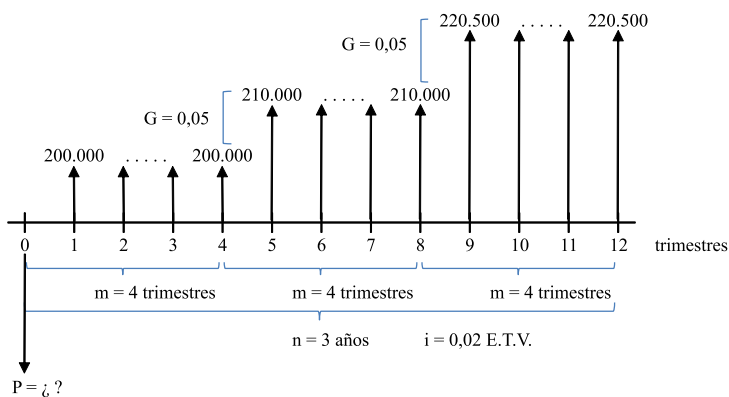
$$P = r_1 * \frac{((1+i)^m - 1)}{(i * ((1+i)^m - 1 - \pm G))} * \left(1 - \frac{(1 \pm G)^n}{(1+i)^{nm}}\right) \text{ si } G = (1+i)^m$$

Y fórmula si el interés es igual al gradiente ($G = (1+i)^m$) es:

$$P = r_1 * n * \frac{((1+i)^m - 1)}{(i * (1+i)^m)} \text{ si } G = (1+i)^m$$

Para explicarlo se toma una situación en que se pagará un préstamo con cuotas trimestrales durante un período de 3 años. Los pagos se mantendrán constantes en el primer año, con un valor de \$200000. A partir del segundo año, los pagos aumentarán anualmente en un 5%, manteniéndose constantes durante cada año. Dado que se ha pactado una tasa de interés del 2% ETV, se solicita calcular el valor presente de estos pagos.

El diagrama económico de esta situación es el siguiente:



Las variables son:

$$r_1 = 200000 \quad i = 0.02 \text{ ETV} \quad G = 0.05 \quad n = 3 \text{ años} \quad m = 4 \text{ trimestres} \quad P = ?$$

Resolviendo esta situación se tiene:

$$P = 200000 * (1.02^4 - 1) / (0.02 * 1.02^4 - 1 - 0.05) * ((1 - 1.05^3) / 1.02^{12})$$

$$P = 2216867.90.$$

La tabla de amortización lo puede demostrar (tabla 12).

Tabla 12. Tabla de amortización, ejemplo
2, gradiente geométrico escalonado

n	ABONO	INTERESES	AMORTIZACIÓN	SALDO
0				2.216.867,90
1	200.000,00	44.337,36	155.662,64	2.061.205,26
2	200.000,00	41.224,11	158.775,89	1.902.429,36
3	200.000,00	38.048,59	161.951,41	1.740.477,95
4	200.000,00	34.809,56	165.190,44	1.575.287,51
5	210.000,00	31.505,75	178.494,25	1.396.793,26
6	210.000,00	27.935,87	182.064,13	1.214.729,12
7	210.000,00	24.294,58	185.705,42	1.029.023,71
8	210.000,00	20.580,47	189.419,53	839.604,18
9	220.500,00	16.792,08	203.707,92	635.896,27
10	220.500,00	12.717,93	207.782,07	428.114,19
11	220.500,00	8.562,28	211.937,72	216.176,47
12	220.500,00	4.323,53	216.176,47	0,00

2.4.3 Valor de la primera intercuota (“ r_1 ”) en gradiente escalonado

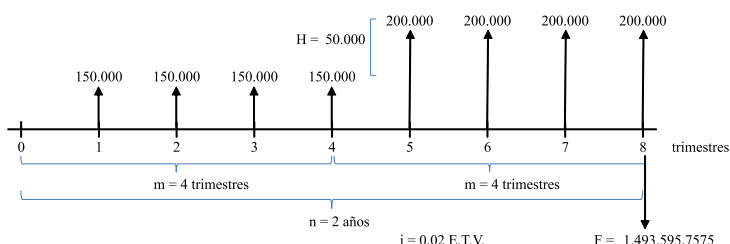
2.4.3.1 Valor de la primera intercuota (“ r_1 ”) sabiendo el valor futuro en gradiente escalonado aritmético

La fórmula que se utiliza es la siguiente:

$$r_1 = \frac{\left(F * i - \pm H * \left(\frac{(1+i)^{n*m}-1}{(1+i)^m-1} - n \right) \right)}{((1+i)^{n*m} - 1)}$$

Para comprenderlo mejor, en una nueva situación se necesita, dentro de 2 años, reunir \$1493595.7575 y para ello, se realizarán depósitos trimestrales de igual valor en el primer año. Luego, para el segundo año, estos abonos también permanecerán constantes, pero aumentarán en \$50000 en comparación con el primer año. Si se trabaja con una tasa de interés del 2.00% ETV, se debe calcular el valor de las intercuotas tanto del primer año como del segundo año.

El horizonte económico es el siguiente:



Las variables que se dan son:

$$F = 1493595.7575 \quad i = 0.02 \text{ ETV} \quad H = 50000 \quad n = 2 \text{ años} \quad m = 4 \text{ trimestres} \quad r_1 = ?$$

Resolviendo la fórmula, que es un poco larga, se tiene:

$$r_1 = (1493595.76 * 0.02 - 50000 * ((1.02^8 - 1) / (1.02^4 - 1) - 2)) / (1.02^8 - 1).$$

$$r_1 = 150000.$$

Obsérvese detenidamente, en el diagrama económico, que las primeras cuatro intercuotas del primer año son todas iguales, mientras que las últimas cuatro intercuotas del segundo año tendrán un incremento correspondiente al interescalón con respecto a esas primeras intercuotas.

Entonces como $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$, las intercuotas del primer año serán de \$150000.

Para calcular las restantes 4 intercuotas del segundo año simplemente se le sumaría el interescalón aritmético (“H”) al anterior valor de la intercuota. Véase:

$$r_5 = 150000 + 50000 = 200000.$$

Y que como $r_5 = r_6 = r_7 = r_8$, las intercuotas del segundo año serán de \$200000.

2.4.3.2 Valor de la primera intercuota (“ r_1 ”) sabiendo el valor presente en gradiente escalonado aritmético

La fórmula que se emplea es la siguiente:

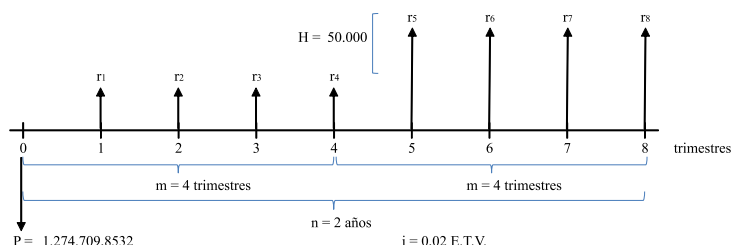
$$r_1 = \frac{\left(P * i - \pm H * \left(\frac{(1 - (1+i)^{-n*m})}{((1+i)^m - 1)} - n * (1+i)^{-n*m} \right) \right)}{(1 - (1+i)^{-n*m})}$$

En otra situación, hay un valor presente de \$1274709.8532 que se desea amortizar en 2 años mediante cuotas trimestrales que permanecen constantes durante el primer año y aumentan en un valor de \$50000 en el segundo año, manteniéndose también uniformes durante este último año. Con una tasa de interés del 2% ETV, se solicita hallar el valor de las intercuotas.

Las variables son:

$$P = 1274709.8532 \quad i = 0.02 \text{ ETV} \quad H = 50000 \quad n = 2 \text{ años} \quad m = 4 \text{ trimestres} \quad r_1 = ?$$

Para ello, véase el siguiente diagrama económico:



Resolviendo la fórmula:

$$r_1 = (1274709.85 * 0.02 - 50000 * ((1 - 1.02^8) / (1.02^4 - 1) - 2 * 1.02^{-8})) / (1 - 1.02^{-8}).$$

$$r_1 = 150000.00.$$

Al saber que $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$, las intercuotas del primer año serán de \$150000.

Para calcular las intercuotas del segundo año, se procede a sumarle el valor del interescalón al valor de la primera intercuota.

$$r_5 = 150000 + 50000 = 200000.$$

Y al saber que $r_5 = r_6 = r_7 = r_8$, las intercuotas del segundo año serán de \$200000.

2.4.3.3 Valor de la primera intercuota (“ r_1 ”) sabiendo el valor futuro en gradiente escalonado geométrico

La fórmula si el interés es diferente al gradiente ($G \neq (1+i)^m$) es la siguiente:

$$r_1 = F * i * \frac{(1 \pm -(1+i)^m)}{(((1 \pm G)^n - (1+i)^{n*m}) * ((1+i)^m - 1))} \text{ si } G \neq (1+i)^m$$

Y fórmula si el interés es igual al gradiente ($G = (1+i)^m$) es:

$$r_1 = F * i * \frac{(1 \pm G)}{(\pm G * n * (1+i)^{n*m})} \text{ si } G = (1+i)^m$$

Para comprender su aplicación, supóngase una nueva situación en la que se debe reunir \$2811524.5201 en el lapso de 3 años, mediante cuotas trimestrales que permanecen constantes durante el primer año y luego aumentan en un 5% en el segundo año. Si se sabe que el interés que se otorga es del 2% ETV, se debe hallar el valor de las intercuotas.

Las variables dadas son:

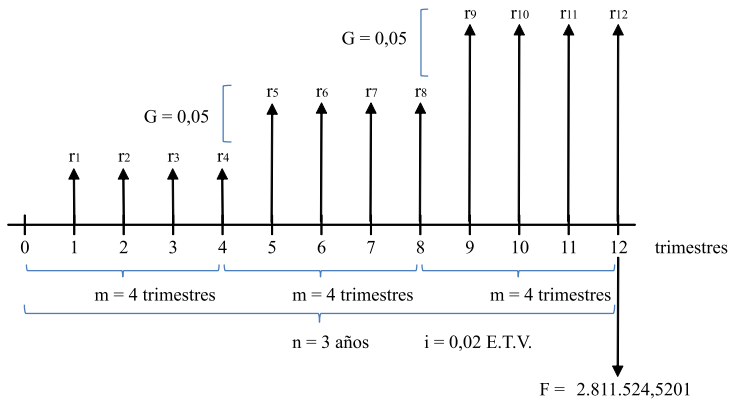
$F = 2811524.5201$ $i = 0.02$ E.T.V $G = 0.05$ $n = 3$ años $m = 4$ trimestres $r_1 = ?$

Resolviendo la fórmula:

$$r_1 = 2811524.5201 * (0.02 * 1.02^4 - 1 - 0.05) / ((1.02^4 - 1) * (1.02^{12} - 1.05^4)).$$

$$r_1 = 200.0.$$

Este es el horizonte económico:



Al saber que $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ quiere decir que las intercuotas del primer año serán de \$200000.

Y en el caso del gradiente escalonado geométrico se cuenta con esta fórmula para hallar el valor de las intercuotas:

$$r_n = r_1 * (1 \pm G)^{(n-1)}$$

Y aplicándola para saber las intercuotas del segundo año, se tiene:

$$r_5 = 200000 * (1 + 0.05)^{2-1} = 210000$$

Y al saber que $r_5 = r_6 = r_7 = r_8$, las intercuotas del segundo año serán de \$210000.

Lo mismo se hace para conocer las intercuotas del tercer año, se tiene:

$$r_9 = 210000 * (1 + 0.05)^{3-1} = 220500.$$

Entonces, como se sabe que $r_9 = r_{10} = r_{11} = r_{12}$, las intercuotas del tercer año serán de \$220500.

NB: No olvidar redondear las respuestas a dos posiciones decimales.

2.4.3.4 Valor de la primera intercuota (“ r_1 ”) sabiendo el valor presente en gradiente escalonado geométrico

La fórmula si el interés es diferente al gradiente ($G \neq (1+i)^m$) es la siguiente:

$$r_1 = P * i * \frac{\left(\frac{(1+i)^m - 1 - G}{((1+i)^m - 1)} \right)}{\left(1 - \frac{(1+G)^n}{(1+i)^{n*m}} \right)} \text{ si } G \neq (1+i)^m$$

Y fórmula si el interés es igual al gradiente ($G = (1+i)^m$) es:

$$r_1 = P * \frac{(i * (1+i)^m)}{((1+i)^m - 1)} \text{ si } G = (1+i)^m$$

Supóngase una situación en la que se tiene un valor presente de \$2225829.546 que se desea amortizar en 3 años mediante cuotas trimestrales que permanecen constantes durante el año y aumentan en un 5% cada año, manteniéndose también uniformes durante el transcurso del año. Se trabaja con una tasa de interés del 2% ETV Se nos solicita hallar el valor de las intercuotas.

Las variables dadas son:

$P = 2225829.546$ $i = 0.02$ ETV $G = 0.05$ $n = 3$ años $m = 4$ trimestres $r_1 = ?$

Resolviendo con la fórmula:

$$r_1 = 2225829.546 * (0.02 * 1.02^4 - 1 - 0.05) / ((1.02^4 - 1) * (1 - 1.05^3 / 1.02^{12})).$$

$$r_1 = 200.0.$$

Al saber que $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$, las intercuotas del primer año serán de \$200000.

Y desarrollándola para saber las intercuotas del segundo año, se tiene que:

$$r_5 = 200000 * (1 + 0.05)^{2-1} = 210000.$$

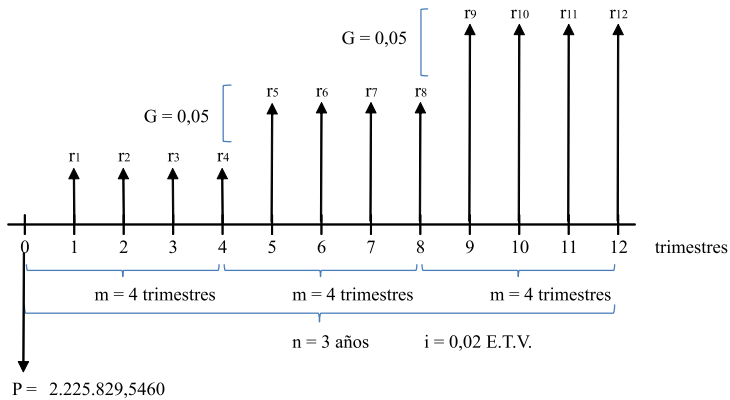
Y al saber que $r_5 = r_6 = r_7 = r_8$, las intercuotas del segundo año serán de \$210000.

Lo mismo se realiza para saber las intercuotas del tercer año, se tiene:

$$r_9 = 210000 \cdot (1 + 0.05)^{3-1} = 220500.$$

Entonces, como se sabe que $r_9 = r_{10} = r_{11} = r_{12}$, las intercuotas del tercer año serán de \$220500.

Obsérvese con detenimiento el siguiente diagrama económico para comprender su aplicación.



3. Apéndice 1. Ejercicios propuestos gradientes

1) Si se conoce que el primer pago es de \$800000 y la serie de pagos disminuye en \$60000. ¿Cuál es el valor del séptimo pago?

$$R_7 = 800000 - 60000 \cdot (7 - 1) = 440000.$$

Respuesta: el valor del séptimo pago es de \$440000.

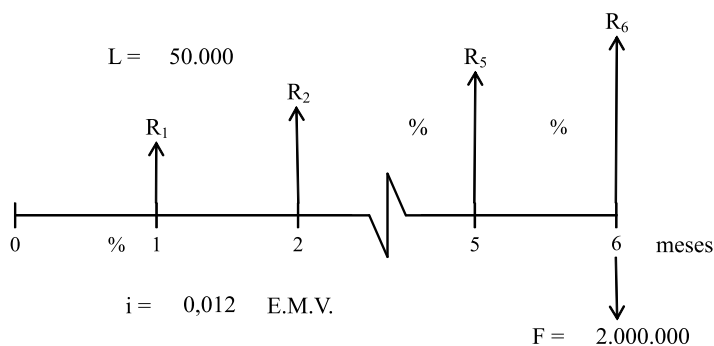
2) Si se conoce que el primer pago es de \$1500000 y la serie de pagos aumenta en un 5%. ¿Cuál es el valor del décimo pago?

$$R_{10} = 1500000 \cdot (1 + 0.05)^{(10-1)} = 2326992.32.$$

Respuesta: el valor del décimo pago es de \$2326992.32.

3) Se desea reunir el valor del semestre, cuyo monto es de \$2000000. Para ello, se decide realizar abonos mensuales durante medio año, los cuales aumentarán en \$50000 cada mes. Si el interés que se nos reconoce es del 1.2% EMV, ¿cuál será el valor del primer abono?

El diagrama económico es el siguiente:



Las variables que se tienen son:

$$F = 2000000 \quad i = 0.012 \text{ EMV} \quad n = 6 \text{ meses} \quad L = -50000 \quad R_1 = ?$$

Se selecciona la fórmula y se resuelve.

$$R_1 = (2000000 * 0.012 - 50000 * ((1 + 0.012)^6 - 1) / 0.012 - 6) / (1 + 0.012)^6 - 1).$$

$$R_1 = 200211.9184.$$

Respuesta: el valor de los depósitos es de \$200211.92 para completar lo del semestre.

4) ¿Cuál es el valor presente de 16 cuotas trimestrales, que aumentan en \$10000 una a una, de las cuales la primera es de \$500000 y si el interés es del 24% NTV?

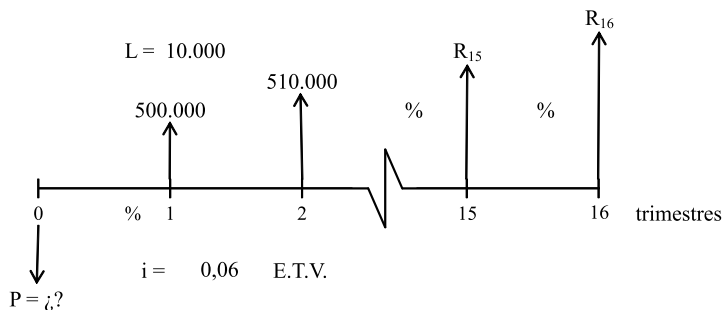
Se convierte la tasa a efectiva trimestral vencida.

$$i = 0.24 / 4 = 0.06 \text{ ETV.}$$

Las variables son:

$$R_1 = 500000 \quad i = 0.06 \text{ ETV} \quad n = 16 \text{ trimestres} \quad L = 10000 \quad P = ?$$

El diagrama económico quedaría así:



Se aplica la fórmula y se resuelve.

$$P = 500000 * (1 - 1.06^{-16}) / 0.06 + 10000 / 0.06 * ((1 - 1.06^{-16}) / 0.06 - 16 * 1.06^{-16}).$$

$$P = 5687540.091.$$

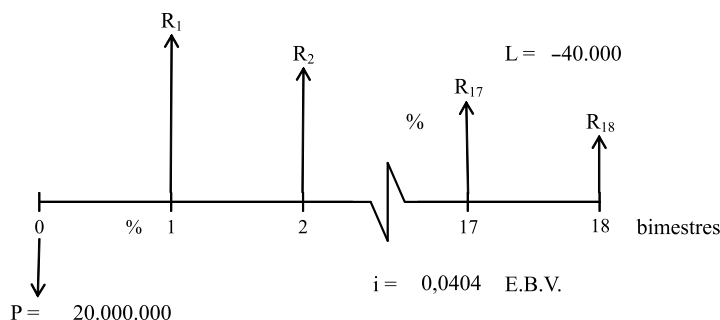
Respuesta: el valor presente es de \$5687540.09.

5) ¿Cuál es el valor de la primera cuota de un crédito de \$20000000 pactado a 18 cuotas bimestrales, que disminuyen en \$40000 una a una y si el interés es del 24% NMV?

Se convierte la tasa a efectiva bimestral vencida.

$$i = (1 + 0.24 / 12)^{(12/6)} - 1 = 0.0404 \text{ EBV.}$$

El diagrama económico quedaría de la siguiente forma.



Las variables son las siguientes:

$$P = 20000000 \quad i = 0.0404 \text{ EBV} \quad n = 18 \text{ bimestres} \quad L = -40000 \quad R_1 = ?$$

Se aplica la fórmula.

$$R_1 = 20000000 * 0.0404 + 40000 / 0.0404 * ((1 - 1.0404^{-18}) / 0.0404 - 18 * 1.0404^{-18}) / (1 - 1.0404^{-18}).$$

$$R_1 = 1882723.5613.$$

Respuesta: \$1882723.56 es la primera cuota de este crédito.

6) Si desde hoy, 13 de marzo de 2024, se ahorra una primera cuota de \$250000 y así sucesivamente todos los meses hasta el 13 de abril de 2026, aumentando cada cuota en un 2%, con un interés del 22.3% NSA, ¿cuál será el valor ahorrado al final de dicho tiempo?

Se convierte la tasa a efectiva mensual vencida.

$$i = (1 - 0.223 / 2)^{(-2/12)} - 1 = 0.019898833 \text{ EMV.}$$

Se calcula el número de cuotas para aplicar la fórmula.

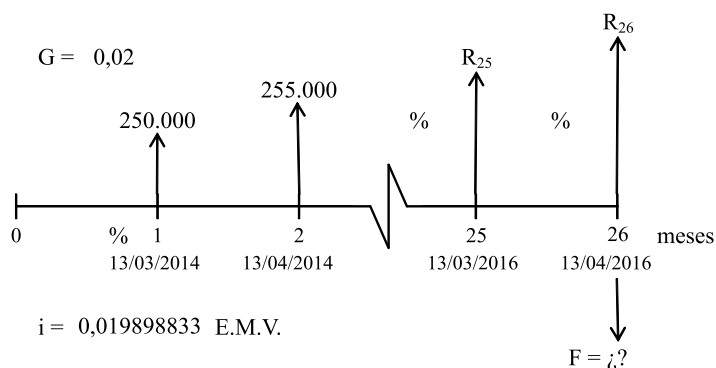
Año 2023, 10 cuotas (desde marzo a diciembre).

Año 2024, 12 cuotas (desde enero a diciembre).

Año 2025, 4 cuotas (desde enero a abril).

26 cuotas.

El diagrama económico quedaría de la siguiente forma.



Las variables son las siguientes:

$$R_1 = 250000 \quad i = 0.019898833 \text{ EMV} \quad n = 26 \text{ meses} \quad G = 0.02 \quad F = ?$$

Se precisa la fórmula y se resuelve.

$$F = 250000 * (1 + 0,02)^{26} - (1 + 0.019898833)^{26} / (0.02 - 0.019898833).$$

$$F = 10650728.3221.$$

Respuesta: el valor ahorrado será de \$10650728.32.

7) Un grupo de amigos realiza desde hoy depósitos trimestrales que disminuyen uno a uno en un 3%, para reunir la suma de \$30000000 dentro de 2 años y medio. Si se invierten en un fondo que reconoce el 8% NTV, ¿cuál será el valor del primer depósito?

Se convierte la tasa a efectiva trimestral vencida.

$$i = 0.08 / 4 = 0.02 \text{ ETV.}$$

Con las siguientes variables.

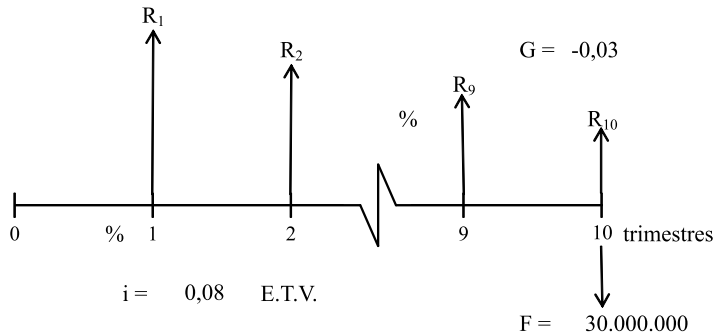
$$F = 30000000 \quad i = 0.02 \text{ ETV} \quad n = 10 \text{ trimestres} \quad G = -0.03 \quad R_1 = ?$$

Se selecciona la fórmula y se aplica.

$$R_1 = 30000000 * (-0.03 - 0.02) / ((1 - 0.03)^{10} - (1 + 0.02)^{10}) = .$$

$$R_1 = 3114810.0734.$$

El diagrama económico queda de la siguiente forma:



Respuesta: la primera cuota trimestral es de \$3114810.07.

8) Se desea adquirir un carro cuyo valor es de \$50000000, el cual se pagará mediante una cuota inicial del 20% y 36 cuotas bimestrales que aumentan una a una en un 4%. Si el interés pactado es del 22.5% NSV, ¿cuál será el valor de la primera cuota?

Se convierte la tasa a efectiva bimestral vencida.

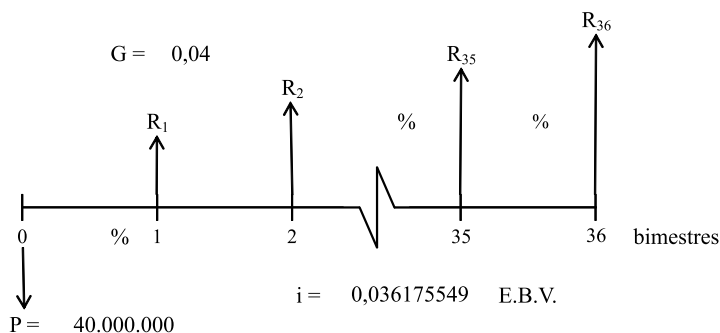
$$i = (1 + 0.225 / 2)^{(2/6)} - 1 = 0.036175549 \text{ EBV.}$$

Restándole \$10000000 de la cuota inicial al valor total del crédito, lo que queda por financiar es \$40000000.

Las variables son.

$$P = 40000000 \quad i = 0.036175549 \text{ EBV} \quad n = 36 \text{ bimestres} \quad G = 0.04 \quad R_1 = ?$$

El diagrama económico sería el siguiente:



Se selecciona la fórmula y se resuelve.

$$R_1 = 40000000 * (0,04 - 0,036175549) / (1,04^{36} * 1,036175549^{-36} - 1).$$

$$R_1 = 1078630,8162.$$

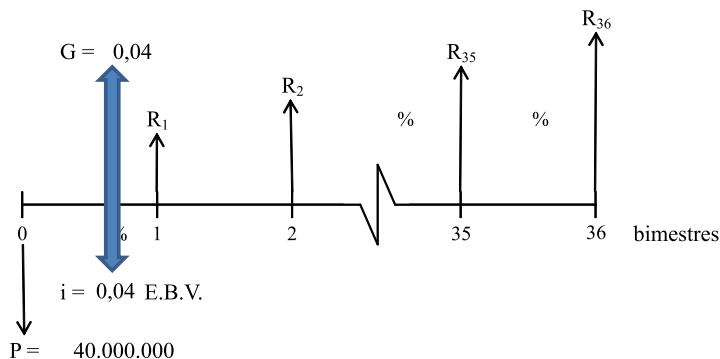
Respuesta: la primera cuota es de \$1078630,82.

9) Con las condiciones del ejercicio anterior, suponga ahora un interés del 24% NBV, ¿cuál será el valor de la primera cuota?

Se convierte la tasa a efectiva trimestral vencida.

$$i = 0,24 / 6 = 0,04 \text{ EB.V.}$$

El diagrama económico sería el siguiente:



Las variables son las siguientes:

$$P = 40000000 \quad i = 0,04 \text{ EB.V.} \quad n = 36 \text{ bimestres} \quad R_1 = ?$$

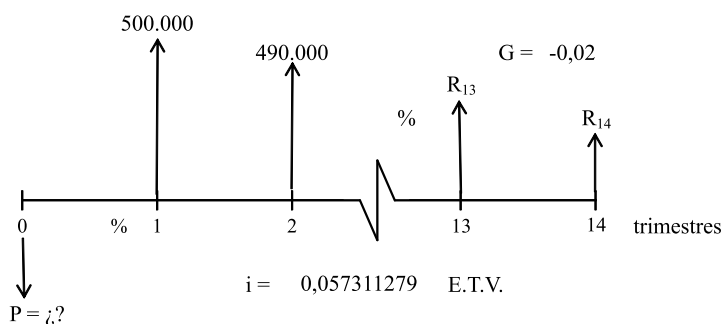
Como la tasa de interés es igual que el gradiente, se desarrolla la respectiva fórmula.

$$R_1 = 40000000 * (1 + 0.04) / 36 = 1155555.5556.$$

Respuesta: la primera cuota es de \$1555555.56.

10) Se empezó a pagar una cuota de \$500000 por un crédito que solicité a 3 años y medio, con una tasa de interés del 28% NMV. Dichas cuotas trimestrales van disminuyendo en un 2%. ¿Cuál fue el valor inicial del préstamo?

El siguiente es el diagrama económico:



Se convierte la tasa a efectiva trimestral vencida.

$$i = (1 + 0.2250 / 12)^{(12/4)} - 1 = 0.057311279 \text{ ETV.}$$

Las variables son:

$$R_1 = 500000 \quad i = 0.057311279 \text{ ETV} \quad n = 14 \text{ trimestres} \quad G = -0.02 \quad P = ?$$

Se escoge la fórmula y se resuelve.

$$P = 500000 * ((1 - 0.02)^{14} * (1 + 0.057311279)^{-14} - 1) / (-0.02 - 0.057311279).$$

$$P = 4233521.4716.$$

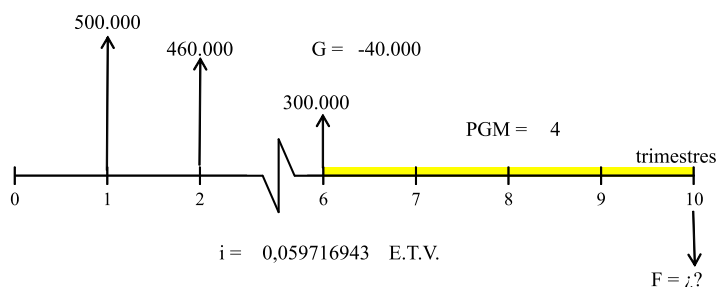
Respuesta: el valor del préstamo fue de \$4233521.47.

11) La tía soltera de la familia ahorra inicialmente la suma de \$500000 y, posteriormente, durante un año y medio, aumenta en \$40000 cada depósito trimestral en una entidad financiera que reconoce un interés del 12.3% ESV. Si deja dicho dinero quieto un año más después del último abono, ¿cuánto tendrá al final de dicho tiempo?

Se convierte la tasa a efectiva semestral vencida.

$$i = (1 + 0.123)^{(2/4)} - 1 = 0.059716943 \text{ E.T.V.}$$

El diagrama económico es el siguiente:



Se escoge la fórmula y se resuelve hasta el punto de donde se cancela la última cuota.

$$F = 400000 * ((1.059716^6 - 1) / 0.059716 - 20000 / 0.059716 * ((1 + 0.059716^6 - 1) / 0.059716 - 6).$$

$$F = 2463156.7153.$$

Luego se proyecta un año más con fórmula de valor futuro.

$$F = 2463156.72 * (1 + 0.059716943)^4 = 3106358.3653.$$

Respuesta: el valor final en las condiciones dadas es de \$3106358.37.

12) El vehículo que se va a financiar tiene un costo de \$80000000. La tasa de interés es del 24% NMV y el plazo total es de 6 años. Durante los primeros 10 meses no se realizan pagos, y a partir del mes 12 se comienzan a cancelar cuotas bimestrales que aumentan en \$100000 cada vez. , ¿cuál es el valor de la primera cuota?

Se convierte la tasa a efectiva bimestral vencida.

$$i = (1 + 0.02)^{(12/6)} - 1 = 0.0404.$$

Se proyecta 10 meses (5 bimestres) adelante.

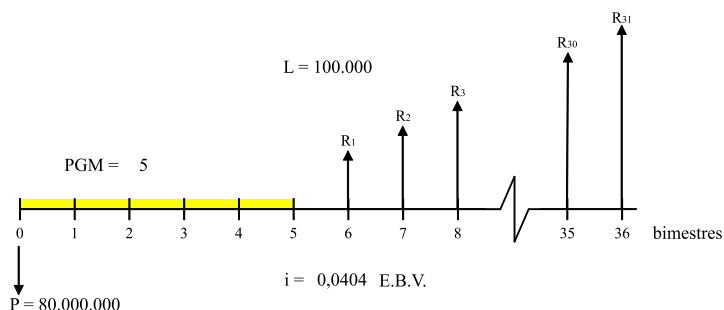
$$F = 80000000 * (1 + 0.0404)^5 = .$$

F= 97519553.5996 valor presente en el período 5.

Con este valor proyectado al período 5, se considera el valor presente para el gradiente aritmético con las siguientes variables:

$$P = 97519553.5996 \quad i = 0.0404 \text{ EBV} \quad n = 31 \text{ bimestres} \quad L = 100000 \quad R_1 = ?$$

El diagrama económico quedaría de la siguiente forma:



Se selecciona la fórmula y se resuelve.

$$R_1 = (97519553.5996 * 0.0404 - 100000 * ((1 - 1.0404^{-31}) / 0.0404 - 31 * 1.0404^{-31}) / (1 - 1.0404^{-31})).$$

$$R_1 = 4381279.0054.$$

Respuesta: el valor de la primera cuota es de \$4381279.01.

13) Ahora supóngase que no se conoce el valor del vehículo que se va a financiar, pero se sabe que la tasa es del 10.5% ESV, que el plazo total es de 6 años, que durante los primeros 11 meses no se realiza ningún pago, y que solo hasta el mes 12 se cancela la primera cuota de \$5000000. Posteriormente, se siguen pagando cuotas trimestrales que disminuyen en \$200000 cada una. ¿Cuál será el valor del vehículo financiado?

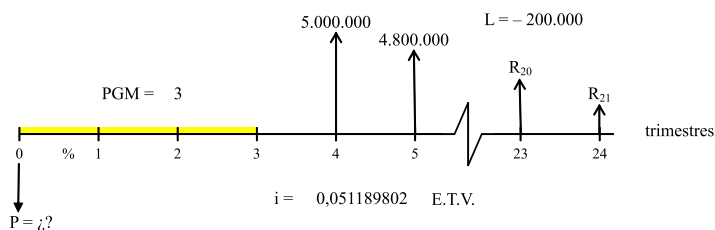
Se convierte la tasa a efectiva trimestral vencida:

$$i = (1 + 0.1050)^{(2/4)} - 1 = 0.051189802 \text{ ETV.}$$

Las variables son:

$$R_1 = 5000000 \quad i = 0.051189802 \text{ ETV} \quad n = 21 \text{ trimestres} \quad L = -200000 \quad P = ?$$

El diagrama económico es:



Se halla el valor presente en el período 3 con la siguiente fórmula:

$$P = 5000000 * (1 - 1.051189802^{-21}) / 0.051189802.$$

$$-200000 / 0.051189802 * ((1 - 1.051189802^{-21}) / 0.051189802 - 21 * 1.051189802^{-21}).$$

$$P = 42625782.9914 \text{ en el período 3.}$$

Se traslada al período 0, se proyecta tres trimestres atrás con la siguiente fórmula:

$$P = 42625782.9914 * (1 + 0.051189802)^{-3} = 36696864.0170.$$

Respuesta: el valor del préstamo es de \$36696864.02.

14) Se desea reunir \$80000000 para una excursión turística familiar en un crucero por el Caribe, programada para dentro de 22 meses. Se creará un fondo que reconoce un interés del 2% EMA. Se ha decidido realizar abonos mensuales que aumentan en \$200000 y 3 abonos de \$2000000, \$3000000 y \$4000000 en los meses 6, 12 y 18, respectivamente. ¿Cuál será el valor del primer abono?

Se convierte la tasa dada a una tasa efectiva mensual vencida.

$$i = 0.02 / (1 - 0.02) = 0.020408163 \text{ EMV.}$$

Por cuestiones prácticas se halla el valor futuro de los abonos extraordinarios.

$$F_1 = 2000000 * (1 + 0.020408163)^{16} = 2763202.9545 \text{ del punto 6 al 2.}$$

$$F_2 = 3000000 * (1 + 0.020408163)^{10} = 3675643.4260 \text{ del punto 12 al 2.}$$

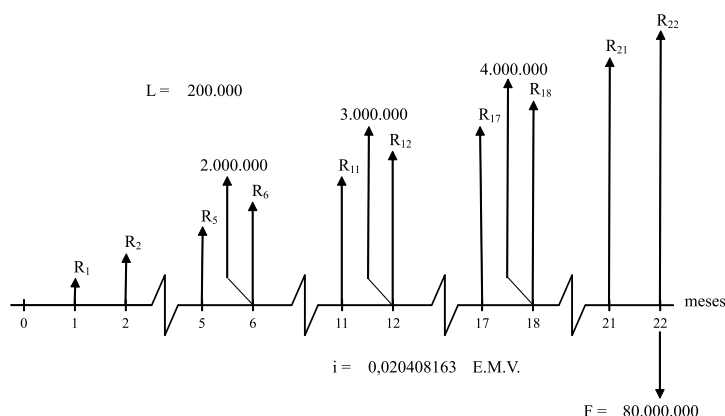
$$F_3 = 4000000 * (1 + 0.020408163)^4 = 4336663.1389 \text{ del punto 18 al 2.}$$

Valor de los abonos extraordinarios 10771509.5192 sobre el punto 2.

Se le resta al valor futuro total en el punto 2.

$$F = 80000000 - 10771509.5192 = 69228490.4805.$$

El siguiente es el diagrama económico.



Las variables son:

$$F = 69228490.4805 \quad i = 0.020408163 \text{ EMV} \quad n = 22 \text{ meses} \quad L = 200000 \quad R_1 = ?$$

Con el anterior y las demás variables se aplica la siguiente fórmula:

$$R_1 = (69228490.4805 * 0.020408 - 200000 * ((1.020408^{22} - 1) / 0.020408 - 22)) / (1.020408^{22} - 1).$$

$$R_1 = 5865929216.$$

Respuesta: el primer abono será de \$586592.92.

15) Con la misma situación anterior, en la que se aspira a reunir \$80000000 para una excursión turística en un crucero por el Caribe dentro de 2 años, se crea un fondo que reconoce un interés del 2% EMA y se realizan abonos mensuales que aumentan en un 5%. Además, se consideran 3 abonos de \$2000000, \$3000000 y \$4000000, que se realizarán en los meses 6, 12 y 18, respectivamente. ¿Cuál será el valor del primer abono?

Se convierte la tasa dada a una tasa efectiva mensual vencida.

$$i = 0.02 / (1 - 0.02) = 0.020408163 \text{ EMV}.$$

Por cuestiones prácticas se halla el valor futuro de los abonos extraordinarios.

$$F_1 = 2000000 * (1 + 0.020408163)^{18} = 2877137.6036 \text{ del punto 6 al 24.}$$

$$F_2 = 3000000 * (1 + 0.020408163)^{12} = 3823035.6373 \text{ del punto 12 al 24.}$$

$$F_3 = 4000000 * (1 + 0.020408163)^6 = \underline{4515475.9881} \text{ del punto 18 al 24.}$$

Valor de los abonos extraordinarios 11215649.2289 sobre el punto 24.

Se le resta al valor futuro total en el punto 24.

$$F = 80000000 - 11215649.2289 = 68784350.771.$$

Se proyecta dos períodos atrás.

$$P = 68784350.7711 * (1 + 0.020408163)^{-2} = 66060490.4805 \text{ en el punto 2.}$$

Las variables son:

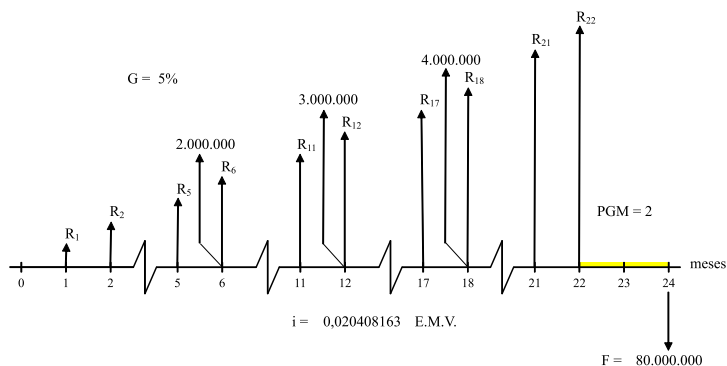
$$F = 66060490.4805 \quad i = 0.020408163 \quad \text{EMV} \quad n = 22 \text{ meses} \quad G = 0.05 \quad R_1 = ?$$

Se aplica la respectiva fórmula:

$$R_1 = 66060490.4805 * (0.05 - 0.020408163) / ((1 + 0.05)^{22} - (1 + 0.020408163)^{22}).$$

$$R_1 = 1431481.9236.$$

El diagrama económico quedaría de la siguiente forma:



Respuesta: el primer abono debe ser de \$1431481.92.

16) ¿Cuál será el valor que se tendrá al final de cuatro años en una cuenta de ahorros, si con una tasa de interés del 21% EAV, se realizan abonos bimestrales iguales durante el primer año de \$250000, que luego para los siguientes años aumentan en \$500000, permaneciendo uniformes los abonos durante el transcurso del año?

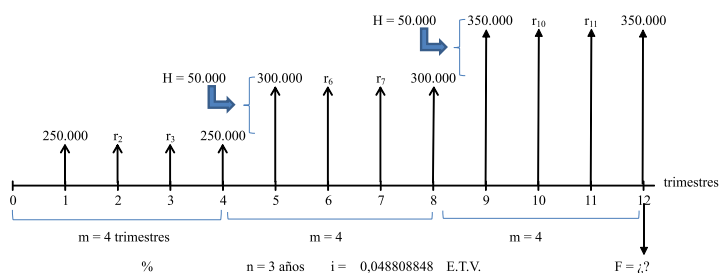
Se convierte la tasa a efectiva trimestral vencida (de las intercuotas):

$$i = (1 + 0.21)^{(1/4)} - 1 = 0.048808848 \text{ ETV.}$$

Las variables son:

$$r_1 = 250000 \quad H = 50000 \quad i = 0.048808848 \text{ ETV} \quad n = 3 \text{ años} \quad m = 4 \text{ trimestres} \quad F = ?$$

El diagrama económico:



Se aplica la fórmula con las variables dadas.

$$F = 250000 * (1.048008^6 - 1) / 0.048008 + 50000 / 0.048008 * (((1.048008^6 - 1) / (1.048008^2 - 1) - 3).$$

$$F = 2012954.693.$$

Respuesta: el valor futuro será de \$2012954.69.

17) ¿Cuál será el valor que se tendrá al final de cinco años en una cuenta de ahorros, si con una tasa de interés del 24% EAV, se realizan abonos trimestrales iguales durante el primer año de \$800000, que luego para los siguientes años disminuyen en un 3%, permaneciendo uniformes los abonos durante el transcurso del año?

Se convierte la tasa a efectiva bimestral vencida:

$$i = (1 + 0.24)^{(1/6)} - 1 = 0.036502326 \text{ EBV.}$$

Las variables son:

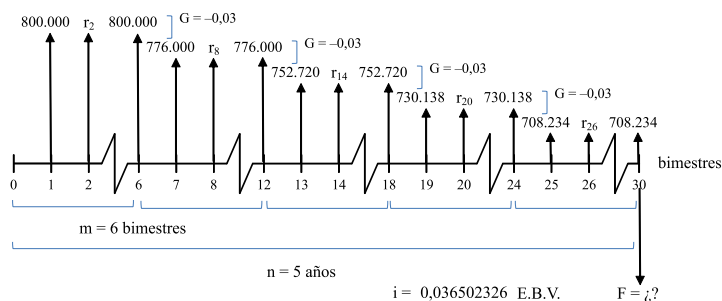
$$r_1 = 800000 \quad G = -0.05 \quad i = 0.036502323 \text{ EBV} \quad n = 5 \text{ años} \quad m = 6 \text{ bimestres} \quad F = ?$$

Se aplica la fórmula.

$$F = 800000 * (1.0365023^6 - 1) / (0.0365023 * (1.0365023^6 - 0.97)) * (1.0365023^{30} - 0.97^5).$$

$$F = 40382518.7520.$$

El diagrama económico sería el siguiente:



Respuesta: el valor futuro será \$40382518.75.

18) Se desea acumular un fondo de \$30000000 dentro de 2 años. Para lograrlo, se realizarán 12 depósitos bimestrales, siendo el primero de ellos de \$1800000, y cada depósito posterior aumentará en \$100000. ¿Cuál es la tasa de interés pactada para este ahorro?

Se plantea la igualdad con los datos suministrados.

$$30000000 = 1800000 * ((1 + i)^{12} - 1) / i + 100000 / i * (((1 + i)^{12} - 1) / i - 12).$$

Por tanteo (acierto y error), se le asigna valores a “i” (uno positivo y uno negativo).

Con el 1.50%.

$$30000000 = 1800000 * ((1 + 0.015)^{12} - 1) + 100000 / 0.015 * (((1 + 0.015)^{12} - 1) / 0.015 - 12).$$

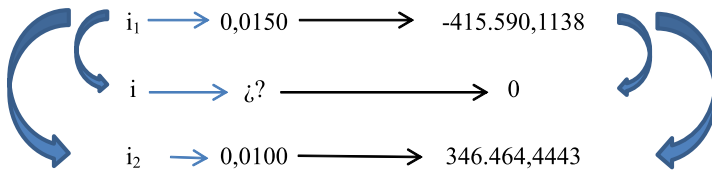
$$3000000 - 30415590.1138 = -415590.1138 \text{ valor negativo.}$$

Con el 1.00%.

$$30000000 = 1800000 * ((1+0.01)^{12} - 1) + 100000/0.01 * (((1+0.01)^{12} - 1)/0.01 - 12).$$

$$30000000 - 29653535.5557 = 346464.4443 \text{ valor positivo.}$$

Con el 1.00% (“ i_2 ”) nos da el valor positivo y con el 1.50% (“ i_1 ”) nos da el valor negativo, los cuales se procede a interpolar de la siguiente manera:



Se plantean las proporciones.

$$(0.015 - 0.010) / (0.015 - i) = (-415590.1138 - 346464.4443) / (-415590.1138 - 0).$$

Se va despejando.

$$0.005 / (0.015 - i) = -762054.5581 / -415590.1138.$$

$$0.005 * -415590.1138 = -762054.5581 * (0.015 - i).$$

$$-2077.9506 = -11430.8184 + 762054.5581 * i.$$

$$-2077.9506 + 11430.8184 = 762054.5581 * i.$$

$$9352.6878 = 762054.5581 * i.$$

$$i = 762054.5581 / 9352.6878 = 0.01227322598 \text{ EBV.}$$

También se puede utilizar la siguiente fórmula, para obtener idéntico resultado:

$$i = i1 + (i2 - i1) * \frac{-X1}{(X2 - X1)}$$

Véase su aplicación, conociendo el valor de las variables planteadas.

$$i_1 = 0.015 \text{ (tasa que arrojó el valor negativo) } X_1 = -415590.1138.$$

$$i_2 = 0.01 \text{ (tasa que arrojó el valor positivo) } X_2 = 346464.4443.$$

Resolviendo con la fórmula:

$$i = 0.015 + (0.01 - 0.015) * 415590.1138 / (346464.4443 + 415590.1138).$$

$$i = 0.01227322598 \text{ EBV.}$$

Respuesta: la tasa de interés es del 1.23% EBV.

4. Bibliografía

- [1] Asturias Corporación Universitaria. (2019). *Bitácora de matemática financiera: Convenciones, glosario, fórmulas*. https://www.centro-virtual.com/recursos/biblioteca/pdf/matematicas_financieras/unidad0_pdf1.pdf
- [2] Baca Currea, G. (2007). *Ingeniería económica* (Octava edición). Fondo Educativo Panamericano.
- [3] Cano Morales, A. M. (2024). *Matemáticas financieras bajo Normas Internacionales de Contabilidad y Normas Internacionales de Información Financiera* (Primera edición). Ediciones de la U.
- [4] García Santillán, A. (2014). *Matemáticas financieras para la toma de decisiones* (1.a ed.). Euromediterranean Network.
- [5] Meza Orozco, J. de J. (2017). *Matemáticas financieras aplicadas* (Sexta edición). ECOE Ediciones.
- [6] Moreno Gómez, N. E. y Suárez Caicedo, L. E. (2023). *Ingeniería económica* (Primera edición). Editorial Universidad Pontificia Bolivariana.

5. Anexos

5.1 Anexo A. Matriz MILHER



MATRIZ "MILHER" v2

CONVERSIÓN (EQUIVALENCIA) DE TASAS

MILTON HERNANDO TRIANA LOZANO

1

2

3

4

DE

A

Misma periodicidad

Diferente periodicidad

Nominal Anticipada (Ja)

Nominal Anticipada ("Ja")

Nominal Vencida ("J")

Efectiva Anticipada ("ia")

Efectiva Vencida ("i")

Nominal Vencida (J)

Nominal Anticipada ("Ja")

Nominal Vencida ("J")

Efectiva Anticipada ("ia")

Efectiva Vencida ("i")

Efectiva Anticipada (ia)

Nominal Anticipada ("Ja")

Nominal Vencida ("J")

Efectiva Anticipada ("ia")

Efectiva Vencida ("i")

Efectiva Vencida (i)

Nominal Anticipada ("Ja")

Nominal Vencida ("J")

Efectiva Anticipada ("ia")

Efectiva Vencida ("i")

DE

A

Misma periodicidad

Diferente periodicidad

1

2

3

4

Identificar la tasa de origen en la columna 1

Definir la tasa de destino en la columna 2: un reglón al frente de la caja seleccionada en la columna 1

"si la periodicidad es la misma": aplicar la fórmula de la columna 3, sobre el mismo renglón

"si la periodicidad es diferente": aplicar la fórmula de la columna 4, sobre el mismo reglón

OPCIONES EXCLUYENTES

PERIODICIDAD

M: mensual

B: bimestral

T: trimestral

C: cuatrimestral

S: semestral

A: anual

FINANZAS: ¡QUÉ FÁCIL!

SEMPER PARATUS

C A R P E

5.2 Anexo B. Tablas de amortización

Las tablas de amortización se utilizan para problemas de valor presente, y su aplicabilidad se da principalmente en los préstamos o créditos. En ellas se muestra una serie de cuotas a lo largo de un horizonte económico, indicando, para cada pago realizado, cuánto se destina al pago de intereses, cuánto se abona al capital del crédito y cuál es el saldo del crédito después de haber realizado cada cuota, ya sea en una anualidad o en un gradiente. El método de amortización gradual más utilizado es el francés, también conocido como progresivo. Este método presenta una dificultad, ya que, si se desea pagar anticipadamente en el corto o mediano plazo, el capital adeudado será mayor que en otros métodos de pago (Mora Zambrano y Pro Zambrano, 2019, p. 247).

Las entidades financieras, casi siempre, entregan a los usuarios del servicio crediticio, en sus distintas modalidades, una tabla de amortización. Esta tabla incluye un encabezado con los datos de identificación del usuario y las condiciones del crédito, tales como el valor inicial, la tasa de interés, el plazo, la amortización y la modalidad. Comúnmente, a esta tabla se le denomina “plan de pagos”.

Para su diseño se trazan 5 columnas y estas se titulan conforme a la información correspondiente, obsérvese:

- En la primera columna (n), van los períodos de tiempo e indicarán el número de filas que tendrá la tabla
- En la segunda columna (cuota), se estipulan el valor de las cuotas de la anualidad o del gradiente, halladas con la respectiva fórmula,
- En la tercera columna (intereses), se relaciona la porción de la cuota correspondiente al valor de los intereses, que se obtiene al multiplicar el saldo anterior por la tasa de interés efectiva y vencida
- En la cuarta columna (amortización) se relaciona la parte de la cuota correspondiente a la amortización o abono a capital. Esta se obtiene al tomar el valor de la cuota, que se encuentra en la segunda columna, y restarle el valor de los intereses, que está en la tercera columna.
- En la quinta columna (saldo) se halla el valor del nuevo saldo, que resulta de tomar el saldo anterior y restarle el valor de la amortización o abono a capital de la cuota, que se encuentra en la cuarta columna. Esto implica que, con la última cuota, el saldo es cero.

Se exponen ejemplos con las diversas situaciones, hallando el valor de la cuota y, posteriormente, diseñando la tabla de amortización respectiva.

Se calcula la deuda pactada en el punto requerido utilizando la fórmula de valor futuro (adaptada para interés compuesto) y se le resta el valor futuro de la cuota (“**R**” o “**R₁**”), considerando el número de cuotas ya pagadas (“**K**”).“.

$$P_k = P * (1 + i)^K - R * \frac{(1 + i)^K - 1}{i}$$

$$P_K = P * (1 + i)^K - \left(R_1 * \frac{(1 + i)^K - 1}{i} \pm \frac{L}{i} * \left(\frac{(1 + i)^K - 1}{i} - K \right) \right)$$

$$P_K = P * (1 + i)^K - R_1 * \frac{(1 \pm G)^K - (1 + i)^K}{\pm G - i}$$

$$P_K = R_1 * (1 + i) * (K - 1) * (n - K) \quad \text{si } G = i$$

5.3 Anexo C. Tablas de capitalización

Las tablas de capitalización se utilizan para situaciones de valor futuro, siendo su aplicabilidad especialmente relevante en diversas formas de ahorro. Estas tablas presentan una serie de abonos a lo largo de un horizonte económico, indicando, para cada pago, cuánto es el valor que las entidades cancelan por concepto de intereses, cuánto se incrementa el saldo anterior del ahorro y cuál es el saldo total del ahorro tras la realización de cada abono, ya sea en forma de anualidad o en un gradiente.

Para su diseño, también, se trazan cinco columnas y se denominan conforme a la información correspondiente:

- En la primera columna (**n**), van los períodos de tiempo e indicarán el número de filas que tendrá la tabla, desde el 1 si son vencidos y desde el 0 si son anticipados.
- En la segunda columna (**abono**), se estipulan el valor de los abonos de la anualidad o del gradiente, halladas con la respectiva fórmula.
- En la tercera columna (**intereses**), se relaciona la porción del abono correspondiente al valor de los intereses, la cual se obtiene al multiplicar el saldo anterior por la tasa de interés efectiva y vencida.

- En la cuarta columna (**capitalización**), se relaciona la parte del abono correspondiente a la capitalización. Esta se obtiene al tomar el valor del abono, que se encuentra en la segunda columna, y sumarle el valor de los intereses, que está en la tercera columna.
- En la quinta columna (**saldo**) se halla el valor del nuevo saldo, que resulta de tomar el saldo anterior y sumarle el valor de la capitalización del abono, que se encuentra en la cuarta columna. Esto implica que, con el último abono, el saldo será el valor futuro pretendido.

Cabe anotar que en el primer período son iguales el abono (segunda columna), la capitalización (cuarta columna) y el saldo (quinta saldo).

Con la cuota de la anualidad (“**R**”) o con la primera cuota del gradiente (“**R₁**”) se halla el valor futuro (“**F**”) con el número de cuotas abonadas (“**K**”).

$$F_K = R * \frac{(1 + i)^K - 1}{i}$$

$$F_K = R_1 * \frac{(1 + i)^K - 1}{i} \pm \frac{L}{i} * \left(\frac{(1 + i)^K - 1}{i} - K \right)$$

$$F_K = R_1 * \frac{(1 \pm G)^K - (1 + i)^K}{\pm G - i} \quad \text{si } G \neq i$$

$$F_K = R_1 * n * (1 + i)^{K-1} \quad \text{si } G = i$$

Sobre el autor

Milton Hernando Triana Lozano

Contador público y Magister en Administración campo finanzas. Docente del programa de Contaduría Pública de la Universidad Santo Tomás, seccional Villavicencio.

Correo: miltontriana@ustavillavicencio.edu.co

Este libro se compuso en T_EX Gyre Termes a 11 puntos,
usando el sistema de composición tipográfica ConT_EXt,
y se terminó en diciembre de 2025.



Esta cartilla de gradientes profundiza en el análisis de series de pagos periódicos no constantes, indispensables para modelar flujos financieros reales en contextos empresariales y personales. A partir de una exposición ordenada de los gradientes aritméticos (crecientes y decrecientes), geométricos y escalonados, el texto presenta definiciones, nomenclatura, fórmulas y diagramas que permiten calcular valores presentes y futuros, determinar la primera cuota, establecer tasas implícitas y comprender cómo evolucionan los pagos cuando cambian en montos fijos o porcentajes constantes. El uso sistemático de tablas de capitalización y amortización refuerza la comprensión paso a paso de cada procedimiento.

Dirigida a estudiantes y docentes de las ciencias económicas, administrativas y contables, así como a profesionales y personas que toman decisiones financieras en su actividad cotidiana, esta cartilla se concibe como una guía práctica para el diseño y evaluación de esquemas de ahorro, crédito, inversión y presupuestación con flujos variables. Su propósito, entonces, es fortalecer las competencias para interpretar y proyectar escenarios financieros dinámicos —donde los ingresos, costos y pagos no son estáticos— aportando herramientas rigurosas para una gestión financiera más precisa, flexible y alineada con la realidad de los mercados.

