

**MODELADO, CONTROL Y MONITOREO DE UN EXOESQUELETO PARA  
ASISTIR PROCESOS DE REHABILITACIÓN EN MIEMBRO INFERIOR**

**Autor: Cristian Camilo Velandia Cárdenas**

PROYECTO DIRIGIDO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE  
INGENIERO ELECTRÓNICO

**Director: Ph.D. Diego Alexander Tibaduiza Burgos**

Docente de la facultad de ingeniería electrónica Universidad Santo Tomás

**Co-director: Blanca Cecilia Venegas Bustos**

Docente de la facultad de enfermería de la Universidad de la Sabana

Universidad Santo Tomás

Facultad de ingeniería electrónica

Bogotá D.C.

2016

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

---

Firma del director

---

Firma del co-director

---

Firma del jurado

---

Firma del jurado

A mis padres Hernando y Abigail; a mi hermano Diego y a toda mi familia

## **AGRADECIMIENTOS**

Expreso agradecimientos a:

Mis padres por su apoyo incesante y esfuerzo, sin ustedes no hubiese sido posible que este y todos mis proyectos se realizaran, ni que esté culminando mi carrera.

A toda mi familia por ese apoyo y ayuda incondicional.

A mis directores Diego Tibaduiza y Blanca Venegas quienes se encargaron de que el proyecto se realizara de la mejor manera, al profesor Jorge Moreno por su apoyo en la finalización del documento, al profesor Carlos Torres por su apoyo y enseñanzas, al profesor Javier Gonzales por todo su apoyo durante el transcurso de mi carrera y en general a todos los docentes que colaboraron en la ejecución del proyecto y en mi formación como ingeniero y persona.

## CONTENIDO

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCCIÓN                                                                    | 11 |
| 1. PROBLEMA                                                                     | 13 |
| 2. ESTADO DEL ARTE                                                              | 14 |
| 3. JUSTIFICACIÓN                                                                | 19 |
| 4. OBJETIVOS                                                                    | 20 |
| 4.1. OBJETIVO GENERAL                                                           | 20 |
| 4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS                                                      | 20 |
| 4.3. RESUMEN DE RESULTADOS OBTENIDOS                                            | 20 |
| 5. FUNDAMENTACIÓN HUMANÍSTICA                                                   | 22 |
| 6. MARCO CONCEPTUAL                                                             | 25 |
| 6.1. FUNDAMENTOS BIOMECÁNICOS DEL MOVIMIENTO CORPORAL HUMANO                    | 25 |
| 6.1.1. Planos de movimiento del cuerpo humano.                                  | 25 |
| 6.1.2. Tipos de movimientos en las articulaciones.                              | 26 |
| 6.2. PRINCIPIOS TERAPÉUTICOS PARA PATOLOGÍA EN RODILLA Y TOBILLO                | 28 |
| 6.2.1. Fisioterapia en lesiones y traumatismo de la articulación de la rodilla. | 28 |
| 6.2.2. Fisioterapia en lesiones y traumatismo de la articulación del tobillo.   | 29 |
| 6.3. MODELOS BIOMECÁNICOS                                                       | 31 |
| 6.3.1. Modelo biomecánico de Hanavan.                                           | 31 |
| 6.3.2. Modelo anatómico de Drillis & Contini.                                   | 33 |
| 6.4. FUNDAMENTOS DE MECÁNICA                                                    | 34 |
| 6.4.1. Teorema de ejes paralelos.                                               | 34 |
| 6.4.2. El principio de D'Alembert y las ecuaciones de Lagrange.                 | 36 |
| 6.5. SISTEMAS DINÁMICOS Y TEORÍA DE CONTROL                                     | 39 |
| 6.5.1. Relación Par-Voltaje para un motor de C.C.                               | 39 |

|        |                                                       |     |
|--------|-------------------------------------------------------|-----|
| 6.5.2. | Linealización de sistemas.                            | 41  |
| 6.5.3. | Discretización de sistemas en espacio de estados.     | 43  |
| 6.5.4. | Sistema Regulador Óptimo Cuadrático (LQR).            | 44  |
| 6.5.5. | Técnica de control predictivo (MPC).                  | 49  |
| 7.     | DISEÑO METODOLÓGICO                                   | 51  |
| 8.     | EJECUCIÓN DEL PROYECTO                                | 53  |
| 8.1.   | CARACTERIZACIÓN CINEMÁTICA DE LA PIERNA (TOPES ÓSEOS) | 53  |
| 8.2.   | MODELO BIOMECÁNICO                                    | 55  |
| 8.2.1. | Cálculo de los momentos de inercia.                   | 63  |
| 8.3.   | MODELADO DEL SISTEMA                                  | 65  |
| 8.3.1. | Modelo cinemático.                                    | 66  |
| 8.3.2. | Modelo dinámico.                                      | 67  |
| 8.4.   | LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA                             | 73  |
| 8.5.   | DISEÑO DEL CONTROLADOR LQR                            | 78  |
| 8.5.1. | Control en tiempo continuo.                           | 79  |
| 8.5.2. | Control en tiempo discreto.                           | 82  |
| 8.5.3. | Resultados.                                           | 84  |
| 8.6.   | DISEÑO DEL CONTROLADOR MPC                            | 87  |
| 8.6.1. | Resultados.                                           | 88  |
| 8.7.   | COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO DE CONTROLADORES             | 89  |
| 8.8.   | DISEÑO DE LA PLATAFORMA DE GESTIÓN DEL EXOESQUELETO   | 91  |
| 8.9.   | Diseño del exoesqueleto                               | 96  |
| 8.9.1. | Simulación del diseño propuesto.                      | 99  |
| 9.     | CONCLUSIONES                                          | 100 |
|        | BIBLIOGRAFÍA                                          | 102 |
|        | ANEXOS                                                | 107 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1. Exoesqueleto HAL para soporte vital.....                                               | 14 |
| Figura 2. Exoesqueleto neumático de la universidad de Tokio.....                                 | 15 |
| Figura 3. Exoesqueleto HULC de la empresa Lockheed Martin.....                                   | 15 |
| Figura 4. Planos del cuerpo humano.....                                                          | 25 |
| Figura 5. Descripción gráfica de los movimientos de extensión y flexión en miembro inferior..... | 27 |
| Figura 6. Representación del modelo de Hanavan.....                                              | 32 |
| Figura 7. Longitud de los segmentos del cuerpo según Drillis y Contini.....                      | 33 |
| Figura 8. Referencia para la demostración del teorema de ejes paralelos.....                     | 35 |
| Figura 9. Circuito equivalente de un motor de C.C.....                                           | 39 |
| Figura 10. Sistema de regulador óptimo.....                                                      | 45 |
| Figura 11. Sistema de control con acción integral.....                                           | 48 |
| Figura 12. Estrategia de control predictivo.....                                                 | 49 |
| Figura 13. Representación de la pierna para el desarrollo del modelo matemático.....             | 53 |
| Figura 14. Videos analizados con “Tracker tool”.....                                             | 53 |
| Figura 15. Resultados de medición en el tobillo.....                                             | 55 |
| Figura 16. Resultados de medición en la rodilla.....                                             | 55 |
| Figura 17. Resultados de mediciones simultaneas en rodilla y cadera.....                         | 55 |
| Figura 18. Análisis del cono recto circular truncado.....                                        | 56 |
| Figura 19. Descomposición de la longitud de las piernas en función de la altura.....             | 59 |
| Figura 20. Representación del doble péndulo.....                                                 | 65 |
| Figura 21. Comportamiento del segmento 1 del modelo no lineal (Par).....                         | 72 |
| Figura 22. Comportamiento del segmento 2 del modelo no lineal (Par).....                         | 72 |
| Figura 23. Comportamiento del segmento 1 del modelo no lineal (Voltaje).....                     | 73 |
| Figura 24. Comportamiento del segmento 2 del modelo no lineal (Voltaje).....                     | 73 |
| Figura 25. Comportamiento del segmento 1 del modelo lineal (Par).....                            | 76 |
| Figura 26. Comportamiento del segmento 2 del modelo lineal (Par).....                            | 76 |
| Figura 27. Comportamiento del segmento 1 del modelo lineal (Voltaje).....                        | 78 |
| Figura 28. Comportamiento del segmento 2 del modelo lineal (Voltaje).....                        | 78 |
| Figura 29. Esquema de control por realimentación de estados LQR.....                             | 80 |
| Figura 30. Esquema de control por realimentación de estados LQR discreto.....                    | 82 |

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 31. Resultado control LQR por par segmento 1.....                                    | 84 |
| Figura 32. Resultado control LQR por par segmento 2.....                                    | 84 |
| Figura 33. Resultado control LQR discreto por par segmento 1. ....                          | 85 |
| Figura 34. Resultado control LQR discreto por par segmento 2. ....                          | 85 |
| Figura 35. Resultado control LQR por voltaje segmento 1. ....                               | 85 |
| Figura 36. Resultado control LQR por voltaje segmento 2. ....                               | 85 |
| Figura 37. Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 1. ....                      | 86 |
| Figura 38. Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 2. ....                      | 86 |
| Figura 39. Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 2 con condición inicial..... | 86 |
| Figura 40. Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 2 con saturador. ....        | 86 |
| Figura 41. Diagrama de bloques del control por MPC. ....                                    | 87 |
| Figura 42. Resultado control MPC por par segmento 1. ....                                   | 89 |
| Figura 43. Resultado control MPC por par segmento 2. ....                                   | 89 |
| Figura 44. Resultado control MPC por voltaje segmento 1. ....                               | 89 |
| Figura 45. Resultado control MPC por voltaje segmento 2.....                                | 89 |
| Figura 46. Panel frontal de la plataforma de gestión del exoesqueleto.....                  | 92 |
| Figura 47. Ventana para crear la historia de un nuevo paciente.....                         | 93 |
| Figura 48. Ventana para abrir y guardar historias.....                                      | 93 |
| Figura 49. Ventana de selección de impresora.....                                           | 94 |
| Figura 50. Ejemplo de una historia impresa en PDF.....                                      | 94 |
| Figura 51. Ventana de ejercicio automático.....                                             | 95 |
| Figura 52. Ventana de ejercicio manual.....                                                 | 95 |
| Figura 53. Ventana del modo de imitación.....                                               | 95 |
| Figura 54. Registro de ejercicios del panel frontal. ....                                   | 96 |
| Figura 55. Diseño de exoesqueleto. ....                                                     | 96 |
| Figura 56. Diseño de exoesqueleto con descripción de secciones.....                         | 98 |
| Figura 57. Acercamiento al motor y al soporte de la rodilla. ....                           | 98 |
| Figura 58. Acercamiento al motor y al soporte del tobillo. ....                             | 98 |
| Figura 59. Diagrama de simulación mecánica para el diseño.....                              | 99 |
| Figura 60. Diseño del exoesqueleto simulado. ....                                           | 99 |

## LISTA DE TABLAS

|                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabla 1. Matriz de evaluación de desempeño del controlador para la respuesta en el tiempo para el exoesqueleto. .... | 52 |
| Tabla 2. Matriz de comparación de desempeño entre las propuestas de diseño de controladores. ....                    | 52 |
| Tabla 3. Ángulos máximo y mínimo por articulación de la pierna (Topes óseos). .                                      | 54 |
| Tabla 4. Rango de movimiento de la rodilla y el tobillo. ....                                                        | 54 |
| Tabla 5. Parámetros para el cálculo de las masas y centro de masa de las piernas. ....                               | 60 |
| Tabla 6. Modelo generalizado de Hanavan. ....                                                                        | 61 |
| Tabla 7. Parámetros del motor D.C. ....                                                                              | 73 |
| Tabla 9. Matriz de evaluación de desempeño del controlador LQR.....                                                  | 90 |
| Tabla 10. Matriz de evaluación de desempeño del controlador LQR discreto. ....                                       | 90 |
| Tabla 11. Matriz de evaluación de desempeño del controlador MPC. ....                                                | 90 |
| Tabla 12. Matriz de comparación de desempeño entre LQR y MPC. ....                                                   | 91 |

## RESUMEN

En Colombia se vienen realizando diferentes trabajos enfocados al desarrollo de exoesqueletos, estos se enfocan en aumentar y mejorar las capacidades del cuerpo humano y/o en realizar soporte a diferentes movimientos que puedan haberse perdido.

En las terapias de rehabilitación se han identificado factores externos que afectan negativamente el proceso de recuperación del paciente. Entre estos factores se encuentran la baja disponibilidad de especialistas, asistentes y equipos, factores que generan retrasos y hacen que el tiempo del tratamiento aumente, aparte disminuyen la efectividad de la terapia, por lo que la recuperación de la patología tratada no será del todo satisfactoria. Aparte estos factores incrementan el costo de las terapias. Es por ello que el presente estudio tiene como objeto profundizar y aportar al área de desarrollo de exoesqueletos enfocados hacia el soporte de ejercicios de rehabilitación física. Concretamente el estudio se enfoca a exoesqueletos para asistir procesos de rehabilitación de patologías en la rodilla y el tobillo, para lo que se desarrolla un modelo dinámico al que se le aplican técnicas de control para ponerlo en funcionamiento. Esto permite proponer un diseño de exoesqueleto junto con su plataforma de control y gestión de información.

*Palabras claves: exoesqueleto, control, modelo, dinámica, cinemática, rehabilitación.*

## INTRODUCCIÓN

Actualmente los procesos de rehabilitación física se han visto enfrentados a un perseverante avance debido a la incorporación de nuevos dispositivos y métodos que hacen que las diferentes terapias se focalicen en el tratamiento efectivo de problemas específicos. Dentro de los muchos dispositivos usados para dar soporte a las terapias de rehabilitación física, se encuentran los exoesqueletos, los cuales vienen siendo utilizados por centros especializados, que se distinguen por contar con buena capacidad económica, permitiendo brindar adecuada asistencia a las personas que requieren de terapia física y en la mayoría de los casos para corregir la marcha humana. Sin embargo, muchos de estos dispositivos se encuentran aún en etapa de desarrollo, haciendo que los dispositivos lanzados comercialmente sean muy costosos, lo que no ha permitido que esta tecnología sea adquirida en nuestro país, es por esto que este trabajo incluye una propuesta de diseño de un exoesqueleto, en el cual se incluye el modelado y el control de una ortesis activa de dos grados de libertad para el desarrollo de terapias de rodilla y tobillo que incluyen ejercicios de flexo-extensión en estas articulaciones. Para ello, se propone una metodología de diseño basado en un sistema dinámico de investigación, modelado y simulación.

En términos de organización y estructura, el presente documento responde al siguiente esquema:

- Capítulo 1: se presenta la descripción y definición del problema de investigación
- Capítulo 2: se desarrolla una revisión de antecedentes de exoesqueletos a nivel mundial y algunos proyectos que se han venido trabajando en el país
- Capítulo 3: se expone la justificación del proyecto
- Capítulo 4: se definen los objetivos, general y específicos, del proyecto
- Capítulo 5: se describe la fundamentación humanística del proyecto
- Capítulo 6: incluye información que permitirá entender muchos de los procesos realizados durante el desarrollo del proyecto, como diferentes métodos de modelamiento matemático, teoría de control, anatomía y algunos ejercicios de rehabilitación física para las articulaciones que son objeto del proyecto
- Capítulo 7: muestra el diseño metodológico utilizado

- Capítulo 8: se describe el proceso realizado para la ejecución del proyecto el cual incluye el desarrollo del modelo, el diseño de las estrategias de control, el diseño del software y el diseño del exoesqueleto propuesto
- Capítulo 9: se presentan las conclusiones a las que permite llegar el desarrollo del proyecto.

Para terminar, se contempla una sección de anexos, en donde se incluye información con respecto a los productos derivados del proyecto y las especificaciones del motor, reductor y sensor utilizados para el diseño.

## 1. PROBLEMA

Dentro de la Clasificación Internacional de Deficiencias, Discapacidades y Minusvalías (CIDDM) de la Organización Mundial de la Salud (OMS) se define discapacidad como la objetivación de la deficiencia en el sujeto y con una repercusión directa en su capacidad de realizar actividades en los términos considerados normales para cualquier sujeto de sus características (García & Sánchez, 2001). Según el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) en el último censo realizado en el año 2005 el 29,32% de la población colombiana tenía problemas para moverse o caminar (Beltrán, 2008). Actualmente, debido al permanente conflicto en el país, como a la gran cantidad de accidentes automovilísticos que se presentan, esta cifra ha aumentado. A finales del año 2014 estos accidentes dejaron lesionadas aproximadamente unas 33.982 personas (EL TIEMPO, 2014). Según cifras del Sistema de Gestión de Información sobre Actividades relativas a Minas Antipersonal (IMSMA, por sus siglas en inglés), entre 1990 y noviembre de 2014 se registraron 10.976 víctimas de minas antipersonales en Colombia (Dirección Contra Minas, 2014). Actualmente existe un registro de discapacidad que permite evidenciar que son pocos los que voluntariamente acceden a hacer parte de un censo y observatorio frente a la problemática de discapacidad que presenta Colombia, lo que puede incrementar las cifras reportadas por estas entidades. El registro no es significativo, 1'062.917 ciudadanos han ingresado al Registro para la Localización y Caracterización de Personas con Discapacidad (RLCPD) (Ministerio de Salud y Protección Social, 2013).

Accidentes y eventos desafortunados generados por el conflicto y otros atenuantes afectan la vida de las personas en gran medida ya que dificultan su capacidad de desplazamiento, disminuyen su productividad, son objetos de exclusión social y, al mismo tiempo, reduciendo sus condiciones de calidad de vida. Con el fin de lograr recuperar la movilidad de estas personas se hace evidente la importancia que tiene, el crear, plantear y proponer soluciones desde el área de la ingeniería y afines que permitan optimizar las terapias de rehabilitación física, facilitando y mejorando la efectividad del trabajo de los fisioterapeutas.

## 2. ESTADO DEL ARTE

Actualmente existe una gran variedad de exoesqueletos creados por grandes empresas, todas ellas con domicilio en el extranjero. En su gran mayoría, estos exoesqueletos están orientados hacia el aumento de capacidades físicas del cuerpo humano como la fuerza, la velocidad y la precisión, bien sea para ayudar en trabajo pesado o para aumentar la capacidad de combate de los soldados. Uno de los exoesqueletos para aumento de la capacidad de carga, en el que se viene trabajando en la actualidad, es el “Muscle suit” con actuadores neumáticos de la Universidad de Tokio (Figura 2), específicamente de un laboratorio llamado Kobalab (Kobayashi Labs). Este exoesqueleto cuenta con músculos neumáticos que se inflan o desinflan dependiendo del movimiento que se necesite realizar y el peso que se desee levantar. Para el caso militar la empresa Lockheed Martin desarrolló el HULC, un exoesqueleto que ayuda a los militares desviando el peso de todo lo que cargan hacia el piso permitiéndoles correr mejor y tener mayor estabilidad evitando lesiones (Figura 3).

A diferencia de los exoesqueletos mencionados anteriormente quizá el más destacado y avanzado, es el HAL (Hybrid Assistive Limb), creado por la empresa CYBERDYNE, siendo considerado como el mejor robot tipo cyborg del mundo (Figura 1), está enfocado hacia el soporte y la mejora de las capacidades de la persona que lo use, es decir, servir de soporte a las personas con discapacidades parciales en sus piernas.

**Figura 1.** Exoesqueleto HAL para soporte vital.



Tomado de (Cyberdyne)

Según la empresa creadora (CYBERDYNE) este exoesqueleto es una fusión entre el hombre, la máquina y la información. Esta empresa cuenta también con un

centro de rehabilitación física que usa el exoesqueleto para dar soporte a sus terapias y permitir a las personas moverse mejor (Cyberdyne, 2013).

**Figura 2.** Exoesqueleto neumático de la universidad de Tokio.



Tomado de (Lai, 2012)

**Figura 3.** Exoesqueleto HULC de la empresa Lockheed Martin.



Tomado de (Martin, 2010)

En una breve recopilación de trabajos previos sobre sistemas de rehabilitación de miembros inferiores se pudo encontrar una gran variedad de sistemas que usan diferentes técnicas de modelado, control y clases de actuadores, sistemas en los que se aplican análisis con varios grados de libertad u otros enfocados a una articulación específica. Algunos de estos dispositivos están diseñados solo para diagnóstico y análisis de movimiento, otros son orientados al aumento de la fuerza del usuario. Toda esta teoría es aplicable a los exoesqueletos de rehabilitación. En Colombia, se desarrollan actualmente y se han desarrollado trabajos de investigación referentes a exoesqueletos en diferentes universidades, como es el caso de la Universidad Militar Nueva Granada, a través del grupo de investigación DaVinci, vinculado a la Facultad de Ingeniería Mecatrónica, quienes han trabajado en el tema de los exoesqueletos en donde se han realizado trabajos referentes a diseños de sistemas de control de marcha humana, registro de miembros inferiores durante la marcha, sensórica para exoesqueletos pasivos, también,

exoesqueletos para rehabilitación motora de miembros superiores y tele operación de robots usando exoesqueletos (Bautista & Diaz, 2015). En la Universidad del Valle, en el Grupo de Investigación en Control Industrial (GICI), se han realizado varios proyectos que involucran exoesqueletos, dos de ellos, están en curso y tienen objetivos afines a la rehabilitación de miembros inferiores. Uno de estos proyectos tiene como propósito construir un exoesqueleto para asistir la rehabilitación de pacientes con lesiones en la rodilla mientras que el otro busca asistir la rehabilitación de personas con pérdida parcial o completa del movimiento en miembros inferiores (GICI, 2015). En la Universidad Autónoma de Bucaramanga hace siete años se realizó un trabajo para asistir la rehabilitación para lesiones en las piernas, en el que se expone el diseño mecánico y electrónico de un prototipo funcional (Pérez, 2008). En países como Estados Unidos, también hay un gran avance y diferentes estudios referentes a los exoesqueletos; en la Universidad de Stanford específicamente en el laboratorio CHARM (Stanford, 2016), trabajan con robótica para medicina, desarrollando instrumentos para cirugía asistida o teleoperada y, en general, el desarrollo de sistemas hápticos. En el laboratorio de biomecánica del MIT, también en Estados Unidos, se adelantan proyectos de investigación enfocados hacia las prótesis y exoesqueletos que han culminado con la creación de un par de exoesqueletos que aprovechan la energía mecánica usada al caminar para aumentar la capacidad de carga y mejorar la marcha de las personas que lo necesitan (MIT, 2016).

Haciendo uso de estos sistemas, basados en exoesqueletos, se realizan diferentes análisis como el de la percepción de posición de las extremidades en personas con daño total o parcial en la medula espinal (Domingo, Marriott, de Grave, & Lam, 2011). Este análisis se realiza pidiéndole a una persona que lleve su extremidad a un ángulo determinado mediante una referencia visual, mientras el exoesqueleto mide su posición, debido a que la percepción no es la misma en personas sanas en relación a personas que han sufrido algún daño en la medula, situación que les ha exigido someterse a procesos de rehabilitación.

En cuanto al estudio de (Donghai, Kok-Meng, Jiajie, & Can-jun, 2014), quienes proponen un método para estudiar las fuerzas/pares presentes en la articulación de la rodilla y probar los efectos que tienen diferentes tipos de exoesqueletos en su comportamiento, se estudia la dinámica y cinemática de los exoesqueletos puestos a prueba y su influencia en las fuerzas internas de la rodilla. Mediante el análisis de los resultados arrojados con la aplicación del método, es posible graduar ciertas características de los exoesqueletos para calibrar sistemas de rodilla y adaptarlos a las características físicas de la misma. Estos pares también pueden ser controlados y medidos usando señales electromiográficas (EMG) provenientes del muslo, este tipo de sistemas son usados en exoesqueletos orientados hacia aumento de fuerza que permiten predecir electrónicamente el par y el movimiento que se pretende realizar (Fleischer & Hommel, 2007).

Actualmente se desarrollan exoesqueletos con actuadores diferentes a motores de corriente directa, entre estos está el ELEBOT, un exoesqueleto con actuadores hidráulicos diseñado para probar un algoritmo de control enfocado a ofrecer realimentación de fuerza mediante un sensor. Su función es compensar el efecto de la carga lo que permite a la persona que lo use soportar más peso y evitar lesiones en piernas o espalda. El diseño del exoesqueleto y del algoritmo está basado en estudios que dicen que la estructura mecánica de un exoesqueleto, con un solo grado de libertad, funciona mejor y facilita el control si está ceñida al cuerpo y cuenta con una baja impedancia (Heng, Zhengyang, Jun, Yu, & Wei, 2009). De igual manera, se usan actuadores SEA (Serial Elastic Actuators) o actuadores elásticos en serie, dispositivos totalmente mecánicos que almacenan energía y la liberan mediante el uso de control electrónico. Este tipo de actuadores se han utilizado para rehabilitación facilitando ejercicios por medio del aumento de la fuerza humana. La fuerza que ejerce el actuador se gradúa poco a poco hasta llegar a un nivel de fuerza entregada mínima que significa la rehabilitación total del paciente (Lopez, Aguilar-Sierra, Salazar, & Lozano, 2013).

Se conocen también diseños de exoesqueletos con actuadores poco convencionales, uno de estos diseños usa actuadores de tipo magnetoreológicos, es decir, aquellos basados en la utilización de un líquido de propiedades magnetoreológicas que tienen la capacidad de cambiar su viscosidad al ser sometido a campos magnéticos. Este tipo de dispositivos están enfocados a mejorar el control y actuar como un freno o embrague para los motores de corriente directa, permitiendo así graduar el par y liberar al motor consumiendo menos energía y alargando el tiempo que puede trabajar el sistema (Jinzhong & Wei-Hsin, 2006). Otra alternativa para la reducción del consumo de energía, es el uso de dispositivos amplificadores de fuerza y bloqueos de tipo mecánico (Saba, Dashkhaneh, Moghaddam, & Hasankola, 2013). Otro aspecto que adquiere importancia, es el de la seguridad de las personas, dado su contacto directo con el sistema, siendo necesario contar con sistemas mecánicos y/o electrónicos de seguridad. Lo anterior ha obligado a generar soluciones móviles más pequeñas que permiten abordar otras problemáticas. Este tipo de dispositivos permiten rotar y corregir los malos movimientos de las rodillas producidos al caminar (Shimodaira et al., 2014).

Dentro de los dispositivos de rehabilitación hay exoesqueletos de diferentes arquitecturas, ALEX (Active Leg EXoskeleton) o exoesqueleto activo de pierna, un dispositivo creado para rehabilitación de personas con problemas de movimiento, el cual posee un sistema de control para hacer realimentación de fuerza que se activa solo cuando se necesita enfocado a ayudar y corregir movimientos de la pierna (Banala, Agrawal, & Scholz, 2007).

En cuanto a la parte de controladores, se han desarrollado sistemas de control con capacidad de adaptación y aprendizaje para reproducir movimientos precisos con un ángulo y velocidad determinados, incluso con ruido y perturbaciones (Renquan, Zhijun, Chun-Yi, & Anke, 2014). El diseño de estos controladores es muy variado, en algunos casos, lo dividen para su diseño en dos partes, un primer momento en el que se compensa la gravedad y, en un segundo momento, en el que el exoesqueleto está estático, acoplado al paciente en donde se debe hacer modificación y compensación de par (Yang, Zhang, Xiao, & Yang, 2011). En algunas investigaciones se diseñan controladores mucho más robustos, los cuales deben poder manejar sistemas como el Functional electrical stimulation (FES), este es un sistema que mediante estímulos eléctricos activa nervios y es usado como complemento en exoesqueletos de rehabilitación. El control de FES debe estar en la capacidad de monitorear el esfuerzo que realiza el paciente para dar un impulso proporcional al mismo (Yixiong et al., 2013).

En su gran mayoría los sistemas de rehabilitación cuentan con una interfaz humano-máquina (HMI), por lo general, en un computador personal permitiendo ver al usuario la interacción del paciente con el exoesqueleto y la evolución a lo largo de la terapia. Por otro lado, el uso de software en la actualidad, posibilita el realizar simulaciones de marcha lo que permite hacer diseños en computador de exoesqueletos de hasta 15 grados de libertad (Yanhe, Jinxiang, & Jie, 2013). Estos sistemas posibilitan hacer pruebas sin tener contacto con ningún paciente, siendo aptas para un entorno netamente académico.

### **3. JUSTIFICACIÓN**

La ingeniería electrónica busca soluciones que satisfagan las necesidades de las personas mediante la cooperación con otras áreas del conocimiento, como es el caso de la medicina y la ingeniería mecánica, siendo factible el desarrollo de instrumentos que mejoren los métodos de diagnóstico y tratamiento en procesos de rehabilitación física. Debido a esta contribución que realiza la ingeniería a la medicina es necesario seguir investigando y desarrollando instrumentos que faciliten y mejoren sus tareas.

Las herramientas de apoyo en terapias de rehabilitación como los exoesqueletos permiten a los fisioterapeutas obtener información detallada sobre el movimiento de las extremidades, la liberación de las cargas y favorecer la disminución del error producido por el cansancio generado después de largas jornadas de trabajo, a su vez, tomar conciencia de categorías terapéuticas tales como: cuerpo, movimiento, corporalidad y corporeidad que facilitan los procesos de rehabilitación ante eventualidades o limitaciones de origen muscular o musculo esquelético; permiten crear registros electrónicos de cada uno de los pacientes, organizando la información, haciéndola portable y accesible en caso de requerir asistencia externa. Los exoesqueletos aseguran que la ejecución de los ejercicios sea apropiada proporcionando seguridad al paciente y ofreciéndole soporte hasta que su rehabilitación este completa. Los exoesqueletos están en pleno desarrollo e investigación, situación que la convierte en un área propicia para estudiar y poder generar aportes a la comunidad en general.

## **4. OBJETIVOS**

### **4.1. OBJETIVO GENERAL**

Diseñar un exoesqueleto en modo maestro esclavo para la rehabilitación de miembro inferior orientado hacia terapias de rodilla y tobillo en humanos, restringido al plano sagital.

### **4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Desarrollar un modelo que permita describir la cinemática y la dinámica del miembro inferior basado en modelos biomecánicos y antropométricos existentes.
2. Validar experimentalmente las restricciones angulares presentes en las articulaciones de la rodilla y el tobillo.
3. Diseñar y validar mediante herramientas de simulación una estrategia de control que garantice movimientos suaves y precisos del exoesqueleto de acuerdo a requerimientos de una fisioterapia convencional.
4. Desarrollar un HMI usando una plataforma de software que permita registrar y llevar una historia de cada uno de los usuarios.

### **4.3. RESUMEN DE RESULTADOS OBTENIDOS**

A continuación se muestra un resumen de los resultados obtenidos, los cuales se encuentran asociados a cada uno de los objetivos anteriormente descritos:

1. Se diseñó y ajustó un modelo cinemático y dinámico que describe las características físicas aproximadas de un exoesqueleto para miembro inferior, este se describe en la sección 8.3 y está compuesto por el modelo del doble péndulo combinado con la generalización del modelo biomecánico de Hanavan (Hanavan, 1964), descrito en la sección 8.2. Este modelo incluye restricciones, dadas mediante una caracterización de topes óseos de la estructura que se realizó, tal como se muestra en la sección 8.1.
2. Se diseñaron 3 estrategias de control óptimo que se describen en la sección 8.5, con las cuales se actuó sobre el exoesqueleto para generar el movimiento acorde a las características de las terapias. Estos resultados fueron validados mediante el software Matlab.

3. Se desarrolló una interfaz humano-maquina (HMI) en el software LabVIEW, la cual permite ejecutar el control y la gestión de la información de la terapia por cada uno de los pacientes tratados con el exoesqueleto. Esta se describe en la sección 8.8.
4. Finalmente, se muestra el diseño del exoesqueleto en la sección 8.9 en la que se incluye un modelo en 3D y las características del mismo.

## 5. FUNDAMENTACIÓN HUMANÍSTICA

El concepto humanismo aparece hasta el siglo XIX para designar la obra de los humanistas de los siglos XV y XVI, intelectuales que se ocupaban de las "letras humanas", por oposición a las "letras divinas", y que reivindicaban la cultura clásica grecorromana. En la actualidad, el concepto de humanismo se usa en un sentido amplio para referirse a cualquier concepción filosófica, moral o política caracterizada por la reivindicación del valor del hombre, por su optimismo sobre las posibilidades de la realización humana. Se acepta también el uso de la palabra humanismo para calificar toda manifestación cultural que sitúe al hombre en nivel de excelencia frente a todo lo existente o que privilegie la existencia humana, aun cuando la subordine a poderes trascendentes. En general el humanismo es un comportamiento o una actitud que exalta al género humano. Bajo esta definición, el arte, la cultura, el deporte y las actividades humanas generales, se vuelven trascendentes. Estas actividades son comprendidas como una variedad de áreas del humanismo, en las que se encuentran la literatura, artes plásticas, la retórica, la poesía entre otras. A lo largo de los años se han desarrollado diferentes transformaciones del humanismo, dentro de ellas aparece el humanismo entendido como "antropocentrista", el cual se caracteriza por exaltar al hombre y generar en él un afán de buscar la verdad de tal suerte que le permite tener la capacidad asumir y dar medida a todas las cosas, de manera que la organización social se desarrolla a partir de la búsqueda del bienestar humano, haciéndolo objeto preponderante (Definicion.de, 2008). Esta corriente se antepone a la propuesta de Santo Tomás de Aquino quien propuso una de las formas más influyentes de humanismo, el humanismo cristiano. Dentro de este, la naturaleza humana y la razón son los ejes centrales, estos se abren y ascienden hacia el principio supremo del universo y, en este ascenso, intervienen la fe y la gracia. Uno de los postulados en los que Santo Tomás se basa es en que el hombre viene de Dios y a Él debe regresar (ZENIT.org, 2003), es decir, Dios es el origen y el fin del mundo humano. La propuesta humanista de Santo Tomás depende en mucho de los diversos planteamientos de Aristóteles, en los que el hombre está revestido de una naturaleza que por ser racional está capacitada para llevar a cabo la mayor y más alta de las misiones de las que se asignan a los seres que pueblan y componen la naturaleza: la de ser racional, la de poder acceder a las cosas intelectuales siendo él mismo parte de esa naturaleza material, la de la posesión del pensamiento puro que de alguna manera inmortaliza al hombre. Este puede llegar a captar en las cosas materiales, algo que específicamente le sobrepasa, aquello intelectual que hay en ellas (Obradors, 2003).

En la actualidad el desarrollo tecnocientífico ha sido de tal magnitud que ha transformado radicalmente a las formas de vida social, nadie que viva en sociedad puede escapar a los efectos del desarrollo que se ha producido en la ciencia y la tecnología a lo largo del siglo XX. La sociedad está invadida por los productos de la ciencia y tecnología. La vida social está afectada por aquello que se usa y se ve todos los días y a todas horas, elementos que se están volviendo imprescindibles para la vida del hombre como los celulares, computadores, hornos microondas, medicinas, la internet, la televisión entre otras cosas, sin las cuales las personas se sienten desactualizadas o desconectadas del mundo moderno. Suele considerarse que se vive mejor porque cada vez se tienen más y mejores cosas o artefactos que tienen la capacidad de liberar a los seres humanos de los trabajos más duros y monótonos, esta afirmación es acertada en casos como el de los avances tecnológicos en el área de la medicina, al permitir vivir más y mejor que en épocas pasadas. Hay también otras máquinas y otros artefactos tecnológicos que no tienen una naturaleza material, estas son las llamadas máquinas sociales las cuales comprenden productos tecnológicos tales como las tecnologías de organización social, las cuales afectan a la vida en sociedad de la misma forma como los artefactos tangibles. El reparto de jerarquías y la organización de las funciones en los diferentes ámbitos de la vida moderna, son tan importantes o más importantes aun, que la calidad de los artilugios materiales de los que se disponga. Teniendo en cuenta todos estos elementos y, la importancia que ha tomado la ciencia y la tecnología en el desarrollo social, se genera el concepto de CTS, el cual busca promover la evaluación y control del desarrollo tecnocientífico, definido como un proceso social, es decir, se debería procurar y favorecer la valoración y el control públicos por parte de los ciudadanos sobre este desarrollo. Para ello, se deben proporcionar las bases educativas para una participación social formada y también crear los mecanismos institucionales que hagan posible tal participación (GrupoArgo).

Basado en este concepto el presente documento tiene como objetivo primordial dar a conocer y exaltar las capacidades del ser humano formado como ingeniero, usando y aplicando el conocimiento adquirido para realizar un aporte a la comunidad con el que sea posible facilitar y mejorar la labor de personas que trabajan en el área de la medicina, específicamente en fisioterapia. Este proyecto aportará un doble beneficio a la fisioterapia, ya que, al buscar aumentar la productividad del fisioterapeuta, reduciendo su carga laboral y la monotonía de su trabajo, es posible mejorar la efectividad de las terapias y reducir el tiempo de recuperación de los pacientes, como también, de las facultades pérdidas o afectadas, caso de la capacidad de caminar y moverse de manera apropiada.

Este dispositivo junto con el beneficio que ofrece de mejorar la recuperación de algunas facultades físicas tiene la capacidad de devolver la autoestima y ayudar al mejoramiento personal del paciente, dado que, al poderse mover bien puede

sentirse productivo y cerrar algunas brechas de exclusión que se generan debido a la discapacidad, beneficios que, a la larga, devuelven la calidad de vida y posibilitando que la persona gane confianza y mejore en el ámbito laboral, personal e interpersonal.

## 6. MARCO CONCEPTUAL

### 6.1. FUNDAMENTOS BIOMECÁNICOS DEL MOVIMIENTO CORPORAL HUMANO

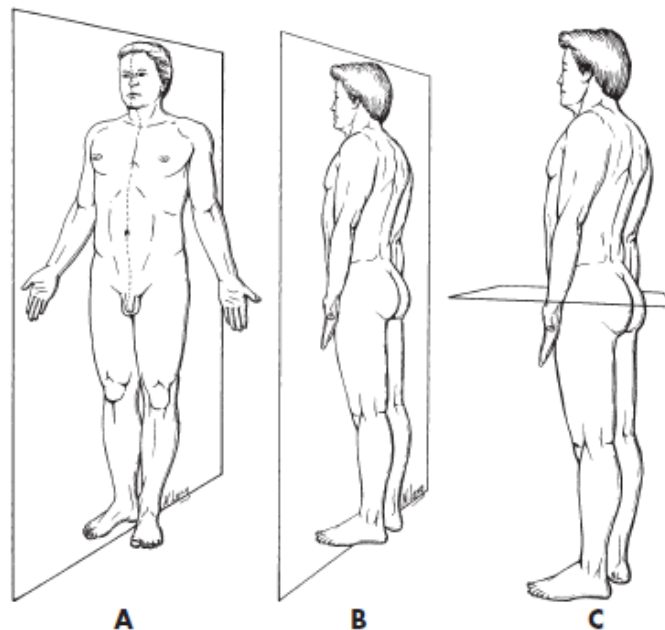
En esta sección se describen brevemente algunos conceptos de biomecánica primordiales para entender el modelo planteado y su objetivo.

#### 6.1.1. Planos de movimiento del cuerpo humano.

Para el estudio de los movimientos del cuerpo humano es necesario delimitar algunos planos de referencia. Estos planos son usados para describir la posición estructural y la dirección de los movimientos funcionales del cuerpo. La figura 4 muestra los diferentes planos en los que se divide el cuerpo humano para facilitar su estudio, estos están descritos a continuación:

**Figura 4.** Planos del cuerpo humano.

A - Plano sagital mediano; B – Plano coronal o frontal; C – Plano transversal o axial.



Tomado de (Peterson & Bergmann, 2010)

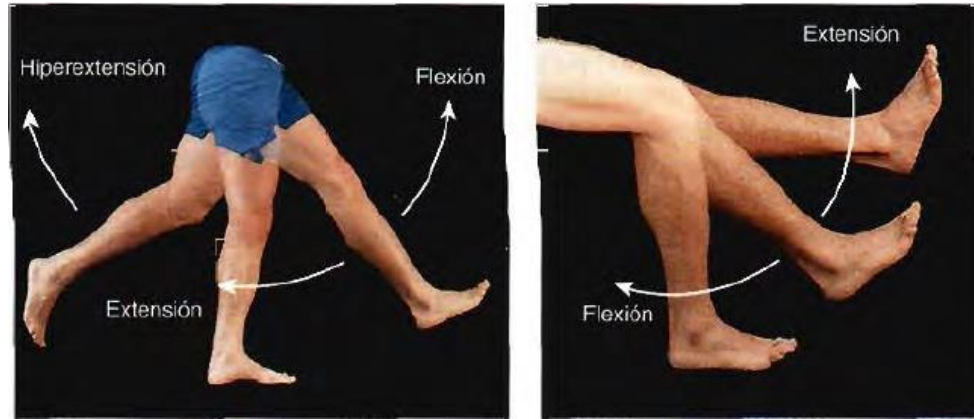
- A. Plano sagital mediano:** es un plano vertical que se extiende de la espalda al frente o del anterior al posterior. Su nombre se debe a la sutura sagital o interparietal que conecta los dos huesos parietales del cráneo; sagital se debe a que tiene forma de flecha (sagitta en latín). Este plano divide el cuerpo en los componentes derecho e izquierdo.
- B. Plano coronal o frontal:** es un plano vertical y se extiende de lado a lado del cuerpo. Su nombre se debe a la sutura coronal del cráneo. Este plano divide al cuerpo en los componentes anterior y posterior.
- C. Plano transversal o axial:** este es un plano horizontal que divide el cuerpo en componentes superior e inferior.

#### **6.1.2. Tipos de movimientos en las articulaciones.**

Las personas del área de la salud usan terminología precisa para indicar la forma, la dirección del movimiento y la relación de una parte del cuerpo con otra durante el mismo. Los movimientos de las articulaciones se agrupan en cuatro grandes categorías:

- 1) Deslizamiento:** es un movimiento simple en el cual las superficies relativamente planas de los huesos se mueven hacia adelante y hacia atrás y de lado a lado, una respecto a la otra.
- 2) Movimientos angulares:** en este tipo de movimiento hay un incremento o disminución en el ángulo entre los huesos de la articulación. Los movimientos angulares más importantes son flexión, extensión, extensión lateral, hiperextensión, abducción, aducción y circunducción.
  - a. Flexión y extensión:** en el movimiento de flexión hay una disminución en el ángulo entre los huesos de la articulación mientras que en el de extensión hay un incremento en el ángulo entre los huesos de la articulación. El movimiento de extensión se genera habitualmente para restituir una parte del cuerpo a la posición anatómica después de que fue flexionada. Ambos movimientos se dan generalmente en un plano sagital (Figura 5).

**Figura 5.** Descripción gráfica de los movimientos de extensión y flexión en miembro inferior.



Tomado de (Tortora & Derrickson)

- b. Hiperextensión:** se dice que es la continuación de la extensión, más allá de la posición anatómica.
  - c. Abducción y aducción:** abducción es el movimiento de un hueso alejándose de la línea media, aducción es el movimiento de un hueso hacia la línea media. Ambos movimientos se producen a lo largo del plano frontal.
  - d. Circunducción:** es el movimiento circular de un extremo distal del cuerpo. Es una secuencia continua de flexión, abducción, extensión y aducción. Este movimiento no se produce a lo largo de un eje o plano de movimiento.
- 3) Rotación:** un hueso gira alrededor de su eje longitudinal.
- 4) Movimientos especiales:** estos movimientos se producen solo en ciertas articulaciones. Dentro de esta clasificación se encuentran los movimientos de elevación, depresión proyección o protracción, supinación, pronación y oposición.
- a. Elevación:** es el movimiento de levantar una parte del cuerpo, como cerrar la boca o recoger los hombros. Es el opuesto a la depresión.
  - b. Depresión:** es un movimiento hacia debajo de alguna parte del cuerpo, como abrir la boca o devolver los hombros a su posición anatómica.
  - c. Proyección, protrusión, protracción o antepulsión:** es un movimiento de una parte del cuerpo hacia adelante en un plano transversal, como cuando se empuja hacia adelante la mandíbula. Es opuesta al movimiento de retracción.
  - d. Retracción o retropulsión:** es el movimiento de una parte del cuerpo proyectada de regreso a su posición anatómica, es decir devolver la mandíbula a su estado natural.
  - e. Inversión:** es el movimiento de las plantas de los pies en el que se acercan una a la otra. Los fisioterapeutas se refieren a la inversión del pie como supinación.

- f. **Eversión:** es el movimiento de las plantas de los pies en el que se alejan la una de la otra. Los fisioterapeutas se refieren a la inversión del pie como pronación.
- g. **Dorsiflexión:** movimiento que consiste en doblar el pie en el tobillo en la dirección del dorso, ocurre al pararse sobre los talones. Este movimiento es opuesto al de flexión plantar.
- h. **Flexión plantar:** movimiento que consiste en doblar el pie en el tobillo en la dirección de la planta o cara inferior.
- i. **Supinación:** es un movimiento del antebrazo en las cuales las palmas se giran anteriormente. Es opuesto al movimiento de pronación.
- j. **Pronación:** es un movimiento del antebrazo en las cuales las palmas se giran posteriormente.
- k. **Oposición:** es un movimiento en el que el pulgar se mueve a través de la palma para tocar la punta de los dedos de la misma mano.

## 6.2. PRINCIPIOS TERAPÉUTICOS PARA PATOLOGÍA EN RODILLA Y TOBILLO

En esta sección se describen algunos ejercicios que se proponen para rehabilitar diferentes patologías de rodilla y tobillo.

### 6.2.1. Fisioterapia en lesiones y traumatismo de la articulación de la rodilla.

Los procesos traumáticos como los degenerativos son algunas de las principales causas del dolor de rodilla y su incidencia en la capacidad de movimiento del paciente. Por este motivo, se hace necesaria la ejecución de un programa específico e individualizado de ejercicios de rodilla. La realización de ejercicio favorece el fortalecimiento de la musculatura de la rodilla, proporcionando estabilidad y movimiento. Además contribuye a la flexibilidad de las articulaciones, evitando el desarrollo de rigidez y de limitación articular (Arconada & Revilla, 2010).

Para cada patología existe un tratamiento específico que involucra ejercicios con diversos modos de ejecución. Para las algias de las rodillas (Arconada & Revilla, 2010) proponen realizar algunos ejercicios que son tomados textualmente y se describen a continuación.

- **Ejercicios isométricos de los músculos cuádriceps:** con la pierna recta, apriete los músculos del muslo lo más que pueda y manténgalo durante 3-5 segundos. Después relájese y vuelva a repetirlo. Si tiene dificultad puede ponerse una toalla enrollada debajo de la rodilla para aumentar la sensación.

- **Ejercicios activos de flexo extensión de rodilla:** con la pierna contraria flexionada, realice el movimiento de estirar y flexionar la pierna afecta lo máximo posible sin que aparezca dolor.
- **Ejercicios de fortalecimiento de psoasiliaco y cuádriceps:** con la pierna contraria flexionada y la afecta estirada, elevamos la misma hasta la altura unos 30cm de la camilla. Mantenemos 3-5 segundos y bajamos despacio.
- **Ejercicios de fortalecimiento de cuádriceps con rulo:** Se coloca un rulo debajo de las rodillas o de no tener se pueden usar almohadas. Se realizará la extensión de la pierna afectada manteniéndola estirada 3-5 segundos, posteriormente se deja caer lentamente. El ejercicio se realiza primero con la pierna afectada luego con la sana y luego con ambas.
- **Ejercicios de flexo extensión de tobillo:** se realizan movimientos de tobillo hacia delante y atrás de forma lenta y rítmica.
- **Ejercicios activos de flexo-extensión de rodilla en sedestación:** sentado al borde de la camilla y con la espalda recta, realizar movimientos de estirar y flexionar la rodilla. Se podrá realizar alternando las rodillas o con las dos a la vez
- **Ejercicios de miembro inferior para ganar recorrido articular de cadera y rodilla:** tumbado boca arriba con la rodilla sana flexionada, llevar la rodilla afecta al pecho sujetándola con las manos por debajo de la rótula. Mantener de 3 - 5 segundos y bajar. En el caso de dolor en la rodilla sujetar la rodilla por detrás del muslo
- **Ejercicios activos de miembro inferior para ganar recorrido articular de rodilla:** tumbado boca abajo con una cuña pequeña bajo el abdomen flexionar la rodilla lo máximo posible.

#### 6.2.2. Fisioterapia en lesiones y traumatismo de la articulación del tobillo.

“El tobillo es una de las estructuras de mayor movilidad y soporte de peso del cuerpo humano. Como resultado de su demanda funcional y estructural es una zona de lesión habitual. Existen diferentes formas de afectación de la patología del tobillo entre las que se encuentran la alteración ósea, articular y/o de partes blandas. Las afectaciones de tobillo presentan un motivo frecuente de consulta al servicio de fisioterapia, siendo entre el 5% al 8% de los procesos remitidos a fisioterapia de atención primaria.

Los tratamientos de los procesos patológicos de la región del tobillo pueden variar dependiendo de la gravedad de la lesión y de factores como edad, sexo, actividad laboral/deportiva y de la existencia o no de patologías asociadas. Se debe tener en cuenta que los ejercicios deberán realizarse de forma lenta y controlada” (Arconada & Revilla, 2012).

Se proponen algunos ejercicios que se dividen en ejercicios de movilización activa y ejercicios de estiramiento; los ejercicios mostrados a continuación son textualmente tomados del trabajo de (Arconada & Revilla, 2012).

- **Ejercicios de movilización activa**

Consisten en la realización de una serie de ejercicios programados destinados a mover todas las articulaciones del tobillo de forma activa por parte del paciente. Se realizarán con la mayor amplitud posible de movimiento.

- **Ejercicio para amplitud articular en flexión dorsal y plantar:** tumbado boca arriba con la zona lumbar apoyada o sentado en una silla. Se realizan movimientos de tobillo hacia la flexión y la extensión en toda la amplitud posible.
- **Ejercicio para amplitud articular en flexión dorsal y plantar con plato:** todos los ejercicios que se realicen con plato partirán de la posición básica en la que con el plato equilibrado se coloca el pie en el centro del plato. Para ello se debe sentar en una silla o camilla que permita tener la rodilla en unos 90° de flexión. A partir de esta posición se intentará mover el pie sobre el plato hasta intentar que toque el suelo tanto por su borde anterior como posterior. Para ello se deben llevar los dedos de los pies hacia el cuerpo o hacia el suelo intentando no mover la rodilla en la medida de lo posible.

- **Ejercicios de estiramiento**

Consiste en la realización de ejercicios para conseguir elongar estructuras musculotendinosas. Se debe respetar la amplitud articular sin provocar dolor, evitando realizarlos bruscamente, siempre con preparación previa y de forma progresiva. Se debe mover el tobillo hasta el punto en que se note tensión y mantener la posición durante 20 segundos.

- **Estiramiento de gemelo:** sentado sobre una cama o camilla con la rodilla extendida. Usando una venda o cinta atada en la planta del pie y cerca de los dedos para flexionar el tobillo hacia usted de modo que acerque los dedos a su cuerpo. Es importante mantener la rodilla extendida. Se flexiona el tobillo hasta el punto en que note tensión y se mantiene la posición.
- **Estiramiento de los isquiotibiales:** de pie, se coloca el pie en una cama o silla. Se utiliza una venda o cinta atada en la planta del pie y cerca de los dedos para flexionar el tobillo de modo que acerque los dedos a su cuerpo, inclinándose ligeramente hacia delante
- **Estiramiento de tibial anterior:** de pie, se coloca el pie a estirar por detrás de la otra pierna con el dorso apoyado en el suelo o en la cama. Se extiende el tobillo hasta el punto en que note tensión y se mantiene la posición.

### **6.3. MODELOS BIOMECÁNICOS**

La biomecánica se considera una rama de la bioingeniería y de la ingeniería biomédica. La bioingeniería es un campo interdisciplinario en el que los principios y métodos de la ingeniería, las ciencias básicas y la tecnología son aplicados para diseñar, probar y fabricar equipos para su uso en la medicina; se encarga de entender, definir y resolver problemas en la fisiología y la biología. La bioingeniería es una de las varias áreas de especialidad que se encuentran bajo el campo general de la ingeniería biomédica.

La biomecánica involucra a las aplicaciones de la mecánica clásica para el análisis de los sistemas biológicos y fisiológicos. Muchos aspectos de la biomecánica utilizan diferentes partes de la mecánica aplicada, como por ejemplo, los principios de estática se han aplicado a analizar la magnitud y la naturaleza de las fuerzas que participan en diversas articulaciones y músculos del sistema musculoesquelético, los principios de la dinámica se han utilizado para la descripción del movimiento, análisis de la marcha y el análisis del movimiento segmental, principios que tienen muchas aplicaciones en la mecánica de los deportes. La mecánica de sólidos proporciona las herramientas necesarias para el desarrollo del campo de ecuaciones constitutivas para sistemas biológicos que se utilizan para evaluar su comportamiento funcional bajo diferentes condiciones de carga (Nordin & Frankel, 2012).

En la práctica de estos conceptos hacen posible construir modelos matemáticos que describen el comportamiento físico del cuerpo humano. Algunas personas han propuesto diferentes tipos de modelos en los cuales asemejan las partes del cuerpo a formas geométricas básicas. Con estas formas geométricas se simplifica el cálculo de las características dinámicas de cada parte.

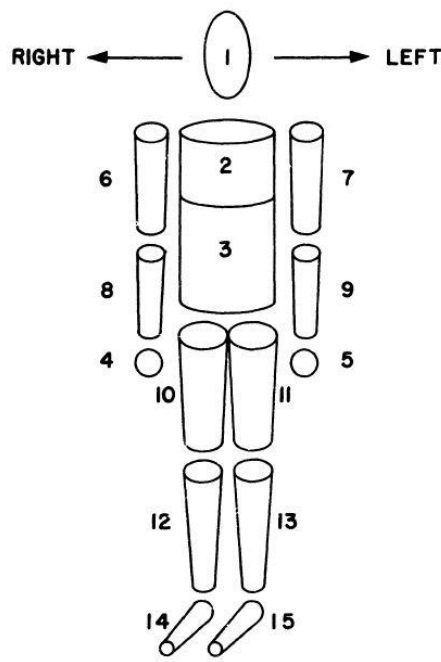
#### **6.3.1. Modelo biomecánico de Hanavan.**

Modelo creado por Ernest P. Hanavan, capitán de la Fuerza Aérea estadounidense en el año 1964 para describir matemáticamente el cuerpo humano, el modelo divide el cuerpo en 15 segmentos, y representa cada una de sus partes con sólidos geométricos básicos, estos segmentos son:

1. Cabeza
2. Torso superior
3. Torso inferior
4. Mano derecha
5. Mano izquierda
6. Brazo superior derecho
7. Brazo superior izquierdo
8. Antebrazo derecho

- 9. Antebrazo izquierdo
- 10. Pierna superior derecha
- 11. Pierna superior izquierda
- 12. Pierna inferior derecha
- 13. Pierna inferior izquierda
- 14. Pie derecho
- 15. Pie izquierdo

**Figura 6.** Representación del modelo de Hanavan



Tomado de (Hanavan, 1964)

Los sólidos utilizados consisten en conos truncados para los brazos, piernas y pies, elipses para las manos y la cabeza, y finalmente un par de polígonos regulares para las dos secciones del torso.

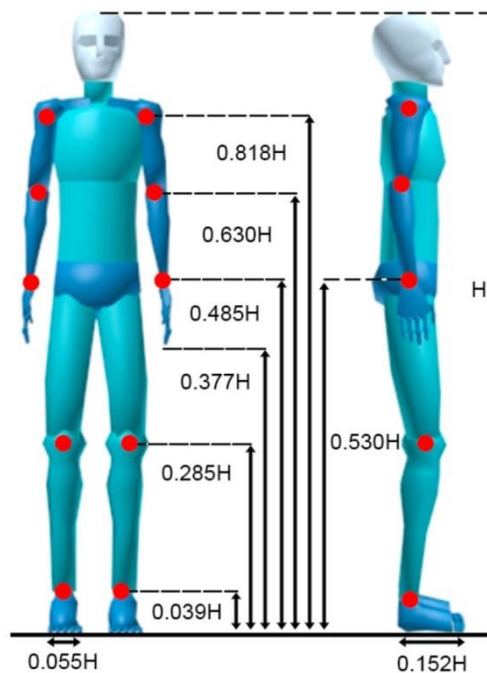
El objetivo de modelar el cuerpo con estas figuras geométricas básicas es poder calcular las propiedades inerciales del cuerpo humano de forma más fácil. Estas propiedades inerciales son:

- a. La ubicación del centro de masa.
- b. Los momentos y productos de inercia que se producen sobre el eje que pasa por el centro de masa.
- c. La orientación de los ejes principales.

Las dimensiones de estas figuras son calculadas a partir de medidas que se realizan sobre cada una de las extremidades. Se debe medir la circunferencia del puño, del codo, de la rodilla, de la cabeza, la longitud del antebrazo, del pie y la estatura, entre otras medidas más específicas que permiten construir el modelo.

### 6.3.2. Modelo anatómico de Drillis & Contini.

**Figura 7.** Longitud de los segmentos del cuerpo según Drillis y Contini.



La densidad del cuerpo humano o densidad promedio es una variable que está en función de la contextura del cuerpo (somatotipo) y se puede calcular mediante las ecuaciones del modelo propuesto por Drillis y Contini en el año 1966.

$$c = \frac{h}{w^{1/3}}$$

$$\rho = 0.69 + 0.9c \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{L}} \right]$$

Según este modelo la densidad se expresa en términos de 'c', parámetro llamado índice ponderal o índice de corpulencia, es una medida de contextura calculada como la relación entre masa y altura del cuerpo en donde h es la talla o altura de

la persona en metros y  $w$  es la masa de la persona en Kilogramos. Esta densidad promedio se expresa en unidades de Kilogramo (Kg) sobre litro (L).

Aparte de esta teoría para el cálculo de la densidad del cuerpo, formularon usando medidas antropométricas y pruebas estadísticas, un modelo que descompone las longitudes de los segmentos del cuerpo en función de la altura total de la persona (Ver Figura 7).

#### **6.4. FUNDAMENTOS DE MECÁNICA**

En esta sección se describen temas básicos usados para la formulación del modelo dinámico del sistema que describe el exoesqueleto acoplado a la pierna.

##### **6.4.1. Teorema de ejes paralelos.**

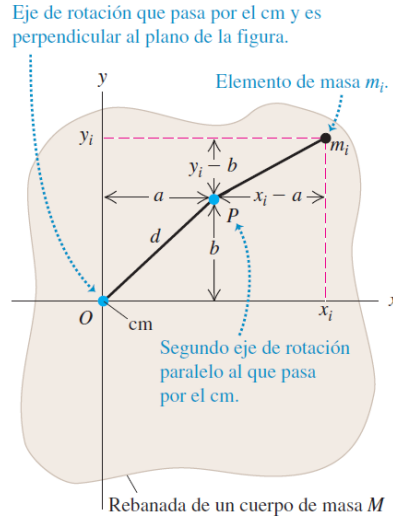
Haciendo uso de la teoría expuesta por (Young & Freedman, 2009), se explicará de forma textual el teorema de ejes paralelos.

Existe una relación simple entre el momento de inercia  $I_{cm}$  de un cuerpo de masa  $M$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y el momento de inercia  $I_p$  alrededor de cualquier otro eje paralelo al original, pero desplazado una distancia  $d$ . Esta relación, llamada teorema de los ejes paralelos, plantea que:

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

Para demostrarlo, se consideran dos ejes paralelos al eje  $z$ ; uno para por el centro de masa y el otro por el punto  $P$ . Primero se toma una rebanada o porción muy delgada del cuerpo, paralela al plano  $xy$  y perpendicular al eje  $z$ . Se selecciona el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa del cuerpo; así, las coordenadas del centro de masa serán  $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$ . El eje que pasa por el centro de masa atraviesa esta porción delgada en el punto  $O$ , y el eje paralelo la atraviesa en el punto  $P$ , cuyas coordenadas  $x$  y  $y$  se definen como  $(a,b)$ . La distancia entre este eje y el que pasa por el centro de masa es  $d$ , donde  $d^2 = a^2 + b^2$ .

**Figura 8.** Referencia para la demostración del teorema de ejes paralelos.



Tomado de (Young & Freedman, 2009)

Se puede escribir una expresión para el momento de inercia  $I_P$  alrededor del eje que pasa por P. Definiendo  $m_i$  como un elemento de masa de la porción del cuerpo, que tiene coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$ . El momento de inercia  $I_{cm}$  de la porción alrededor del eje que pasa por el centro de masa en el punto O es:

$$I_{cm} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

El momento de inercia de la porción del cuerpo alrededor del eje que pasa por P es:

$$I_P = \sum_i m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

En estas expresiones no intervienen las coordenadas  $z_i$ , medidas perpendicularmente a las rebanadas, así que se pueden extender las sumatorias para incluir todas las partículas de todas las rebanadas. Así,  $I_P$  será el momento de inercia del cuerpo para un eje que pasa por P. Expandiendo los cuadrados y reagrupando se obtiene:

$$I_P = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_i m_i x_i - 2b \sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum_i m_i$$

La primera sumatoria es  $I_{cm}$ . Dada la definición de centro de masa:

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

La segunda y la tercera sumatoria son proporcionales a  $x_{cm}$  y  $y_{cm}$ , que se define como cero ya que se tomó el origen del sistema en el centro de masa. El último término es  $d^2$  multiplicado por la masa total, es decir  $Md^2$ , Con lo que queda demostrado que:

$$I_P = I_{cm} + Md^2$$

Como muestra la ecuación, un cuerpo rígido tiene menor momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa que alrededor de cualquier otro eje paralelo. Por ello, es más fácil poner a girar un cuerpo si el eje de rotación pasa por el centro de masa. Esto sugiere que, de algún modo, es más natural que un cuerpo en rotación gire sobre un eje que pasa por su centro de masa (Young & Freedman, 2009).

#### 6.4.2. El principio de D'Alembert y las ecuaciones de Lagrange.

Haciendo uso de la teoría expuesta por (Goldstein, Poole, & Safko, 2000), se explicará de forma textual el principio de D'Alembert para la deducción de las ecuaciones de Lagrange.

Plantean que el desplazamiento virtual de un sistema se refiere al cambio en la configuración del mismo como resultado de un cambio infinitesimal arbitrario de sus coordenadas  $\delta r_i$ , consistente con las fuerzas y las restricciones impuestas en el sistema en un tiempo  $t$ . Se le llama virtual al desplazamiento con el fin de diferenciarlo del desplazamiento actual del sistema que ocurre en un intervalo de tiempo  $dt$ , durante el cual las fuerzas y las restricciones pueden estar cambiando. Se supone que el sistema está en equilibrio; la fuerza total en cada partícula se desvanece  $F_i = 0$ . Claramente el producto punto  $F_i * \delta r_i$ , que es el trabajo virtual de la fuerza  $F_i$  en el desplazamiento  $\delta r_i$ , también se desvanece. La suma de estos productos de desvanecimiento sobre cada una de las partículas debe ser cero:

$$\sum_i F_i * \delta r_i = 0$$

Descomponiendo la fuerza, eliminando las restricciones y aplicando la condición de equilibrio se obtiene el llamado "principio del trabajo virtual".

$$\sum_i F_i^{(a)} * \delta r_i = 0$$

En donde  $F_i^{(a)}$  es una fuerza aplicada. Usando la ecuación de movimiento:

$$F_i - \dot{p}_i = 0$$

Que establece que las partículas en el sistema estarán en equilibrio bajo una fuerza igual a la fuerza actual más una “fuerza efectiva invertida” ( $\dot{p}_i$ ). Usando la ecuación de desvanecimiento junto con fuerzas aplicadas y fuerzas de restricción  $f_i$  se obtiene:

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) * \delta r_i + \sum_i f_i * \delta r_i = 0$$

Restringiendo la ecuación al trabajo virtual, se obtiene:

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) * \delta r_i = 0$$

A esta ecuación es a lo que se conoce como el principio de D'Alembert, en este las fuerzas de restricción no actúan. Aunque aún no es suficiente para derivar de él las ecuaciones de movimiento, para ello se debe transformar este principio en una expresión que involucre desplazamientos virtuales de coordenadas generalizadas que sean independientes una de la otra (Restricciones holonómicas) para que los coeficientes  $\delta q_i$  puedan ser cero separadamente. La transformación de  $r$  a  $q_i$  asumiendo  $n$  coordenadas independientes se da por la expresión:

$$r_i = r_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Usando la regla de la cadena se puede escribir el principio como:

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

Entonces:

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_j}{\partial q_j} \delta q_j$$

Por lo que se puede escribir el trabajo virtual de la fuerza  $F_i$  como:

$$\sum_i F_i * \delta r_i = \sum_{i,j} F_i * \frac{\partial r_j}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

En donde  $Q_j$  es un conjunto de fuerzas generalizadas.

Expandiendo las ecuaciones y generalizando el principio de D'Alembert junto con la energía cinética (T) del sistema, se puede reescribir como:

$$\sum \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

Se puede notar que en un sistema en coordenadas cartesianas la derivada parcial de T con respecto a  $q_j$  se desvanece, por lo que se puede reescribir la ecuación anterior para sistemas con restricciones holonómicas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j$$

Debido a que hay n ecuaciones, cuando las fuerzas son derivables de una función escalar potencial V tales que:

$$F_i = -\nabla_i V$$

Las fuerzas generalizadas se pueden reescribir y reemplazar en el principio de D'Alembert dando paso a la expresión:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

Esta ecuación de movimiento no está restringida solo a sistemas conservativos, solo si V no es una función explícita del tiempo, el sistema será conservativo. Ya que el potencial V no depende de las velocidades generalizadas, se puede incluir en la derivada parcial:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

Esto define una nueva función denominada Lagrangiano:

$$L = T - V$$

Reescribiendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

A estas dos expresiones es las que se refieren como "Ecuaciones de Lagrange".

Si no todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son derivables de un potencial, las ecuaciones de Lagrange se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

En donde  $L$  contiene el potencial de las fuerzas conservativas, como se mencionó anteriormente y  $Q_j$  son las fuerzas generalizadas que actúan fuera del sistema (Goldstein et al., 2000).

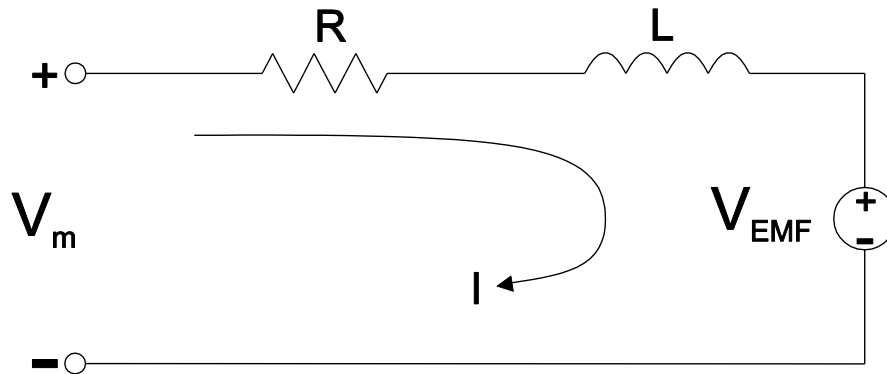
## 6.5. SISTEMAS DINÁMICOS Y TEORÍA DE CONTROL

A continuación, se describen los principales conceptos de sistemas dinámicos y teoría de control usados para crear el modelo del exoesqueleto y controlarlo.

### 6.5.1. Relación Par-Voltaje para un motor de C.C.

Se considera el circuito interno que describe el funcionamiento de un motor de corriente continua (C.C o D.C, por sus siglas en inglés).

**Figura 9.** Circuito equivalente de un motor de C.C.



La tensión  $V_{EMF}$  o fuerza contraelectromotriz inducida, es la tensión que se crea en los conductores de un motor como consecuencia de la fuerza que origina el movimiento. Esta tensión siempre va en sentido opuesto a la tensión generadora, ya que la polaridad de la tensión en los generadores es inversa a la aplicada en los bornes del motor.

Realizando el análisis de malla se obtiene:

$$V_m = RI + L \frac{dI}{dt} + V_{EMF}$$

En donde:

$$\begin{aligned}V_m &= \text{voltaje de entrada} \\ R &= \text{Resistencia de armadura} \\ I &= \text{Corriente del motor} \\ L &= \text{inductancia del motor}\end{aligned}$$

Con el fin de demostrar el efecto que tiene la tensión y el par sobre la velocidad, sólo se analizará el comportamiento en estado estable, en este punto se deben tener en cuenta las siguientes simplificaciones:

- La corriente ( $I$ ) es constante lo que significa que el inductor o bobina se puede quitar, debido a que a corriente constante la bobina se comporta como un corto circuito.
- Ya que no hay cambio en la velocidad, el par producido por el motor y el par producido por la carga debe ser igual.

Aplicando la primera consideración se obtiene:

$$V_m = RI + V_{EMF}$$

Haciendo uso de la segunda consideración y debido a las características de construcción del motor, el par generado estará dado por:

$$\tau = K_T I$$

En donde  $K_T$  es una constante de par, propia del motor.

Despejando la corriente y remplazando en la ecuación de malla:

$$V_m = R \left( \frac{\tau}{K_T} \right) + V_{EMF}$$

La fuerza contraelectromotriz inducida en un motor depende de la velocidad del mismo, así que esta estará dada por la multiplicación de la constante eléctrica  $K_e$  propia del motor y la velocidad del rotor representada como  $\dot{\theta}(t)$ :

$$V_{EMF} = K_e \dot{\theta}(t)$$

Remplazando en la ecuación de malla, se obtiene finalmente un modelo que describe dinámicamente el motor de C.C y permite crear una relación entre el par generado y el voltaje o tensión de entrada.

$$V_m = R \left( \frac{\tau}{K_T} \right) + K_e \dot{\theta}(t)$$

Para aumentar el par motor de un motor de corriente continua es necesario usar reductores, estos son dispositivos que se encargan de reducir la velocidad del sistema aumentando el par, se debe introducir a la ecuación un término que permita modelar este comportamiento, para lo que se usa la siguiente relación:

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

En donde,  $\dot{\theta}_1$  es la velocidad antes del reductor y  $\dot{\theta}_2$  la velocidad después del reductor. Debido a que  $\dot{\theta}_2$  debe ser menor  $N_1 \gg N_2$ , lo que permite obtener una relación Par-Voltaje completa:

$$\tau = \left( \frac{V_m - K_e \dot{\theta}_1 \left( \frac{N_2}{N_1} \right)}{R} \right) K_T$$

### 6.5.2. Linealización de sistemas.

Un sistema es no lineal si no es posible aplicar el principio de superposición, debido a la presencia de elementos no lineales. Por tanto, para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada entrada a la vez y sumando los resultados.

“Aunque muchas relaciones físicas se representan a menudo mediante ecuaciones lineales, en la mayor parte de los casos las relaciones reales no son verdaderamente lineales. De hecho, un estudio cuidadoso de los sistemas físicos revela que incluso los llamados «sistemas lineales» sólo lo son en rangos de operación limitados. En la práctica, muchos sistemas electromecánicos, hidráulicos, neumáticos, etc., involucran relaciones no lineales entre las variables” (Ogata, 2010).

Con el fin de encontrar un modelo matemático lineal para un sistema no lineal, se supone que las variables sólo se desvían ligeramente de alguna condición o punto de operación, para ello se debe considerar un sistema con entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$ :

$$y = f(x)$$

Cuya condición de operación normal corresponde a  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ , se expande la ecuación anterior usando series de Taylor alrededor de este punto:

$$y = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots$$

dado que los términos de orden superior  $(x - \bar{x})$  se suponen como variaciones muy pequeñas es posible despreciarlos, entonces la ecuación expandida se puede escribir como:

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x})$$

En donde:

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

Reescribiendo la relación:

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x})$$

Que representa una aproximación lineal al sistema cerca de un punto de operación de la forma  $x = \bar{x}$  y  $y = \bar{y}$ .

Expandiendo el método a sistemas de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t))$$

Se integra y se representa el sistema como una ecuación integral en función de  $x(t)$ :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

$$y(t) = h\left(x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau\right)$$

Analizando el sistema en puntos de operación constantes  $x(t) = x(t_0) = X$ ,  $u(t) = U$  y  $y(t) = Y$ , expandiendo en series de Taylor y eliminando términos de orden superior se obtiene:

$$\delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^t \left( \left. \frac{df}{dx} \right|_{(X,U)} \delta x(\tau) + \left. \frac{df}{du} \right|_{(X,U)} \delta u(\tau) \right) d\tau$$

$$\delta y(t) = \left. \frac{dh}{dx} \right|_x \delta x(t)$$

Una vez representado el modelo de esta forma se puede proceder a pasar al espacio de estados:

$$\delta \dot{x} = A\delta x(t) + B\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t)$$

En donde:

$$A = \left. \frac{df}{dx} \right|_{(x,u)} , \quad B = \left. \frac{df}{du} \right|_{(x,u)} , \quad C = \left. \frac{dh}{dx} \right|_x$$

Lo que permite obtener una aproximación lineal del sistema en el espacio de estados, a este método se le llama linealización jacobiana.

### 6.5.3. Discretización de sistemas en espacio de estados.

Para obtener la representación discreta del espacio de estados en tiempo continuo se consideran las ecuaciones en tiempo continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Cuya representación en tiempo discreto:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT)$$

$$u(t) = u(kT) \quad \text{para } kT \leq t < kT + T$$

En donde las entradas se muestrean por medio de un retenedor de orden cero. Mediante la transformación de las ecuaciones del sistema se obtiene:

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

Y

$$x(kT) = e^{AkT}x(0) + e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

Al multiplicar la segunda ecuación por  $e^{A\tau}$  y sustraerla de la primera ecuación da como resultado:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

Debido a que la ecuación que discretiza las entradas del sistema se pueden escribir como  $u(\tau) = u(kT) = cte$  con  $\tau = kT + T$ , que representa el límite superior de integración y no afecta el resultado; se puede escribir como:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\lambda} Bu(kT) d\lambda$$

En donde  $\lambda = T - t$ , definiendo las matrices deseadas para que el sistema se convierta en una representación discreta:

$$G(T) = e^{AT}$$

$$H(T) = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B$$

Por lo cual se definirá la salida del sistema como:

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

Como se puede observar en estas ecuaciones las matrices depende directamente del periodo de muestreo  $T$ , excepto las matrices  $C$  y  $D$  que son matrices constantes (Ogata, 1996).

Si la matriz  $A$  es no singular matriz  $H$  se puede simplificar como:

$$H(T) = A^{-1}(e^{AT} - I)B = (e^{AT} - I)A^{-1}B$$

Método que se puede resumir y simplificar como:

$$H(t) = L\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$G(T) = \int_0^T H(t) * B dt$$

#### 6.5.4. Sistema Regulador Óptimo Cuadrático (LQR).

Los sistemas de control óptimo tienen como objetivo minimizar o maximizar, según sea el caso, parámetros del sistema mediante una función llamada función de coste o función objetivo. Haciendo uso de esta teoría de optimización se busca encontrar el vector de control óptimo  $u(t)$ , el cual definirá la estabilidad del sistema, se encargará de llevarlo a la región deseada del espacio de estados y de minimizar el índice de desempeño.

Se considera el problema del regulador óptimo, que dada la ecuación del sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Determina la matriz K del vector de control óptimo, para el cual  $u(t)$  es óptima para cualquier estado inicial  $x(0)$ . A esta ecuación se le llama Ley de control óptimo:

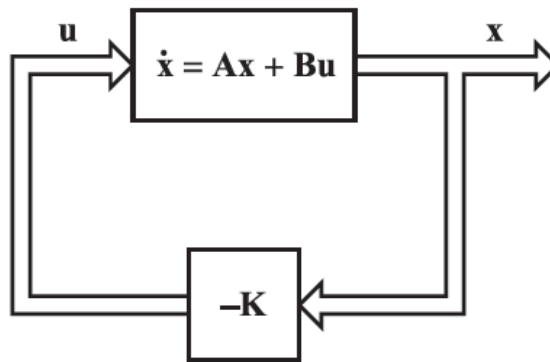
$$u(t) = -Kx(t)$$

Con el objetivo de minimizar la función de coste:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

En donde Q es una matriz hermítica, semidefinida positiva o simétrica real, esta matriz de ponderación establece cuales deben ser los estados que deben controlarse más que los otros. La matriz R es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real, esta matriz de ponderación dependerá de la desviación de los estados del sistema.

**Figura 10.** Sistema de regulador óptimo.



Tomado de (Ogata, 2010)

Para resolver el problema de optimización se sustituye la ley de control en las ecuaciones que describen el sistema:

$$\dot{x} = Ax - Bkx = (A - BK)x$$

Por practicidad se considera que el término  $(A - BK)$  es estable, o que sus valores propios tienen partes reales negativas.

Incluyendo la ley de control en la función de coste se obtiene:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\
&= \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt
\end{aligned}$$

Igualando:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x)$$

En donde P es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real. Así se obtiene:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = -x^T [(A - BK)^T P + P^T (A - BK)] x$$

Analizando la ecuación y considerando que la misma debe ser válida para cualquier x, es necesario que:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K)$$

El procedimiento se basará en encontrar los elementos de P a partir de esta ecuación, esta matriz deberá ser definida positiva para que el sistema sea estable.

El índice de comportamiento o índice de desempeño se calcula como:

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt = -x^T P x \big|_0 \rightarrow \infty$$

$$J = -x(\infty)^T P x(\infty) + x(0)^T P x(0) = x(0)^T P x(0)$$

Debido a que la matriz R es definida positiva se puede reescribir como:

$$R = T^T T$$

En donde T es una matriz no singular.

Remplazando y minimizando J respecto a K, se obtiene la ley de control del regulador cuadrático lineal:

$$K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P$$

Por lo que  $u(t)$  óptimo estará dado por:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$$

La matriz P de la ley de control debe satisfacer la ecuación reducida:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Ecuación a la que se conoce como ecuación de Riccati en lazo cerrado. Haciendo uso de esta ecuación se definen algunos pasos para el diseño del regulador (Ogata, 2010)

1. Resolver la ecuación de Riccati para la matriz P, de tal forma que sea definida positiva para asegurar estabilidad del sistema.
2. Sustituir la matriz P en la ley de control del regulador cuadrático lineal. La matriz K resultante es la matriz óptima.

Para extender este método a sistemas en tiempo discreto, es necesario realizar algunas aproximaciones de los sistemas continuos. Se basa en el sistema continuo utilizado en la deducción de la ley de control continua o ecuación de Riccati:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

El sistema de control continuo aproximado a su equivalente discreto será:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

A su vez la ley de control se reescribe como:

$$u(k) = -Kx(k)$$

Y la función de costo o índice de desempeño discretizado se escribe como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]$$

La matriz P se puede calcular como:

$$P = Q + G^T P G - G^T P H (R + H^T P G)^{-1} H^T P G$$

Lo que permite obtener una expresión para la matriz de ganancias K:

$$K = (R + H^T P H)^{-1} H^T P G$$

Remplazando en la ley de control óptimo discreto se obtiene:

$$u(k) = [-(R + H^T P H)^{-1} H^T P G] x(k)$$

Con lo que se puede obtener la ecuación de Riccati en tiempo discreto usando una aproximación por criterio de estabilidad de Liapunov (Ogata, 1996):

$$P = Q + G^T P (I + H R^{-1} H^T P)^{-1} G$$

Una vez se obtiene la matriz P se puede aplicar el mismo concepto de diseño del método en tiempo continuo para encontrar la matriz de realimentación  $K$  y estabilizar el sistema.

Este tipo de reguladores llevan siempre el sistema al estado ideal o “0”, con el fin de eliminar el estado estacionario y llevar el sistema a un punto deseado diferente de cero, es necesario añadir una acción integral al sistema. Para calcular el sistema aumentado con la acción integral se aplica:

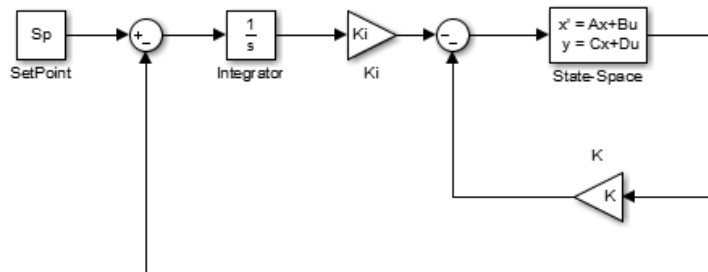
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo que permite tener un sistema de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

**Figura 11.** Sistema de control con acción integral.



### 6.5.5. Técnica de control predictivo (MPC).

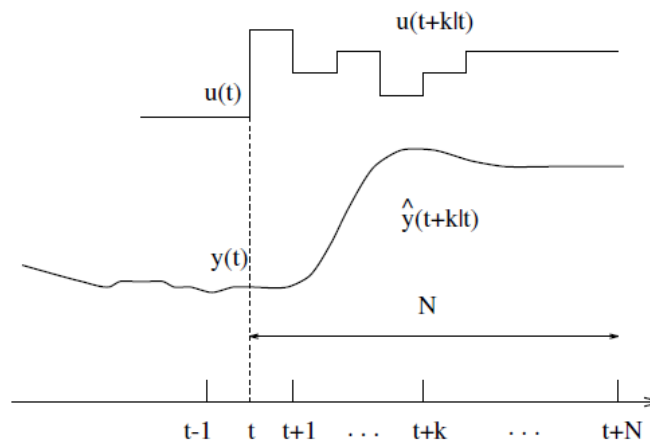
“El Control predictivo basado en modelos (MPC), se originó en los años setenta y se ha desarrollado considerablemente desde entonces. El término "Modelo de Control Predictivo" no designa una estrategia de control específico, sino más bien una amplia gama de métodos de control que hacen uso explícito de un modelo del proceso para obtener la señal de control, minimizando una función objetivo. Estos métodos de diseño conducen a los controladores, que tienen prácticamente la misma estructura, y presentan grados adecuados de libertad. Las ideas, apareciendo en mayor o menor grado en la familia de control predictivo, son básicamente:

- uso explícito de un modelo para predecir la salida del proceso en instantes de tiempo futuros (horizonte);
- cálculo de una secuencia de control minimizando una función objetivo; y retroceso de la estrategia, para que en cada instante el horizonte, sea desplazado hacia el futuro, lo que implica la aplicación de la primera señal de control de la secuencia calculada en cada paso.

Los diversos algoritmos MPC (también llamados control predictivo con horizonte de retroceso o RHPC) sólo se diferencian entre sí, si el modelo se utiliza para representar el proceso, los ruidos y la función de costo a ser minimizada” (Camacho & Bordons, 2007).

La metodología de todos los controladores que pertenecen a la familia de MPC se caracterizan por la siguiente estrategia:

**Figura 12.** Estrategia de control predictivo.



Tomado de (Camacho & Bordons, 2007)

Las salidas futuras para un determinado horizonte  $N$ , se llaman el horizonte de predicción, se prevé en cada instante  $t$  utilizando el modelo del proceso o sistema. Estas salidas predichas,  $y(t + k | t)$  para  $k = 1 \dots N$  dependen de los valores conocidos hasta el instante  $t$  (entradas y salidas pasadas) y en las futuras señales de control  $u(t + k | t)$ ,  $k = 1 \dots N - 1$ , que son los coeficientes que se calcularán y enviarán al sistema.

El conjunto de las futuras señales de control se calcula mediante la optimización de un criterio determinado para mantener el proceso lo más cerca posible a la trayectoria de referencia  $w(t + k)$  (que puede ser el punto de ajuste o señal de referencia en sí). Dicho criterio en general criterio general toma la forma de una función cuadrática del error entre la señal de salida predicha y la trayectoria de referencia. Una solución explícita puede obtenerse si el criterio es cuadrático, el modelo es lineal y no hay restricciones; de lo contrario un método iterativo de optimización tiene que ser utilizado. La señal de control  $u(t | t)$  se envía al proceso mientras que las siguientes señales de control calculadas son rechazadas, debido a que en el siguiente instante de muestreo  $y(t + 1)$  ya se conoce. Así se calcula la señal de control  $u(t + 1 | t)$  debido a la nueva información disponible, esto se realiza utilizando el concepto de horizonte de retroceso.

## 7. DISEÑO METODOLÓGICO

A continuación, se muestra el diseño metodológico, junto con la planeación, planteadas en el anteproyecto. Con esta metodología se trabajó para cumplir a cabalidad con los objetivos planteados y generar una buena propuesta de exoesqueleto.

En el país se han venido explorando y desarrollado proyectos afines de rehabilitación con exoesqueletos en los que se trabajan diferentes tipos de metodología. Estos proyectos se encargan de asistir la rehabilitación de extremidades tales como el codo y la rodilla, los cuales son puestos a prueba mediante el uso de plantas a escala y/o procesos de simulación.

El proyecto se desarrolló en dos fases principales, una primera de planteamiento y verificación de factibilidad en la cual se inició la redacción y construcción del documento escrito por medio de una revisión bibliográfica y la construcción del estado del arte, este documento se complementó a lo largo de todo el proyecto a medida que se dieron avances; una segunda fase de ejecución de 6 meses de duración en la que se desarrolló un modelo dinámico de la pierna en donde se consideró que según la combinación de peso y altura se obtiene un índice de masa corporal que cambia los pesos individuales de cada una de las extremidades. Con este índice y junto con el apoyo de los investigadores vinculados al proyecto de investigación, se calculó la capacidad mínima aproximada de cada uno de los motores con el fin de que puedan mover las extremidades. Debido a esto se limitó el diseño a personas con un índice de corpulencia máximo de 0.4239, parámetros calculados a partir de la altura y el peso máximo los cuales son un peso de 90 Kg y una estatura de 190 cm. Una vez finalizado el modelo, se pusieron a prueba mediante simulación diferentes estrategias de control.

La interfaz humano-maquina (HMI) que se encarga de monitorear y registrar la información importante que aporta el exoesqueleto, se diseñó basado en los criterios definidos a través del proyecto “Diseño y Validación de un exoesqueleto de brazo y pierna para rehabilitación de personas con discapacidad parcial en sus extremidades usando la configuración maestro-esclavo (Etapa I)” el cual se financió por la Universidad Santo Tomás a través del Fondo para el fomento de la investigación FODEIN, del cual hace parte el presente proyecto. En el mismo participan investigadores con diferentes perfiles y quienes pertenecen al grupo de investigación MEM de la Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad Santo Tomás, quienes han generado y cuantificado las necesidades a incluir en el diseño de la interfaz y en general del proyecto.

El exoesqueleto se diseñó para enfocarse hacia terapias de rehabilitación de miembros inferiores, específicamente de rodilla y tobillo, el cual trabaja en el plano sagital y se encarga de movimientos de flexión y extensión. Se analizó el rendimiento del exoesqueleto de forma cuantitativo-descriptiva realizando pruebas en las que se midió la precisión de los movimientos programados.

Se diseñaron estrategias para probar el sistema a nivel de simulación, utilizando software de simulación, tales como Matlab y LabVIEW, en donde se validarán los resultados basados en el criterio de diseño, en el caso de los sistemas de control, empleando tablas como las presentadas más adelante.

Se propusieron los siguientes modelos de matriz de evaluación (Tabla 1 - Tabla 2).

**Tabla 1.** Matriz de evaluación de desempeño del controlador para la respuesta en el tiempo para el exoesqueleto.

| Prueba | Señal de Referencia | Señal de salida | Error en estado estacionario | Parámetros obtenidos en la respuesta transitoria |
|--------|---------------------|-----------------|------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1      |                     |                 |                              |                                                  |
| 2      |                     |                 |                              |                                                  |
| 3      |                     |                 |                              |                                                  |
| 4      |                     |                 |                              |                                                  |

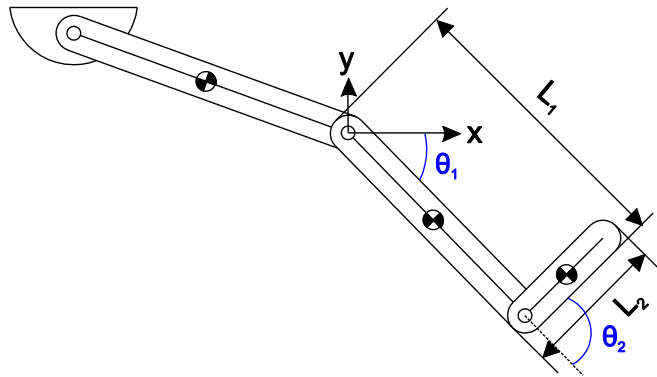
**Tabla 2.** Matriz de comparación de desempeño entre las propuestas de diseño de controladores.

| Tipo de control | Señal de Referencia | Señal de salida | Error en estado estacionario | Parámetros obtenidos en la respuesta transitoria |
|-----------------|---------------------|-----------------|------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1               |                     |                 |                              |                                                  |
| 2               |                     |                 |                              |                                                  |
| 3               |                     |                 |                              |                                                  |

## 8. EJECUCIÓN DEL PROYECTO

### 8.1. CARACTERIZACIÓN CINEMÁTICA DE LA PIERNA (TOPES ÓSEOS)

**Figura 13.** Representación de la pierna para el desarrollo del modelo matemático.



Ya que la pierna humana está limitada en movimiento debido a características fisiológicas específicas de cada una de sus articulaciones, para cuantificar el límite de movimiento angular o topes óseos se usó la herramienta “Tracker tool”, la cual analiza imágenes lo que permite hacer seguimiento a píxeles en un video, desarrollada por el proyecto Open Source Physics (OSP). En este video captado se ubican transportadores con dos puntos de referencia y, el punto a medir, que permite tener una medición de los ángulos en las articulaciones. En la Figura 14 se puede observar la forma en la que se ubican los marcadores para realizar las correspondientes medidas angulares en la rodilla, cadera y tobillo.

**Figura 14.** Videos analizados con “Tracker tool”.



Una vez adquiridos los datos, se procesan tomando como referencia la Figura 13 en donde la horizontal corresponde a 0 grados. Una vez organizados estos datos se obtiene la Tabla 3, en donde se encuentran los ángulos máximos y mínimos promedio alcanzados por una muestra de tres personas.

**Tabla 3.** Ángulos máximo y mínimo por articulación de la pierna (Topes óseos).

| Sección de la pierna | Articulación | Angulo mínimo (Grados) | Angulo máximo (Grados) |
|----------------------|--------------|------------------------|------------------------|
| Muslo                | Cadera       | -90°                   | 10°                    |
| Canilla              | Rodilla      | -123°                  | 0°                     |
| Pie                  | Tobillo      | 60°                    | 110°                   |

Estos ángulos se contrastan con la información aportada por (Nordin & Frankel, 2012) y (Kapandji, 2012), encontrando similitudes.

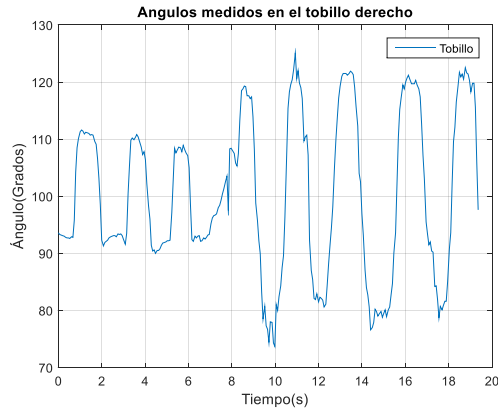
**Tabla 4.** Rango de movimiento de la rodilla y el tobillo<sup>1</sup>.

| Articulación | (Nordin & Frankel, 2012) |                        | (Kapandji, 2012)       |                        |
|--------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|              | Angulo mínimo (Grados)   | Angulo máximo (Grados) | Angulo mínimo (Grados) | Angulo máximo (Grados) |
| Cadera       | -105                     | 50°                    | -120°                  | 30° - 55°              |
| Rodilla      | -140°                    | 0°                     | -120° - -140°          | 0°                     |
| Tobillo      | 35° - 50°                | 100° - 110°            | 40° - 60°              | 110° - 120°            |

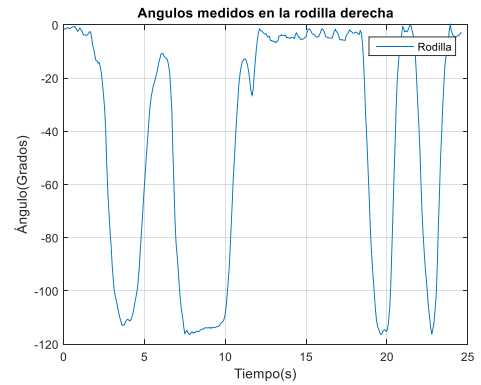
La variación que se observa en los datos recopilados usando la herramienta “Tracker Tool” en comparación con los datos cuantificados por otros investigadores, se debe a que la muestra es muy pequeña, como también a otros factores como la edad y la condición física del individuo, su rango de movimiento será mayor o menor, aparte los ejercicios no se ejecutan forzando las extremidades al límite sino con movimientos normales. Este tipo de movimientos permitieron una buena caracterización, tal como se muestran los resultados de algunos de los movimientos captados con la herramienta mencionada.

<sup>1</sup> Los datos han sido adaptados al marco de referencia del autor, marco en el que se toma el cero del sistema sobre el eje horizontal.

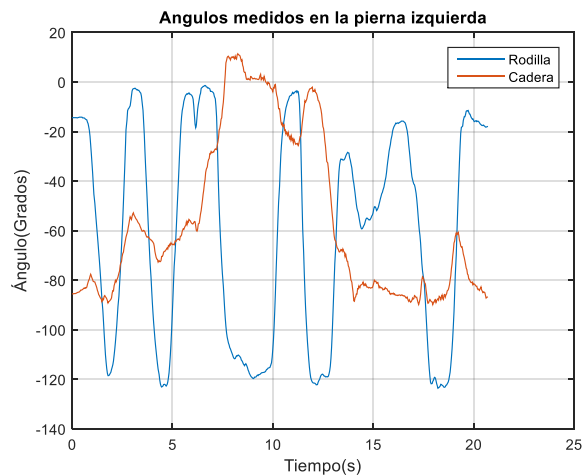
**Figura 15.** Resultados de medición en el tobillo.



**Figura 16.** Resultados de medición en la rodilla.



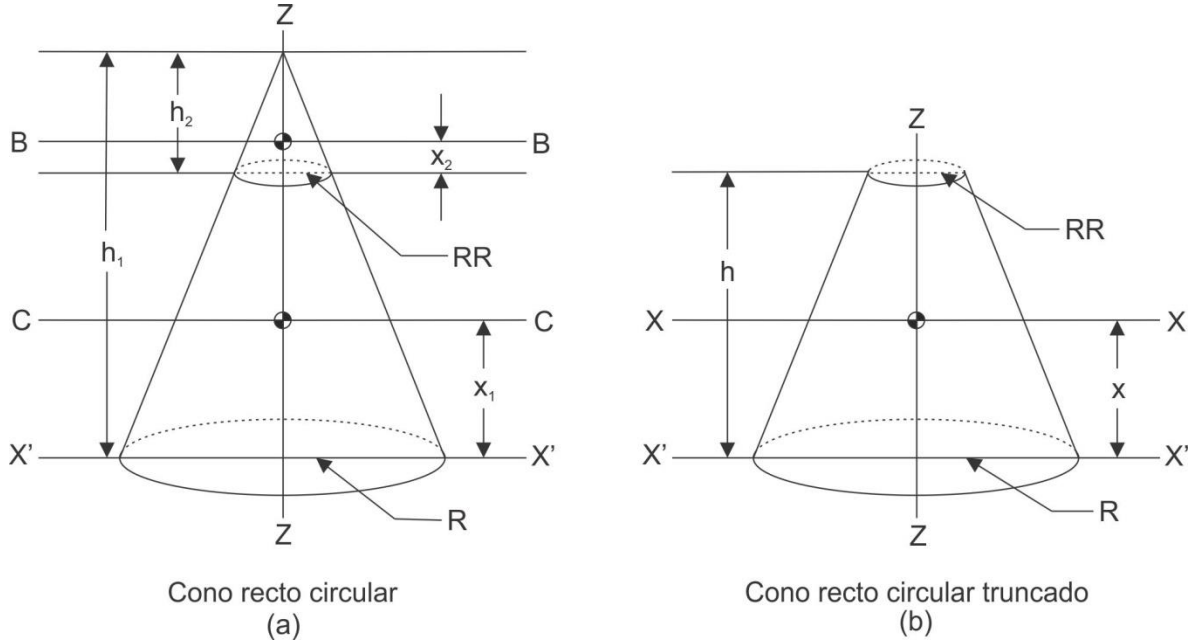
**Figura 17.** Resultados de mediciones simultaneas en rodilla y cadera.



## 8.2. MODELO BIOMECÁNICO

Se usó el modelo biomecánico de Hanavan para describir matemáticamente la forma de cada una de las partes de la pierna, ya que este modelo considera cada una de estas secciones, como un cono recto circular, es necesario analizar sus componentes cinemáticas para lograr una generalización del modelo aplicable a cualquier persona.

**Figura 18.** Análisis del cono recto circular truncado.



Como primer paso para analizar el cono truncado se deben hacer algunas consideraciones a partir de la Figura 18, en donde:

$$h = h_1 - h_2 \quad (1)$$

$$\frac{h_1}{R} = \frac{h_2}{RR} = \frac{h}{R - RR} \quad (2)$$

Se procede a despejar cada una de las alturas del cono de la figura 18a.

$$h_1 = \frac{R h}{R - RR} \quad (3)$$

$$h_2 = \frac{RR h}{R - RR} \quad (4)$$

Para calcular las masas de los conos de alturas  $h_1$  y  $h_2$  es necesario considerar su volumen y tener en cuenta la relación masa, densidad, volumen.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad (5)$$

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (6)$$

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad (7)$$

$$m = \frac{\rho \pi r^2 h}{3} \quad (8)$$

Usando la ecuación (8) se procede a calcular la masa de cada uno de los segmentos:

$$M_1 = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{3} \quad (9)$$

$$M_2 = \frac{\rho \pi RR^2 h_2}{3} \quad (10)$$

Reemplazando las ecuaciones (3) y (4) en las ecuaciones (9) y (10) respectivamente, se obtiene:

$$M_1 = \frac{\rho \pi R^3 h}{3(R - RR)} \quad (11)$$

$$M_2 = \frac{\rho \pi RR^3 h}{3(R - RR)} \quad (12)$$

Para calcular la masa del cono truncado se resta la masa del cono de altura h1 con la masa del cono de altura h2 dando como resultado:

$$M = M_1 - M_2 \quad (13)$$

$$M = \frac{\rho \pi h (R^3 - RR^3)}{3(R - RR)} \quad (14)$$

Debido a que el objetivo es encontrar una forma general del modelo de Hanavan se despeja uno de los radios, es este caso se procede a despejar el radio menor RR.

Por diferencia de cubos:

$$M = \frac{\rho \pi h (R - RR)(R^2 + R * RR + RR^2)}{3(R - RR)} \quad (15)$$

Simplificando y multiplicando por 1:

$$\frac{3M}{\rho \pi h} = (R^2 + R * RR + RR^2) \frac{RR^2}{RR^2} \quad (16)$$

$$\frac{3M}{\rho \pi h} = \left( \frac{R^2}{RR^2} + \frac{R}{RR} + 1 \right) RR^2 \quad (17)$$

Despejando RR:

$$\sqrt{\frac{3M}{\rho \pi h \left( \frac{R^2}{RR^2} + \frac{R}{RR} + 1 \right)}} = RR \quad (18)$$

Usando la ecuación (18) es posible calcular el radio menor del cono truncado con el cual se pueden modelar los brazos, las piernas y los pies según el modelo de Hanavan. Acorde a esto las variables serán:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Densidad total del cuerpo} \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] \\ h &= \text{Longitud de la sección de cada extremidad} [m] \\ M &= \text{Masa de la sección de cada extremidad} [Kg] \\ RR &= \text{Radio menor del cono} [m] \\ R &= \text{Radio mayor del cono} [m] \end{aligned}$$

Para realizar el cálculo del radio mayor del cono es necesario hallar una relación entre este y el radio menor. Ya que el modelo se va a aplicar a la pierna, se hallará una relación entre los radios de cada una de sus secciones. Debido a que como se puede observar en la ecuación (18) el radio menor depende de él mismo, esta relación va a permitir calcular una generalización para esta ecuación. La relación hallada para cada sección es:

$$R_m = 1.53 r_m \quad (19)$$

$$R_r = 1.54 r_r \quad (20)$$

Usando una combinación de los modelos anatómicos descritos anteriormente es posible calcular el radio superior de la representación del pie, así que se calcula una relación inversa que permita calcular el radio menor del mismo, esta estará dada por:

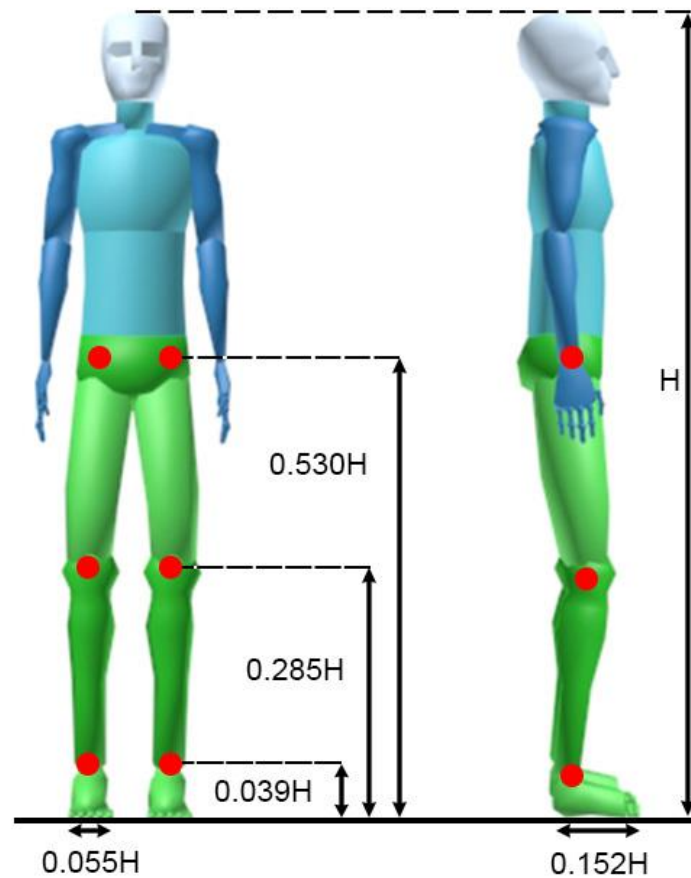
$$r_p = 0.77 R_p \quad (21)$$

La densidad del cuerpo o densidad promedio se puede calcular mediante las ecuaciones (22) y (23) correspondientes al modelo propuesto por (Drillis & Contini, 1964).

$$c = \frac{h}{w^{1/3}} \quad (22)$$

$$\rho = 0.69 + 0.9c \left[ \frac{Kg}{L} \right] \quad (23)$$

**Figura 19.** Descomposición de la longitud de las piernas en función de la altura.



Según este modelo la densidad se expresa en términos de  $c$ , llamado el índice ponderal o índice de corpulencia, es una medida de contextura calculada como la relación entre masa y altura en donde  $h$  es la talla o altura de la persona en metros y  $w$  es la masa de la persona en Kilogramos. Debido a que las unidades resultantes de la función son de Kilogramo (Kg) sobre litro (L) es necesario, por

efectos prácticos para el cálculo de las dimensiones del cono en metros, pasar estas unidades a Kilogramos (Kg) sobre metro cubico (m<sup>3</sup>).

$$\rho = (0.69 + 0.9c) * 1000 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] \quad (24)$$

Para el cálculo de la longitud de las extremidades del cuerpo se usa otro modelo planteado también por (Drillis & Contini, 1964), este modelo descompone las longitudes de las partes del cuerpo en función de la altura total del mismo (Ver Figura 19). Se denotará a la altura del individuo como la talla, representada en la Figura 19 como H.

Para realizar el cálculo de la masa de cada segmento se utiliza un modelo estadístico que pone la masa de cada segmento en función de la masa total del cuerpo. Por otra parte, los centros de masa se pueden ubicar usando tablas que describen la ubicación de dicho punto como un porcentaje de la longitud de la sección en análisis, este parámetro se puede medir respecto a dos puntos de referencia, llamados distal y proximal, conceptos de referencia que tienen como base el pecho, de allí las partes del cuerpo más alejadas se consideran distales y las más cercanas proximales. Se pueden tomar otros puntos de referencia en cada segmento, como por ejemplo, la mano es distal al hombro; las medidas seleccionadas para el cálculo serán las proximales.

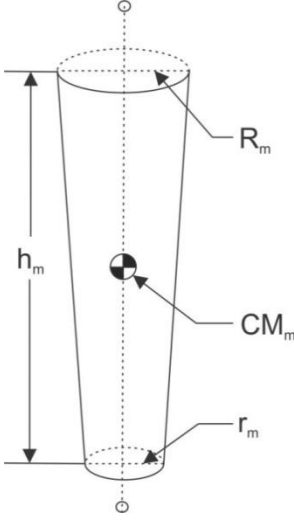
**Tabla 5.** Parámetros para el cálculo de las masas y centro de masa de las piernas.

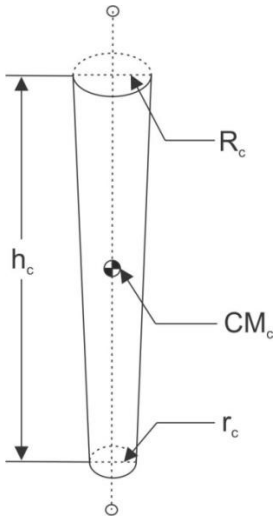
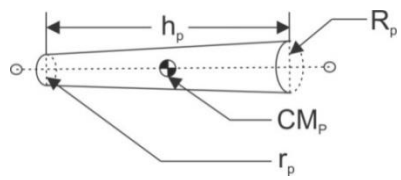
| Segmento        | Masa del segmento/Masa total del cuerpo | Centro de masa/Longitud del segmento |         |
|-----------------|-----------------------------------------|--------------------------------------|---------|
|                 |                                         | Proximal                             | Distal  |
| Muslo           | 0.1 M                                   | 0.433                                | 0.567 P |
| Canilla         | 0.0465 M                                | 0.433                                | 0.567 P |
| Pie             | 0.145 M                                 | 0.5                                  | 0.5 P   |
| Pie y canilla   | 0.061 M                                 | 0.606                                | 0.394 P |
| Pierna completa | 0.161 M                                 | 0.447                                | 0.553 P |

Tomado de (Winter, 2009)

El modelo propuesto para las piernas se muestra en la Tabla 6.

**Tabla 6.** Modelo generalizado de Hanavan.

| Sección       | Modelo                                                                             | Variables                                                                                                                                                                                      | Ecuaciones                                                                                                                                                                    |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cuerpo entero |   | $M_T$ =Masa total de la persona<br>Talla=Altura total de la persona<br>$\rho$ =Densidad promedio del cuerpo                                                                                    | $\rho = \frac{0.69 + 0.9c}{1000}$ $c = \frac{h}{w^{1/3}}$                                                                                                                     |
| Muslo         |  | $h_m$ =Longitud del muslo.<br>$R_m$ =Radio mayor del muslo.<br>$r_m$ =Radio menor del muslo.<br>$M_m$ =Masa del muslo.<br>$CM_m$ =Ubicación del centro de masa del muslo respecto al proximal. | $h_m = 0.245 * Talla$ $R_m = 1.53 r_m$ $M_m = 0.1 M_T$ $r_m = \sqrt{\frac{3M_m}{\rho \pi h_m \left( \frac{R_m^2}{r_m^2} + \frac{R_m}{r_m} + 1 \right)}}$ $CM_m = 0.433 * h_m$ |

|             |                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                  |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pantorrilla |    | <p><math>h_c</math>=Longitud de la canilla.</p> <p><math>R_c</math>=Radio mayor de la canilla.</p> <p><math>r_c</math>=Radio menor del canilla.</p> <p><math>M_c</math>=Masa del muslo.</p> <p><math>CM_c</math>=Ubicación del centro de masa de la canilla respecto al proximal.</p> | $h_c = 0.246 * Talla$ $R_c = 1.54 r_c$ $M_c = 0.0465 M_T$ $r_c = \sqrt{\frac{3M_c}{\rho \pi h_c \left( \frac{R_c^2}{r_c^2} + \frac{R_c}{r_c} + 1 \right)}}$ $CM_c = 0.433 * h_c$ |
| Pie         |  | <p><math>h_p</math>=Longitud del pie.</p> <p><math>R_p</math>=Radio mayor del pie.</p> <p><math>r_p</math>=Radio menor del pie.</p> <p><math>CM_p</math>=Ubicación del centro de masa del pie respecto al proximal.</p>                                                               | $h_p = 0.152 * Talla$ $R_p = 0.5 * 0.039 * Talla$ $M_p = 0.145 M_T$ $r_p = 0.77 R_p$ $CM_p = 0.5 * h_p$                                                                          |

### 8.2.1. Cálculo de los momentos de inercia.

Para poder realizar el dimensionamiento de los motores que van a componer las articulaciones del exoesqueleto es necesario calcular los momentos de inercia de cada una de las secciones de las extremidades. Debido a que están modeladas todas con conos truncados se buscan los momentos de inercia presentes en la geometría.

Mediante el uso de la ecuación (15) se procede a realizar otra generalización de la fórmula de masa:

$$M = \frac{\rho \pi h (R - RR)(R^2 + R * RR + RR^2)}{3(R - RR)} \left( \frac{R^2}{R^2} \right) \quad (25)$$

$$M = \frac{\rho \pi h R^2 \left( 1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2} \right)}{3} \quad (26)$$

Para realizar el cálculo de los momentos de inercia del cono de altura  $h_1$  y del cono de altura  $h_2$  es necesario expresar cada una de sus masas en función de la masa del cono truncado con el fin de relacionarlos al final para hallar el momento de inercia del cono truncado:

$$M_1 = \frac{M R}{\left( 1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2} \right) (R - RR)} \quad M = M_1 - M_2 \quad (27)$$

$$M_2 = \frac{M RR}{\left( 1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2} \right) (R - RR)} \left( \frac{RR^2}{R^2} \right) \quad (28)$$

El momento de inercia del cono de altura  $h_1$  pasando por el centro de masa respecto al eje C-C será (Ver Figura 18):

$$I_{CC} = \frac{3}{20} M_1 \left( R^2 + \frac{h_1^2}{4} \right) \quad (29)$$

Aplicando el teorema de ejes paralelos para los momentos de inercia:

$$I = I_{c.g.} + MD^2 \quad (30)$$

Usando las ecuaciones (27) y (28) se obtiene el momento de inercia respecto al eje X'-X':

$$I_{X'X'1} = I_{CC} + M_1 x_1^2 \quad (31)$$

En donde:

$$x_1 = 0.25 h_1$$

El momento de inercia del cono de altura  $h_2$  pasando por el centro de masa respecto al eje B-B será (Ver Figura 18):

$$I_{BB} = \frac{3}{20} M_2 \left( RR^2 + \frac{h_2^2}{4} \right) M = M_1 - M_2 \quad (32)$$

Usando las ecuaciones (31) y (29) se obtiene el momento de inercia respecto al eje X'-X':

$$I_{X'X'2} = I_{BB} + M_2 (x_2 + h)^2 \quad (33)$$

En donde:

$$x_2 = 0.25 h_2$$

Ya que el análisis parte de los dos conos de alturas diferentes se puede calcular el momento de inercia respecto al eje X'-X' del cono truncado restando el momento de inercia del cono de altura  $h_1$  con el momento de inercia del cono  $h_2$  como se muestra a continuación:

$$I_{X'X'} = I_{X'X'1} - I_{X'X'2} \quad (34)$$

$$I_{X'X'} = I_{CC} + M_1 x_1^2 - (I_{BB} + M_2 (x_2 + h)^2) \quad (35)$$

Usando las ecuaciones (3), (4), (11) y (12) se procede a simplificar la ecuación dando como resultado:

$$I_{X'X'} = M \left[ \frac{3R^2}{20 \left( 1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2} \right)} \left( 1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2} + \frac{RR^3}{R^3} + \frac{RR^4}{R^4} \right) + \frac{h^2}{10 \left( 1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2} \right)} \left( 1 + 3 \frac{RR}{R} + 6 \frac{RR^2}{R^2} \right) \right] \quad (36)$$

El centroide del cono está dado por:

$$x = \frac{h}{4} \frac{R^2 + 2R(RR) + 3RR^2}{R^2 + R(RR) + RR^2} \quad (37)$$

Usando las ecuaciones (29), (38) y (25) se obtiene la inercia sobre el centro de masa

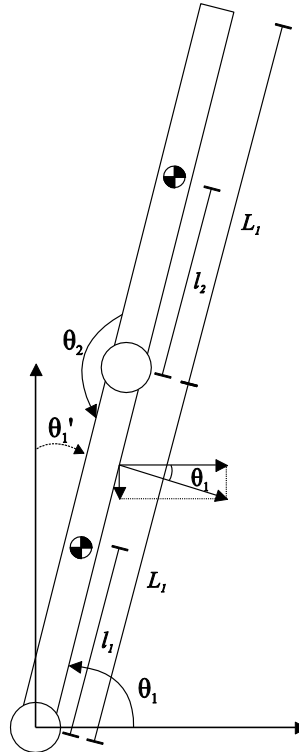
$$I_{xx} = M \left[ \frac{9M}{20\pi\rho h} \frac{\left(1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2} + \frac{RR^3}{R^3} + \frac{RR^4}{R^4}\right)}{\left(1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2}\right)^2} + \frac{3h^2}{80} \frac{\left(1 + 4\frac{RR}{R} + 10\frac{RR^2}{R^2} + 4\frac{RR^3}{R^3} + \frac{RR^4}{R^4}\right)}{\left(1 + \frac{RR}{R} + \frac{RR^2}{R^2}\right)^2} \right] \quad (38)$$

### 8.3. MODELADO DEL SISTEMA

Para el modelo del sistema, como se puede ver en la Figura 13 se pretende actuar sobre la rodilla y el tobillo, al realizar un análisis se puede asemejar la forma de la canilla y el tobillo a un péndulo de dos segmentos o un doble péndulo.

Una vez identificado el sistema objetivo, se procede a realizar un análisis del doble péndulo usando formulación lagrangiana y física mecánica.

**Figura 20.** Representación del doble péndulo.



### 8.3.1. Modelo cinemático.

De acuerdo a las Figuras 13 y 20 se define el desplazamiento para cada uno de los segmentos como:

$$x_1 = L_1 \cos(\theta_1) \quad (39)$$

$$y_1 = L_1 \sin(\theta_1) \quad (40)$$

Se debe tener en cuenta el desplazamiento del primer segmento del péndulo para calcular el del segundo

$$x_2 = x_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (41)$$

$$y_2 = y_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (42)$$

Ya que la velocidad se define como  $v = \frac{\delta x}{\delta t}$  y la aceleración como  $a = \frac{\delta v}{\delta t}$ , se definirán para el péndulo como

- Velocidad del segmento 1

$$v_{x1} = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \quad (43)$$

$$v_{y1} = L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \quad (44)$$

- Velocidad del segmento 2

$$v_{x2} = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (45)$$

$$v_{y2} = L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (46)$$

- Aceleración del segmento 1

$$a_{x1} = -L_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1) \quad (47)$$

$$a_{y1} = L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) \quad (48)$$

- Aceleración del segmento 2

$$a_{x2} = -L_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \quad (49)$$

$$a_{y2} = L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \quad (50)$$

Este modelo estará restringido a los ángulos de movimiento encontrados en la sección 8.1, acorde a la Tabla 3.

### 8.3.2. Modelo dinámico.

Para el modelo dinámico se calcula el desplazamiento, la velocidad y el momento de inercia sobre el centro de masa, debido al que el cálculo de las energías que intervienen en el Lagrangiano debe realizarse en este punto:

- Desplazamiento del centro de masa del segmento 1:

$$x_{CM1} = \frac{L_1}{2} \cos(\theta_1) \quad (51)$$

$$y_{CM1} = \frac{L_1}{2} \sin(\theta_1) \quad (52)$$

- Desplazamiento del centro de masa del segmento 2:

$$x_{CM2} = x_1 + \frac{L_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (53)$$

$$y_{CM2} = y_1 + \frac{L_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (54)$$

- Velocidad del centro de masa del segmento 1:

$$v_{CMx1} = -\frac{L_1}{2} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \quad (55)$$

$$v_{CMy1} = \frac{L_1}{2} \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \quad (56)$$

- Velocidad del centro de masa del segmento 2:

$$v_{CMx2} = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - \frac{L_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (57)$$

$$v_{CMy2} = L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \frac{L_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (58)$$

El momento de inercia se calcula teniendo en cuenta el modelo de Hanavan, usando la ecuación (38) el momento de inercia sobre el centro de masa del cono truncado que modela la canilla y el pie será:

- Momento de inercia sobre el centro de masa del segmento 1:

$$I_{CM1} = m_1 \left[ \frac{9m_1}{20\pi\rho L_1} \frac{\left(1 + \frac{r_r}{R_r} + \frac{r_r^2}{R_r^2} + \frac{r_r^3}{R_r^3} + \frac{r_r^4}{R_r^4}\right)}{\left(1 + \frac{r_r}{R_r} + \frac{r_r^2}{R_r^2}\right)^2} + \frac{3L_1^2}{80} \frac{\left(1 + 4\frac{r_r}{R_r} + 10\frac{r_r^2}{R_r^2} + 4\frac{r_r^3}{R_r^3} + \frac{r_r^4}{R_r^4}\right)}{\left(1 + \frac{r_r}{R_r} + \frac{r_r^2}{R_r^2}\right)^2} \right] \quad (59)$$

- Momento de inercia sobre el centro de masa del segmento 2:

$$I_{CM2} = m_2 \left[ \frac{9m_2}{20\pi\rho L_2} \frac{\left(1 + \frac{r_p}{R_p} + \frac{r_p^2}{R_p^2} + \frac{r_p^3}{R_p^3} + \frac{r_p^4}{R_p^4}\right)}{\left(1 + \frac{r_p}{R_p} + \frac{r_p^2}{R_p^2}\right)^2} + \frac{3L_2^2}{80} \frac{\left(1 + 4\frac{r_p}{R_p} + 10\frac{r_p^2}{R_p^2} + 4\frac{r_p^3}{R_p^3} + \frac{r_p^4}{R_p^4}\right)}{\left(1 + \frac{r_p}{R_p} + \frac{r_p^2}{R_p^2}\right)^2} \right] \quad (60)$$

En donde las variables corresponden al modelo generalizado de Hanavan presentado anteriormente en la Tabla 6.

Para hallar la dinámica del sistema se usan las ecuaciones de Lagrange, estas ecuaciones de movimiento se basan en el Lagrangiano, definido como la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema y son derivadas del principio de D'Alembert.

El Lagrangiano se define como:

$$L = K - V$$

En donde K es la energía cinética total y V la energía potencial total del sistema.

La ecuación de movimiento de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

En donde k es el grado de libertad (DOF) del sistema,  $\{q_1 \rightarrow q_k\}$  es un conjunto de coordenadas generalizadas,  $\{Q_1 \rightarrow Q_k\}$  es un conjunto de fuerzas generalizadas asociadas que actúan de forma externa sobre el sistema. Para el modelo del doble péndulo se considerará  $q = \{\theta_1, \theta_2\}$  y  $Q_k = \{\tau_1, \tau_2\}$ .

La energía cinética total de un cuerpo en movimiento que rote y se traslade, se define como la energía cinética rotacional más la energía cinética traslacional:

$$K = E_{CT} + E_{CR}$$

$$K = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

En donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $v$  es la velocidad lineal del centro de masa,  $I$  la inercia sobre el centro de masa y  $\omega$  la velocidad angular del cuerpo (Young & Freedman, 2009).

- Energía cinética total del segmento 1:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1(v_{CMx1}^2 + v_{CMy1}^2) + \frac{1}{2}I_{CM1}\dot{\theta}_1^2 \quad (61)$$

- Energía cinética total del segmento 2:

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2(v_{CMx2}^2 + v_{CMy2}^2) + \frac{1}{2}I_{CM2}\dot{\theta}_2^2 \quad (62)$$

- La energía cinética total del sistema será:

$$K = K_1 + K_2 \quad (63)$$

$$K = \frac{1}{2}m_1(v_{CMx1}^2 + v_{CMy1}^2) + \frac{1}{2}I_{CM1}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(v_{CMx2}^2 + v_{CMy2}^2) + \frac{1}{2}I_{CM2}\dot{\theta}_2^2 \quad (64)$$

La energía potencial se define como:

$$V = mgh$$

En donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $h$  la altura a la que se encuentra el cuerpo.

Para el cálculo de la energía potencial del sistema se tomará la altura hasta el centro de masa de cada uno de los segmentos.

- Energía potencial del segmento 1:

$$V_1 = m_1gy_{CM1} = \frac{L_1}{2}m_1g \sin(\theta_1) \quad (65)$$

- Energía potencial del segmento 2:

$$V_2 = m_2 g y_{CM2} = m_2 g \left( L_1 \sin(\theta_1) + \frac{L_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right) \quad (66)$$

Usando la identidad  $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$  en la ecuación (66):

$$V_2 = m_2 g L_1 \sin(\theta_1) + \frac{L_2}{2} m_2 g \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \frac{L_2}{2} m_2 g \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \quad (67)$$

- Energía potencial total del sistema:

$$V = V_1 + V_2 \quad (68)$$

$$V = \frac{L_1}{2} m_1 g \sin(\theta_1) + m_2 g L_1 \sin(\theta_1) + \frac{L_2}{2} m_2 g \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \frac{L_2}{2} m_2 g \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \quad (69)$$

Se calcula el Lagrangiano usando las ecuaciones (64) y (69):

$$L = K - V \quad (70)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange para dos grados de libertad, se obtienen dos ecuaciones que describirán el movimiento del sistema. En las que se considerará, aparte del par actuante, fricción viscosa en las uniones como se muestra en las ecuaciones (71) y (72):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 - b_1 \dot{\theta}_1 \quad (71)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 - b_2 \dot{\theta}_2 \quad (72)$$

Realizando las derivadas y despejando  $\ddot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_2$  se obtienen las ecuaciones que modelan el sistema:

$$\ddot{\theta}_1 = - \frac{2m_2 \left( \frac{L_2^2 \ddot{\theta}_2}{2} + L_1 L_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - L_1 L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 - 2L_1 L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) - 4\tau_1 + 4b_1 \dot{\theta}_1 + 2gm_1 L_1 \cos(\theta_1) + 4gm_2 L_1 \cos(\theta_1) + 2gm_2 L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \frac{12m_2 \ddot{\theta}_2 P_1}{80\pi L_2 \rho P_3}}{m_2 (4L_1^2 + 4L_1 L_2 \cos(\theta_2) + L_2^2) + \frac{3m_2 P_1}{20\pi L_2 \rho P_3} + \frac{m_1 P_4}{20\pi L_1 \rho P_5}} \quad (73)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -(80\pi L_2 \rho P_3) \frac{\frac{m_2}{2} \left( \frac{L_2^2 \ddot{\theta}_1}{2} + L_1 L_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_1 - L_1 L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) - \tau_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + \frac{g m_2 L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{2} + \frac{3 m_2 \ddot{\theta}_1 P_1}{80\pi L_2 \rho P_3}}{m_2 P_2} \quad (74)$$

En donde:

$$P_1 = \pi \rho R_p^4 L_2^3 + 12 m_2 R_p^4 + 4 \pi \rho R_p^3 r_p L_2^3 + 12 m_2 R_p^3 r_p + 10 \pi \rho R_p^2 r_p^2 L_2^3 + 12 m_2 R_p^2 r_p^2 + 4 \pi \rho R_p r_p^3 L_2^3 + 12 m_2 R_p r_p^3 + \pi \rho r_p^4 L_2^3 + 12 m_2 r_p^4$$

$$P_2 = 23 \pi \rho R_p^4 L_2^3 + 36 m_2 R_p^4 + 52 \pi \rho R_p^3 r_p L_2^3 + 36 m_2 R_p^3 r_p + 90 \pi \rho R_p^2 r_p^2 L_2^3 + 36 m_2 R_p^2 r_p^2 + 52 \pi \rho R_p r_p^3 L_2^3 + 36 m_2 R_p r_p^3 + 23 \pi \rho r_p^4 L_2^3 + 36 m_2 r_p^4$$

$$P_3 = (R_p^2 + R_p r_p + r_p^2)^2$$

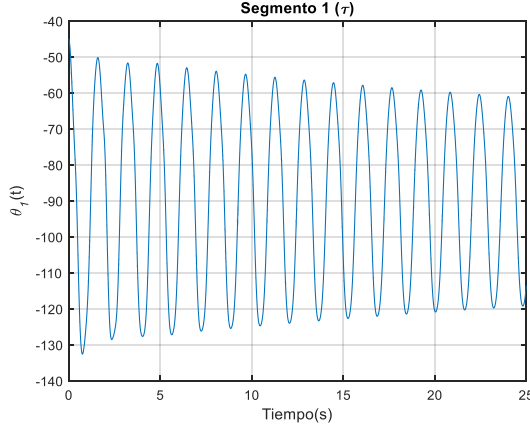
$$P_4 = 23 \pi \rho R_r^4 L_1^3 + 36 m_1 R_r^4 + 52 \pi \rho R_r^3 r_r L_1^3 + 36 m_1 R_r^3 r_r + 90 \pi \rho R_r^2 r_r^2 L_1^3 + 36 m_1 R_r^2 r_r^2 + 52 \pi \rho R_r r_r^3 L_1^3 + 36 m_1 R_r r_r^3 + 23 \pi \rho r_r^4 L_1^3 + 36 m_1 r_r^4$$

$$P_5 = (R_r^2 + R_r r_r + r_r^2)^2$$

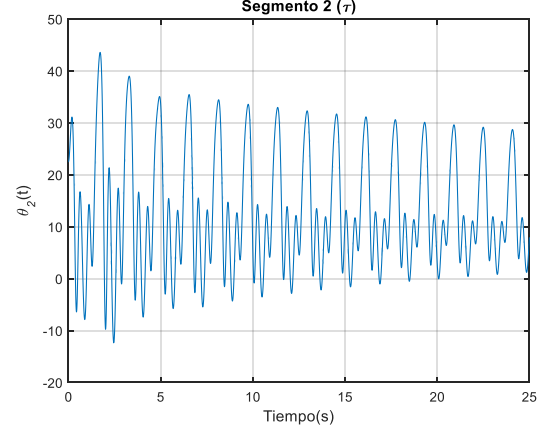
Al simular el sistema en SIMULINK de Matlab, se obtienen los siguientes resultados: los segmentos 1 y 2 cuentan con condiciones iniciales las que permiten observar el movimiento del péndulo en libertad. El resto de parámetros se calculan a partir del modelo generalizado de Hanavan mostrado en la Tabla 6, aplicado a una persona de altura de 1.90 m y 90 Kg.

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= -45^\circ \\ \theta_2(0) &= 22.5^\circ \\ \tau_1 &= \tau_2 = 5 \text{ Nm} \\ b_1 &= b_2 = 0.1 \text{ Nms} \end{aligned}$$

**Figura 21.** Comportamiento del segmento 1 del modelo no lineal (Par).



**Figura 22.** Comportamiento del segmento 2 del modelo no lineal (Par).



Con el fin de controlar la planta por voltaje de entrada de un motor D.C, se usa la siguiente relación Par-Voltaje:

$$\tau = \left( \frac{V_m - K_e \dot{\theta} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)}{R} \right) K_T \quad (75)$$

Remplazando esta relación en las ecuaciones que modelan el sistema se obtiene:

$$\ddot{\theta}_1 = - \frac{2m_2 \left( \frac{L_2^2 \ddot{\theta}_2}{2} + L_1 L_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - L_1 L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 - 2L_1 L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) - 4 \left( \frac{V_{m1} - K_e \dot{\theta} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)}{R} \right) K_T + 4b_1 \dot{\theta}_1 + 2gm_1 L_1 \cos(\theta_1) + 4gm_2 L_1 \cos(\theta_1) + 2gm_2 L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \frac{12m_2 \ddot{\theta}_2 P_1}{80\pi L_2 \rho P_3}}{m_2 (4L_1^2 + 4L_1 L_2 \cos(\theta_2) + L_2^2) + \frac{3m_2 P_1}{20\pi L_2 \rho P_3} + \frac{m_1 P_4}{20\pi L_1 \rho P_5}} \quad (76)$$

$$\ddot{\theta}_2 = - (80\pi L_2 \rho P_3) \frac{\frac{m_2}{2} \left( \frac{L_2^2 \ddot{\theta}_1}{2} + L_1 L_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_1 - L_1 L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) - \left( \frac{V_{m2} - K_e \dot{\theta} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)}{R} \right) K_T + b_2 \dot{\theta}_2 + \frac{gm_2 L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} + \frac{m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{2} + \frac{3m_2 \ddot{\theta}_1 P_1}{80\pi L_2 \rho P_3}}{m_2 P_2} \quad (77)$$

Las constantes del motor las da el fabricante que en este caso es “Maxon Motors”, estos motores fueron seleccionados junto con el reductor para poder levantar el peso de las secciones del brazo, estos se realizaron a partir de un completo análisis descrito por uno de los investigadores asociados al proyecto (Flórez, 2016), ya que fueron sobredimensionados, los que también se utilizarán para las

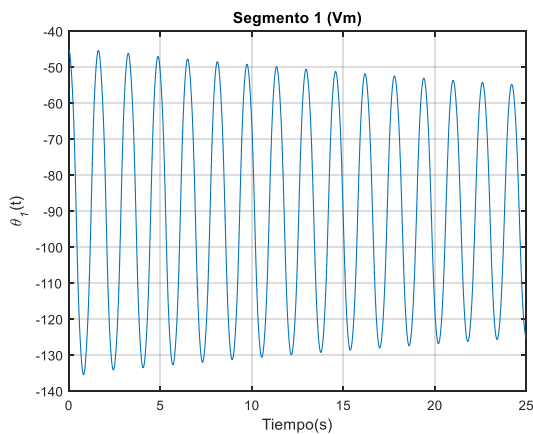
secciones de la rodilla y el tobillo. Se seleccionó un motor D.C sin escobillas y ultra plano para ahorrar espacio y peso. Las constantes del motor son:

**Tabla 7.** Parámetros del motor D.C.

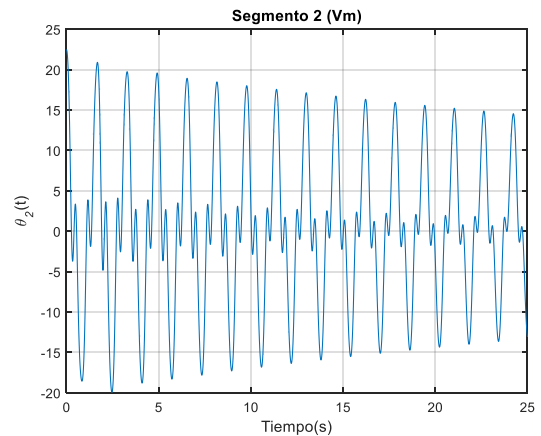
| Parámetro                                          | Valor     | Unidades                |
|----------------------------------------------------|-----------|-------------------------|
| Constante de par ( $k_t$ )                         | 0.101     | $\frac{Nm}{A}$          |
| Constante eléctrica ( $k_e$ )                      | 0.101     | $\frac{V}{Rad\ s^{-1}}$ |
| Resistencia de armadura ( $R$ )                    | 7.55      | $\Omega$                |
| Constante de tiempo mecánica ( $\tau_e$ )          | 0.01      | $s$                     |
| Inercia del rotor ( $j$ )                          | 0.0000135 | $Kgm^2$                 |
| Velocidad del rotor sin carga ( $\dot{\theta}_1$ ) | 3360      | rpm                     |

Se simuló el sistema teniendo como variable de entrada el voltaje con un valor de 10V, lo que da como resultado:

**Figura 23.** Comportamiento del segmento 1 del modelo no lineal (Voltaje).



**Figura 24.** Comportamiento del segmento 2 del modelo no lineal (Voltaje).



#### 8.4. LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA

Debido a la naturaleza del sistema y para poderlo representar mediante espacio de estados es necesario linealizarlo, para este fin existen una gran variedad de métodos, pero en este caso se usará la aproximación a un sistema lineal por medio de expansión por series de Taylor (Ogata, 2010). Este método trabaja sobre un punto de operación, en donde, por lo general, el sistema se encuentra estático.

De acuerdo a la Figura 20, se puede observar que debido al plano de referencia y a que el ángulo del segundo segmento es relativo al primer segmento, el punto de operación en donde se habrá perdido toda la energía será en  $-90^\circ$  del primer segmento y  $0^\circ$  el segundo segmento.

Para obtener el sistema lineal en el espacio de estados, se aplica una generalización del método por expansión en series de Taylor de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_1=x_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_1=x_0} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Debido a que el sistema tiene dos funciones representadas en las ecuaciones (76) y (77), es necesario realizar un cambio de variables y aplicar el método generalizado lo que da como resultado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-\frac{\pi}{2} \\ x_2=x_3=x_4=0}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-\frac{\pi}{2} \\ x_2=x_3=x_4=0}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

El cambio de variables para la linealización del sistema estará dado por:

$$x_1 = \theta_1 \quad \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{\theta}_1 \quad \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1$$

$$x_3 = \theta_2 \quad \dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 = x_4$$

$$x_4 = \dot{\theta}_2 \quad \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2$$

$$u_1 = \tau_1 \quad u_2 = \tau_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (79)$$

$$\dot{x}_2 = - \frac{2m_2 \left( \frac{L_2^2 \dot{x}_4}{2} + L_1 L_2 \cos(x_3) \dot{x}_4 - L_1 L_2 \sin(x_3) x_4^2 - 2L_1 L_2 \sin(x_3) x_2 x_4 \right) - 4u_1 + 4b_1 x_2 + 2gm_1 L_1 \cos(x_1) + 4gm_2 L_1 \cos(x_1) + 2gm_2 L_2 \cos(x_1 + x_3) + \frac{12m_2 \dot{x}_4 P_1}{80\pi L_2 \rho P_3}}{m_2 (4L_1^2 + 4L_1 L_2 \cos(x_3) + L_2^2) + \frac{3m_2 P_1}{20\pi L_2 \rho P_3} + \frac{m_1 P_4}{20\pi L_1 \rho P_5}} \quad (80)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (81)$$

$$\dot{x}_4 = -(80\pi L_2 \rho P_3) \frac{\frac{m_2}{2} \left( \frac{L_2^2 \dot{x}_2}{2} + L_1 L_2 \cos(x_3) \dot{x}_2 - L_1 L_2 \sin(x_3) x_2 x_4 \right) - u_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + \frac{gm_2 L_2 \cos(x_1 + x_3)}{2} + \frac{m_2 L_1 L_2 x_2 \sin(x_3) (x_2 + x_4)}{2} + \frac{3m_2 \dot{x}_2 P_1}{80\pi L_2 \rho P_3}}{m_2 P_2} \quad (82)$$

Una vez realizado el cambio de variables en las ecuaciones (73) y (74) se procede a aplicar el método de linealización de la ecuación (78) usando las funciones de las ecuaciones (79) a (82), dando como resultado el modelo linealizado en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 \left( \frac{gm_1 L_1}{2} + gm_2 L_1 + \frac{gm_2 L_2}{2} \right) & -\frac{4b_1}{\alpha_1} & -\frac{2gm_2 L_2}{\alpha_1} & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi b_2 L_2 \rho P_3 80}{m_2 P_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (84)$$

En donde:

$$\alpha_1 = m_2(4L_1^2 + 4L_1L_2 + L_2^2) + \frac{3m_2P_1}{\pi\rho L_2P_320} + \frac{m_1P_4}{\pi\rho L_1P_520}$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi\rho g L_2^2 P_3 40}{P_2}$$

$$P_1 = \pi\rho R_p^4 L_2^3 + 12m_2 R_p^4 + 4\pi\rho R_p^3 r_p L_2^3 + 12m_2 R_p^3 r_p + 10\pi\rho R_p^2 r_p^2 L_2^3 + 12m_2 R_p^2 r_p^2 + 4\pi\rho R_p r_p^3 L_2^3 + 12m_2 R_p r_p^3 + \pi\rho r_p^4 L_2^3 + 12m_2 r_p^4$$

$$P_2 = 23\pi\rho R_p^4 L_2^3 + 36m_2 R_p^4 + 52\pi\rho R_p^3 r_p L_2^3 + 36m_2 R_p^3 r_p + 90\pi\rho R_p^2 r_p^2 L_2^3 + 36m_2 R_p^2 r_p^2 + 52\pi\rho R_p r_p^3 L_2^3 + 36m_2 R_p r_p^3 + 23\pi\rho r_p^4 L_2^3 + 36m_2 r_p^4$$

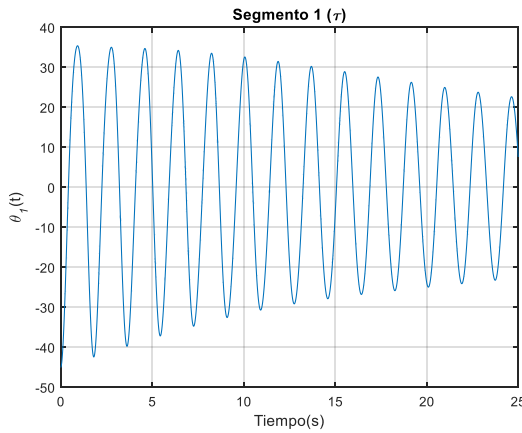
$$P_3 = (R_p^2 + R_p r_p + r_p^2)^2$$

$$P_4 = 23\pi\rho R_r^4 L_1^3 + 36m_1 R_r^4 + 52\pi\rho R_r^3 r_r L_1^3 + 36m_1 R_r^3 r_r + 90\pi\rho R_r^2 r_r^2 L_1^3 + 36m_1 R_r^2 r_r^2 + 52\pi\rho R_r r_r^3 L_1^3 + 36m_1 R_r r_r^3 + 23\pi\rho r_r^4 L_1^3 + 36m_1 r_r^4$$

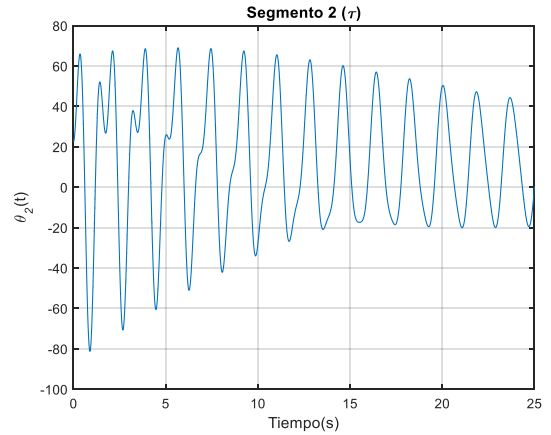
$$P_5 = (R_r^2 + R_r r_r + r_r^2)^2$$

El comportamiento del sistema simulado con un par de entrada de 5 Nm, se puede observar en las Figuras 25 y 26.

**Figura 25.** Comportamiento del segmento 1 del modelo lineal (Par).



**Figura 26.** Comportamiento del segmento 2 del modelo lineal (Par).



Linealizando el sistema de las ecuaciones (76) y (77), las cuales combinan el modelo de las ecuaciones (73) y (74) junto con la relación de la ecuación (75),

aplicando la misma técnica usada anteriormente, se obtiene el siguiente sistema en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4\left(\frac{gm_1L_1}{2} + gm_2L_1 + \frac{gm_2L_2}{2}\right)}{\alpha_1} & -\frac{4b_1}{\alpha_1} & -\frac{2gm_2L_2}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & -\frac{\pi b_2L_2\rho P_380}{m_2P_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4k_tN_2}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi\rho L_2P_380}{N_1Rm_2P_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (86)$$

En donde:

$$\alpha_1 = N_1R \left( m_2(4L_1^2 + 4L_1L_2 + L_2^2) + \frac{3m_2P_1}{\pi\rho L_2P_320} + \frac{m_1P_4}{\pi\rho L_1P_520} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi\rho gL_2^2P_340}{P_2}$$

$$P_1 = \pi\rho R_p^4L_2^3 + 12m_2R_p^4 + 4\pi\rho R_p^3r_pL_2^3 + 12m_2R_p^3r_p + 10\pi\rho R_p^2r_p^2L_2^3 + 12m_2R_p^2r_p^2 + 4\pi\rho R_p r_p^3L_2^3 + 12m_2R_p r_p^3 + \pi\rho r_p^4L_2^3 + 12m_2r_p^4$$

$$P_2 = 23\pi\rho R_p^4L_2^3 + 36m_2R_p^4 + 52\pi\rho R_p^3r_pL_2^3 + 36m_2R_p^3r_p + 90\pi\rho R_p^2r_p^2L_2^3 + 36m_2R_p^2r_p^2 + 52\pi\rho R_p r_p^3L_2^3 + 36m_2R_p r_p^3 + 23\pi\rho r_p^4L_2^3 + 36m_2r_p^4$$

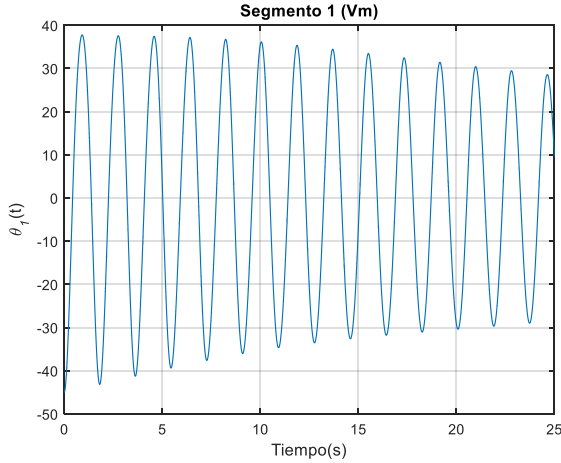
$$P_3 = (R_p^2 + R_p r_p + r_p^2)^2$$

$$P_4 = 23\pi\rho R_r^4L_1^3 + 36m_1R_r^4 + 52\pi\rho R_r^3r_rL_1^3 + 36m_1R_r^3r_r + 90\pi\rho R_r^2r_r^2L_1^3 + 36m_1R_r^2r_r^2 + 52\pi\rho R_r r_r^3L_1^3 + 36m_1R_r r_r^3 + 23\pi\rho r_r^4L_1^3 + 36m_1r_r^4$$

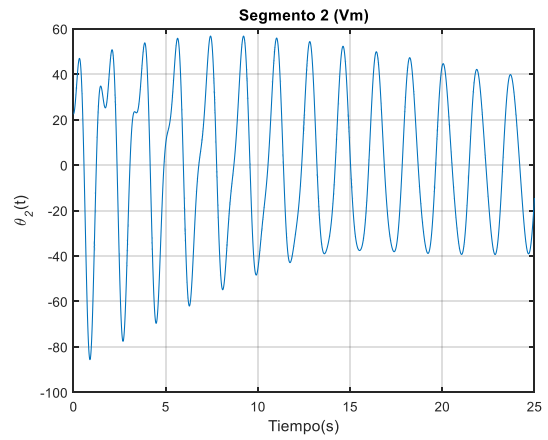
$$P_5 = (R_r^2 + R_r r_r + r_r^2)^2$$

El comportamiento del sistema simulado con un voltaje de entrada de 10V, se puede observar en las Figuras 27 y 28.

**Figura 27.** Comportamiento del segmento 1 del modelo lineal (Voltaje).



**Figura 28.** Comportamiento del segmento 2 del modelo lineal (Voltaje).



## 8.5. DISEÑO DEL CONTROLADOR LQR

Ya que el objetivo del exoesqueleto es asistir procesos de rehabilitación, los movimientos no pueden ser bruscos, debido a ello, se selecciona una respuesta subamortiguada que lleve el sistema al ángulo deseado de forma gradual. Las terapias se realizan con ejercicios que se repiten constantemente a la velocidad que el paciente desee, es por ello, que para el exoesqueleto propuesto la velocidad del ejercicio será constante y estará definida por el tiempo de establecimiento y de subida de la respuesta, de ser muy rápida, hará daño al paciente, mientras que si es muy lenta, la terapia se volverá monótona y poco efectiva.

El regulador cuadrático lineal, compensa la salida del sistema a cero, es por ello que se debe plantear el modelo aumentado del sistema el cual añade un integrador por cada entrada. Los integradores se encargan de eliminar el error en estado estacionario y permiten que el sistema pueda ser llevado a un punto de referencia. Para crear el modelo aumentado que se utilizará para calcular las ganancias de realimentación se utilizan las siguientes expresiones:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo que permite tener un sistema de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Las matrices Q y R, o matrices de ponderación, se seleccionan de forma práctica y se varían mediante un factor  $\rho$  en la matriz R y la matriz Q se determina como una matriz identidad cuya diagonal alterara el error en la planta lo que modificará el comportamiento (Murray, 2006), así que una vez obtenido el modelo, se plantea el esquema de realimentación de estados para un sistema MIMO y se procede a configurar el controlador para cumplir las características deseadas de comportamiento.

### 8.5.1. Control en tiempo continuo.

Se consideran los siguientes sistemas en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16.54 & -0.01 & -3.47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -45.48 & 0 & -45.48 & -0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.18 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Este sistema corresponde a la linealización del sistema del doble péndulo combinado con el modelo biomecánico. Los parámetros del modelo biomecánico se calcularon para una persona de 1.9m de altura y 90Kg de masa. Para el modelo con entrada de voltaje se calculan los parámetros del motor a partir de su hoja técnica, como los que se muestran en la Tabla 7.

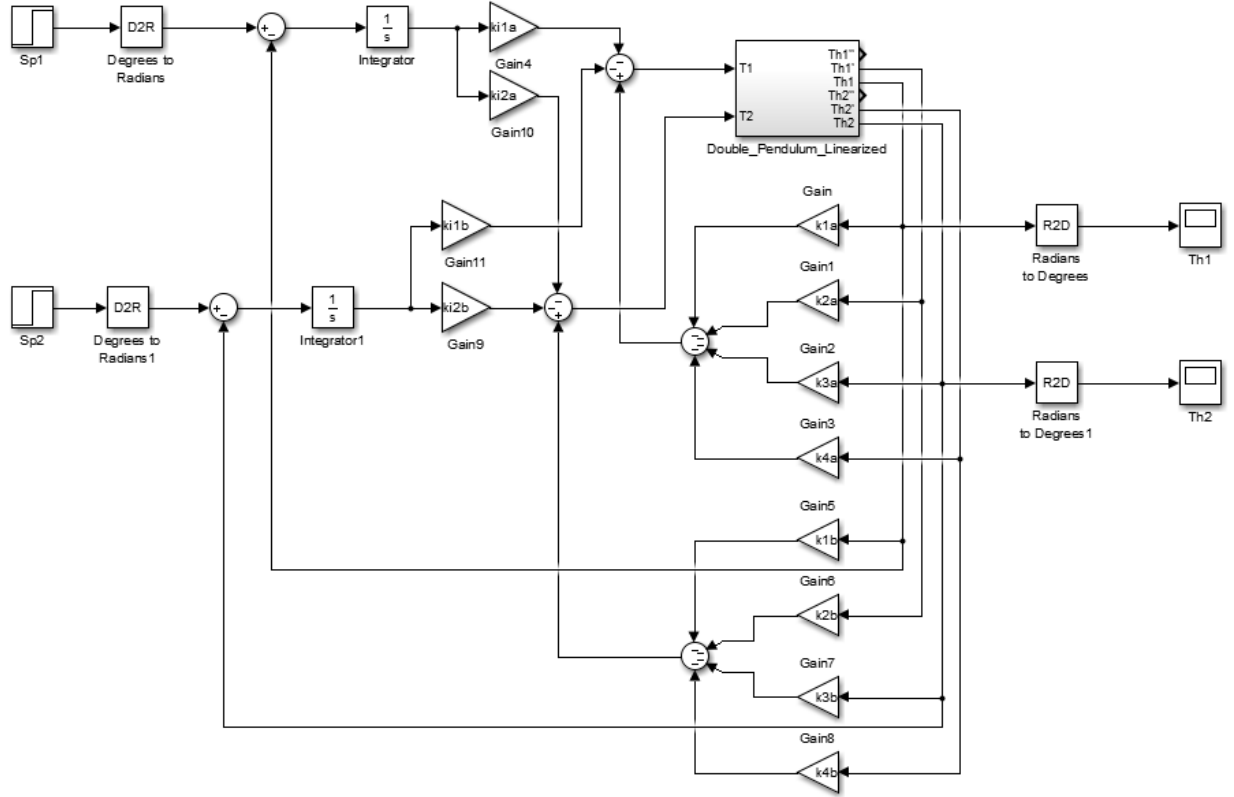
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16.54 & 0 & -3.47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -45.48 & 0 & -45.48 & -0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0025 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \end{bmatrix} \quad (88)$$

Ambos sistemas tienen como ecuación de salida:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Una vez obtenido este modelo se procede a calcular el modelo aumentado combinando las matrices y añadiendo los integradores con lo que se puede plantear el esquema presentado más adelante, con el que se procede a realizar las variaciones en las matrices Q y R para obtener el tiempo de establecimiento y el comportamiento sobre amortiguado deseado:

**Figura 29.** Esquema de control por realimentación de estados LQR.



Las matrices Q y R, luego de varias pruebas de comportamiento se definen como:

Para la entrada de par:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.00009 & 0 \\ 0 & 0.00009 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Para la entrada de voltaje:

$$Q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Una vez definidas estas matrices se aplica la ecuación de Riccati para encontrar la matriz P:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (94)$$

El comando “lqr” de Matlab, minimiza la función de coste y aplica la ecuación de Riccati (95) para hallar el vector de realimentación:

$$[K, P] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

Lo que da como resultado la matriz de realimentación K (debido a que es un sistema de dos entradas, dos salidas) y la matriz que minimiza la función de costo P, para cada sistema:

Entrada de par:

$$P = \begin{bmatrix} 2.0126 & 0.0566 & 0.0168 & -0.0004 & -1.0548 & 0.0249 \\ 0.0566 & 0.0531 & -0.0069 & -0.0001 & -0.0504 & 0.0003 \\ 0.0168 & -0.0069 & 0.4284 & 0.0044 & -0.0008 & -0.3298 \\ -0.0004 & -0.0001 & 0.0044 & 0.0013 & 0 & -0.0039 \\ -1.0548 & -0.0504 & -0.0008 & 0 & 1.9576 & 0.0467 \\ 0.0249 & 0.0003 & -0.3298 & -0.0039 & 0.0467 & 1.3110 \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$K = \begin{bmatrix} 118.48 & 111.1 & -14.4593 & -0.1444 & -105.4 & 0.6962 \\ -12.18 & -1.8885 & 119.75 & 34.6611 & -0.6962 & -105.4 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Entrada de voltaje:

$$P = \begin{bmatrix} 681.4 & 16.68 & 115.29 & 0.093 & -39.10 & -1.6914 \\ 16.68 & 40.01 & -5.4034 & -0.1750 & -15.14 & -0.9757 \\ 115.29 & -5.4034 & 131.74 & 0.6167 & 2.5407 & -11.74 \\ 0.0933 & -0.1750 & 0.6167 & 2.5407 & 0.2043 & -0.4234 \\ -39.103 & -15.14 & 5.8468 & 0.2043 & 257.1 & 36.84 \\ -1.6914 & -0.9757 & -11.7439 & -0.4230 & 36.84 & 25.12 \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$K = \begin{bmatrix} 420 & 100.76 & -136.1 & -4.4 & -381.4 & -24.6 \\ 30.7 & -57.6 & 203.1 & 836.5 & 67.3 & -139.3 \end{bmatrix} \quad (98)$$

### 8.5.2. Control en tiempo discreto.

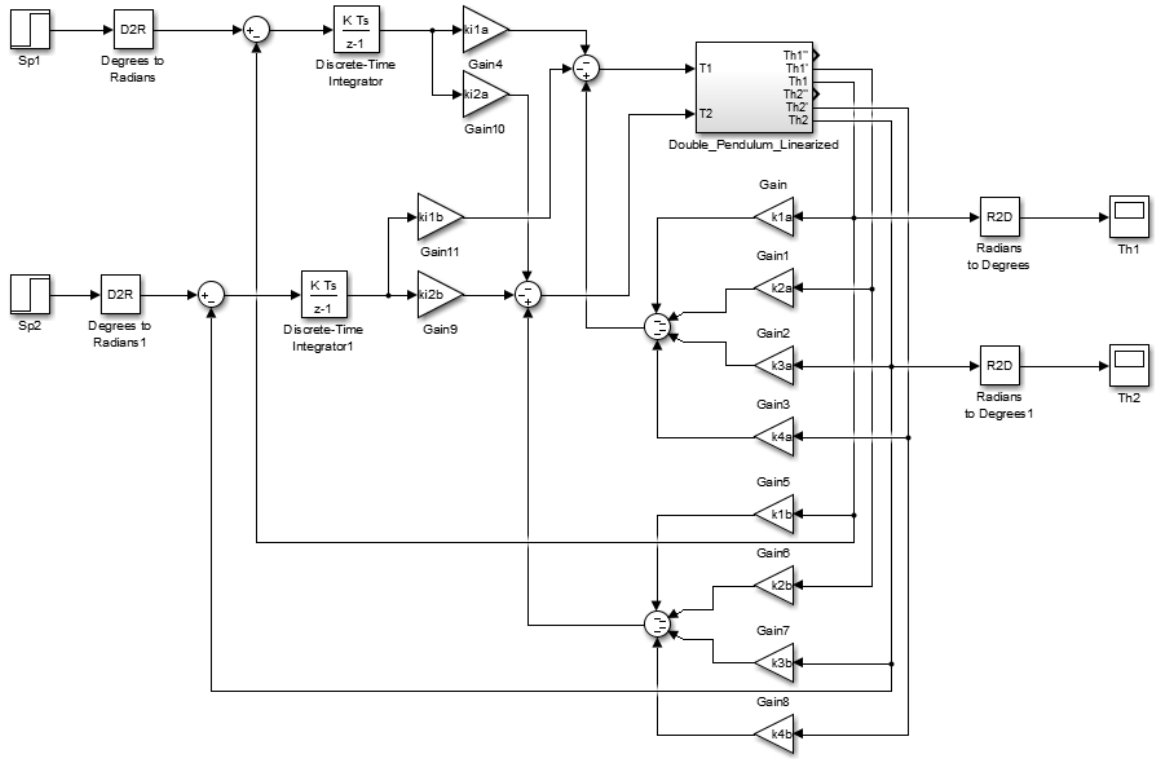
Se discretizan los sistemas en espacio de estados de las ecuaciones (87) y (88), el tiempo de muestreo para estos sistemas se selecciona como  $T_s = 0.01$  para hacer una buena caracterización del mismo dado que el sistema cambia rápidamente con lo que se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.01 & -0.0002 & 0 \\ -0.1653 & 0.999 & -0.0347 & -0.0002 \\ -0.0023 & 0 & 0.9977 & 0.01 \\ -0.4536 & -0.0023 & -0.4538 & 0.9953 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.019 & 0 \\ 0 & 0.0001 \\ 0 & 0.0246 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9992 & 0.01 & -0.0002 & 0 \\ -0.1653 & 0.9992 & -0.0347 & -0.0002 \\ -0.0023 & 0 & 0.9977 & 0.01 \\ -0.4536 & -0.0023 & -0.4538 & 0.9953 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0001e^{-3} & 0 \\ 0.0252e^{-3} & 0 \\ 0 & 0.0016e^{-3} \\ 0 & 0.3283e^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \end{bmatrix} \quad (100)$$

Aumentando el modelo con los dos integradores, se genera el siguiente esquema para simular la acción de control discreto a la planta:

**Figura 30.** Esquema de control por realimentación de estados LQR discreto.



Se definen las matrices Q y R de forma práctica:

Entrada de par:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.000001 & 0 \\ 0 & 0.000001 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Entrada de voltaje:

$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 350 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250 \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.000001 & 0 \\ 0 & 0.000001 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Matrices con las que se calculará la matriz P en usando la ecuación de Riccati en tiempo discreto:

$$P = Q + G'P(I + HR^{-1}H'P)^{-1}G \quad (105)$$

El comando “lqrd” de Matlab aplica esta ecuación para devolver la matriz de realimentación K, se debe aclarar que la entrada de este comando son las matrices en tiempo continuo del sistema ya que él realiza la discretización:

$$[K, P] = lqrd(A, B, Q, R, Ts)$$

Entrada de par:

$$P = \begin{bmatrix} 3.663 & 0.0150 & -0.0001 & 0 & -1.7301 & 0.0009 \\ 0.015 & 0.0127 & -0.0001 & 0 & -0.0073 & 0 \\ -0.0001 & -0.001 & 3.6539 & 0.0106 & -0.0009 & -1.7276 \\ 0 & 0 & 0.0106 & 0.0087 & 0 & -0.005 \\ -1.7301 & -0.0073 & -0.0009 & 0 & 2.1144 & 0.0012 \\ 0.0009 & 0 & -1.7276 & -0.005 & 0.0012 & 2.1124 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$K = \begin{bmatrix} 613.15 & 579.02 & -18.41 & -0.0252 & -330.88 & 0.1385 \\ -18.44 & -0.0539 & 44.03 & 51.5 & -0.0268 & -29.55 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Entrada de voltaje:

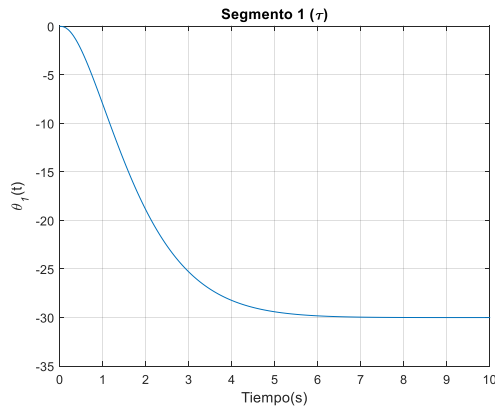
$$P = \begin{bmatrix} 727.71 & 11.03 & 3.05 & -0.0321 & -403.33 & 0.2344 \\ 11.03 & 8.72 & -0.4807 & -0.0011 & -7.52 & -0.0020 \\ 3.05 & -0.4807 & 626.46 & 0.9799 & 0.2 & -334.55 \\ -0.0321 & -0.0011 & 1.97 & 1.4558 & 0.0006 & -1.08 \\ -403.33 & -7.52 & 0.2 & 0.0006 & 635.08 & 3.0522 \\ 0.2344 & -0.0020 & -334.55 & -1.08 & 4.0522 & 467.47 \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$K = \begin{bmatrix} 19869 & 16969 & -1244 & -4 & -14537 & -7 \\ -1354 & -8 & 3758 & 3704 & 0 & -2739 \end{bmatrix} \quad (109)$$

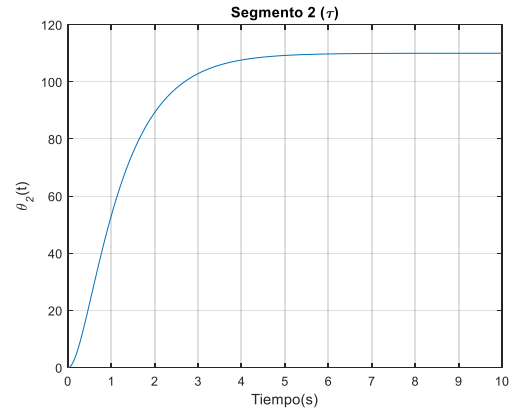
### 8.5.3. Resultados.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al controlar la planta del doble péndulo combinado con el modelo biomecánico, teniendo como variables de control el par y el voltaje.

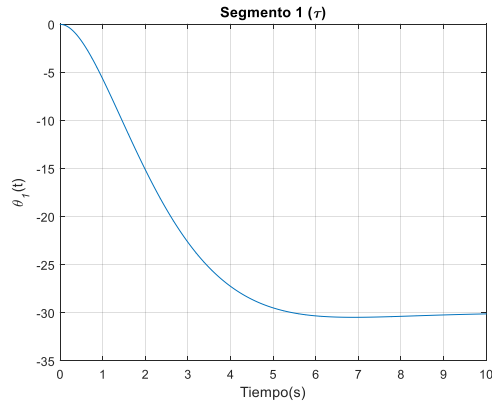
**Figura 31.** Resultado control LQR por par segmento 1.



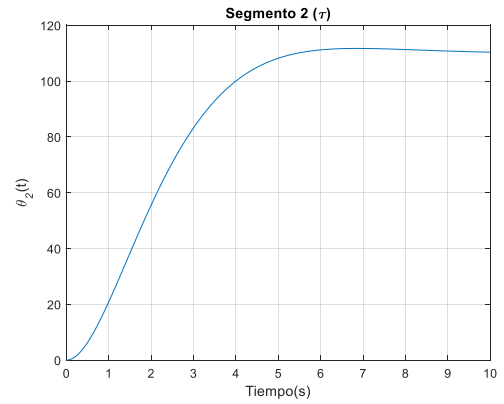
**Figura 32.** Resultado control LQR por par segmento 2.



**Figura 33.** Resultado control LQR discreto por par segmento 1.

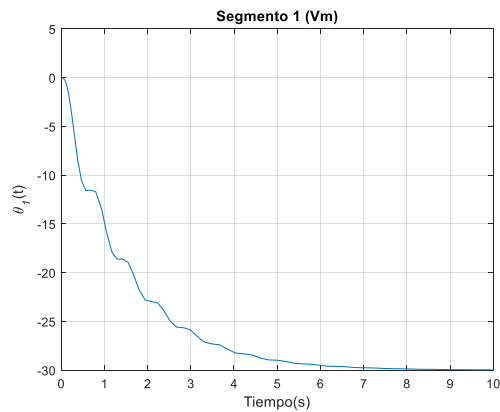


**Figura 34.** Resultado control LQR discreto por par segmento 2.

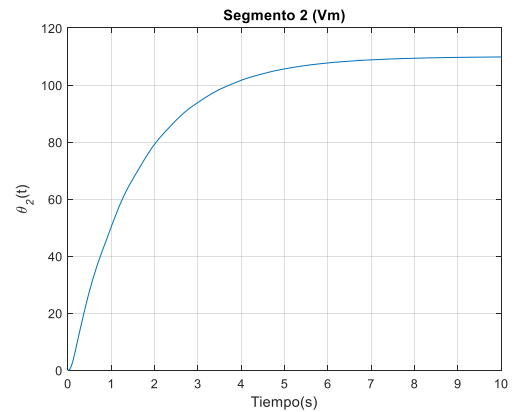


Se logró un buen tiempo de establecimiento y una respuesta sobreamortiguada acorde a los requerimientos iniciales, lo que permite que el movimiento sea suave y preciso, así mismo el tiempo en el que se estabiliza asegura que el movimiento no sea muy brusco y no lastime al paciente.

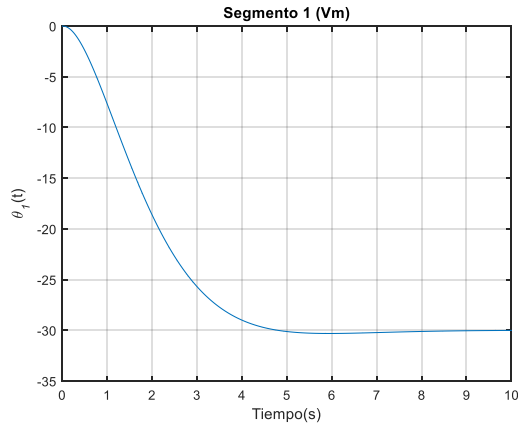
**Figura 35.** Resultado control LQR por voltaje segmento 1.



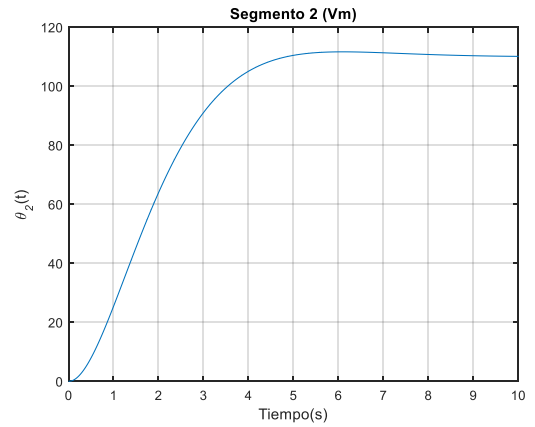
**Figura 36.** Resultado control LQR por voltaje segmento 2.



**Figura 37.** Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 1.

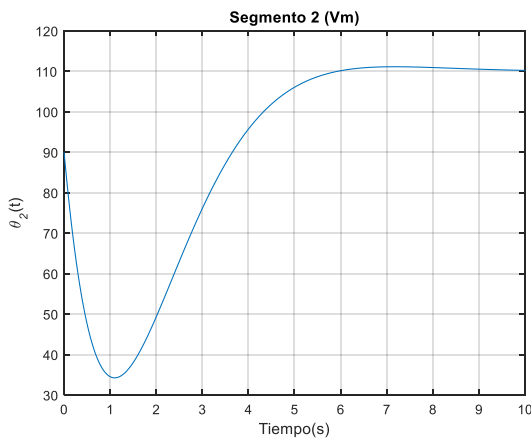


**Figura 38.** Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 2.

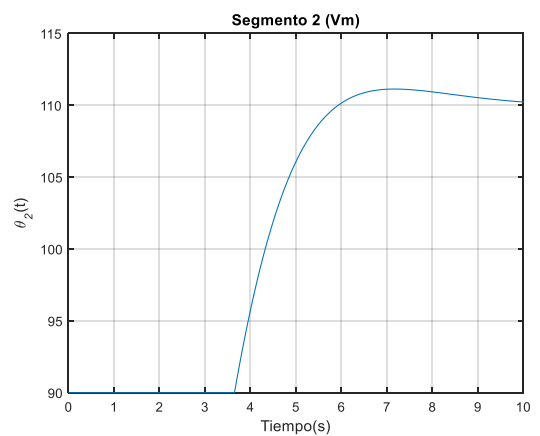


Debido a la mecánica del pie analizada, es necesario contar con una condición inicial de  $90^\circ$  en el controlador del mismo; dado que este sistema de control es un regulador, intenta bajar a cero antes de subir al punto deseado (Ver Figura 39). Es por ello, se deben poner saturadores de naturaleza variable, que no dejen al sistema descender antes de llegar el punto deseado para evitar dañar al paciente.

**Figura 39.** Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 2 con condición inicial.



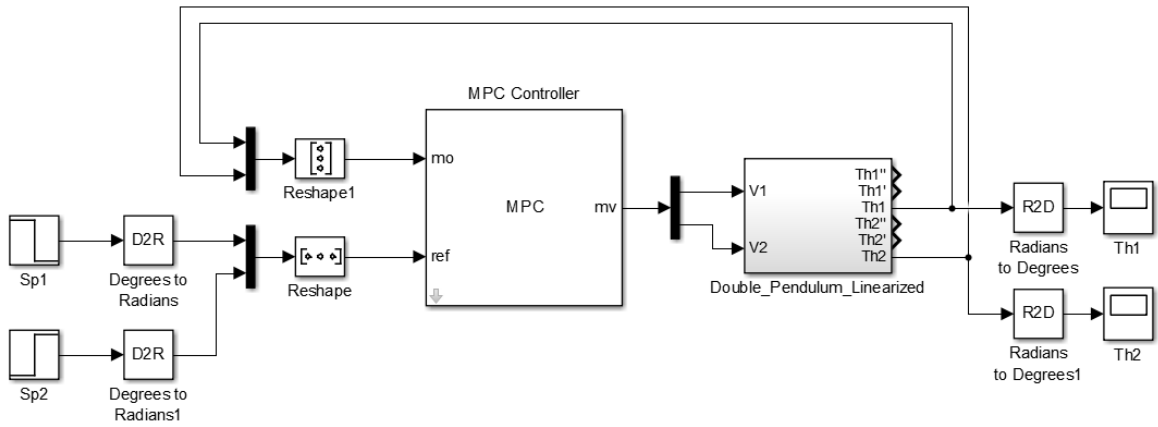
**Figura 40.** Resultado control LQR discreto por voltaje segmento 2 con saturador.



## 8.6. DISEÑO DEL CONTROLADOR MPC

El diseño del controlador MPC se basa en los algoritmos y la teoría propuesta por (Wang, 2009), en donde se muestran algunos ejemplos desarrollados usando el software Matlab; una vez apropiado y entendido el funcionamiento del MPC para sistemas SISO se realiza una extensión a sistemas MIMO pero esta vez usando el bloque MPC del toolbox de control de Matlab.

**Figura 41.** Diagrama de bloques del control por MPC.



Para diseñar el controlador y crear el objeto en el software se utilizan los modelos de las ecuaciones (87) y (88) los cuales son discretizados con un periodo de muestreo de 0.01 segundos.

Los horizontes de control y predicción se escogen arbitrariamente, y se varían junto con las matrices de ponderación para obtener la respuesta deseada. Luego de varias pruebas se obtiene:

Para la entrada de par:

$$N_p = 100$$

$$N_c = 30$$

$$MV = [N_p \times N_v][1 \quad 1]$$

$$MVRate = [N_p \times N_v][100000 \quad 500000]$$

$$OV = [N_p \times N_o][800000 \quad 300000]$$

Para la entrada de voltaje:

$$N_p = 100$$

$$N_c = 30$$

$$MV = [N_p \times N_v][1 \quad 1]$$

$$MVRate = [N_p \times N_v][300 \quad 2000]$$

$$OV = [N_p \times N_o][300000 \quad 100000]$$

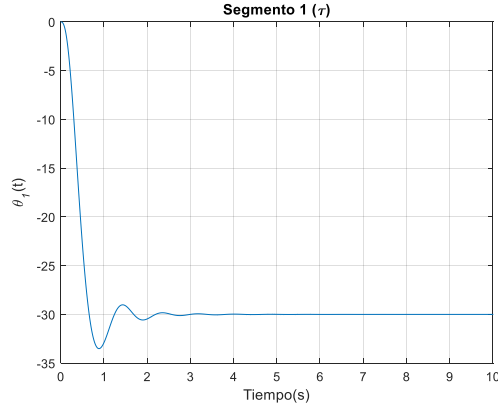
En donde  $MV$  corresponde al factor de peso de las variables manipuladas,  $MVRate$  corresponde al factor de peso de la tasa de cambio de las variables manipuladas y  $OV$  corresponde al factor de peso de las variables de salida.

Estas matrices de ponderación están definidas por el horizonte de predicción y la cantidad de variables a manipular. La variable  $N_v$  corresponde al número de variables manipuladas o variables de control,  $N_o$  corresponde a la cantidad de variables de salida que tiene el sistema, así que para cada una de ellas se asigna un valor de ponderación, que modificará el comportamiento de la planta. Dado a que son dos variables manipuladas y, dos variables de salida, los vectores representados anteriormente, corresponden a los pesos de cada variable. Se debe tener en cuenta que estos pesos son repetidos para formar las matrices que dependen del número de filas definidas por el horizonte de predicción.

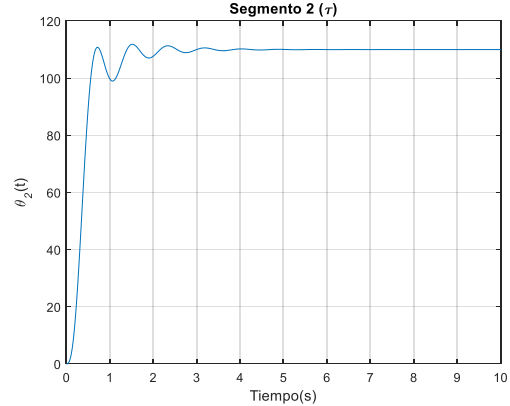
#### **8.6.1. Resultados.**

La dificultad principal en el diseño de este controlador radica en que genera una respuesta con mucho sobrepaso y oscilaciones. Al variar las matrices de ponderación para reducir la velocidad del sistema, se generan muchas oscilaciones y el sistema no se estabiliza en menos de 15 segundos y el sobrepaso aumenta. Debido a esto se logran obtener respuestas del sistema con poco sobrepaso aunque debido a su velocidad los movimientos tienden a ser muy bruscos. A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos.

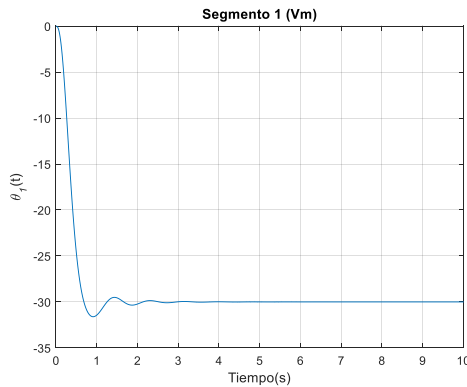
**Figura 42.** Resultado control MPC por par segmento 1.



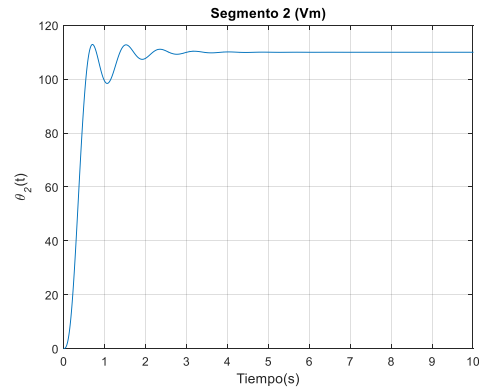
**Figura 43.** Resultado control MPC por par segmento 2.



**Figura 44.** Resultado control MPC por voltaje segmento 1.



**Figura 45.** Resultado control MPC por voltaje segmento 2.



## 8.7. COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO DE CONTROLADORES

En esta sección se compararán los resultados de varias pruebas realizadas con diferentes señales de referencia para cada uno de los controladores diseñados con el fin de establecer cuál es el más apropiado según sus características de respuesta en el tiempo para una terapia. El tiempo de subida se mide entre el 10% y el 90% de la señal de salida del sistema controlado, el tiempo de establecimiento se mide aproximadamente a  $\pm 2\%$  de la señal de referencia.

Las matrices de comparación analizan la respuesta tanto del sistema con entrada voltaje como el sistema con entrada de par, ya que es un sistema de dos entradas que controla dos variables angulares, los resultados se representan como S1 y S2

que se refieren a las características de movimiento del segmento uno y segmento dos del péndulo respectivamente.

**Tabla 8.** Matriz de evaluación de desempeño del controlador LQR.

| Prueba |    | Señal de Referencia<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) | Señal de salida<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) |         | Error en estado estacionario<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) |         | Tiempo de establecimiento<br>(s) |         | Tiempo de subida (s) |         | Sobrepaso (%) |         |
|--------|----|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------|---------|----------------------------------|---------|----------------------|---------|---------------|---------|
|        |    |                                                  | Par                                          | Voltaje | Par                                                       | Voltaje | Par                              | Voltaje | Par                  | Voltaje | Par           | Voltaje |
| 1      | S1 | -30°                                             | -30°                                         | -30°    | 0°                                                        | 0°      | 7.9                              | 8.3     | 2.92                 | 3.07    | 0             | 0       |
|        | S2 | 110°                                             | 110°                                         | 110°    | 0°                                                        | 0°      | 7.4                              | 8.43    | 2.29                 | 3.44    | 0             | 0       |
| 2      | S1 | -50                                              | -50                                          | -50     | 0°                                                        | 0°      | 9                                | 8.9     | 3.01                 | 3.1     | 0             | 0       |
|        | S2 | 120°                                             | 120°                                         | 120°    | 0°                                                        | 0°      | 7                                | 8.29    | 2.29                 | 3.26    | 0             | 0       |
| 3      | S1 | -80°                                             | -80°                                         | -80°    | 0°                                                        | 0°      | 9.3                              | 8.6     | 3.09                 | 3.06    | 0             | 0       |
|        | S2 | 90°                                              | 90°                                          | 90°     | 0°                                                        | 0°      | 5.66                             | 7.8     | 2.21                 | 3.07    | 0             | 0       |
| 4      | S1 | -90                                              | -90                                          | -90     | 0°                                                        | 0°      | 9.7                              | 8.24    | 3.13                 | 3.05    | 0             | 0       |
|        | S2 | 60°                                              | 60°                                          | 60°     | 0°                                                        | 0°      | 4.47                             | 7.94    | 2.08                 | 3.03    | 0             | 0       |
|        |    |                                                  | Promedio                                     |         | 0°                                                        | 0°      | 8.97                             | 8.51    | 3.03                 | 3.26    | 0             | 0       |
|        |    |                                                  |                                              |         | 0°                                                        | 0°      | 6.13                             | 8.11    | 2.35                 | 3.07    | 0             | 0       |

**Tabla 9.** Matriz de evaluación de desempeño del controlador LQR discreto.

| Prueba |    | Señal de Referencia<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) | Señal de salida<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) |         | Error en estado estacionario<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) |         | Tiempo de establecimiento<br>(s) |         | Tiempo de subida (s) |         | Sobrepaso (%) |         |
|--------|----|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------|---------|----------------------------------|---------|----------------------|---------|---------------|---------|
|        |    |                                                  | Par                                          | Voltaje | Par                                                       | Voltaje | Par                              | Voltaje | Par                  | Voltaje | Par           | Voltaje |
| 1      | S1 | -30°                                             | -30°                                         | -30°    | 0°                                                        | 0°      | 9.13                             | 9.08    | 3.24                 | 2.81    | 1.57          | 1       |
|        | S2 | 110°                                             | 110°                                         | 110°    | 0°                                                        | 0°      | 9.68                             | 9.2     | 3.24                 | 2.87    | 0.97          | 0.54    |
| 2      | S1 | -50                                              | -50                                          | -50     | 0°                                                        | 0°      | 9.05                             | 9.2     | 3.24                 | 2.76    | 1.52          | 0.92    |
|        | S2 | 120°                                             | 120°                                         | 120°    | 0°                                                        | 0°      | 9.62                             | 9.12    | 3.25                 | 2.87    | 1.58          | 0.66    |
| 3      | S1 | -80°                                             | -80°                                         | -80°    | 0°                                                        | 0°      | 9.52                             | 9.04    | 3.26                 | 2.79    | 1.52          | 0.81    |
|        | S2 | 90°                                              | 90°                                          | 90°     | 0°                                                        | 0°      | 9.65                             | 9       | 3.23                 | 2.86    | 1.57          | 1.52    |
| 4      | S1 | -90                                              | -90                                          | -90     | 0°                                                        | 0°      | 9.35                             | 9.16    | 3.28                 | 2.78    | 1.52          | 0.77    |
|        | S2 | 60°                                              | 60°                                          | 60°     | 0°                                                        | 0°      | 9.31                             | 9.28    | 3.2                  | 2.86    | 1.6           | 1.56    |
|        |    |                                                  | Promedio                                     |         | 0°                                                        | 0°      | 9.26                             | 9.12    | 3.25                 | 2.785   | 1.53          | 0.875   |
|        |    |                                                  |                                              |         | 0°                                                        | 0°      | 9.56                             | 9.15    | 3.23                 | 2.865   | 1.43          | 1.07    |

**Tabla 10.** Matriz de evaluación de desempeño del controlador MPC.

| Prueba |    | Señal de Referencia<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) | Señal de salida<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) |         | Error en estado estacionario<br>( $\theta_1 - \theta_2$ ) |         | Tiempo de establecimiento<br>(s) |         | Tiempo de subida (s) |         | Sobrepaso (%) |         |
|--------|----|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------|---------|----------------------------------|---------|----------------------|---------|---------------|---------|
|        |    |                                                  | Par                                          | Voltaje | Par                                                       | Voltaje | Par                              | Voltaje | Par                  | Voltaje | Par           | Voltaje |
| 1      | S1 | -30°                                             | -30°                                         | -30°    | 0°                                                        | 0°      | 4.23                             | 4.55    | 0.41                 | 0.42    | 11.66         | 5.33    |
|        | S2 | 110°                                             | 110°                                         | 110°    | 0°                                                        | 0°      | 4.64                             | 4.59    | 0.39                 | 0.36    | 1.63          | 2.63    |
| 2      | S1 | -50                                              | -50                                          | -50     | 0°                                                        | 0°      | 4.43                             | 4.85    | 0.41                 | 0.41    | 8             | 3.2     |
|        | S2 | 120°                                             | 120°                                         | 120°    | 0°                                                        | 0°      | 4.95                             | 4.93    | 0.38                 | 0.37    | 2.5           | 5       |
| 3      | S1 | -80°                                             | -80°                                         | -80°    | 0°                                                        | 0°      | 4.83                             | 5.32    | 0.42                 | 0.41    | 4.6           | 1.17    |
|        | S2 | 90°                                              | 90°                                          | 90°     | 0°                                                        | 0°      | 4.33                             | 3.87    | 0.37                 | 0.36    | 12.2          | 14.1    |
| 4      | S1 | -90                                              | -90                                          | -90     | 0°                                                        | 0°      | 3.3                              | 3.79    | 0.42                 | 0.41    | 3.33          | 0.5     |
|        | S2 | 60°                                              | 60°                                          | 60°     | 0°                                                        | 0°      | 4.13                             | 3.89    | 0.36                 | 0.34    | 26.6          | 26.66   |
|        |    |                                                  | Promedio                                     |         | 0°                                                        | 0°      | 4.19                             | 4.62    | 0.415                | 0.41    | 6.89          | 2.55    |
|        |    |                                                  |                                              |         | 0°                                                        | 0°      | 4.51                             | 4.32    | 0.375                | 0.35    | 10.73         | 12.07   |

**Tabla 11.** Matriz de comparación de desempeño entre LQR y MPC<sup>2</sup>.

| Controlador |    | Error en estado estacionario ( $\theta_1 - \theta_2$ ) |         | Tiempo de establecimiento (s) |         | Tiempo de subida (s) |         | Sobrepaso (%) |         |
|-------------|----|--------------------------------------------------------|---------|-------------------------------|---------|----------------------|---------|---------------|---------|
|             |    | Par                                                    | Voltaje | Par                           | Voltaje | Par                  | Voltaje | Par           | Voltaje |
| LQR         | S1 | 0°                                                     | 0°      | 8.97                          | 8.51    | 3.03                 | 3.26    | 0             | 0       |
|             | S2 | 0°                                                     | 0°      | 6.13                          | 8.11    | 2.35                 | 3.07    | 0             | 0       |
| LQRd        | S1 | 0°                                                     | 0°      | 9.26                          | 9.12    | 3.25                 | 2.785   | 1.53          | 0.875   |
|             | S2 | 0°                                                     | 0°      | 9.56                          | 9.15    | 3.23                 | 2.865   | 1.43          | 1.07    |
| MPC         | S1 | 0°                                                     | 0°      | 4.19                          | 4.62    | 0.415                | 0.41    | 6.89          | 2.55    |
|             | S2 | 0°                                                     | 0°      | 4.51                          | 4.32    | 0.375                | 0.35    | 10.73         | 12.07   |

Se logran obtener resultados muy positivos en el comportamiento del sistema usando cada uno de los controladores. Las tres técnicas utilizadas son constantes en mantener el mismo rango de tiempos de subida, aunque los tiempos de establecimiento varían. El controlador que posee los tiempos de subida y establecimiento aptos para las terapias físicas es el controlador LQR discreto, el cual dado su comportamiento y el objetivo de que el sistema sea completamente digital se selecciona para actuar sobre el exoesqueleto.

El controlador MPC fue el que más dificultades presentó ya que al modificar su respuesta para hacerla más lenta el sobrepaso aumenta haciendo que el sistema no sea apropiado para ejecutar el movimiento en las articulaciones.

## 8.8. DISEÑO DE LA PLATAFORMA DE GESTIÓN DEL EXOESQUELETO

Para realizar las terapias se propone una plataforma diseñada en el software LabVIEW, cuya función principal es almacenar las historias de los pacientes y darle versatilidad a la funcionalidad del exoesqueleto ya que le permite seleccionar al terapeuta varias modalidades de ejercicios.

Como instrumento de control se utilizará la tarjeta de desarrollo Arduino, gracias a ser una plataforma muy versátil que ofrece diversidad de opciones con las cuales trabajar; es de bajo costo, mucho soporte y buen rendimiento, aparte que con esta plataforma se viene trabajando en el proyecto de investigación así convirtiéndose en una buena opción para aplicar en el diseño. La tarjeta se comunicará con el sistema de gestión de información mediante el puerto serial. El programa se encargará de enviar el valor de referencia angular al que debe ir cada uno de los motores.

<sup>2</sup> Los valores de cada controlador corresponden al promedio de las pruebas realizadas.

**Figura 46.** Panel frontal de la plataforma de gestión del exoesqueleto.

*Sistema de gestión para el EXO-RT V 1.0*

**Historia:**

 Nuevo paciente

 Abrir historia

 Guardar historia

 Imprimir historia

**Modo de operacion:**

 Ejercicio automatico

 Ejercicio manual

 Modo de imitación

 Salir

Nombre del paciente:

Edad:

Cédula:

Nombre del doctor:

☐ Alergias? Alergia(s):

☐ Cirugías? Cirugía(s):

☐ Fracturas? Fractura(s):

Patología(s):

Tratamiento(s):

Dolor:

Registro de ejercicios:

| N° | Ejercicio | Hora inicio | Hora fin | Fecha | Completo? |
|----|-----------|-------------|----------|-------|-----------|
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |
|    |           |             |          |       |           |

En la pantalla frontal de la plataforma se encuentran los datos de la persona, el nombre del doctor que lo atiende, el pasado clínico comprendido en alergias, cirugías y fracturas, también se encuentra un selector en donde el paciente describirá el dolor que siente en una escala de 0 a 10, si el dolor es mayor que 6 no se podrá realizar la terapia con el exoesqueleto; al costado izquierdo se encuentran los botones con los que podrá interactuar el usuario, con ellos se puede:

- **Crear una nueva historia:** se deben ingresar los datos del paciente, sus antecedentes médicos y la razón por la que está en terapia y su posible tratamiento. Una vez guardada no se podrá modificar ni el nombre ni la cedula del paciente.

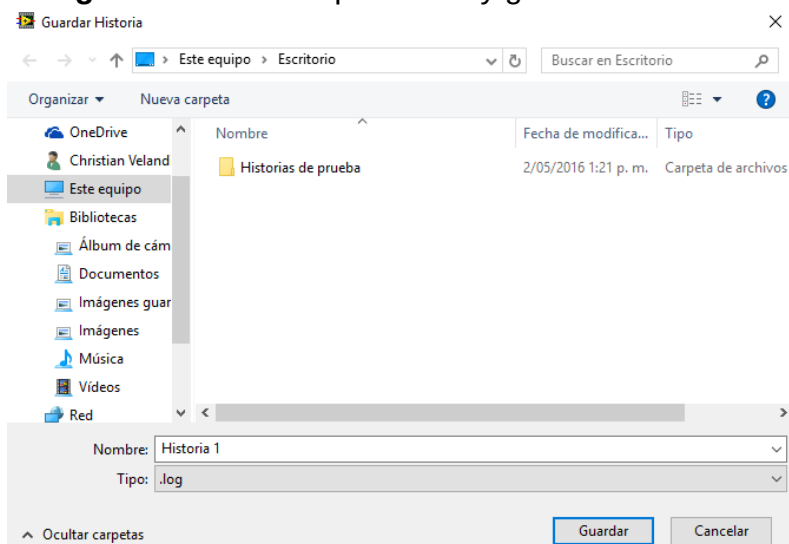
**Figura 47.** Ventana para crear la historia de un nuevo paciente.

Formulario para crear la historia de un nuevo paciente. El formulario contiene los siguientes campos:

- Nombre del paciente: [Campo de texto]
- Edad: [Campo de texto con spinner, valor 0]
- Cédula: [Campo de texto]
- Nombre del doctor: [Campo de texto]
- ☐ Alergias? Alergia(s): [Campo de texto]
- ☐ Cirugías? Cirugía(s): [Campo de texto]
- ☐ Fracturas? Fractura(s): [Campo de texto]
- Patología(s): [Campo de texto]
- Tratamiento(s): [Campo de texto]
- Dolor: [Escala de dolor de 0 a 10]
- Botones: Guardar, Cancelar

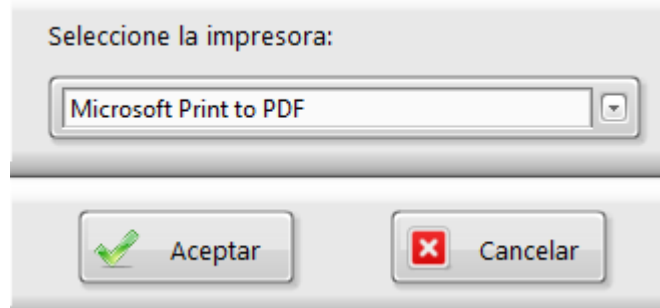
- Guardar o abrir una historia previamente guardada.

**Figura 48.** Ventana para abrir y guardar historias.



- Imprimir la historia.

**Figura 49.** Ventana de selección de impresora.



**Figura 50.** Ejemplo de una historia impresa en PDF.

Fecha de impresión: lunes, 2 de mayo de 2016 1:21:42 p. m.

Nombre del paciente: Cristian C. Velandia C.

Edad: 21

Cédula: 1072704473

Doctor: Alejandro V.

Cirugía(s): No.

Fractura(s): No.

Alergias(s): Rinitis

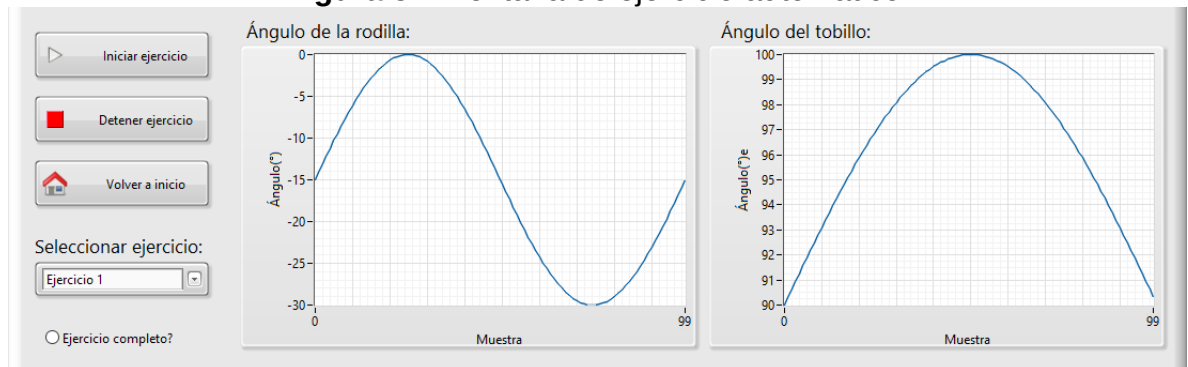
Patología: Esguince en tobillo derecho

Tratamiento: Dos terapias al mes

Firma del doctor:

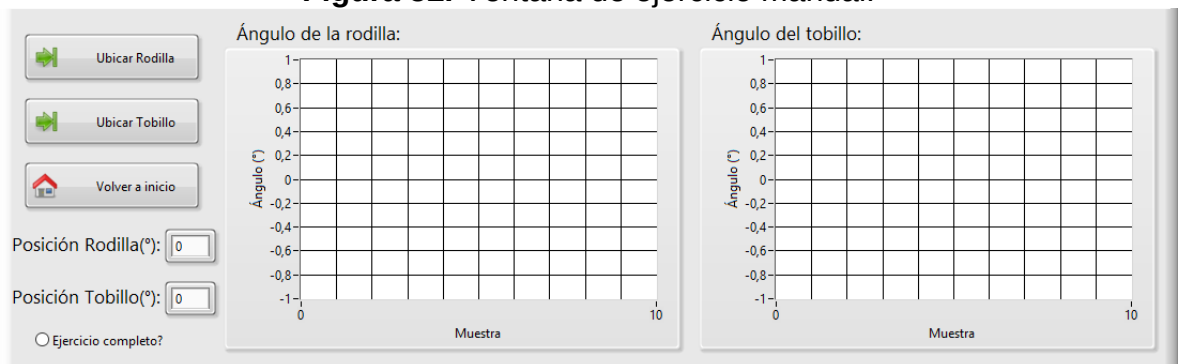
- Con los botones de modo de operación se puede alternar entre tres modos:
  - **Ejercicio automático:** con este botón aparecerá una ventana en la que se podrán seleccionar ejercicios prediseñados que se ejecutarán de forma automática en el exoesqueleto.

**Figura 51.** Ventana de ejercicio automático.



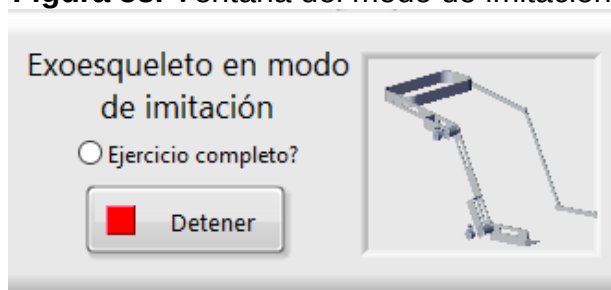
- **Ejercicio manual:** este botón despliega una ventana que permite ubicar el exoesqueleto punto a punto y mantenerlo en esta posición hasta que se envíe otro dato. Las posiciones se van mostrando en las dos graficas a medida que se van enviando al exoesqueleto.

**Figura 52.** Ventana de ejercicio manual.



- **Modo de imitación:** este botón pone en funcionamiento la sección móvil del exoesqueleto atada a la pierna izquierda, los movimientos que se realicen en ella se replicarán en la pierna derecha.

**Figura 53.** Ventana del modo de imitación.



Una vez realizado cada uno de los ejercicios se genera un registro de los mismos que se almacenara junto a la historia, este registro se compone de numero de entrada, tipo de ejercicio, hora de inicio, hora de fin, fecha y sí se completó o no. Esto sirve para tener un control de lo que se ha realiza al paciente.

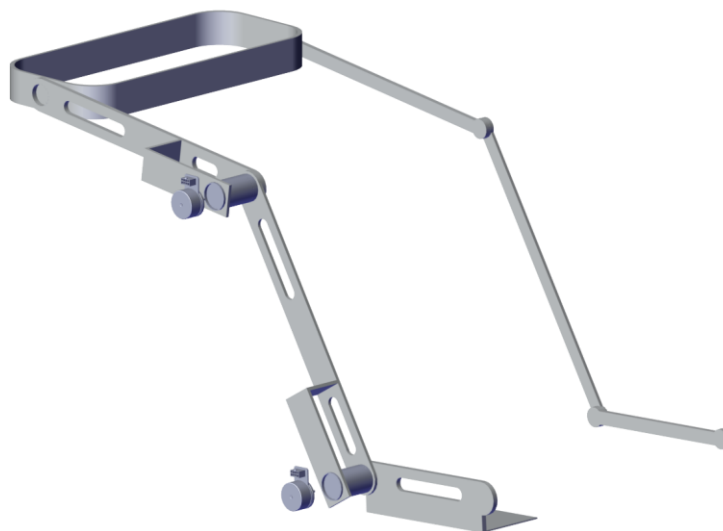
**Figura 54.** Registro de ejercicios del panel frontal.

Registro de ejercicios:

| N° | Ejercicio | Hora inicio   | Hora fin      | Fecha                    | Completo? |
|----|-----------|---------------|---------------|--------------------------|-----------|
| 1  | Manual    | 1:15:21 p. m. | 1:15:49 p. m. | lunes, 2 de mayo de 2016 | Si        |
| 2  | Manual    | 1:15:56 p. m. | 1:18:46 p. m. | lunes, 2 de mayo de 2016 | No        |
|    |           |               |               |                          |           |
|    |           |               |               |                          |           |
|    |           |               |               |                          |           |
|    |           |               |               |                          |           |
|    |           |               |               |                          |           |
|    |           |               |               |                          |           |

## 8.9. Diseño del exoesqueleto

**Figura 55.** Diseño de exoesqueleto.

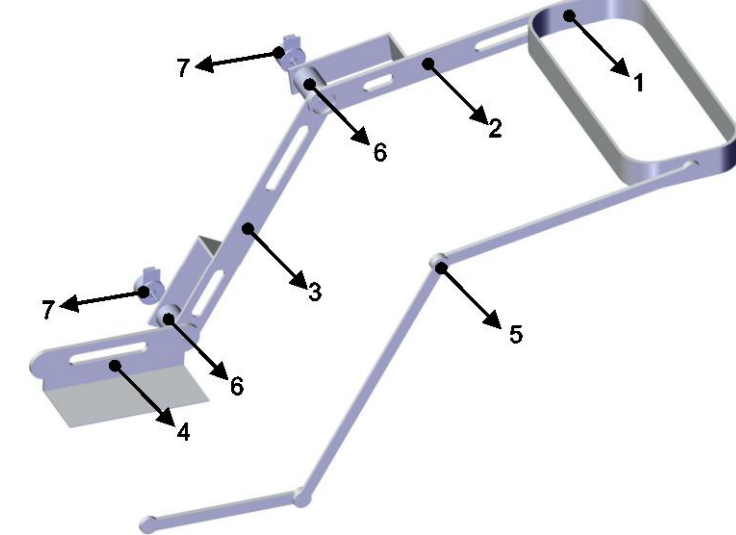


El diseño propuesto del exoesqueleto se muestra en las Figuras 51 y 52, este se compone de

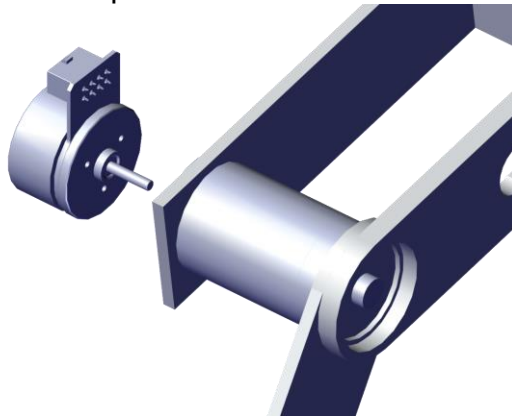
- 1. Cinturón o base:** este es la base del soporte del exoesqueleto, de allí se asegurará las piezas móviles.

2. **Sección del muslo:** esta sección cuenta con movilidad para acomodar al paciente en diferentes posiciones para ayudar en sus ejercicios. No cuenta con actuador ya que solo es el soporte para las secciones inferiores. Tiene unas correas para atar la pierna a la barra.
3. **Sección de la canilla:** esta sección tiene un actuador en la rodilla para generar el movimiento que soportará la terapia, unida a ella va el actuador de la sección del pie, generándole soporte. Cuenta con una espuma entre la pierna y la barra, y correas para asegurar que se transfiera la mayor cantidad de energía.
4. **Sección del pie:** cuenta con una barra lateral que se va a actuar y una horizontal que le da soporte a la planta del pie. Como el resto de las secciones cuenta con correas para amarrar el pie a la estructura.
5. **Estructura del exoesqueleto maestro:** estructura que se encarga de establecer el ángulo de referencia para la configuración de Maestro-Esclavo o modo de imitación del exoesqueleto.
6. **Motor:** se selecciona un motor sin escobillas de la empresa “Maxon Motors” para actuar sobre cada una de las articulaciones. Estos motores cuentan con sensores de efecto hall y encoders para medir su posición.
7. **Caja Reductora:** esta caja aumenta el par y reduce la velocidad del sistema para poder levantar el peso de la extremidad. Esta caja reductora se fija en unos soportes que permiten que se transfiera la energía a la sección siguiente del exoesqueleto mediante el rotor.

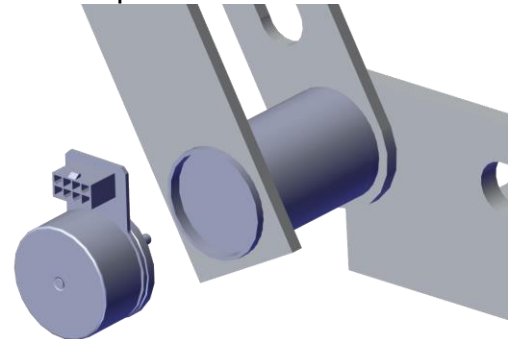
**Figura 56.** Diseño de exoesqueleto con descripción de secciones.



**Figura 57.** Acercamiento al motor y al soporte de la rodilla.



**Figura 58.** Acercamiento al motor y al soporte del tobillo.



El material seleccionado es aluminio debido a su poco peso y alta resistencia, las ranuras en cada sección son para disminuir el peso de la estructura y funcionan también como punto de anclaje para las correas que van a sujetar la estructura a la persona.

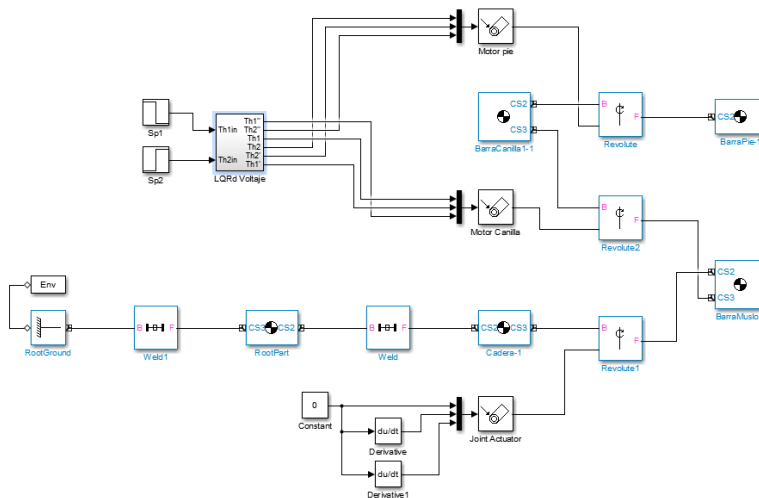
Lo ideal es que el cuarto en el que se ubique el exoesqueleto, tenga en sus muros espejos que permitan hacer una realimentación visual del movimiento para complementar la terapia; así mismo, el fisioterapeuta debe realizar realimentación auditiva sobre los ejercicios que se van a realizar, su duración y progreso.

### 8.9.1. Simulación del diseño propuesto.

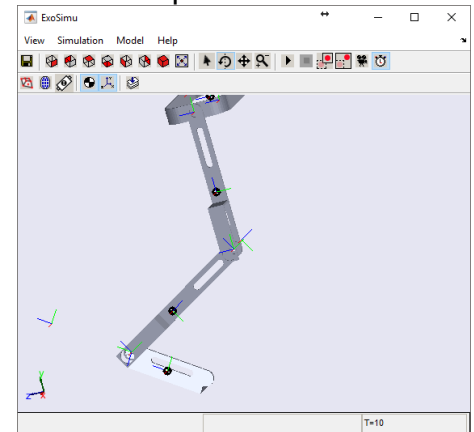
Se simula el diseño propuesto usando el toolbok SimScape de Simulink en el software Matlab, este permite obtener un modelo mecánico de la pieza y actuarla como si tuviese los motores en cada articulación, esto con el fin de observar que el movimiento realizado sea suave y no tenga alteraciones que puedan ser perjudiciales para el paciente.

Para generar el movimiento en el diseño se utiliza el controlador LQR discreto con entrada de voltaje. El diagrama de bloques usado para la simulación es el siguiente:

**Figura 59.** Diagrama de simulación mecánica para el diseño.



**Figura 60.** Diseño del exoesqueleto simulado.



Se plantea esta simulación como una alternativa a la realimentación visual del paciente, ubicándola en una pantalla y haciendo que se mueva de la misma forma que el paciente lo está haciendo.

El actuador para la barra del muslo se fija en cero grados acorde al sistema de referencia del modelo linealizado, posteriormente se procede a actuar sobre la rodilla y el tobillo teniendo en cuenta la condición inicial que debe tener y llevando a -60 y 110 grados, cada articulación, respectivamente. En la Figura 60, se puede observar el modelo en su estado final.

## 9. CONCLUSIONES

Debido a los prolongados tiempos de espera que se presentan actualmente entre la compra de algunos materiales y su entrega, no fue posible implementar el sistema lo que implica que posteriormente se haga y se realicen pruebas acompañadas de un profesional de la salud, que pueda certificar que el diseño funciona y es completamente seguro para los pacientes.

El proyecto comprende varias partes fundamentales que se analizaron en profundidad; el modelo del sistema, comprendido como el modelo cinemático y dinámico, fue desarrollado como una mejora del modelo del doble péndulo o péndulo de dos secciones, este integra la inercia de un modelo biomecánico muy conocido, permitiendo una buena caracterización y acercamiento a lo que es el comportamiento de la pierna con el exoesqueleto, analizada en dos secciones. El modelo limitado por los topes óseos permite una mejora en cuanto a la seguridad del sistema, ya que no va a permitir que el sistema sobrepase las capacidades fisiológicas de las extremidades. Este modelo tiene aún mucho por mejorar, de manera que se pueda caracterizar completamente la pierna humana. Como trabajo futuro, se plantea el desarrollo de un modelo de péndulo de tres secciones que permita caracterizar y, posteriormente, controlar la pierna completa, incluyendo topes musculares, calculados a partir de las medidas antropométricas de la persona, incluyendo la realimentación de fuerza, de manera que el exoesqueleto pueda discernir cuánta fuerza debe usar para hacer soporte en el ejercicio e ir disminuyéndola a medida que el paciente mejora.

Con el modelo y su dinámica fue posible plantear diferentes tipos de controladores para generar una respuesta acorde a los requerimientos de una terapia física. Este proceso de diseño y selección del controlador óptimo y, sus condiciones apropiadas para el sistema, fue bastante largo, debido a que la planta es un sistema de múltiples variables, con un comportamiento determinístico pero muy inestable. La configuración de estos controladores se realiza de forma práctica, ya que se aplican técnicas de control óptimo, en las cuales las funciones que se utilizan son problemas en los que se minimiza el índice de trabajo del modelo utilizando matrices de ponderación de estados, entradas y salidas que disminuyen el error llevando al sistema a un punto deseado. El controlador seleccionado fue el controlador LQR discreto aplicado al modelo de entrada por voltaje, se selecciona debido a sus tiempos de subida que van a asegurar una terapia suave y consistente, también porque el sistema completo de rehabilitación, entendido como la plataforma de control y el exoesqueleto, es totalmente digital así que este sistema se implementará posteriormente sobre un microcontrolador que aportará señales de voltaje a los motores de corriente continua que actuarán sobre el exoesqueleto. Aunque los métodos utilizados funcionaron muy bien, para el futuro

trabajo de inclusión de realimentación de fuerza será necesario poner a prueba otras técnicas de control en las cuales sea posible incluir y manipular más variables que hagan que el proceso de la terapia sea más versátil, dándole mayor manejo y poder sobre la máquina al fisioterapeuta.

La plataforma de control y gestión de información para hacer monitoreo al exoesqueleto se diseñó de forma intuitiva y fácil de utilizar lo que facilita el proceso de adaptación del fisioterapeuta; se plantean algunas mejoras para optimizar su funcionamiento tales como la inclusión de realimentación auditiva y visual al paciente, posibilidad de programar los ejercicios haciendo uso de datos de fuerza captados por el dispositivo y limitar el sistema de acuerdo a la escala visual del dolor que maneja el paciente.

El diseño completo del sistema, dadas sus características, puede aplicarse para realizar movimiento asistido controlado en flexión y extensión para la atención en procesos de rehabilitación de limitación, disfunción y discapacidad de las articulaciones de rodilla y cuello del pie en lesiones musculoesqueléticas como esguinces o distensiones musculares. Estos ejercicios comprenden estiramientos, movimientos repetitivos de flexión y extensión con diferentes ángulos a velocidad constante.

## BIBLIOGRAFÍA

Arconada, José David Cerdeño, & Revilla, Irene Chamón. (2010). Protocolo de ejercicios para el dolor de rodilla. Tomado de EFisioterapia Sitio Web: <http://www.efisioterapia.net/articulos/protocolo-ejercicios-el-dolor-rodilla>

Arconada, José David Cerdeño, & Revilla, Irene Chamón. (2012). Protocolo ejercicios de tobillo. Tomado de Efisioterapia Sitio Web: <http://www.efisioterapia.net/articulos/protocolo-ejercicios-tobillo>

Banala, S. K., Agrawal, S. K., & Scholz, J. P. (2007, 13-15 June 2007). *Active Leg Exoskeleton (ALEX) for Gait Rehabilitation of Motor-Impaired Patients*. Paper presented at the Rehabilitation Robotics, 2007. ICORR 2007. IEEE 10th International Conference on.

Bautista, Camilo Andres Alvis, & Diaz, Nicolas Aranguren. (2015). *Diseño, implementacion y puesta en funcionamiento de un sistema de control de marcha para un exoesqueleto de miembro inferior*. (Pregrado), Universidad Militar Nueva Granada. Tomado de <http://hdl.handle.net/10654/13795>

Beltran, Julio César Gomez. (2008). Identificación de las personas con discapacidad en los territorios desde el rediseño del registro: DANE.

Camacho, E. F., & Bordons, C. (2007). *Model Predictive control* (Springer Ed. 2 ed.).

Cyberdyne. HAL. Recuperado en Junio 18 de 2015, en <http://www.cyberdyne.jp/english/products/HAL/index.html>

Cyberdyne. (2013). HAL Therapy. Recuperado en Junio 18 de 2015, en <http://www.cyberdyne.jp/english/services/HALTherapy.html>

Definicion.de. (2008). Definición de Humanismo. Recuperado en Octubre 27 de 2015, en <http://definicion.de/humanismo/>

DirecciónContraMinas. (2014). La Dirección para la Acción Integral contra Minas Antipersonal se une a la conmemoración del 'Día Internacional de las Personas con Discapacidad'. Recuperado en Octubre 16 de 2015, en <http://www.accioncontraminas.gov.co/prensa/2014/Paginas/DAICMA-se-une-a-conmemoracion-de-Dia-Internacional-de-Discapacidad.aspx>

Domingo, A., Marriott, E., de Grave, R. B., & Lam, T. (2011, June 29 2011-July 1 2011). *Quantifying lower limb joint position sense using a robotic exoskeleton: A pilot study*. Paper presented at the Rehabilitation Robotics (ICORR), 2011 IEEE International Conference on.

Donghai, Wang, Kok-Meng, Lee, Jiajie, Guo, & Can-jun, Yang. (2014). Adaptive Knee Joint Exoskeleton Based on Biological Geometries. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 19(4), 1268-1278. doi: 10.1109/TMECH.2013.2278207

Drillis, R., & Contini, R. (1964). Body segment parameters *Artificial Limbs* (Vol. 8, pp. 44-67): National Academy of Sciences.

EL.TIEMPO. (2014). Aumentan accidentes de tránsito en el país. Recuperado en Julio 17 de 2015, en <http://www.eltiempo.com/colombia/otras-ciudades/ndices-de-accidentes-de-transito-en-colombia/15000347>

Fleischer, C., & Hommel, G. (2007, 10-14 April 2007). *Calibration of an EMG-Based Body Model with six Muscles to control a Leg Exoskeleton*. Paper presented at the Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on.

Flórez, Hugo José Celedón. (2016). *DISEÑO MECATRÓNICO DE UN ROBOT EXOESQUELETO DE EXTREMIDAD SUPERIOR PARA REHABILITACIÓN DE PERSONAS CON DISCAPACIDAD PARCIAL EN EL CODO*. (Ingeniero electrónico), Universidad Santo Tomás.

Garcia, Carlos Egéa, & Sánchez, Alicia Sarabia. (2001). Clasificaciones de la OMS sobre discapacidad.

GICI. (2015). Proyectos de investigación. Recuperado en Octubre 16 de 2015, en <http://gici.univalle.edu.co/WEB-Exoesqueleto/Proyectos.html#Exoesqueleto para Rehabilitaci%F3n>

Goldstein, Herbert, Poole, Charles, & Safko, John. (2000). *Classical mechanics* (A. Wesley Ed. 3 ed.).

GrupoArgo. Ciencia, tecnología y sociedad. Recuperado en Noviembre 6 de 2015, en <http://www.grupoargo.org/documentos.htm>

Hanavan, Ernest P. (1964). A mathematical model of the human body.

Heng, Cao, Zhengyang, Ling, Jun, Zhu, Yu, Wang, & Wei, Wang. (2009, 19-23 Dec. 2009). *Design frame of a leg exoskeleton for load-carrying augmentation*.

Paper presented at the Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2009 IEEE International Conference on.

Jinzhong, Chen, & Wei-Hsin, Liao. (2006, 17-20 Dec. 2006). *A Leg Exoskeleton Utilizing a Magnetorheological Actuator*. Paper presented at the Robotics and Biomimetics, 2006. ROBIO '06. IEEE International Conference on.

Kapandji, A. I. (2012). *Fisiología articular: Miembro inferior* (Panamericana Ed. 6 ed. Vol. 2).

Lai, Richard. (2012). Tokyo University of Science shows off robotic suit powered by pneumatic artificial muscles Recuperado en Junio 19 de 2015, en <http://www.engadget.com/2012/10/02/tokyo-university-of-science-pneumatic-muscle-suit/>

Lopez, R., Aguilar-Sierra, H., Salazar, S., & Lozano, R. (2013, 11-13 Oct. 2013). *Model and control of the ELLTIO with two degrees of freedom*. Paper presented at the System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2013 17th International Conference.

Martin, Lockheed. (2010). HULC. Recuperado en Junio 19 de 2015, en <http://www.lockheedmartin.com/us/products/exoskeleton/hulc.html>

Ministerio.de.Salud.y.Protección.Social. (2013). Discapacidad en Colombia *Registro para la Localización y Caracterización de Personas con Discapacidad*.

MIT. (2016). Exoskeletons for Walking Augmentation. Recuperado en Febrero 2 de 2016

Murray, R. M. (2006). Lecture 2 – LQR Control. Tomado de CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY Sitio Web: <http://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf>

Nordin, Margareta, & Frankel, Victor H. (2012). *Basic biomechanics of the musculoskeletal system* (L. W. Wilkins Ed. 4 ed.).

Obradors, Pedro Javier Moya. (2003). *El humanismo de Santo Tomás de Aquino, según Etienne Gilson*. Paper presentado en CONGRESSO TOMISTA INTERNAZIONALE, ROME. <http://www.e-aquinas.net/pdf/moya.pdf>

Ogata, Katsuhiko. (1996). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto* (P. EDUCACIÓN Ed. 2 ed.).

Ogata, Katsuhiko. (2010). *INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA* (P. EDUCACIÓN Ed. 5 ed.).

Pérez, Juan Manuel Grosso. (2008). *Diseño y validacion de un exoesqueleto de piernas de tipo maestro-esclavo para facilitar la rehabilitacion de personas con discapacidad parcial de su locomoción en el plano sagital*. UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA.

Peterson, David H., & Bergmann, Thomas F. (2010). *Chiropractic Technique: Principles and Procedures* (Mosby Ed. 3rd ed.).

Renquan, Lu, Zhijun, Li, Chun-Yi, Su, & Anke, Xue. (2014). Development and Learning Control of a Human Limb With a Rehabilitation Exoskeleton. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 61(7), 3776-3785. doi: 10.1109/TIE.2013.2275903

Saba, A. M., Dashkhaneh, A., Moghaddam, M. M., & Hasankola, M. D. (2013, 13-15 Feb. 2013). *Design and manufacturing of a gait rehabilitation robot*. Paper presented at the Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013 First RSI/ISM International Conference on.

Shimodaira, T., Yabunaka, T., Kato, N., Yano, K., Shinoda, N., & Nakanishi, A. (2014, 8-10 Oct. 2014). *Motion-assist robot for the lower limb to rotate and correct movement of the knee*. Paper presented at the Control Applications (CCA), 2014 IEEE Conference on.

Stanford. (2016). CHARM Lab Research. Recuperado en Febrero 2 de 2016, en <http://charm.stanford.edu/Main/Research>

Tortora, Gerard J., & Derrickson, Bryan. *Principios de anatomía y fisiología* (Panamericana Ed. 11 ed.).

Wang, Liuping. (2009). *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB* (Springer Ed.).

Wansoo, Kim, Heedon, Lee, Donghwan, Kim, Jungsoo, Han, & ChangSoo, Han. (2014, 22-25 Oct. 2014). *Mechanical design of the Hanyang Exoskeleton Assistive Robot(HEXAR)*. Paper presented at the Control, Automation and Systems (ICCAS), 2014 14th International Conference on.

Winter, David A. (2009). *Biomechanics and motor control of human movement* (J. W. Sons Ed. 4 ed.).

Yang, Xiuxia, Zhang, Yi, Xiao, Zhicai, & Yang, Zhiyong. (2011, 22-24 July 2011). *Total course locomotion control of assist walking exoskeleton leg*. Paper presented at the Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese.

Yanhe, Zhu, Jinxiang, Cui, & Jie, Zhao. (2013, 12-14 Dec. 2013). *Biomimetic design and biomechanical simulation of a 15-DOF lower extremity exoskeleton*. Paper presented at the Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2013 IEEE International Conference on.

Yixiong, Chen, Jin, Hu, Weiqun, Wang, Liang, Peng, Long, Peng, & Zeng-Guang, Hou. (2013, 12-14 Dec. 2013). *An FES-assisted training strategy combined with impedance control for a lower limb rehabilitation robot*. Paper presented at the Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2013 IEEE International Conference on.

Young, Hugh D., & Freedman, Roger A. (2009). *FÍSICA UNIVERSITARIA* (P. EDUCACIÓN Ed. 12 ed. Vol. 1).

ZENIT.org. (2003). La propuesta del humanismo cristiano: El hombre puede encontrar a Dios. Recuperado en Octubre 30 de 2015, en <http://www.zenit.org/es/articles/la-propuesta-del-humanismo-cristiano-el-hombre-puede-encontrar-a-dios>

## **ANEXOS**

## **ANEXO A: Lista de productos derivados de la tesis**

1. Artículo titulado “Design of an upper limb exoskeleton for elbow rehabilitation” presentado en el congreso CIIMCA 2015.
2. Artículo titulado “Control design of an elbow exoskeleton for upper-limb rehabilitation” presentado en el congreso CIIMCA 2015.
3. Artículo titulado “Mathematical model based on kinematic analysis to upper and lower limbs in an exoskeleton for rehabilitation” presentado en el congreso CIIMCA 2015.
4. Artículo en proceso titulado “Conceptual Design and Control of a knee and ankle Exoskeleton aimed to Lower-Limb Rehabilitation” para una revista científica.
5. Artículo titulado “Design and control of an exoskeleton in rehabilitation for lower limb tasks” presentado para revisión en el evento STSIVA 2016.

Como producto inmaterial del trabajo de grado se recibió una invitación para realizar una estancia de investigación en el grupo de investigación en control de la Universidad Tecnológica Federal de Paraná en Brasil, esta se llevará a cabo desde el primero de Julio del 2016 hasta el 26 de septiembre del mismo año.

**ANEXO B: Especificaciones técnicas del motor seleccionado.**

**ANEXO C: Especificaciones técnicas de la caja reductora para el motor.**

**ANEXO D: Especificaciones técnicas del encoder para el motor.**