

**UNIVERSIDAD
SANTO TOMÁS -
BOGOTÁ**

Solución de Sistemas de EDO

Por Métodos Numéricos y
software EMT

Ing. Carlos J. Alba Mendoza
Facultad de Ingeniería Civil

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

PRESENTACION

En este documento se presenta la aplicación de los métodos numéricos de EULER, HEUN, PUNTO MEDIO Y RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN (RK4) en la solución de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), en el contexto de la asignatura MÉTODOS NUMÉRICOS Y OPERACIONAL del plan de estudios del Programa de Ingeniería Civil de la Universidad Santo Tomás de Bogotá, y está dirigido a los estudiantes de dicho curso como un elemento de apoyo en su estudio.

Se ha desarrollado inicialmente su solución analítica utilizando el software matemático EULER MATH TOOLBOX -EMT (MAXIMA)¹ para comparar con los resultados obtenidos por cada uno de los métodos utilizados, cuyas tablas se elaboraron con las herramientas disponibles en EXCEL®.

Las ecuaciones referenciadas son²:

$$\text{Ecuación de Euler (5.1)} \quad y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i * h$$

$$\text{Ec. (5.2)} \quad y_{i+1}^0 = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i * h$$

$$\text{Ec. (5.3)} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1} = f'(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$$

$$\text{Ec. (5.4)} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{f'(x_i, y_i) + f'(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} * h$$

$$\text{Ec. (5.5)} \quad y_{i+1/2} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i * \frac{h}{2}$$

$$\text{Ec. (5.6)} \quad y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1/2} * h$$

$$\text{Ec. (5.7a)} \quad k_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_i = f'(x_i, y_i)$$

$$\text{Ec. (5.7b)} \quad k_2 = f'(x_{i+h/2}, y_{i+k_1 h/2})$$

$$\text{Ec. (5.7c)} \quad k_3 = f'(x_{i+h/2}, y_{i+k_2 h/2})$$

$$\text{Ec. (5.7d)} \quad k_4 = f'(x_{i+h}, y_{i+k_3 h})$$

$$\text{Ec. (5.7)} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

¹ Software con licencia GPL desarrollado con base en MAXIMA por el Profesor René Grothmann (Universidad Católica de Eichstätt, Alemania. <http://www.euler-math-toolbox.de/>)

² Adaptadas de: Chapra S., Canale R., MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS, 6ta Ed., McGraw Hill.

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

Resolver el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= -0.5y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1 \\ y_{1(0)} &= 4, \quad y_{2(0)} = 6, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad h = 0.5\end{aligned}$$

Solución:

Solución Exacta con EMT:

Función: `desolve([eqn1,eqn2],[f1(x),f2(x)])`

La solución exacta podemos desarrollarla en MAXIMA con EMT aplicando en EULER la función anterior.

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= -0.5y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1\end{aligned}$$

Condiciones iniciales ($x=0$):

$$y_{1(0)} = 4, \quad y_{2(0)} = 6, \quad \text{Intervalo: } 0 < x < 2$$

Se definen las ecuaciones del sistema

```
>eqn1 &='diff(y1(x),x)=-0.50*y1(x);
>eqn2 &='diff(y2(x),x)=4-0.3*y2(x)-0.1*y1(x);
```

Se determinan las condiciones iniciales:

```
>& atvalue(y1(x),x=0,4);
>& atvalue(y2(x),x=0,6);
```

Se aplica la función `desolve`:

```
>& desolve([eqn1,eqn2],[y1(x),y2(x)])
```

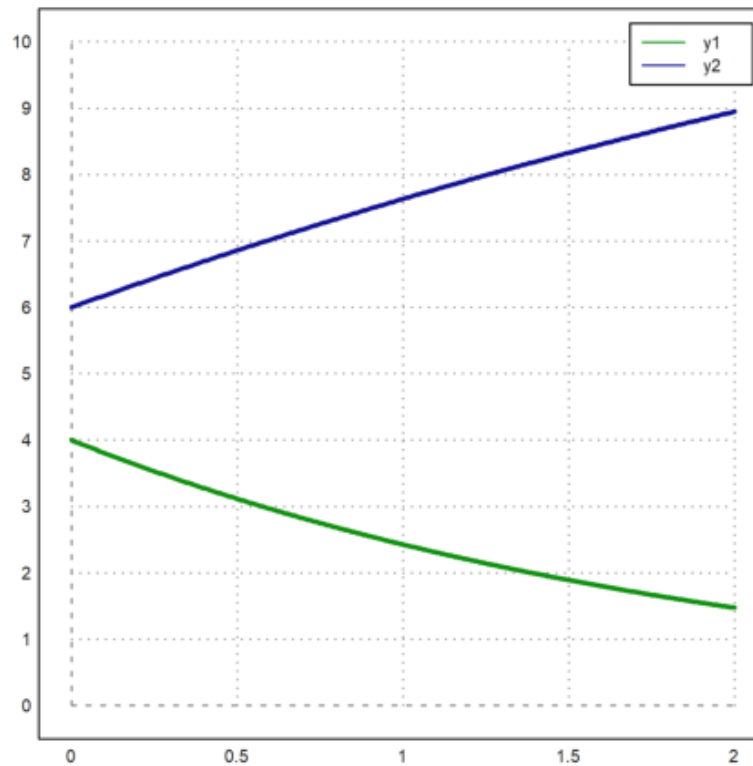
$$[y_1(x) = 4 E^{-x/2}, y_2(x) = -\frac{28}{3} E^{-x/2} + 2 E^{-x/2} + \frac{40}{3}]$$

Gráfica de la solución analítica $[y_1(x), y_2(x)]$:

```
>y1:="4*%e^(-0.5*x)"; y2:= "(-28/3)*%e^(-0.3*x)+2*%e^(-0.5*x)+40/3";
>plot2d(y1,a=0,b=2,c=0,d=10, thickness=3, color=green);
>plot2d(y2,thickness=3,color=blue,>add),
```

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

```
>labelbox(["y1","y2"],styles=["-","-"],colors=[green,blue]):
```



Métodos Numéricos:

El proceso seguido es similar al aplicado para resolver una EDO en el cual se determinaban los valores de una incógnita (ver cuadernillo “**Solución EDO Tipos $f(x)$ $f(x,y)$ – Con uso de software EMT**” en el Repositorio).

En este caso se desarrollan las tablas de cálculo en cada uno de los métodos para encontrar los dos valores y_1 y y_2 buscados. Finalmente se comparan gráficamente los valores verdaderos (o analíticos encontrados) con los calculados en las tablas.

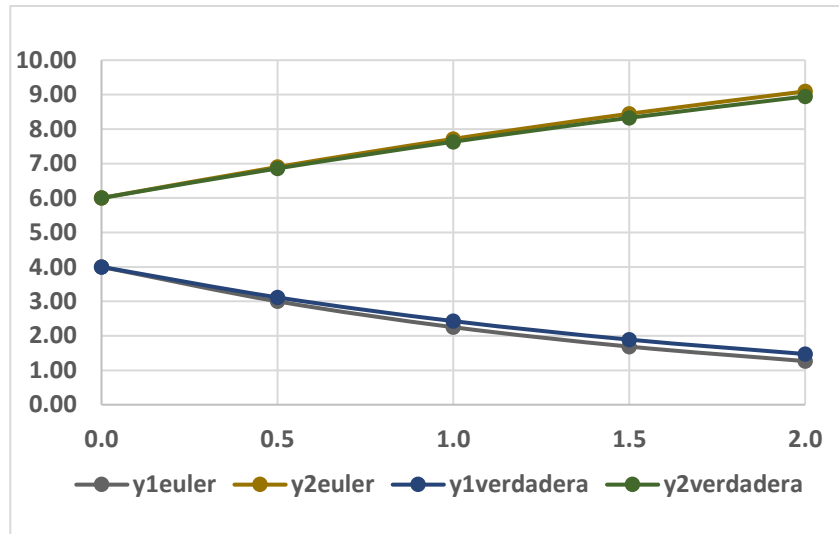
Método Numérico de Euler:

Tamaño de paso $h=0.5$:

x	y1	y1	[dy1/dx]	Error	y2	y2	[dy2/dx]	Error
	y1verd.	y1EULER		y1	y2verd	y2EULER		y2
0.00	4.0000	4.0000	-2.0000	0.0%	6.0000	6.0000	1.8000	0.0%
0.50	3.1152	3.0000	-1.5000	3.7%	6.8577	6.9000	1.6300	0.6%
1.00	2.4261	2.2500	-1.1250	7.3%	7.6321	7.7150	1.4605	1.1%
1.50	1.8895	1.6875	-0.8438	10.7%	8.3269	8.4453	1.2977	1.4%
2.00	1.4715	1.2656	-0.6328	14.0%	8.9469	9.0941	1.1452	1.6%

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

Comparacion gráfica:

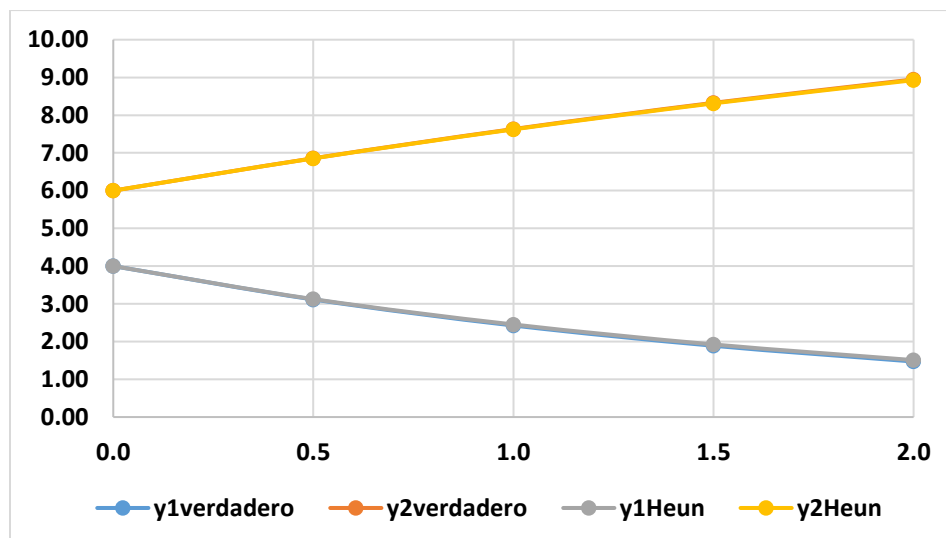


Método Numérico de HEUN:

Tamaño de paso $h=0.5$:

x	y1 _{verd}	Ec.(5.2)	Ec.(5.3)	Ec.(5.4)	Error	y2 _{verd}	Ec.(5.2)	Ec.(5.3)	Ec.(5.4)	Error
		y ⁰ _{i+1}	[dy1/dx] _{i+1}	y1Heun	y1		y ⁰ _{i+1}	[dy2/dx] _{i+1}	y2Heun _n	y2
0.0	4.0000		-2.0000	4.0000	0.0%	6.0000		1.8000	6.0000	0.0%
0.5	3.1152	3.0000	-1.5000	3.1250	0.3%	6.8577	6.9000	1.6175	6.8544	0.0%
1.0	2.4261	2.3750	-1.1875	2.4531	1.1%	7.6321	7.6631	1.4558	7.6227	0.1%
1.5	1.8895	1.8594	-0.9297	1.9238	1.8%	8.3269	8.3506	1.3024	8.3122	0.2%
2.0	1.4715	1.4590	-0.7295	1.5090	2.5%	8.9469	8.9635	1.1601	8.9279	0.2%

Comparación gráfica:



UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

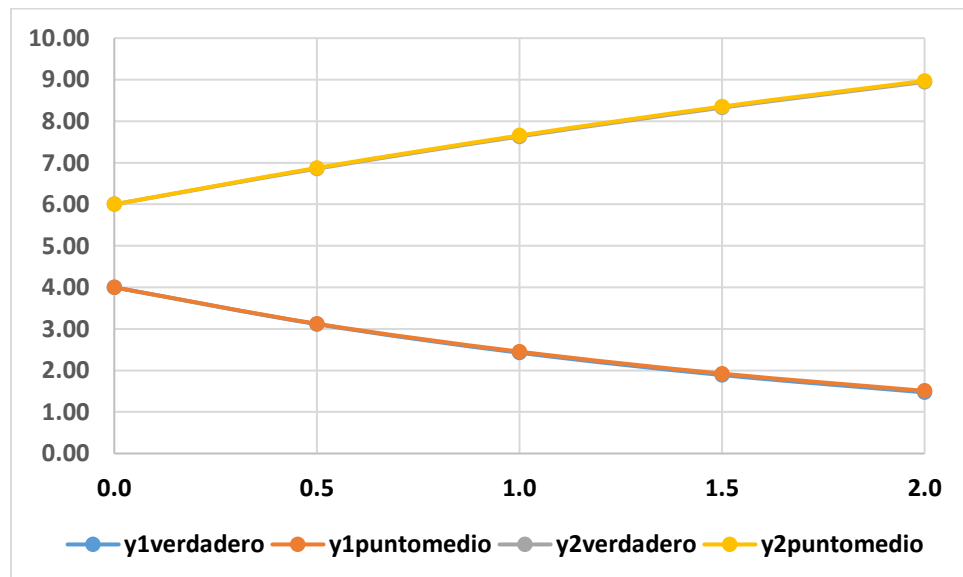
Método Numérico de PUNTO MEDIO:

Tamaño de paso $h=0.5$:

x	$x_{i+1/2}$		Ec.5.5		Ec.5.6	y1 Error
		y1verdadero	$y1'_{i+1/2}$	$y1'_{i+1/2}$	y1puntomedio	
0.00		4.0000		-2.0000	4.00000	0.0%
0.50	0.25	3.1152	3.5000	-1.7500	3.12500	0.3%
1.00	0.75	2.4261	2.6875	-1.3438	2.45313	1.1%
1.50	1.25	1.8895	2.1172	-1.0586	1.92383	1.8%
2.00	1.75	1.4715	1.6592	-0.8296	1.50903	2.5%

y2verdadero	Ec.5.5	$y2'_{i+1/2}$	Ec.5.6	y2 Error
	$y2_{i+1/2}$		$y2_{puntomedio}$	
6.0000		1.8000	6.00000	0.0%
6.8577	6.4500	1.7525	6.87625	0.3%
7.6321	7.3144	1.5604	7.65644	0.3%
8.3269	8.0465	1.3937	8.35327	0.3%
8.9469	8.7017	1.2386	8.97256	0.3%

Comparación gráfica:



UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

Método Numérico de RK4:

Tamaño de paso $h=0.5$:

x	Ec.(5.7a)	$x_i + h/2$	$y1_i + k1 \cdot h/2$	Ec.(5.7b)	$y1_i + k2 \cdot h/2$	Ec.(5.7c)
	$k1 = y1' \cdot i$			k2		k3
0.0						
0.5	-2.000	0.250	3.500	-1.7500	3.5625	-1.7813
1.0	-1.558	0.750	2.726	-1.3629	2.7745	-1.3873
1.5	-1.213	1.250	2.123	-1.0614	2.1608	-1.0804
2.0	-0.945	1.750	1.653	-0.8267	1.6829	-0.8414

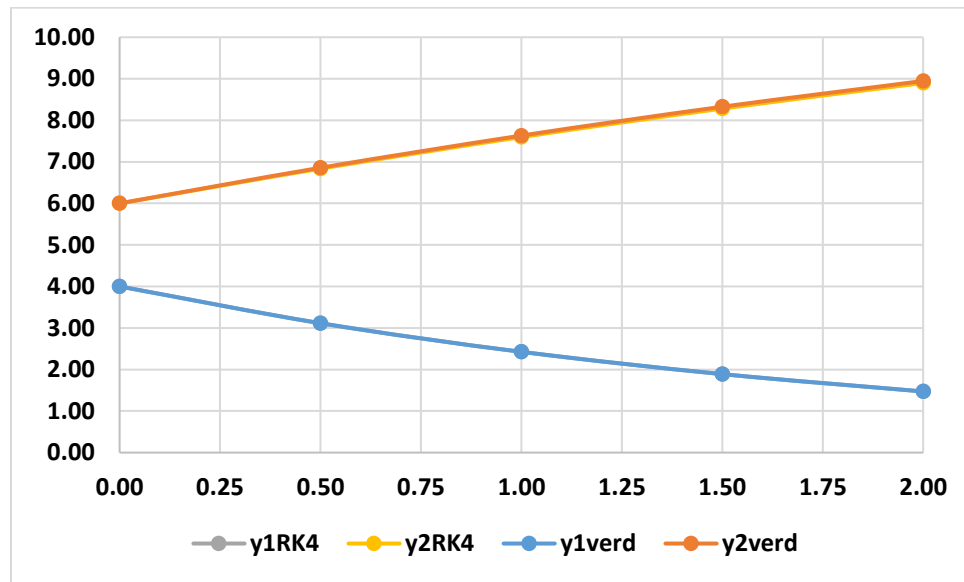
xi + h	$y1_i + k3 \cdot h$	Ec.(5.7d)	Ec.(5.7)	y1	y1
		k4	y1RK4	y1verd	Error
			4.0000	4.0000	0.000%
0.5000	3.1094	-1.5547	3.1152	3.1152	0.001%
1.0000	2.4216	-1.2108	2.4262	2.4261	0.002%
1.5000	1.8860	-0.9430	1.8895	1.8895	0.003%
2.0000	1.4688	-0.7344	1.4716	1.4715	0.004%

x	Ec.(5.7a)	$x_i + h/2$	$y2_i + k1 \cdot h/2$	Ec.(5.7b)	$y2_i + k2 \cdot h/2$	Ec.(5.7c)
	$k1 = y2' \cdot i$			k2		k3
0.0						
0.5	1.8000	0.250	6.450	1.6650	6.4163	1.6751
1.0	1.6378	0.750	7.245	1.5149	7.2145	1.5241
1.5	1.4785	1.250	7.966	1.3676	7.9381	1.3760
2.0	1.3263	1.750	8.614	1.2268	8.5894	1.2342

xi + h	$y2_i + k3 \cdot h$	Ec.(5.7d)	Ec.(5.7)	y2	y2
		k4	y2RK4	y2verd	Error
			6.0000	6.0000	0.0%
0.5000	6.8376	1.5487	6.8357	6.8577	0.3%
1.0000	7.5978	1.4091	7.5962	7.6321	0.5%
1.5000	8.2841	1.2721	8.2827	8.3269	0.5%
2.0000	8.8998	1.1411	8.8984	8.9469	0.5%

Comparacion grafica:

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL



Conclusión:

Los errores generados en la aplicación de los métodos numéricos EULER, HEUN, PUNTO MEDIO y RK4 muestran que, en este ejemplo, el primero de ellos es el menos preciso y el último refleja la mayor exactitud.