

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS

VICERRECTORÍA DE UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA-VUAD

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

**ANÁLISIS DE APRENDIZAJES ASOCIADOS AL ÁLGEBRA ESCOLAR DESDE LA
PROGRAMACIÓN VISUAL DE COMPUTADORES, EN ESTUDIANTES DE 10-14
AÑOS**

Autor

IVAN ORLANDO VALENCIA TORRES

BOGOTÁ, AGOSTO DE 2021

2021

**ANÁLISIS DE APRENDIZAJES ASOCIADOS AL ÁLGEBRA ESCOLAR DESDE
LA PROGRAMACIÓN VISUAL DE COMPUTADORES, EN ESTUDIANTES DE 10-14
AÑOS**

Autor

Iván Orlando Valencia Torres

Director de Tesis

Dra. Rosa Nidia Tuay Sigua

Tesis para optar al título de Doctor en Educación

Bogotá, D.C., agosto de 2021

Tesis aprobada por:

Doctora Rosa Nidia Tuay Sigua
Directora de tesis

Jurados:

Nombre y Firma

Nombre y Firma

Nombre y Firma

Bogotá D.C., Octubre 2021

Dedicatoria

A mis hijos por comprender que el trabajo realizado para preparar y culminar esta tesis, ha sido por y para ellos, que es necesario hacer sacrificios para conseguir lo que se desea.

Gracias por paciencia y el amor, eso vale más que nada.

Agradecimientos

A mi directora, la Doctora Rosa Nidia Tuay Sigua, por toda sus orientaciones y el entusiasmo con el que me motivo a realizar mi trabajo de investigación, por su generosidad con el tiempo y sus conocimientos.

Tabla de Contenido

Índice de Figuras.....	13
Índice de Gráficas	16
Resumen.....	17
Palabras Clave	19
Summary	19
Keywords.....	22
Introducción	23
Capítulo 1	25
1. El problema de Investigación.....	25
1.1. Planteamiento del Problema de Investigación.....	30
1.2. Pregunta de Investigación	33
1.3. Objetivos	34
1.3.1. <i>Objetivo General</i>	34
1.3.2. <i>Objetivos Específicos</i>	34
1.4. Justificación	34
Capítulo 2	41

2. Marco de Referencia	41
2.1. Estado de la Cuestión.....	41
<i>2.1.1. Transición del Pensamiento Aritmético al Pensamiento Algebraico</i>	<i>43</i>
<i>2.1.2. Pensamiento Algebraico y Procesos de Generalización</i>	<i>45</i>
<i>2.1.3. Artefactos Tecnológicos en Educación Matemática</i>	<i>47</i>
<i>2.1.4. Trabajos de Investigación Asociados al Desarrollo del Pensamiento Algebraico</i>	<i>50</i>
2.2. Marco Teórico	65
<i>2.2.1. Representaciones Semióticas</i>	<i>66</i>
<i>2.2.2. La Semiótica en la Educación Matemática.....</i>	<i>69</i>
<i>2.2.3. El Argumento Dentro de la Teoría de Representaciones Semióticas.....</i>	<i>72</i>
<i>2.2.4. Las funciones discursivas de la lengua y el aprendizaje de las matemáticas</i>	<i>74</i>
<i>2.2.5. Importancia en el Aprendizaje de las Matemáticas y Desarrollo Cultural</i>	<i>76</i>
<i>2.2.6. Teoría Sociocultural en el Desarrollo del Pensamiento</i>	<i>79</i>
<i>2.2.7. Artefactos Culturales</i>	<i>85</i>
<i>2.2.8. Teoría de la Objetivación</i>	<i>87</i>
<i>2.2.9. Medios Semióticos de Objetivación</i>	<i>90</i>
<i>2.2.10. La Actividad.....</i>	<i>91</i>
<i>2.2.11. Pensamiento Algebraico y la Generalización</i>	<i>92</i>
Capítulo 3	97

3. Marco Metodológico	97
3.1. Paradigma metodológico: Triangulación.....	99
3.2. Fases Metodológicas.....	101
3.3. Enfoque Metodológico	103
3.3.1. Proceso Metodológico para la Recolección de Datos	105
3.3.2. Diseño de Tareas y Trabajo en el Aula	107
3.4. Análisis Multimodal.....	109
3.5. Análisis desde el Método Correlacional	110
Capítulo 4	113
4. Resultados.....	113
4.1. Desarrollo de la Investigación.....	113
4.1.1. La Concepción Multimodal del Pensamiento Humano.....	114
4.1.2. La Argumentación desde la Práctica Social	115
4.2. Tarea 0 - Indagación Inicial.	117
4.2.1. Grupo Experimental	117
4.2.2. Grupo de Control	129
4.3. Tarea 1 - Secuencias Figural Números Pares	131
4.3.1. Grupo Experimental	132
4.3.2. Grupo de Control	143

4.4. Tarea 2 – Secuencia Figural Números Impares	144
4.4.1. Grupo experimental	145
4.4.2. Grupo de Control	154
4.5. Tarea 3 – Secuencia Figural Números Triangulares	156
4.5.1. Grupo experimental	157
4.5.2. Grupo de Control	164
4.6. Tarea 4 – Secuencia Figural Final	166
4.6.1. Grupo Experimental	166
4.6.2. Grupo de Control	170
Capítulo 5	179
5. Discusión de Resultados.....	179
5.1. Recursos Semióticos de Objetivación.....	180
5.1.1. Artefacto Computacional y Gestualidad	181
5.1.2. Artefacto Computacional, Ritmo y Entonación	183
5.1.3. Generalización y Lenguaje Natural	184
5.2. Tipos de Generalización y Análisis del Discurso	186
5.3. Razonamiento Deductivo y Medios Semióticos de Objetivación	194
Conclusiones	198
Referencias	203

Índice de Tablas

TABLA 1 ÉNFASIS DE LOS CURRÍCULOS EN CINCO PAÍSES	42
TABLA 2 VARIABLES DE INVESTIGACIÓN	107
TABLA 3. VARIABLES A RELACIONAR EN LAS TABLAS DE CONTINGENCIA	111
TABLA 4 EDAD DE ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPERIMENTAL.....	127
TABLA 5 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO EXPERIMENTAL).....	127
TABLA 6 TIPO DE GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO EXPERIMENTAL)	128
TABLA 7 TIPO DE GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO EXPERIMENTAL)	128
TABLA 8 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO DE CONTROL)	129
TABLA 9 TIPO DE GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO DE CONTROL)	130
TABLA 10 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO EXPERIMENTAL).....	141
TABLA 11 TIPO DE GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO EXPERIMENTAL)	141
TABLA 12 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO DE CONTROL)	143
TABLA 13 TIPO DE GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO DE CONTROL).....	144
TABLA 14 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T2 (GRUPO EXPERIMENTAL).....	153
TABLA 15 TIPO DE GENERALIZACIÓN T2 (GRUPO EXPERIMENTAL)	154
TABLA 16 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T2 (GRUPO DE CONTROL)	155
TABLA 17 TIPO DE GENERALIZACIÓN T2 (GRUPO DE CONTROL).....	156
TABLA 18 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO EXPERIMENTAL).....	163
TABLA 19 TIPO DE GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO EXPERIMENTAL)	164
TABLA 20 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO DE CONTROL)	164
TABLA 21 TIPO DE GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO DE CONTROL).....	165

TABLA 22 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO EXPERIMENTAL).....	169
TABLA 23 TIPO DE GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO EXPERIMENTAL)	170
TABLA 24 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO DE CONTROL)	171
TABLA 25 TIPO DE GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO DE CONTROL).....	171
TABLA 26 TABLA DE CONTINGENCIA Y DE VALORES ESPERADOS PARA LA RELACIÓN DE DOS VARIABLES	173
TABLA 27. PRUEBA DE INDEPENDENCIA CHI-CUADRADO PARA VARIABLES GRUPO - GENERALIZACIÓN	174
TABLA 28 PRUEBA DE INTENSIDAD DE ASOCIACIÓN ENTRE LAS VARIABLES GRUPO - GENERALIZACIÓN	176
TABLA 29 TABLA DE CONTINGENCIA Y DE VALORES ESPERADOS PARA LA RELACIÓN DE DOS VARIABLES	177
TABLA 30 PRUEBA DE INDEPENDENCIA CHI-CUADRADO PARA VARIABLES GRUPO - TIPO DE GENERALIZACIÓN	177
TABLA 31 COEFICIENTE DE INTENSIDAD DE ASOCIACIÓN PARA VARIABLES TIPO DE GENERALIZACIÓN Y GRUPO	178

Índice de Figuras

FIGURA 1. FUNCIONES META-DISCURSIVAS Y FUNCIONES DISCURSIVAS DEL EMPLEO DE UNA LENGUA.....	75
FIGURA 2. FUNCIÓN MEDIADORA SEGÚN VYGOTSKY	79
FIGURA 3. RELACIÓN DIALÉCTICA ENTRE ACTIVIDAD Y SISTEMA CULTURAL SEMIÓTICO.	83
FIGURA 4. INTERACCIÓN ENTRE SISTEMAS SEMIÓTICOS CULTURALES CON LA ACTIVIDAD Y EL TERRITORIO DEL ARTEFACTO.....	84
FIGURA 5. ESTRUCTURA DE LA ACTIVIDAD.....	92
FIGURA 6. DISEÑO DE TRIANGULACIÓN CONCURRENTES. TOMADO DE CRESWELL (2013)	98
FIGURA 7. MATRIZ DE DISEÑO MIXTO	99
FIGURA 8. MÉTODO MIXTO EN LA PRESENTE INVESTIGACIÓN	100
FIGURA 9. FASES METODOLÓGICAS DE LA INVESTIGACIÓN	101
FIGURA 10. FASES METODOLÓGICAS DEL TRABAJO DE CAMPO	103
FIGURA 11. MOMENTOS DE LA ACTIVIDAD	109
FIGURA 12. TAREA 0	117
FIGURA 13. GESTO USADO POR EL ESTUDIANTE1.....	119
FIGURA 14. GESTO USADO POR EL ESTUDIANTE 2.....	120
FIGURA 15. GESTO USADO POR EL ESTUDIANTE 3.....	121
FIGURA 16. GESTO USADO POR EL ESTUDIANTE 4.....	121
FIGURA 17. PRODUCCIÓN ESCRITA DEL ESTUDIANTE 1.....	125
FIGURA 18. SECUENCIA DE IMÁGENES TAREA 1 PRESENTADA USANDO SCRATCH.....	131
FIGURA 19. SEÑALAMIENTOS USADOS POR EL ESTUDIANTE 1	132
FIGURA 20. MOVIMIENTO GESTUAL DEL ESTUDIANTE 1	133

FIGURA 21. EVIDENCIA DEL USO DEL RITMO COMO MEDIO SEMIÓTICO DE OBJETIVACIÓN	134
FIGURA 22. GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA CONSTRUIDA POR LA ESTUDIANTE	137
FIGURA 23. CONSTRUCCIÓN EN SCRATCH.....	138
FIGURA 24. ALGORITMO CONSTRUIDO EN SCRATCH PARA LA TAREA 1	139
FIGURA 25. SECUENCIA DE IMÁGENES TAREA 2 PRESENTADA USANDO SCRATCH.....	145
FIGURA 26. ASOCIACIÓN DEL GESTO CON PRODUCCIONES ESCRITAS	147
FIGURA 27. GESTOS ASOCIADOS AL ARTEFACTO COMPUTACIONAL	147
FIGURA 28. MIGRACIÓN DE ELEMENTOS GESTUALES EN INTERACCIÓN CON EL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN	149
FIGURA 29. AMPLITUD DE ONDA Y ENTONACIÓN EN EL RECONOCIMIENTO DEL PATRÓN	149
FIGURA 30. SEÑALAMIENTO SIGUIENDO EL RITMO Y LA ENTONACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DISCURSIVA DEL ESTUDIANTE	150
FIGURA 31. REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DESDE EL USO DEL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN	152
FIGURA 32. SECUENCIA DE IMÁGENES TAREA 3 PRESENTADA USANDO SCRATCH.....	156
FIGURA 33. SEÑALAMIENTOS PARA EXPRESAR GENERALIZACIÓN ARITMÉTICA	158
FIGURA 34. RITMO COMO MEDIO SEMIÓTICO DE OBJETIVACIÓN	158
FIGURA 35. FORMAS ACTUALES DE REPRESENTACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN	160
FIGURA 36. SEÑALAMIENTO QUE DETECTA UNA DESIGNACIÓN PURA.....	161
FIGURA 37. REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS CON DIFERENTES ARTEFACTOS	162
FIGURA 38. SECUENCIA DE IMÁGENES TAREA 4	166
FIGURA 39. SEÑALAMIENTOS COMO MEDIO SEMIÓTICO DE OBJETIVACIÓN.....	167
FIGURA 40. GENERALIZACIÓN SIMBÓLICA DESARROLLADA POR EL ESTUDIANTE.....	168
FIGURA 41. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	180
FIGURA 42. ESTRUCTURA DE LA GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA	188

FIGURA 43. TRÁNSITO A GENERALIZACIONES ARITMÉTICAS OBSERVADAS DESDE FUNCIONES DISCURSIVAS	189
FIGURA 44. EVIDENCIA DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN ARITMÉTICA.....	190
FIGURA 45. EVIDENCIA DE ABDUCCIÓN ANALÍTICA DESDE LA FUNCIÓN DISCURSIVA DE REFLEXIVIDAD	191
FIGURA 46. USO DE SCRATCH COMO MEDIO SEMIÓTICO DE OBJETIVACIÓN EN EL PROCESO DE VERIFICACIÓN	193
FIGURA 47. FUNCIÓN EXPANSIVA COMO EVIDENCIA DE DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA	194
FIGURA 48. VALOR EPISTÉMICO Y DE VERDAD EN UNA PROPOSICIÓN	195

Índice de Gráficas

GRÁFICA 1 EDAD DE LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPERIMENTAL	127
GRÁFICA 2 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO EXPERIMENTAL)	128
GRÁFICA 3 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO DE CONTROL)	130
GRÁFICA 4 TIPO DE GENERALIZACIÓN T0 (GRUPO DE CONTROL)	131
GRÁFICA 5 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO EXPERIMENTAL)	141
GRÁFICA 6 TIPO DE GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO EXPERIMENTAL)	142
GRÁFICA 7 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO DE CONTROL)	143
GRÁFICA 8 TIPO DE GENERALIZACIÓN T1 (GRUPO DE CONTROL)	144
GRÁFICA 9 TIPO DE GENERALIZACIÓN T2 (GRUPO EXPERIMENTAL)	154
GRÁFICA 10 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T2 (GRUPO DE CONTROL)	155
GRÁFICA 11 TIPO DE GENERALIZACIÓN T2 (GRUPO DE CONTROL)	156
GRÁFICA 12 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO EXPERIMENTAL)	163
GRÁFICA 13 TIPO DE GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO EXPERIMENTAL)	164
GRÁFICA 14 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO DE CONTROL)	165
GRÁFICA 15 TIPO DE GENERALIZACIÓN T3 (GRUPO DE CONTROL)	165
GRÁFICA 16 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO EXPERIMENTAL)	169
GRÁFICA 17 TIPO DE GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO EXPERIMENTAL)	170
GRÁFICA 18 ESTUDIANTES QUE REALIZAN GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO DE CONTROL)	171
GRÁFICA 19 TIPO DE GENERALIZACIÓN T4 (GRUPO DE CONTROL)	172
GRÁFICA 20 CHI-CUADRADO CRÍTICO Y VALOR P, PARA RELACIÓN DE VARIABLES GRUPO - GENERALIZACIÓN	174

Resumen

La presente investigación se desarrolla en torno al conocimiento de la naturaleza del pensamiento algebraico. Múltiples investigadores en el medio de la educación matemática exponen la necesidad de abordar el problema relacionado con las formas a través de las cuales los estudiantes escolares plantean y argumentan sus modos de pensar asociados a la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, sin embargo, los mismos investigadores reconocen el poco conocimiento que se tiene de tal naturaleza. De la misma manera, en el proceso de búsqueda de información se encuentra que investigadores en educación matemática plantean la necesidad de implementar artefactos computacionales en la escuela, específicamente aquellos que contribuyan al desarrollo del pensamiento algebraico relacionado con prácticas escolares desde los lenguajes de programación, conocimiento indispensable en el desarrollo de la inteligencia artificial y de las sociedades actuales del conocimiento. A partir de lo anterior, la presente investigación plantea la necesidad de teorizar alrededor del análisis de las formas como estudiantes escolares objetivan el conocimiento y actualizan su saber, desde la teoría de objetivación y los procesos de argumentación que podrían dar cuenta de cómo se realiza la transición descrita a partir de la mediación de artefactos computacionales, específicamente desde el lenguaje de programación visual.

Tal teorización, además de ampliar nuestro conocimiento acerca de la naturaleza de las ciencias y específicamente la naturaleza del pensamiento algebraico, permite presentar

escenarios que transformen las maneras a través de las cuales se presentan en el aula desde diferentes formas de mediación, objetos propios del álgebra que conllevan al desarrollo de habilidades que se requieren para el desenvolvimiento en la sociedad actual. Este trabajo de investigación vincula entonces la programación de computadores como una mediación que se integra a los procesos de aprendizaje con los cuales los estudiantes desarrollan habilidades desde la generalización de patrones aritméticos hasta las generalizaciones algebraicas, estableciendo así una forma de interacción que conlleva a procesos de razonamiento abductivo que incluyen procesos computacionales y que permiten una nueva forma de desarrollo de razonamientos deductivos. Los análisis realizados a las formas discursivas del lenguaje muestran como la función de expansión discursiva es permeada por desarrollos analíticos que en esta investigación se han categorizado como computacionales y que permiten una forma de expansión de similitud semiótica externa formal, que evidencia razonamientos deductivos que se reflejan en una correlación entre el uso de la herramienta computacional y la generalización algebraica desde las expresiones simbólicas.

Para el desarrollo del presente trabajo, el capítulo uno plantea el problema de investigación asociado al desconocimiento que se tiene de la naturaleza del pensamiento algebraico, más aún, cuando los aprendices usan un artefacto computacional y movilizan un lenguaje de programación como medio semiótico de objetivación. Luego, en el capítulo dos se plantea el marco de referencia que describe y reseña las investigaciones que presentan coincidencias o que se relacionan de alguna manera con secuencias figurales, álgebra temprana y la multimodalidad sensorial y con el análisis que se realiza desde las funciones meta-discursivas y discursivas del lenguaje.

Para el capítulo 3, se plantea el diseño de la investigación como metodología mixta de triangulación concurrente, en la cual los datos cualitativos están determinados por la caracterización de los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes y los datos asociados al análisis cuantitativo se refieren a los estudiantes que movilizan el lenguaje de programación como medio semiótico de objetivación y los tipos de generalización que ellos mismos lograron plantear. En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos en la investigación a partir de la caracterización de los medios semióticos de objetivación, específicamente cuando movilizan el lenguaje de programación al realizar las generalizaciones de las secuencias figurales planteadas. Por último, en la discusión de resultados se lleva a cabo el análisis de los discursos presentados por los estudiantes al proponer sus hipótesis que resultan en generalizaciones y la asociación que establecen con los diferentes medios semióticos de objetivación en sus producciones referidas a las generalizaciones que logran formular.

Palabras Clave

Educación, matemáticas, aritmética, álgebra, generalizaciones, artefactos computacionales.

Summary

This research is developed around the knowledge of the nature of algebraic thinking. Multiple researchers in the field of mathematics education expose the need to address the

problem related to the ways through which school students pose and argue their ways of thinking associated with the transition from arithmetic thinking to algebraic thinking, however, the researchers themselves recognize the lack of knowledge of this nature. In the same way, in the information search process it is found that analysts in mathematics education highlight the need to implement computational artifacts in school, specifically those that contribute to the development of algebraic thinking related to school practices from programming languages, an indispensable understanding in the development of artificial intelligence and current knowledge societies. Based on the above, the present investigation raises the need to theorize around the analysis of the ways in which school students objectify and update their knowledge, from the theory of objectification and the argumentation processes that could account for how the transition described from the mediation of computational artifacts, specifically from the visual programming language.

Such theorization, in addition to expanding our comprehension about the nature of science and specifically the nature of algebraic thinking allows us to present scenarios that transform the ways in which they are presented in the classroom from different forms of mediation, typical objects of algebra that lead to the development of skills that are required for development in today's society. Therefore, this research work links computer programming as an instrument that mediates the learning processes with which students develop skills from the

generalization of arithmetic patterns to algebraic generalizations, thus establishing a form of interaction that leads to abductive reasoning processes, that include computational processes and that allow a new form of deductive reasoning development. Similarly, the analyzes carried out on the discursive forms of language show how the discursive expansion function is permeated by analytical developments that in this research have been categorized as computational and that allow a form of expansion of formal external semiotic similarity, which evidences deductive reasoning and are reflected in a correlation between the use of the computational tool and the algebraic generalization from symbolic expressions.

For the development of this work, the first chapter highlights the research problem associated with the lack of knowledge of the nature of algebraic thinking, even more so, when learners use a computational artifact and mobilize a programming language as a semiotic means of objectification. Then, the second chapter describes the frame of reference and reviews the investigations that present coincidences or that are related in some way with figurative sequences, early algebra and sensory multimodality and with the analysis that is carried out from the meta-functions is proposed discursive and discursive language.

For the third chapter, the research is proposed as a mixed concurrent triangulation methodology, in which the qualitative data is determined by the characterization of the semiotic means of objectification mobilized by the students and the data associated with the quantitative analysis refer to the students who mobilize the programming language as a semiotic means of objectification and the types of generalization that they managed to propose. Chapter fourth

presents the results obtained in the investigation from the characterization of the semiotic means of objectification, specifically when they mobilize the programming language when making the generalizations of the posed figurative sequences. Finally, in the discussion of results, the analysis of the discourses presented by the students is carried out when proposing their hypotheses that result in generalizations and the association that they establish with the different semiotic means of objectification in their productions referring to the generalizations they achieve to formulate.

Keywords

Education, mathematics, arithmetic, scholar algebra, generalizations, computational artifacts.

Introducción

Las matemáticas están ligadas al ámbito social y cultural que las produce, pues se consideran una actividad inherente al razonamiento en el que históricamente han contribuido desde diferentes aspectos y en diversos contextos socioculturales. Sin embargo, de acuerdo con Penrose “... las matemáticas no son solo una actividad cultural que hemos creado nosotros mismos, sino que tienen vida propia, y buena parte de ella está en sorprendente armonía con el universo físico” (2006, p. 26). Esta situación conlleva a que los procesos de aprendizaje matemáticos en la escuela deben además de ser dinámicos, proyectar constantemente modificaciones en los contenidos y las formas de comunicarlos en concordancia con nuevos artefactos tecnológicos históricamente constituidos.

Específicamente, el aprendizaje que tiene que ver con habilidades matemáticas que se desarrollan en procesos de transición de la aritmética al álgebra, presenta un paso fundamental para llegar a ideas más elaboradas y este ha sido un tema de investigación recurrente en los últimos años. La temática descrita incorpora una transformación curricular incluyendo el pensamiento algebraico en los procesos de aprendizaje desde los grados de primaria y que comúnmente ha adoptado el nombre de álgebra temprana (Kieran, 2019).

Este trabajo está inmerso en la órbita de dicha transformación curricular dado que el análisis que proyecta es de vital importancia por cuanto existen múltiples interrogantes alrededor de la naturaleza del pensamiento algebraico, campo que se viene abordando en los últimos años por prestigiosos investigadores en educación matemática y en reportes de tesis de doctorado.

Este trabajo contempla específicamente la necesidad de conocer la naturaleza del pensamiento algebraico como consecuencia del llamado de investigadores en torno a la importancia de implementar artefactos computacionales en los procesos de objetivación de estudiantes escolares (Butto & Rojano, 2010; Vasco, 2007).

La necesidad descrita motiva el presente proyecto de investigación, el cual plantea el desarrollo de una propuesta metodológica que abarca desde los análisis de los argumentos presentados por los estudiantes contrastados con la teoría planteada por Duval (1999), hasta los análisis de los medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes desde los procesos sensoriales y del discurso multimodal que hacen parte de la adecuación de Arzarello (2006), a la educación matemática; lo anterior desde enfoques epistemológicos planteados desde la teoría de objetivación por Radford (2018a).

En síntesis, el trabajo plantea a través de los hallazgos encontrados en su implementación, la importancia de teorizar acerca de los procesos de transición de la aritmética al álgebra cuando estos se asocian a artefactos computacionales y los estudiantes movilizan medios semióticos de objetivación relacionados con un lenguaje de programación visual.

Capítulo 1

1. El problema de Investigación

Los procesos cognitivos que tienen que ver con reflexiones matemáticas que incluyen razonamiento de tipo algebraico se expresan de una manera más concreta en lo que investigadores en educación matemática llaman el pensamiento algebraico, este tipo de pensamiento ha sido abordado por investigadores como Radford, quien identifica una situación problema asociada a las prácticas escolares:

Ontogenetically speaking, there is room for a large conceptual zone where students can start thinking algebraically, even if they are not yet resorting (or at least not to a great extent) to alphanumeric signs. This zone, which we may term the zone of emergence of algebraic thinking, has remained largely ignored, as a result of our obsession with recognising the algebraic in the symbolic only. [Ontogénicamente hablando, hay espacio para una amplia zona conceptual donde los estudiantes pueden comenzar a pensar algebraicamente, aunque no recurran aún (o al menos no en gran medida) a signos alfanuméricos. Esta zona, que podemos llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico, ha permanecido largamente ignorada, como resultado de nuestra obsesión con reconocer el álgebra solo en lo simbólico.](2010a, p. 3)

La zona a la cual se refiere el autor en mención se centra en los procesos inherentes a la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico por lo cual, en los últimos años varias investigaciones evidencian una necesidad por determinar cómo se realiza dicha transición y por establecer cuáles elementos resultan relevantes incluir en las prácticas pedagógicas y

planeación de las clases de matemáticas de los docentes de grados escolares, considerando que la transición mencionada no se restringe únicamente al tratamiento de expresiones alfanuméricas.

Así mismo, con respecto a este tipo de pensamiento matemático, trabajos previos muestran una tendencia de los investigadores por separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico, esta reflexión ha sido trabajada por Zazkis y Liljedahl (2002) quienes argumentan que la tendencia mencionada es originada en la afirmación del evento en el que se desarrolla manipulación simbólica sin sentido y la tendencia en la escuela elemental de adicionar el ‘álgebra temprana’, es decir, centrar la atención en la estructura más que en el cálculo.

En la manipulación simbólica, las dificultades se presentan en la centralización de los aprendizajes de tal manipulación, lo que conlleva a un proceso que no da como resultado la objetivación y desarrollo del pensamiento algebraico por parte de los estudiantes. Este tipo de problemáticas se asocian a la transición de la aritmética al álgebra, por lo cual investigadores en el ámbito de la educación manifiestan que “Hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad” (Godino et al., 2012, p. 490).

Inicialmente, investigadores en el campo relacionan la transición de la matemáticas al álgebra con el desconocimiento de la naturaleza del pensamiento algebraico, Radford al respecto menciona que: “we need to deepen our own understanding of the nature of algebraic thinking and the way it relates to generalization” [“necesitamos profundizar nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la forma en que se relacionan con la generalización”] (2000, p. 238). De forma semejante, otros investigadores concluyen del trabajo de investigadores como Carraher & Schliemann (2007), sobre este tipo de pensamiento que:

“...el análisis del pensamiento algebraico está todavía en su infancia” (Godino et al., 2012, p. 487). Esta reflexión se evidencia en los estudios que específicamente los investigadores en educación matemática desarrollan alrededor de la naturaleza del pensamiento algebraico, los cuales revelan una necesidad marcada de evolucionar en la comprensión sobre cómo los estudiantes escolares aprenden. Sin embargo, se encuentra que investigadores como Vergel (2019) presenta un avance importante en la investigación acerca de esta misma temática, específicamente de una zona conceptual en donde en la transición de la aritmética al algebra se encuentran formas prototípicas de analiticidad que son categorizadas como una forma de pensamiento algebraico sofisticado. Otros investigadores de forma reciente, han avanzado en el conocimiento de la naturaleza mencionada como Demonty, Vlassis y Fagnant (2018) los cuales presentan la necesidad de abordar el problema acerca del aporte al conocimiento del pensamiento algebraico y proponen el desarrollo de este pensamiento desde la primaria para que este proceso de aprendizaje sea relevante por fuera de las aulas de clase; por tal razón se encuentra dentro de investigaciones alrededor de la naturaleza del pensamiento algebraico, como lo presenta Radford (2018) el simbolismo alfanumérico tiene una gran variedad de posibilidades para realizar cálculos de manera eficiente, sin embargo también se presenta como en este contexto de la naturaleza del pensamiento relacionado nos encontramos con la posibilidad de usar diferentes sistemas semióticos que no son precisamente el alfa-numérico. Es de aclarar que si bien desde el comienzo del presente siglo los investigadores presentaron esta problemática acerca del desconocimiento de la naturaleza del pensamiento algebraico, en la actualidad múltiples investigadores han desarrollado avances en la problemática planteada, que en ultimas si bien

contribuyen al conocimiento también reflejan una basta necesidad de seguir ahondando en los estudios acerca de la profundización en este mismo tema.

La tendencia de varios autores en contextos de educación matemática orientan las investigaciones hacia el análisis de la naturaleza del pensamiento algebraico y concluyen que hay un alto espectro de aspectos a investigar en relación con elementos asociados a la transición de la aritmética al álgebra; sobre este tema específico Vergel manifiesta la importancia de indagar acerca de los procesos de aprendizaje en estudiantes escolares desde el análisis alrededor de las técnicas de generalización, por lo cual analiza esos procesos de transición de los que resulta la siguiente afirmación: “... considero pertinente continuar auscultando este tipo de deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad) a través de reflexiones epistemológicas en el contexto de las generalizaciones observadas en las secuencias numéricas y figurales con apoyo tabular”(2019, p. 15).

Las dificultades mencionadas, se evidencian en resultados en pruebas externas como las PISA diseñadas por la OCDE (2016) que muestran puntajes muy bajos en los últimos periodos. Países latinoamericanos como México, Perú, Brasil o Colombia muestran puntajes deficientes en las pruebas de matemáticas con respecto a los países que se encuentran en los primeros lugares. Concretamente la OECD (2016) revela que los resultados obtenidos en las pruebas de matemáticas por estudiantes de Colombia, muestran una insuficiencia y se posicionan por debajo de los países latinoamericanos como Costa Rica, Uruguay o Chile.

Países como Estados Unidos y Canadá, muestran mejores resultados con respecto a los países latinoamericanos, la desventaja a nivel de comprensión en matemáticas es menos impactante, estos países presentan organizaciones en su currículo orientadas a trabajar el

pensamiento variacional¹ desde los primeros años. Por ejemplo, haciendo un análisis en el ámbito internacional, se hallan los estándares del National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2014), que provee servicios en educación matemática a Estados Unidos y Canadá, en estos se han publicado cinco estándares de contenido distribuidos en diferentes grupos de grados.

Entre los estándares del NCTM, de forma implícita se encuentran algunas situaciones que representan problemas asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje, centrados en la transición de la aritmética al álgebra y que pueden determinar las buenas prácticas de estudiantes que entran a la universidad a realizar sus estudios de pregrado. Las dificultades propias de la transición mencionada se evidencian en el ingreso a cursos de matemática básica en el pregrado, países como Estados Unidos reflejan una problemática en este campo, McGowen presenta esta dificultad de la siguiente manera “The increasing growth of undergraduate remedial mathematics courses reveals critical concerns, not only for the mathematics community but for our nation at large.” [“El creciente aumento de los cursos de matemáticas de recuperación de pregrado revela preocupaciones críticas, no solo para la comunidad matemática, sino para nuestra nación en general”] (2017, p. 20). Así mismo, McGowen (2017) muestra como hay estudios que presentan temáticas sobre aritmética, razón y proporción, se quedan cortas dado que los cursos de introducción a la educación superior no evalúan procesos analíticos complejos, sino que solo se limitan a la examinación de la memorización y la ejecución de procedimientos.

¹ Para Vasco, el pensamiento variacional se refiere a una forma de pensar dinámica, con el fin de producir mentalmente sistemas que relacionan variables de tal forma que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades en procesos sustraídos de la realidad (Vasco, 2002).

En contraste, la estructura planteada por el NCTM en correspondencia con los estándares básicos de competencias de matemáticas en Colombia el MEN (2006) permite observar la necesidad de implementar actividades que dinamicen la relación entre el docente y el estudiante, alrededor de tareas de generalización de patrones, habilidad propia del pensamiento algebraico, en torno al proceso de transición de la aritmética al álgebra.

La situación expuesta evidentemente constituye un aspecto de revisión para el país en términos de formación y genera cuestionamientos con respecto a la educación matemática en Colombia y Latinoamérica, dichos cuestionamientos deben ser estudiados con el fin de comprender y generar factores proclives al mejoramiento de los métodos comúnmente utilizados para el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de secundaria.

1.1. Planteamiento del Problema de Investigación

Las formas de reflexión matemática que se evidencian en entornos computacionales, desde el análisis de los medios semióticos de objetivación, específicamente los lenguajes de programación visual y el desarrollo de tareas que permiten procesos de transición de la aritmética al álgebra, incluyen la consideración de elementos esenciales en la caracterización del pensamiento algebraico, que Radford (2010), distingue como el sentido de indeterminancia, el manejo analítico de los objetos indeterminados y el particular modo simbólico de manejo de estos mismos objetos.

En esta medida, la comprensión de los elementos mencionados a partir de:

1. El análisis de medios semióticos de objetivación asociados a artefactos computacionales.
2. Los procesos de recursividad en estudiantes de 12,13 y 14 años.
3. Los procesos de argumentación en estudiantes entre los 12 y 14 años.

4. En general la naturaleza del pensamiento algebraico.

Estos aspectos se abordan a través de la observación de analiticidades intuitas en estudiantes con las edades planteadas desde la mediación semiótica, perspectiva planteada por Vigotsky dada la interpretación que se le da al signo “Nos referimos a la función del estímulo-medio que realiza el signo en relación con alguna operación psicológica, al hecho de que sea un instrumento de la actividad humana”(1960, p. 60) y la transferencia a representaciones elaboradas desde lenguajes de programación visual de artefactos computacionales en la búsqueda del papel epistemológico de estos mismos que permita analizar la evidencia de la conversión al tipo de pensamiento simbólico.

Los análisis en torno al uso de los artefactos mencionados cobra vital importancia en la investigación, pues asociado al conocimiento de la naturaleza del pensamiento algebraico se requiere la movilización de medios semióticos de objetivación a través de la integración de artefactos computacionales con el fin de modificar las formas de pensar de los estudiantes.

En la misma línea, la observación de aspectos mencionados en tareas que permiten analizar la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, ha sido tema de estudio por Vergel que muestra exploraciones de formas de pensamiento factual y proto-analiticidad encontrada en aprendizajes de estudiantes, lo cual se describe de la siguiente forma: “No vemos explícitamente una analiticidad en tanto carácter operatorio de lo indeterminado, más bien estaríamos ante la presencia de una analiticidad intuita o proto-analiticidad” (2015, p. 17). Esta proto-analiticidad es un punto de partida que debe ser estudiado en relación con artefactos computacionales y con medios semióticos de objetivación, dado que siendo el lenguaje de programación uno de estos medios, de acuerdo a lo planteado por Vigotsky:

El signo no modifica nada en el objeto de la operación psicológica: es el medio de que se vale el hombre para influir psicológicamente, bien en su propia conducta, bien en la de los demás; es un medio para su actividad interior, dirigida a dominar el propio ser humano: el signo está orientado hacia dentro. (1960, p. 62)

Lo anterior conlleva al análisis sobre cómo se evidencia la analiticidad del carácter operatorio de lo indeterminado, desde medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes, en contextos de lenguajes de programación de artefactos computacionales que permitan indagar alrededor de cómo el pensamiento simbólico se manifiesta desde el análisis del pensamiento aritmético y el pensamiento proporcional, que se relacionan en el proceso de transición al pensamiento algebraico, dada la hipótesis planteada por Vergel quien manifiesta que “La experiencia educativa sugiere que en los currículos escolares se adolece de una tematización acerca de las relaciones entre el pensamiento proporcional y el pensamiento algebraico”(2019, p. 15).

En síntesis, los elementos mencionados acerca de medios semióticos de objetivación, artefactos computacionales, lenguajes de programación visual y la naturaleza del pensamiento algebraico, se constituyen en aspectos claves del problema de investigación que genera preguntas que se manifiestan en la necesidad de indagar sobre:

- ¿cómo emergen formas de simbolización no alfanuméricas asociadas al pensamiento algebraico y la generalización aritmética y algebraica en tareas que involucran lenguajes de programación visual en artefactos computacionales?,

- ¿cómo se desarrollan los procesos inductivos en tareas de tipo algebraicas cuando estudiantes de 12, 13 y 14 años movilizan medios semióticos de objetivación asociados a lenguajes de programación visual?,
- ¿cómo se desarrollan los procesos de abducción en los estudiantes, cuando se involucran artefactos computacionales?,
- ¿cómo se desarrollan los procesos de deducción en los estudiantes cuando se involucran artefactos computacionales?,
- ¿los procesos de generalización que se llevan a cabo en medios semióticos asociados a lenguajes de programación visual de computadores emergen de forma natural como generalizaciones aritméticas y/o generalizaciones algebraicas?,
- ¿los lenguajes de programación visual de artefactos computacionales permiten de forma natural que el pensamiento algebraico emerja como pensamiento simbólico no estándar?

1.2. Pregunta de Investigación

En razón de lo expuesto en torno a la naturaleza del pensamiento algebraico, los medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes entre los 11 y 14 años y el uso de artefactos computacionales históricos y culturalmente constituidos; surge la pregunta de investigación: *¿Qué aportes genera el uso de un lenguaje de programación visual a los procesos de argumentación en el proceso de abordaje de tareas que permiten el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes escolares entre los 10 y 14 años?*

1.3. Objetivos

1.3.1. *Objetivo General*

Analizar los procesos de argumentación en el proceso de abordaje de tareas que permiten el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes escolares entre los 10 y 14 años cuando movilizan medios semióticos de objetivación asociados a un lenguaje de programación visual.

1.3.2. *Objetivos Específicos*

1. Describir relaciones y particularidades de medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes escolares, usando artefactos computacionales en el proceso de abordaje de tareas que involucran pensamiento algebraico desde los procesos de argumentación.
2. Identificar categorías asociadas a la naturaleza del pensamiento algebraico, específicamente a la generalización aritmética y generalización algebraica, que complementan su teorización.
3. Establecer correlaciones entre medios semióticos de objetivación y tipos de generalización, por medio del análisis inferencial.

1.4. Justificación

Dificultades en la transición de la aritmética al álgebra y el desconocimiento de la naturaleza del pensamiento algebraico han sido abordados por investigadores como (Wagner & Kieran, 1989; Vergel & Rojas, 2018; Bednarz et al., 1996; Kieran, 2006; Vergel, 2010, 2014, 2015b, 2015a, 2018, 2019) quienes han establecido algunas cuestiones que evidencian la dificultad de dicha transición para los niños.

Para establecer algunos parámetros que puedan dar cuenta de la naturaleza algebraica, este trabajo de investigación en primer lugar quiere profundizar en conceptos asociados al razonamiento aritmético el cual es caracterizado por autores como Verschaffel & Corte (1996); en su planteamiento expresan que este tipo de pensamiento se distingue por estructuras cognitivas que tienen que ver con conceptos numéricos y sentidos de los números, el significado de las operaciones aritméticas, control de hechos básicos de la aritmética, cálculo mental y escritura de la aritmética y la lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas. Esta caracterización hace a un lado la generalización de procesos aritméticos, habilidad indispensable en los procesos relacionados con la transición de la aritmética al álgebra, por lo cual otras investigaciones llevan a reconocer el pensamiento algebraico con características específicas y con varios elementos susceptibles de investigar.

Para este trabajo llama la atención la caracterización de tres elementos interrelacionados realizada por Radford (2010), el primero de ellos, es el sentido de indeterminancia propio de los objetos algebraicos básicos (incógnitas, variables y parámetros), este sentido de acuerdo al investigador es contrario al sentido de determinancia numérica. El segundo elemento tiene que ver con el manejo analítico de los objetos indeterminados y el tercero es el modo simbólico para designar objetos. Esta visión de pensamiento algebraico se contrapone a muchas de las formas tradicionales de asumir los procesos de aprendizaje del álgebra escolar.

Los estudiantes escolares también presentan dificultad en el modo simbólico para representar objetos, ya que sobre ese sentido de indeterminancia, solo pueden hacerse representaciones de forma indirecta, como lo presenta Kant:

... in algebra by means of a symbolic construction, just as in geometry by means of an ostensive construction (the geometrical construction of the objects themselves), we succeed in arriving at results which discursive knowledge could never have reached by means of mere concepts. [... en álgebra por medio de una construcción simbólica, así como en geometría por medio de una construcción ostensiva (la construcción geométrica de los objetos mismos), logramos llegar a resultados que el conocimiento discursivo nunca podría haber alcanzado por medio de simples conceptos] (1929, p. 579).

Sin embargo, el uso de letras no es una condición necesaria para pensar algebraicamente, tal construcción simbólica no se restringe a los registros estándar y se plantea que los estudiantes pueden acudir a otros signos correspondientes a otros sistemas semióticos no alfanuméricos. Ahora bien, es aquí donde tradicionalmente los aprendizajes se han enfocado en un tratamiento de expresiones alfanuméricas sin sentido, la cual ha sido puesta a disposición de docentes para trabajar, no todo lo que tiene expresiones alfanuméricas representa un proceso que permita pensar algebraicamente.

En consecuencia, los procesos de generalización se distinguen por generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas, sobre este tema el investigador ha mencionado que se pueden distinguir tres tipos de pensamiento, que reflejan pensamiento algebraico de diferente manera. Estos tipos de pensamiento sobre la generalización se diferencian de acuerdo a los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes.

Estos tipos de pensamiento (factual, contextual y simbólico) asociados a la generalización en el pensamiento algebraico, muestran que docentes de matemáticas podrían estar haciendo

simples generalizaciones aritméticas pensando en que está trabajando procesos de pensamiento algebraico. Además, que no tener en cuenta cómo se relacionan los medios semióticos de objetivación con los diferentes pensamientos asociados a la generalización algebraica podría limitar los desarrollos abductivos de los estudiantes.

El trabajo de establecer las formas de pensamiento algebraico en estudiantes escolares de grado cuarto y quinto de primaria, ya ha sido abordado por Vergel (2016), quien manifiesta:

... es posible de ser explorada en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. (2016, p. 31)

Los elementos propios de esta investigación permiten observar, como los medios semióticos usados por estudiantes determinan el tipo de pensamiento que se desarrolla en la actividad escolar. En consecuencia, las reflexiones epistemológicas en los contextos de generalización mencionados requieren de análisis que permitan de la comprensión de estos y esto es posible a través de los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes, al respecto investigadores como Vergel y Rojas manifiestan la necesidad de comprender cómo aprenden los estudiantes expresando que:

... nuestra comprensión del significado con el que los estudiantes dotan a sus expresiones algebraicas, desde nuestro punto de vista, puede ser analizada en profundidad por la investigación de la naturaleza de los medios semióticos de objetivación a los que recurren en su intento de generalizar. (2018, p. 96)

En este sentido, los medios semióticos de objetivación mencionados hacen alusión al uso de herramientas, signos y dispositivos lingüísticos, Radford al respecto formula sobre aquellos

“... that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities” [“...que los individuos intencionalmente utilizan en procesos de creación de significado social para lograr una forma estable de conciencia, para hacer evidentes sus intenciones y llevar a cabo sus acciones para lograr el objetivo de sus actividades...”] (2003, p. 41). Así mismo, Vergel complementa la idea alrededor de los medios semióticos de objetivación en cuanto a que:

Estos recursos semióticos no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo. Los medios semióticos constituyen mediadores de nuestros actos intencionales y son portadores de una inteligencia histórica que se ha construido con base en la actividad cognitiva de generaciones precedentes. (2018, p. 52)

De igual manera, los medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes, han sido ampliamente estudiados en procesos de emergencia del pensamiento algebraico, sin embargo, en la actualidad han surgido nuevos artefactos computacionales que están siendo usados de forma generalizada como recursos y medios asociados al aprendizaje de las matemáticas, dichos recursos hacen parte de la vida diaria de estudiantes escolares y culturalmente se han incorporado a la cotidianidad de las personas. En particular, los lenguajes de programación visual tienen todas las características de un medio semiótico de objetivación dado que permiten facilitar aprendizajes orientados de forma intuitiva y además admiten el uso de otros artefactos como tarjetas de desarrollo electrónico, comúnmente utilizadas en robótica y domótica, elementos tecnológicos que requieren de la comprensión de ciudadanos del siglo XXI.

Tal incidencia de los artefactos mencionados genera cuestiones al respecto de la naturaleza de los medios semióticos de objetivación y la necesidad de análisis de estos, al abordar los procesos de indagación alrededor de la naturaleza del pensamiento algebraico. Esta incidencia es de vital importancia de acuerdo con las nuevas formas de expresión y comunicación que incluyen artefactos tecnológicos actuales y conocimientos necesarios en una sociedad permeada por la inteligencia artificial, la robótica y los modos de interacción por medio de los lenguajes de programación de computadores.

La necesidad de indagación respecto a medios semióticos de objetivación tales como los lenguajes de programación ya había sido presentada hace varias décadas, investigadores habían centrado su atención en aprendizajes que incluían la programación de computadores, esto, dado que los resultados presentaban efectos positivos en los aprendizajes asociados al álgebra, por lo cual en sus conclusiones: “... they directly suggest that it would be beneficial to incorporate computer programming into high school algebra course, and, we suspect, into other mathematics courses as well” [... sugieren directamente que sería beneficioso incorporar la programación informática en los cursos de álgebra de la escuela secundaria y, sospechamos, también en otros cursos de matemáticas] (Clement et al., 1980, p. 474).

En el mismo sentido, investigadores como Butto & Rojano , realizan un estudio con el ambiente LOGO y determinan que:

Los resultados también ponen de manifiesto que tener acceso al pensamiento algebraico a temprana edad mediante el uso de un micromundo Logo no sólo mejora el desempeño de los estudiantes, sino también la naturaleza del aprendizaje de dichos contenidos

temáticos, pues tal aprendizaje proviene de una fase de exploración y experimentación directa con los elementos matemáticos de generalización y variación. (2010, p. 82)

Dentro de la búsqueda de antecedentes, en bases de datos como Academic Search Premier, elibro, Jstor, Oxford Academic, Sage Journal, Sage Knowledge, Springer, Google Scholar, entre otros, no se encuentran trabajos que permitan establecer los desarrollos de pensamiento algebraico por medio de lenguajes de programación desde un análisis multimodal, por lo cual vale la pena retomar estas iniciativas en razón de que los artefactos computacionales generan nuevas formas culturales de interacción que modifican los medios utilizados para aprender en contextos algebraicos; sobre este tema investigadores como Vasco, reflexionan acerca de la necesidad de abordar estas nuevas formas de aprendizajes “Creo que es posible eliminar de la enseñanza básica el registro obsoleto llamado 'álgebra elemental' y enseñar desde primer grado el registro algebraico-computacional, sin distinguir 'aritmética' y 'álgebra'" (2007, p. 134).

En general, la investigación está relacionado con la manera como emerge el pensamiento algebraico en estudiantes escolares específicamente al usar medios semióticos de objetivación relacionados con lenguajes de programación visual de artefactos computacionales y esta situación se justifica en las dificultades que presentan estudiantes y la necesidad de interactuar con artefactos tecnológicos actuales.

Capítulo 2

2. Marco de Referencia

2.1. Estado de la Cuestión

En este apartado se muestra la evidencia del trabajo investigativo alrededor del objeto de estudio, en común se encuentra que la naturaleza del pensamiento algebraico tiene algunos aspectos importantes los cuales fueron determinados por medio de la consulta y una búsqueda exhaustiva en bases de datos como Springer, Jstor, Sage Knowledge, Google Scholar, entre otros, que permitieron encontrar investigaciones, artículos, libros y tesis de grado, que posteriormente se almacenaron en el gestor de referencia bibliográfica Mendeley, que permitió organizar la información por autores, clases de trabajo y años y de esta manera acceder a elementos significativos para la construcción de la investigación.

De acuerdo con la organización de la información, se encuentra que Mason, Graham & Pimm (1985), mostraban la idea de que el pensamiento algebraico no se reducía a una manipulación de expresiones simbólicas, sino que la evidencia de este tenía una connotación estructural que se asociaba con elementos de la percepción. En el mismo sentido Kieran & Filloy (1989) y Wagner & Kieran (1989) a finales de los años ochenta detectaron la necesidad de investigar alrededor del aprendizaje del álgebra y categorizaron las actividades propuestas para los niños, en actividades generativas, transformacionales, y actividades globales de meta-nivel.

Por otro lado Kaput (2000) en su propuesta identifica cinco formas de pensamiento algebraico, estas son: la forma de generalizar usando el álgebra y establecer patrones y regularidades, de forma particular el álgebra se propone como una generalización asociada a la aritmética, a la manipulación simbólica que sintácticamente es dirigida; como el estudio de la estructuras y los sistemas, que subyacen a los cálculos como un estudio de las funciones que permiten ver el álgebra como modelación. En esta propuesta se observa una fuerte inclinación a reconocer el pensamiento algebraico como una forma de representación semiótica anclada en el simbolismo estándar.

En general, se observa una marcada necesidad de analizar aspectos que tienen que ver con el pensamiento algebraico, Cai, Chan, Morris, Moyer, Fong & Schimittau (2005) realizan un análisis de currículos en matemáticas correspondientes a cinco países y categorizan en la Tabla 1 los énfasis sugeridos en los diferentes planes curriculares:

Tabla 1 Énfasis de los currículos en cinco países

	CHINA	RUSIA	SINGAPUR	S. COREA	U.S.
META 1 (Comprender patrones)	X		X	X	X
META 2 (Usar símbolos algebraicos)	X	X	X	X	
META 3 (Usar modelos matemáticos)	X	X	X	X	X
META 4 (Analizar el cambio)		X			X
Nota: Énfasis curriculares en cinco países Fuente: Cai et al. (2005)					

En la Tabla 1 se evidencian unas categorías marcadas que determinan aspectos importantes en la investigación, por lo cual el desarrollo de este trabajo se ha orientado bajo aspectos categorizados en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, los procesos de generalización, los trabajos asociados al desarrollo del pensamiento algebraico y la mediación semiótica usando artefactos computacionales.

2.1.1. Transición del Pensamiento Aritmético al Pensamiento Algebraico

La transición de la aritmética al álgebra tiene un punto de inflexión en estudiantes con edades entre los 12 y los 15 años, sin embargo, Wagner & Kieran (1989) plantea que en varios estudios se encuentra que los niños tienen dificultades para realizar representaciones formales en el caso aritmético, esto se debe a que a menudo hacen explícitos los procedimientos mediante los cuales resuelven los problemas, además los procedimientos utilizados por los niños son a menudo métodos informales que son difíciles de simbolizar de forma concisa. Por otro lado, estos estudios reflejan dificultades asociadas a que los procedimientos usados dependen del contexto, lo cual dificulta su generalización y la simbolización se realiza de manera informal y finalmente los niños consideran que las matemáticas son un tema empírico que requiere la producción de respuestas numéricas.

Por otro lado, en el momento en que los niños formalizan la transición al álgebra, tienden a tener dificultades con el significado de las letras, con el cambio a un conjunto de convenciones diferentes de las utilizadas en aritmética y con el reconocimiento y uso de la estructura algebraica.

Las investigaciones que abordan la transición de la aritmética al álgebra, se enmarcan en el esfuerzo por comprender las actividades asociadas a las transformaciones de sistemas semióticos de representación y la actividad relacionada con la generalización de patrones aritméticos. Al respecto, Kieran expresa que la actividad transformacional reduce el enfoque a los aspectos simbólicos: “Little is known about how the meaning derived from multiple sources evolves in students and is transformed from embodied and contextual meaning to an understanding of symbols that are subject to formal manipulation” [“Poco se sabe acerca de cómo el significado derivado de múltiples fuentes evoluciona en los estudiantes y se transforma del significado incorporado y contextual a una comprensión de los símbolos que están sujetos a manipulación formal”] (Kieran, 2007, p. 748). Desde esta perspectiva, surge la necesidad de trabajar el álgebra en edades tempranas, incluso desde la primaria. Al respecto, investigadores mencionan la introducción del álgebra temprana como los procesos de generalización aritmética y las implementaciones de actividades algebraicas se centran en el movimiento de los cálculos sobre números y medidas particulares, sobre esto Carraher & Schliemann expresan:

We focus on algebra as a generalized arithmetic of numbers and quantities and view the introduction of algebraic activities in elementary school as a move from computations on particular numbers and measures toward thinking about relations among sets of numbers. [“Nos enfocamos en el álgebra como una aritmética generalizada de números y cantidades y vemos la introducción de actividades algebraicas en la escuela primaria como un movimiento desde los cálculos sobre números y medidas particulares hacia el pensamiento sobre las relaciones entre conjuntos de números”] (Carraher & Schliemann, 2007, p. 54).

Esta concepción de trabajo del álgebra a través de diferentes generalizaciones aritméticas, es una propuesta de cambio curricular desde la didáctica de las matemáticas que pone de manifiesto la posibilidad convertida en la necesidad de abordar problemas de variación en edades tempranas y que investigadores como Godino, Castro & Ake presentan como la introducción al razonamiento algebraico:

... dicho razonamiento se puede poner de manifiesto no sólo en tareas relacionadas con la aritmética, la medida, la geometría o con el análisis de datos, sino que lo hace con diversos grados de algebraización. La presencia de los objetos y procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva. (2012, p. 487)

En conclusión desde esta perspectiva de desarrollo de pensamiento algebraico en tareas propias de niños en procesos de aprendizajes centrados en la aritmética, existe la posibilidad de desarrollo de habilidades desde estructuras de pensamiento algebraico, que cambian su nivel de dificultad en el transcurso de estos aprendizajes y como lo describen Godino, Castro & Ake, “Parece pertinente considerar que en el proceso de transición desde la aritmética hasta el álgebra cruza una zona transicional en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual, pero creciente”(2012, p. 491).

Lo anterior conduce a que ese proceso de transición finalice en medios semióticos de objetivación emigren desde el lenguaje natural a nuevas formas cognitivas asociadas al pensamiento simbólico.

2.1.2. Pensamiento Algebraico y Procesos de Generalización

El desarrollo del pensamiento algebraico se relaciona directamente con procesos de generalización, inicialmente los niños asocian cantidades de objetos con un símbolo que

representa cantidad y orden, lo que comúnmente tiene que ver con la construcción del conjunto de números naturales. Carraher & Schliemann manifiestan que “... arithmetic has a potentially algebraic character. But surely this does not mean that young students who engage in arithmetic are de facto engaging in algebra” [“... la aritmética tiene un carácter potencialmente algebraico. Pero seguramente esto no significa que los jóvenes estudiantes que se dedican a la aritmética estén de facto involucrados en el álgebra”] (2007, p. 28).

Esta actividad aritmética, trabajada desde la generalización es un primer acercamiento al álgebra escolar, sin embargo este tipo de actividad es usada en el álgebra aunque no es propia del área específicamente, por lo cual Kieran, plantea “It may be tempting to equate generational activity with the conceptual aspects of algebra and, similarly, transformational activity with the skill-based aspects of algebra, but this parallelism is not intended” [“Puede ser tentador equiparar la actividad generacional con los aspectos conceptuales del álgebra y, de manera similar, la actividad transformadora con los aspectos del álgebra basados en habilidades, pero este paralelismo no es intencionado”] (2007, p. 714). La generalización tiene características importantes que desarrollan el lenguaje simbólico algebraico investigadores como Mason, Graham, Pimm & Gower (1985) expresan acerca del lenguaje algebraico:

“Para aprender el lenguaje del álgebra es necesario que usted tenga algo que desea decir.

Usted debe percibir alguna regularidad o algún patrón, y luego tratar de expresarlo en forma sucinta de tal manera que pueda comunicar su percepción a alguien...”(p. 15)

Si bien, existe una relación intrínseca en la naturaleza del pensamiento algebraico y los procesos de generalización, estos no se limitan a realizar aportes a áreas como la aritmética y la geometría, sino que abarcan una gran gama de posibilidades dentro de las matemáticas,

específicamente el análisis de datos y la geometría, pero Ake, Godino & Castro expresan específicamente que “El álgebra es una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización - particularización, y, en consecuencia, por la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad” (2012, p. 507). Esta forma de pensar es la que requiere de una investigación desde los análisis en los procesos de argumentación de los estudiantes, dado que nos puede dar una visión general que favorezca el conocimiento acerca de la naturaleza del pensamiento algebraico.

2.1.3. Artefactos Tecnológicos en Educación Matemática

Los procesos relacionados con la educación matemática están determinados por los análisis desde los recursos semióticos utilizados por los individuos, ya sea que este se aborde desde la lógica y la definición de signo, o desde los procesos culturales y las cargas históricas de los artefactos que median el uso del signo y permite la transformación de las funciones psíquicas de los individuos. Dada esta situación se encuentran algunos trabajos importantes relacionados con artefactos tecnológicos como el computador dentro de los procesos de aprendizaje.

Inicialmente Clement et al., (1980) plantea un trabajo en donde parten de la premisa de que las ciencias de la computación ayudan a desarrollar habilidades en la resolución de problemas, en su trabajo aíslan los factores asociados a la programación y han puesto especial atención a los relacionados con el aprendizaje del álgebra, concluyendo en su trabajo que al comparar estructuras de ecuaciones algebraicas con la estructura de las mismas en programas informáticos, las dificultades alrededor del aprendizaje del álgebra disminuyen, por lo cual afirman que los estudiantes que tienen actividades mediadas por el computador dominan el tema comparados con

los grupos que no tuvieron este instrumento, lo cual los lleva a señalar que existe un efecto consistente a favor de la incorporación de la programación de computadores.

En el sentido de uso de artefactos tecnológicos, Morgan & Kynigos (2014) realizan un estudio analizando el caso de un artefacto digital dinámico MoPiX, esto dado que consideran que las representaciones con tecnologías digitales se conciben especialmente como significativas para la educación matemática. Esta importancia de la inclusión de las tecnologías mencionadas cobra una vital importancia dada la posibilidad de vincular varios sistemas semióticos al tiempo, es decir, la vinculación de múltiples representaciones del mismo objeto matemático parece tener potencial para enriquecer las conceptualizaciones de los estudiantes.

El proyecto de investigación mencionado utiliza la metodología de experimentación cruzada como un medio para investigar las formas en que las representaciones ofrecidas por los artefactos diseñados para aprender y enseñar matemáticas funcionan en las aulas de matemáticas. En general, concluyen que es interesante el significado adicional y el potencial que ofrece el software, por cuanto permite el trabajo con diversos sistemas de representación en combinación para construir significados matemáticos. Se muestra que el estudiante se centra en la creación de patrones más que en las relaciones entre los componentes de movimiento, movimientos repetidos entre los modos simbólicos y gráficos combinando así, la manipulación del formalismo simbólico y construyendo una relación causal entre el formalismo y los comportamientos gráficos resultantes.

Por otro lado Miranda et al., (2007) realizan una investigación relacionada con la interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento de objetos, tal estudio se realizó en grado décimo con estudiantes de 15-16 años en el contexto de la teoría de objetivación. En

síntesis, el estudio gira alrededor de los progresos en cuanto a la significación con que los estudiantes presentan composiciones de una gráfica cartesiana que representan la distancia entre dos individuos. En este caso particular, puede verse como la transformación de significados fenomenológicos, intuitivos y matemáticos, se presentan en el plano cartesiano como una multiplicidad de eventos de descripción.

Las interpretaciones de los estudiantes evidenciaron movilizaciones en dos espacios diferentes, por un lado, el espacio fenomenológico que hace relacionar la idea con el movimiento y por otro lado, los estudiantes interpretan espacios geométricos de registros en el que se dejan ver segmentos y otras formas geométricas en el cual el plano cartesiano se presenta de una forma más estructuradas que le permite a los estudiantes observar eventos como trayectorias y lugares. Lo importante de resaltar son los gestos que los estudiantes utilizaban expresaban movimiento y la gestualidad del profesor deviene una serie de interpretaciones de los segmentos de la gráfica en términos de distancia. En general, la objetivación realizada por los estudiantes no se muestra muy fuerte y los significados que movilizan los estudiantes obedecen a un proceso social, que involucra gestos y voces que se enredan en las de otros.

En un trabajo similar Radford et al., (2003) plantea el análisis de una secuencia didáctica en estudiantes de grado once para producir algunos gráficos correspondientes a la relación de tiempo y la distancia de un cilindro moviéndose hacia arriba y abajo en un plano inclinado, esta experiencia en el marco del uso de un artefacto basado en la calculadora TI 83+ equipada con un sensor, discutiendo entre los gráficos producidos en el papel y la calculadora. Se analizaron los procesos de producción de significados de los estudiantes en términos de las formas en que diversos recursos semióticos se entrelazan durante la actividad matemática. Los hallazgos

sugieren que en una relación compleja entre gestos y palabras permiten a los estudiantes dar sentido a las expresiones graficas espacio-temporales.

Por otro lado, en un estudio realizado por Butto & Rojano (2010) en estudiantes de quinto y sexto grado, en niños de edades entre 10 y 11 años con el fin de dar una ruta al álgebra temprana, desde el razonamiento proporcional y los procesos de generalización, se concluye que el trabajo experimental requiere el uso de lápiz, papel y un ambiente de trabajo en el programa Logo. Los resultados muestran que los estudiantes colaboradores en la investigación alcanzaron a comprender ideas básicas de variación proporcional, describir patrones y formular reglas de generalización, en la medida en que se realizaba una transición del pensamiento aditivo al multiplicativo.

Los registrados observados en los resultados muestran la posibilidad de que los estudiantes escolares inicien desde la preparación en el pensamiento algebraico, iniciando temáticas y conceptos asociados al currículo desde nivel escolar y que permite potenciar la expresión general en un lenguaje alfanumérico aproximándose así al del álgebra elemental. El estudio concluye, que existen algunos aspectos susceptibles de ser potencialidades que aporta el lenguaje de programación “Logo” para incentivar en los estudiantes procesos de generalización que se desarrollen hacia el nivel simbólico-algebraico.

2.1.4. Trabajos de Investigación Asociados al Desarrollo del Pensamiento Algebraico

En la búsqueda de antecedentes, se encontraron los siguientes trabajos de investigación que se aproximan al tema de este trabajo, sin embargo, después de realizar un análisis no se encuentra que de manera explícita se realice un análisis de medios semióticos de objetivación en

tareas algebraicas desde la programación de artefactos computacionales. A continuación, se realiza una reseña de la selección de los trabajos de los últimos años:

El trabajo de Aké (2013), se desarrolla desde una visión de conjunto como perspectiva holística que proporciona el enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la enseñanza de las matemáticas, en esta tesis se plantea la pregunta ¿Cuáles son los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental que permiten discriminar diversos niveles de algebraización, en particular distinguir las prácticas de índole algebraica de las que no lo son?, la teoría abordada en este estudio permitió proponer una forma de conceptualizar aspectos propios del razonamiento algebraico, en el trabajo se observa una diferenciación de niveles de algebraización de la matemática escolar este aspecto es importante en la investigación, dado que puede direccionar la formación de maestros para el desarrollo del pensamiento algebraico desde los niveles educativos en primeros grados.

En este trabajo se encuentra dificultades que pueden mostrar que los docentes no están habituados con el desarrollo de ideas algebraicas, además evalúa las competencias de futuros maestros en resolución de tareas algebraicas, en el conocimiento de objetos algebraicos y asigna niveles de algebraización a tareas matemáticas.

En el marco del desarrollo del pensamiento algebraico (Vega, 2013) plantea una experiencia de aula que direcciona la investigación del sentido y estructura que dan estudiantes participantes en el estudio acerca de tareas en las que se proponen trabajos con identidades notables.

El propósito del estudio tiene que ver con la aclaración de la construcción del sentido estructural y unos indicadores de descripción, estudiar los procedimientos de producción, la

puesta en práctica y realizar un análisis de la experiencia de participación de campo en el salón de clase para el trabajo en actividades con las cuales los estudiantes hacen uso de identidades notables desde la estructura de estas expresiones, además se investiga acerca del desenvolvimiento de los estudiantes en el trabajo con identidades trigonométricas y algebraicas desde una perspectiva en la cual se analiza la estructura y construir un perfil de sentido de un grupo de estudiantes de educación secundaria al trabajar tareas sobre expresiones algebraicas desde una perspectiva analítica.

El análisis realizado plantea perfiles en cuanto a una estructura que muestran los estudiantes. Los siete perfiles detectados son caracterizados a través de representaciones gráficas y una descripción cualitativa relacionada con los descriptores de sentido estructural enunciados en el marco teórico.

En el mismo sentido Roberta (2013) realizó su tesis doctoral en torno al desarrollo del razonamiento algebraico temprano en una comunidad matemática de investigación buscando lograr cambios en el Reino Unido y las Islas Británicas. El objetivo principal de este estudio fue investigar cómo los maestros de primaria pueden desarrollar "álgebra oídos y ojos", para luego verificar como usan esta comprensión en el desarrollo para facilitar razonamientos algebraicos en su aula de clase.

Acerca del pensamiento algebraico Vergel (2014), determina "un problema didáctico asociado a la emergencia de formas de pensamiento algebraico en contextos en los cuales se observan acciones a través de las cuales los estudiantes presentan generalizaciones. El propósito de la tesis es identificar y estudiar las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en estudiantes de cuarto y quinto grado de Educación Básica Primaria (9-10 años) como

resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones”.

De este estudio, se concluyó que “formas de pensamiento algebraico temprano Factual y Contextual emergen como posibilidades que los estudiantes determinan en la actividad” y que dan muestras de evidencias analizadas que permiten constatar que es en el ejercicio de la actividad “donde el estudiante toma conciencia de formas como tempranas de pensamiento algebraico”.

Miller (2014) realiza su investigación alrededor de jóvenes indígenas estudiantes australianos desde la exploración de patrones y generalizaciones; específicamente los estudiantes que participaron tenían edades entre los 7 y 8 años, y las actividades propuestas estaban centradas en aspectos del álgebra temprana. Se generaron las siguientes preguntas ¿cómo jóvenes estudiantes indígenas participan en patrones de generalización creciente?, ¿qué acciones del docente asistente cambian a jóvenes estudiantes indígenas que participan en patrones de generalización creciente? y ¿cómo la cultura influencia el camino en el cual jóvenes indígenas estudiantes participan en patrones de generalización creciente? Los resultados que arroja tal estudio atienden a que los jóvenes estudiantes indígenas necesitan oportunidades para participar en el desarrollo temprano del pensamiento algebraico.

García (2015) en su investigación plantea un estudio sobre errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. Para tal estudio se plantea la pregunta de investigación “¿Cuáles son las causas más frecuentes de los errores que cometen los estudiantes universitarios cuando es necesario el manejo y la comprensión de los distintos usos de las letras en álgebra? “Lo que lo lleva a la conclusión de que durante la

formación educativa de la secundaria y bachillerato el conocimiento y la comprensión del álgebra es defectuosa, lo cual puede ser consecuencia de un enfoque de tipo instruccional que obedece solo a los procedimientos y que es frecuente en sistemas educativos conductistas que conllevan a aprendizajes mecanicistas en cursos de iniciación en la universidad.

Rodríguez (2015), en su trabajo “Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria”, plantea como objetivo general analizar el proceso de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal que realizan estudiantes de secundaria que están iniciándose en el estudio del álgebra escolar.

El trabajo contempla la clasificación de errores que de forma importante aparecen para la construcción de descripciones en la conversión de enunciados algebraicos en otros niveles educativos, además concluye que, para el progreso de estudios centrados en la resolución de problemas representados verbalmente, “es ineludible realizar anticipadamente en su resolución, una conversión del enunciado entre diferentes sistemas de representación”.

Rodríguez (2015) realiza su trabajo analizando situaciones en estudiantes en desventaja resolviendo tareas de generalización de patrones con la mediación de plantillas visuales y manipulativos virtuales. En este trabajo, se aborda el razonamiento algebraico que desarrollan estudiantes en el Distrito Federal de México, el objetivo de la tesis es utilizar tecnologías digitales para que estudiantes en desventaja puedan acceder a nociones matemáticas poderosas como la generalización algebraica a través de la identificación de plantillas visuales. En consecuencia, se observa que la visualización contribuyó a que los estudiantes desaventajados

pudieron llegar a instrumentar estrategias de resolución, en torno a las tareas propuestas, similares a las de los estudiantes avanzados.

Alrededor del pensamiento algebraico de la Fuente (2016) centra su investigación en el desarrollo del lenguaje algebraico en un ambiente de resolución de problemas y el papel del conocimiento del profesor, la pregunta que surge de la temática es “¿Qué conocimientos debería tener el profesor de matemáticas y cómo podría utilizarlos para ayudar a los alumnos a desarrollar el lenguaje algebraico trabajando en un ambiente de resolución de problemas?”, para abordarlo, diseña algunas sucesiones didácticas que aportan a estudiantes en situaciones para edificar el lenguaje algebraico por medio de la resolución de problemas y determinar las tareas de estas secuencias, además de que en el estudio se analiza cómo los profesores implementan en el salón de clase la misma secuencia didáctica, partiendo de que esta ha sido generada a través de un proceso de elaboración en equipo que identifica las formas propias en la dinámica de trabajo en equipo que contribuyen a reflexionar sobre las prácticas docentes y expandir el conocimiento en el campo de estudio.

En general, el investigador concluye que los estudiantes usan las habilidades de solución que usaron con expresiones icónicas, además de sus primeros acercamientos con el uso de letras debido a la implementación en temáticas ya trabajadas en las que se ejecutaron compromisos de generalización para resolver problemas y transferir este aprendizaje a la solución de sistemas de ecuaciones que se expresan de forma algebraica.

Ledbetter (2017) realiza un análisis de contenido cualitativo de aplicaciones iOS de educación temprana de álgebra para niños de primaria, las preguntas generadas buscan establecer ¿Qué características curriculares apoyan idealmente el potencial de los niños de primaria para

aprender conceptos de álgebra temprana "con comprensión", a través de dispositivos multitáctiles, móviles, aplicaciones de educación matemática para iOS? y ¿En qué medida las tres aplicaciones multitáctiles, móviles, de educación matemática, iOS reflejan características curriculares que idealmente apoyan el potencial de los niños de primaria para aprender conceptos de álgebra temprana "con comprensión"?

El investigador concluye que las características curriculares que podrían usarse para apoyar a los jóvenes estudiantes en tales dispositivos son importantes, además, las aplicaciones educativas ofrecen un enorme potencial educativo y los que están dispuestos y son capaces de reimaginar cómo estas herramientas pueden utilizarse para mejorar el aprendizaje de los niños, pueden ofrecer a la próxima generación de estudiantes acceso a una verdadera comprensión.

Pérez (2017) realiza un trabajo asociado al uso de SCRATCH como herramienta para el desarrollo del pensamiento computacional en programación I de la carrera de informática de la universidad central del ecuador, tal trabajo es importante dado su potencial en los procesos de generalización, en general, se observa que se muestran mejoras con respecto a la dimensión de reconocimiento de patrones así en aspectos referentes al aprendizaje dependiendo del género.

Las preguntas que responde la investigación son: “¿cuáles son las habilidades del pensamiento computacional presentes en los estudiantes de Primer Semestre de la Carrera de Informática de la Universidad Central del Ecuador?, ¿qué tipos de diferencias significativas en el desarrollo del pensamiento computacional se observa en los estudiantes que emplean Scratch para el aprendizaje de Programación en comparación con los estudiantes que no lo utilizan?, ¿Cuáles los resultados obtenidos en el grupo experimental y control comparando por género en relación con el desarrollo del pensamiento computacional?”.

Para abordarlas, se planteó como objetivo general: “analizar el desarrollo del pensamiento computacional en los estudiantes de Primer Semestre de la Carrera de Informática de la Facultad de Filosofía de la Universidad Central del Ecuador empleando la herramienta Scratch como recurso didáctico en su formación profesional”; como resultado se analizó que los estudiantes evidencian un interés especial por el aprendizaje de algoritmos cuando hacen uso de herramientas computacionales para demostrar sus programas que únicamente al realizarlo de manera tradicional, y evidencian que aumenta el interés cuando hacen uso de la herramienta SCRATCH comparado con diferentes como DFD o PSeint, por otro lado, en la investigación se concluye que con base en los resultados hay una muestra de mejora en el nivel de percepción de patrones, lo que podría transformarse en un buen punto de partida para generar modelos de objetos mediando la computación y el trabajo con sistemas complejos como lo en otras universidades en el mundo.

Ramos (2018), en su investigación sobre la enseñanza del Álgebra en la Educación Secundaria en Honduras: evaluación y concepciones docentes; tiene como propósito central el estudio de los elementos curriculares que intervienen en la enseñanza, aprendizaje y evaluación de uno de los bloques del área de Matemáticas de mayor incidencia en la educación secundaria o tercer ciclo (7º, 8º y 9º grado, estudiantes de 13 a 15 años) de la Educación Básica en Honduras.

Las preguntas orientadoras que de forma textual se plantean en la investigación son: “¿existe coherencia o alineamiento entre los Estándares Educativos y las Pruebas de Evaluación?, ¿existe coherencia o alineamiento entre los Estándares Educativos y los libros de texto utilizados para la enseñanza de las matemáticas?, ¿la demanda cognitiva que exigen las Pruebas de Evaluación se corresponde con la demanda cognitiva de las tareas y actividades que

proponen los Libros de Texto?, ¿qué tipo de actividades o tareas matemáticas proponen los libros de texto y las Pruebas de Evaluación?, ¿qué concepciones o creencias tienen los docentes sobre la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas?, las concepciones docentes encontradas, ¿son coherentes con las orientaciones curriculares declaradas en: El Currículo Nacional de Educación Básica?, ¿con los marcos de referencia del NCTM o TIMSS?”.

La investigación muestra el reporte en cinco estudios, los primeros tres dirigidos a realizar un análisis y evaluar la relación entre estándares, libros de texto y pruebas de evaluación al abordar temáticas propias del álgebra, y los últimos se centran en establecer las principales percepciones que tienen los docentes participantes del estudio acerca de la enseñanza, aprendizaje y evaluación en el área de matemáticas y en general del álgebra escolar.

Los resultados arrojados en la investigación exponen que las ideas de los educadores coinciden con las disposiciones que exige el Currículo Nacional Básico del país donde se realizó el estudio y específicamente en el área de matemáticas al plantear la resolución de problemas como mecanismo transversal, sin embargo, las labores que proponen los libros de texto no se sitúan de forma clara en cuanto al tema de cómo abordar el álgebra.

En el estudio es posible que los docentes reconozcan la importancia de la evaluación en el sistema educativo, y asumen en esta como un proceso válido que implica directamente el mejoramiento del proceso enseñanza y aprendizaje. A este elemento se le puede dar una interpretación de que existe una cualidad auténtica de los docentes hacia la evaluación y que además esta debe ser concienzuda para continuar con el plan de establecer una cultura hacia la evaluación que siembra la Secretaría de Educación.

Balcaza (2018) centra su trabajo en la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. Esta investigación está centrada en los problemas de orden didáctico que se evidencian en los procesos educativos de los elementos matemáticas que tienen que ver con la optimización y que se abordad desde la resolución con herramientas del Cálculo infinitesimal, esgrimiendo instrumentos hipotéticos que facilitan el enfoque ontosemiótico y teorías asociadas a la semiótica.

Las preguntas textualmente tienen que ver con “¿qué tipo de trayectoria didáctica siguen los significados institucionales de los problemas de optimización que se proponen en los libros de texto de 2º de Bachillerato?, ¿qué tipo de trayectoria didáctica siguen los significados institucionales de los problemas que se proponen a los alumnos en clase sobre la optimización?, ¿qué tipo de conflictos semióticos muestran los alumnos respecto a la optimización, comparados con los conflictos semióticos potenciales extraídos de los manuales, una vez recibida la enseñanza del concepto, y qué tipo de no congruencias se detectan en las conversiones entre registros? y ¿qué tipo de conexiones y complementariedades se dan entre los tratamientos y las conversiones de la teoría de registros y la idea de función semiótica del EOS, de cara a la posible explicación de los conflictos de significado en los estudiantes?” Para desarrollar y encontrar la respuesta a estas preguntas se plantea el objetivo general de analizar los fenómenos didácticos relacionados con la optimización en el nivel del Bachillerato desde las perspectivas del enfoque ontosemiótico del conocimiento, la instrucción matemática y de la teoría de los registros de representación semiótica.

Los resultados que arroja la investigación muestran las dificultades de significado y los problemas semióticos que muestran estudiantes en este nivel de educación, el estudio además plantea los métodos que intervienen en el progreso de las experiencias, además de los tratamientos y conversiones entre registros de representación, y se concluye que estos permiten describir las causas de estos conflictos, dentro de ellos, se detectan dificultades en los estudiantes al afrontar con éxito la fase del diseño de la resolución, en relación directa con la optimización se prestar atención a las dificultades para emparejar y expresar de manera adecuada la función a optimizar. El estudio sugiere que este hecho está relacionado con el conflicto que se detecta en el significado que se le pretende dar, acerca de comprimir la resolución de problemas de optimización a localizar el extremo relativo de una función, no perturbando en procesos para aprender a identificar y describir la situación.

Morales (2018) realiza su investigación alrededor de la resolución de tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos por estudiantes de 6-7 años. Las preguntas orientadoras formuladas son: “¿qué tipo de seriaciones generan dos alumnas de 6-7 años?, ¿cuántos atributos consideran en dichas seriaciones?, ¿qué estrategias emplean estas alumnas al continuar las seriaciones? y ¿dependen las estrategias de los atributos considerados?”.

Para resolver estas preguntas el objetivo general plantea indagar sobre las características de patrones que generan dos alumnas de 6-7 años en el trabajo con seriaciones. Se centra en relatar las tipologías de patrones que nivelan los estudiantes cuando abordan tareas que implican patrones de tipo cualitativo y cuantitativo y la consecución de su generalización. Además, se indaga sobre las habilidades que utilizan y las respuestas convenientes que manifiestan

estudiantes de estas edades, junto con las mediaciones de una entrevistadora ante respuestas inadecuadas de los estudiantes.

Entre los resultados obtenidos en la investigación en mención, sobresale el hecho de que los estudiantes de 6-7 años abordaron labores de patrones cualitativos y cuantitativos asemejando patrones variados y utilizando diversas habilidades. Al abordar trabajos en donde se involucran patrones cualitativos, los estudiantes participantes del proyecto de investigación identificaron patrones lógicos y patrones reiterativos en donde consideran distintos números de elementos en el núcleo.

Somasundram (2018) realiza su indagación en un modelo cognitivo de estudiantes de cinco años sobre la base del pensamiento algebraico. El estudio se centró en investigar las construcciones cognitivas que podrían contribuir al pensamiento algebraico en niños de cinco años y revelar la red de conexiones entre estas construcciones.

Este estudio respondió a las preguntas: ¿cuál es el desempeño de alumnos de quinto en el pensamiento algebraico?, ¿el modelo hipotético es válido para el pensamiento algebraico de alumnos de quinto grado?, ¿en qué medida las variables cognitivas propuestas contribuyen al pensamiento algebraico en alumnos de quinto año?, ¿hay alguna construcción que actué como mediador en el modelo hipotético?, ¿cuál es la relación entre las variables cognitivas propuestas y el pensamiento algebraico de los alumnos de quinto año en el modelo final? y ¿hay efectos moderadores del género y la ubicación del pensamiento algebraico de los alumnos de quinto año?

Para resolver estas preguntas se estableció determinar el rendimiento de estudiantes de quinto año en el pensamiento algebraico, a través de determinar si el modelo hipotético es válido

para el pensamiento algebraico, investigar si las variables cognitivas propuestas contribuyen al pensamiento algebraico, examinar el papel de las variables mediadoras en la determinación del pensamiento algebraico, examinar la relación entre las variables cognitivas propuestas y el pensamiento algebraico en el modelo final y examinar los efectos moderadores del género y la ubicación en el pensamiento algebraico de los de estudiantes de este grado de escolaridad.

Las construcciones cognitivas propuestas por el investigador son sentido numérico, sentido de operación, sentido de símbolo y sentido de patrón. Como conclusión se establece que los procesos de pensamiento algebraico, puede mejorarse en los estudiantes mediante debates apropiados en el aula de clase, mediante la enseñanza de la aritmética, además, darle sentido a los números y sus propiedades subyacentes de la aritmética, la generalización y el significado conceptual del signo igual debería tener más prioridad en comparación con obtener una solución correcta.

Suharman (2018) realizó su trabajo centrado en el raciocinio algebraico en la formación inicial de profesores en Timor-Leste. ¿Qué conocimiento algebraico tienen los futuros maestros timorenses sobre AR?, ¿cuáles son las dificultades para aprender álgebra (tipología de errores) que los futuros maestros timorenses tienen en relación con los procedimientos utilizados para resolver tareas algebraicas? y ¿qué conocimiento didáctico-matemático tienen los futuros maestros timorenses en su formación inicial?

El objetivo principal de este trabajo es promover el desarrollo del razonamiento algebraico y el conocimiento didáctico-matemático de futuros maestros timorenses dentro del rango de una acción formativa en álgebra.

Los resultados de la evaluación final muestran la evolución de los estudiantes en su capacidad para utilizar objetos y procesos algebraicos, para generalizar y expresar algebraicamente esta generalización. Sin embargo, los estudiantes todavía encontraron dificultades a nivel de: modelado matemático; resolver ecuaciones (que involucran operaciones y propiedades con raíz cuadrada) y la construcción de una tarea algebraica.

Finalmente, los resultados de este estudio muestran que es necesario que los futuros maestros timorenses tengan una formación adecuada que les permita desarrollar habilidades didácticas matemáticas en actividades que impliquen razonamiento algebraico y también promover la capacidad de integrar el conocimiento de los contenidos.

Pinto & Cañadas (2019) presentan una investigación en la cual se hace un estudio comparando estudiantes de tercero y quinto grado de educación primaria, el estudio en mención se centra en las estructuras que tienen que ver con el patrón, la generalización y la relación entre estructuras y generalización. En las conclusiones se muestra que los alcances y logros de esta investigación giran alrededor de la identificación de estructuras que muestran los estudiantes de tercero y los estudiantes de quinto, cuando comparan las estructuras que se identifican.

En el estudio se observa que los estudiantes de tercero se evidencia una propensión a ocuparse con casos particulares y solo uno de ellos realiza una generalización. La mayoría de los estudiantes de este grado realizan generalizaciones de la estructura y utilizan esa misma en sus contestaciones. En este curso, tres personas realizan generalizaciones en asuntos sobre particularidades.

Mejías (2019) plantea su investigación alrededor de la evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria. Se plantea la

pregunta de investigación “¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos poseen los profesores de educación primaria en ejercicio en torno al álgebra?” Se plantea el objetivo general de “evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los profesores en activo de enseñanza básica para la enseñanza del álgebra”. Considerando que los estudios en esta área no son muchos y que la incorporación del álgebra en la escolaridad básica desde los primeros años es un tema importante para los profesores chilenos, el estudio aporta un instrumento que genere la necesidad de plantear la posibilidad de determinar los conocimientos didáctico y matemáticos que poseen los profesores en su labor en la educación primaria.

En la investigación se concluye que es importante y necesario la implementación de una presentación que permita optimizar el horizonte del conocimiento didáctico y matemático que se evidencia en los pedagogos que ejercen en primaria; por otro lado también es necesario mejorar en cuanto al tratamiento y procedimiento que los docentes le dan al objeto matemático algebraico en los textos de estudio de primaria en Chile y ejecutar una nueva adaptación de la estructuras curricular en los programas de formación de educadores de ciclo inicial teniendo en cuenta la necesidad de incorporar una nueva gama de contenidos algebraicos y de aquellos que tienen que ver con la didáctica del álgebra.

Bayona (2021) plantea en su trabajo de investigación la problemática alrededor del desarrollo del pensamiento algebraico en primaria, presenta la necesidad de conocer didácticamente como las producciones intelectuales de los estudiantes pueden llegar a ser algebraicas y específicamente clasifica las generalizaciones que hacen en generalizaciones aritméticas, aritméticas sofisticadas y algebraicas. Este trabajo de investigación se fundamenta en

la teoría de objetivación, la relación entre semiótica y educación matemática, la propuesta de álgebra temprana y pensamiento algebraico, y la generalización de patrones.

Los resultados muestran que las producciones que elaboran los estudiantes se ubican en cierto grado de generalización y se profundiza en la caracterización de cada una. En la investigación se concluye que los procesos de generalización se favorecen de acuerdo a la actividad de aula y las relaciones entre los actores inmersos. Especifica además que es importante establecer como los estudiantes llegan a los diferentes tipos de generalizaciones y profundiza en el tema de la naturaleza del pensamiento algebraico.

La revisión general permitió observar que varios trabajos de tesis doctoral investigan los procesos de transición de la aritmética al algebra, en algunos de ellos se tiene en cuenta que la construcción del pensamiento algebraico se realiza de forma multimodal; en otros trabajos se observa que los análisis giran alrededor del registro semiótico de representación estándar, es decir, el registro alfanumérico, pero como se evidencia en el rastreo de esta información, no existe rastros de tesis doctorales en donde se trate de esclarecer la naturaleza del pensamiento algebraico desde medios semióticos de objetivación que incluyan artefactos computacionales.

2.2. Marco Teórico

En el marco teórico se analizan conceptos que permiten contribuir a la sustentación y así poder responder a los objetivos que se han formulado en la presente investigación; en primer lugar, se aborda la idea de representación semiótica, la idea de signo y su papel en los procesos de argumentación desde la deducción, inducción y abducción. En este apartado se trabaja la idea de cómo la idea de representación semiótica se analiza desde la teoría socio cultural de Vygotsky y su relación con los artefactos culturales. La teoría expuesta nos permitirá estudiar los diferentes

elementos que pueden determinar un análisis pertinente de las búsquedas de patrones y regularidades desde los elementos propios de la semiótica y su papel en los procesos de objetivación y semiosis.

Más adelante la fundamentación teórica, expone de forma general la teoría de objetivación y los medios semióticos que la sustentan, relacionándolos con los artefactos culturales y su papel en los procesos de aprendizaje. Finalmente, se presenta la caracterización que se aborda desde esta investigación y que se relaciona con el pensamiento algebraico y sus formas de generalización, que son vectores transversales al pensamiento algebraico y se clasifican en el pensamiento factual, contextual y simbólico.

2.2.1. Representaciones Semióticas

La idea de representación expuesta por Descartes y Kant, ha provisto la necesidad de plantear cómo se realiza la producción y constitución del conocimiento. Específicamente en educación matemática existe un carácter de tendencia a generalizar objetos matemáticos lo que ha permitido determinar elementos que aproximan la actividad matemática como lo manifiestan investigadores como Duval (1999) y Otte (2003) como una actividad simbólica.

Esta actividad simbólica, ofrece desde la teoría semiótica conceptos que permiten entender el papel cognitivo que se desarrolla usando artefactos tecnológicos en el aprendizaje de las matemáticas. La teoría en mención ofrece un amplio espectro de tensiones que se han abordado a través de la historia desde tres tradiciones, la tradición de Saussure que emplea el término de semiología, la tradición de Peirce que define el término de semiótica el cual se presentara más adelante y la tradición de Vygotski.

En primera instancia la tradición de Saussure, responde a la comprensión de la lengua, en esta teoría “La lengua es un sistema de signos que expresa ideas, y por eso comparable a la escritura, al alfabeto de los sordomudos, a los ritos simbólicos, a las formas de cortesía, a las señales militares, etc.” (1945, p. 43). En el desarrollo de esta tradición, los signos tienen significado si estos pertenecen a un sistema de signos.

Por otro lado, la tradición de Peirce, plantea los signos dentro de una doctrina formal y no les da significado desde el ámbito social, sino en la manera como un individuo usa los signos para generar ideas nuevas para conseguir la verdad. Inicialmente Peirce (1965), establece un estudio de los caracteres de los signos mediante un proceso llamado abstracción. Tal proceso le permite a este autor establecer “que un signo o representamen, lo que, para alguien, representa o se cuenta a algo en algún talante o carácter, este representamen se concierne con el fundamento, el objeto y el interpretante”.

Peirce usa la palabra signo para denominar un objeto perceptible, o solamente imaginable, o aun inimaginable, e instituye que para que algo sea un signo debe "representar" a “otra cosa, llamada su objeto, aunque la condición sea que el signo debe ser distinto de su objeto”. De igual manera presenta que “los signos son divisibles según tres tricotomías, la primera establece que el signo en sí mismo sea una mera cualidad, un existente real o una ley general; la segunda, determina que la relación del signo con su objeto consista en que el signo tenga algún carácter en sí mismo, o en alguna relación existencial con ese objeto o en su relación con un interpretante y la tercera se refiere a la forma en que su interpretante lo represente como un signo de posibilidad, como un signo de hecho o como un signo de razón”.

Para este trabajo de investigación es importante establecer la idea de signo que de acuerdo a la segunda tricotomía planteada por Peirce, puede ser llamado ícono, índice o símbolo, a partir de la cual un ícono es un signo que se refiere al objeto al que denota solamente en virtud de caracteres que le son propios, y que posee igualmente exista o no exista tal objeto; un índice es un signo que se reseña al objeto que denota en virtud de ser realmente afectado por aquel objeto y un símbolo es un signo que se refiere al objeto que denota en virtud de una ley; usualmente una asociación de ideas generales que operan de modo tal que son la causa de que el símbolo se interprete como referido a dicho objeto.

La tercera tradición relacionada con la semiótica está enmarcada por las concepciones de la tradición de Vygotski acerca de que el comportamiento humano está mediado por artefactos y la idea de que las mediaciones de estos alteran las funciones psicológicas en el individuo, en esta concepción el desarrollo intelectual está planteado como un asunto cultural, es decir que el desarrollo cultural del niño aparece primero a nivel social (intersicológico) y después al interior del propio niño (intrapsicológico). Por lo anterior, el signo aparece como un elemento que cumple “una función de mediación entre el individuo y su contexto y accede el pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que más adelante en este capítulo se aborda como la internalización”.

Para Vygotski el signo adquiere una significación más amplia en el sentido en que este puede ser el que representa gestos y puede dar significaciones auditivas o escritas. En general para Vygotsky (1960), el signo tiene que ver con los “estímulos-medios artificiales introducidos por el hombre en la situación psicológica que cumplen la función de autoestimulación”(1960, p. 53).

Por lo anterior, en concordancia con las tradiciones expuestas se puede observar que Vygotski asume que el signo no es puramente una pieza que se diferencia de un sistema de estructuras como lo plantea Saussure, pero tampoco, un único medio de pensamiento y de formación de ideas, sino que plantea que el signo es un medio de transformación de las funciones psíquicas del individuo.

2.2.2. La Semiótica en la Educación Matemática

La posibilidad de plantear la representación como eje central en los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos es importante dado que de acuerdo a Duval (1999), no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue, un objeto de su representación, por lo cual, la existencia de representaciones mentales, lo que quiere decir, de todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre todo lo que les está asociado, conlleva a representaciones usando símbolos.

La asociación de símbolos mencionada es la forma en que se accede al conocimiento matemático llamando representaciones semióticas que Peirce , define como “I know, a pioneer, or rather a backwoodsman, in the work of clearing and opening up what I call semiotic, that is, the doctrine of the essential nature and fundamental varieties of possible semiosis” [Soy, hasta donde sé, un pionero, o más bien un rezagado, en el trabajo de despejar y abrir lo que llamo semiótico, es decir, la doctrina de la naturaleza esencial y variedades fundamentales de posible semiosis] (1960, p. 3940) y además expresa de la idea de semiosis como “an action, or influence, which is, or involves, a coöperation of three subjects, such as a sign, its object, and its interpretant, this tri-relative influence not being in any way resolvable into actions between pairs” [“... una acción o influencia, que es, o implica, una cooperación de tres sujetos, como un

signo, su objeto y su interpretante, esta influencia tri-relativa no está en de cualquier manera resoluble en acciones entre pares”] (1960, p. 3938).

En el mismo sentido Duval (1999), desde la educación matemática define las representaciones semióticas, como producciones constituidas por el empleo de signos y las caracteriza como el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales y acerca de la semiosis también lo expresa como “la aprehensión o la producción de una representación semiótica.(1999, p. 14)

Por consiguiente, los fenómenos relativos al conocimiento tienen que ver directamente con la idea de representación, esta visión relacionada con la construcción del conocimiento Duval (1999), la presenta como la posibilidad y la constitución de un conocimiento cierto, dado que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación.

Así mismo, se plantea que “el estudio del desarrollo de los conocimientos y de las dificultades encontrados en los nociones fundamentales referentes al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos que están ligados, ellos son la diversificación de los registros de representación semiótica, la diferencia entre representante y representado y la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles”.

Sin embargo, Eco expone una definición más amplia de la idea acerca de la semiótica, en la que especifica que “estudia todos los procesos culturales (es decir, aquellos en los que entran en juego agentes humanos que se ponen en contacto sirviéndose de convenciones sociales) como procesos de comunicación” (Eco, 1986, p. 22). Tal situación, lleva a pensar en las características propias de la actividad matemática en relación con la comunicación y el establecimiento de

interacciones sociales entre los actores en el proceso educativo, específicamente en el aula de clase de matemáticas. Lo anterior lo establece Eco, desde la cultura:

“... en un sentido antropológico correcto, inmediatamente se perfilan dos fenómenos culturales a los que no puede negársele la característica de ser fenómenos comunicativos:

a) la fabricación y el empleo de objetos de uso; el intercambio parental como núcleo primario de relación social institucionalizada” (Eco, 1986, p. 23).

Esta visión asociada a la semiótica genera una fuente importante, desde la cual se puede abordar la situación problema planteada en la presente investigación y en la que se hace necesario establecer de forma profunda las relaciones existentes entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas, dado que como lo presenta Duval, “El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los preceptos.” (1999, p. 15)

La afirmación presentada abarca una serie de cuestiones que se permiten tratar desde la memoria histórica, social y cultural que hacen parte de la memoria de los individuos y sus interacciones en los procesos de aprendizaje en el aula de matemáticas. Esta idea de necesidad de acceder a los objetos matemáticos es más fuerte cuando Vygotsky , plantea:

Para la psicología científica es un axioma que el entendimiento entre las inteligencias resulta imposible sin una expresión mediatizadora. En ausencia de un sistema de signos lingüísticos u otros, sólo es posible el más primitivo y limitado tipo de comunicación; ésta, que se manifiesta por medio de movimientos expresivos, observados

fundamentalmente entre los animales, no es tanto comunicación como expresión de afecto.” (1995, p. 13)

La idea planteada permite percibir las formas de aprendizaje en relación con procesos mediatizadores a través de los signos por lo cual Vygotsky establece que “Todas las funciones psíquicas superiores son procesos mediatizados, y los signos, los medios básicos utilizados para dominarlos y dirigirlos” (1995, p. 4), además el mismo Vygotsky aclara que “Detrás de todas las funciones superiores y sus relaciones se encuentran genéticamente las relaciones sociales, las auténticas relaciones humanas” (1960, p. 103). Por lo anterior es necesario ocuparse no solo de las representaciones mentales y representaciones semióticas que se movilizan en el aula de matemáticas, sino que se debe prestar especial atención a las relaciones humanas establecidas desde la cultura y la historia.

2.2.3. El Argumento Dentro de la Teoría de Representaciones Semióticas.

Dentro de la teoría que aborda la semiótica se encuentra la tercera tricotomía de los signos plateada por Peirce (1965), un signo puede ser llamado rema, dicisigno o signo dicente, lo que aclara que puede ser una proposición o un argumento. Para efectos prácticos de esta investigación, conviene definir el argumento como “un signo que, para su interpretante, es un signo de ley, es decir, es un signo que se entiende representa a su objeto en su carácter de signo”.

De acuerdo a la teoría planteada por Peirce (1965):

... el interpretante del argumento lo representa como una instancia de una clase general de argumentos, la cual, en conjunto, siempre tenderá a la verdad. Es esta ley, en alguna forma, la que el argumento insta; y es este "instar" el modo de representación propio de los argumentos. (1965, p. 32)

Por lo cual concluye que el argumento debe ser un símbolo o un signo cuyo objeto es una ley o tipo generales y este debe involucrar una proposición que se llama premisa. La premisa en mención es diferente a una proposición simplemente aseverada, pero está lejos de ser todo el argumento. La otra parte que completa el argumento es llamada conclusión, que representa al interpretante y tiene una relación con el interpretante peculiar.

Además de lo anterior, “un argumento es perpetuamente apreciado por el interpretante como perteneciente a una clase general de argumentos análogos que, en su conjunto, tiende a la verdad y puede ocurrir de tres maneras, dando lugar a lo que Peirce llama una tricotomía de todos los argumentos simples en deducciones, inducciones y abducciones”.

Así mismo, para este trabajo de investigación se hace importante ahondar en las formas de argumentación que Peirce (1965), define de la siguiente manera:

“*Una deducción* es un argumento cuyo interpretante representa que pertenece a una clase general de posibles argumentos exactamente análogos que se caracterizan por el hecho de que, a lo largo de la experiencia, la mayor parte de aquellos cuyas premisas son verdaderas tendrán conclusiones verdaderas”.

“*Una inducción* es un método para formar símbolos dicentes relativos a una cuestión definida, método en el cual el interpretante no representa que partiendo de premisas verdaderas producirá, a la larga, resultados aproximadamente verdaderos en la mayoría de las instancias, sino que representa que, si se persiste en este método, a la larga producirá la verdad, o una aproximación indefinida a la verdad, con respecto a cada cuestión”.

“*Una abducción* es un método para formar una predicción general sin ninguna verdadera seguridad de que tendrá éxito, sea en un caso especial o con carácter general, teniendo como

justificación que es la única esperanza posible de regular nuestra conducta futura racionalmente, y que la inducción, partiendo de experiencias pasadas, nos alienta fuertemente a esperar que tendrá éxito en el futuro”.

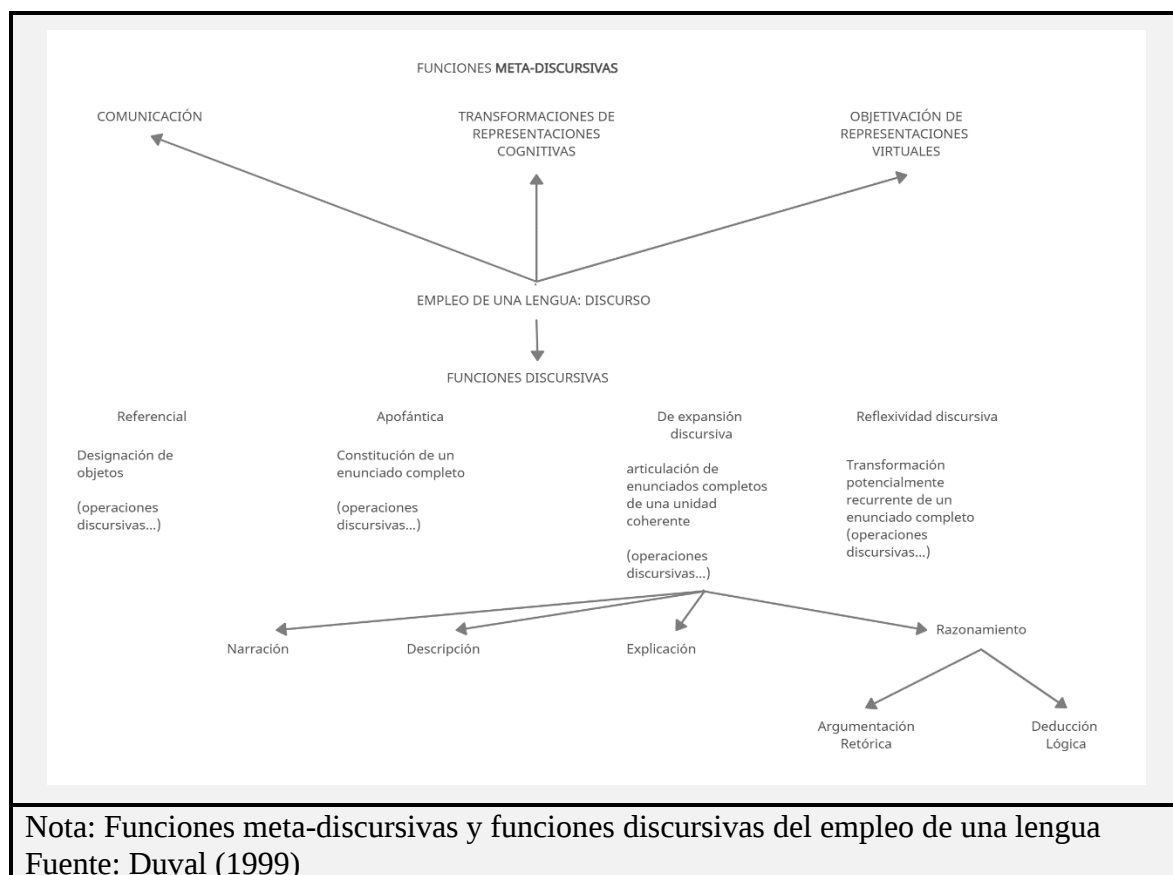
2.2.4. Las funciones discursivas de la lengua y el aprendizaje de las matemáticas

Dada la posibilidad que brinda la lengua al permitir un discurso y ser un medio semiótico de objetivación, se hace indispensable asumir su estudio para determinar y caracterizar los procesos de razonamiento que los estudiantes desarrollan específicamente en el empleo de la lengua natural y su paso hacia un empleo del lenguaje más especializado. Pero la determinación de las características del discurso únicamente desde el lenguaje natural en el sentido de la comunicación hace que se reduzca la posibilidad de análisis. Por lo anterior se fija como importante en este trabajo de investigación las funciones que se movilizan en el empleo de la lengua.

Desde los análisis realizados por Duval (1999), nos encontramos que existe una diferencia entre las funciones relacionadas a no importa cual sistema de representación y las funciones específicas del empleo de la lengua. Las primeras son llamadas las funciones meta-discursivas que se refieren específicamente a la comunicación, el tratamiento y la objetivación, estas funciones son irreductibles entre si e indispensables en los procesos de aprendizaje.

Por otro lado, se encuentran “las funciones discursivas que son funciones cognitivas que un sistema semiótico debe cumplir para que sea posible un discurso”. Estas funciones las expresa Duval (1999), en la Figura 1.

Figura 1. *Funciones meta-discursivas y funciones discursivas del empleo de una lengua*



De acuerdo a lo presentado, la organización de un discurso depende de las funciones discursivas que cumple y de las operaciones discursivas realizadas. Es importante resaltar que tal como lo expresa Duval (1999), "... la influencia de las funciones meta-discursivas sobre la organización de un discurso se expresa en la predominancia dada una u otra de las cuatro funciones discursivas y en la selección de algunas operaciones específicas a esta función" (1999, p. 85). Tal descripción e influencia del discurso en las formas de pensar son indispensables en el análisis de los razonamientos presentados por los aprendices cuando realizan y expresan argumentaciones en los procesos de aprendizaje de las matemáticas.

2.2.5. Importancia en el Aprendizaje de las Matemáticas y Desarrollo Cultural

Los procesos de aprendizaje, además de ser mediados por símbolos están determinados por el desarrollo cultural, por lo cual Vygotsky (1978), establece que “En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual: primero entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica)” (1978, p. 5). Este desarrollo cultural mediado por símbolos es un principio importante en el desarrollo de la actividad escolar en el aula de clase, dado que como lo presenta Leontyev (2009), “... culture appears, for individuals, in the form of meaning imparted by speech signs-symbols” [... la cultura aparece, para los individuos, en forma de significado impartido por los signos-símbolos del habla] (2009, p. 81).

La presente investigación asocia el término de cultura con la concepción de Ratner (2000), en la que un concepto coherente e integral de cultura debe definir la naturaleza esencial de los fenómenos culturales, es decir, qué debe ser algo para calificar como "cultural", identificar subcategorías de fenómenos culturales como la identificación de cómo se interrelacionan estas subcategorías, cuáles están más estrechamente relacionadas con otros particulares e influyen en sus características, además de cuáles son los mecanismos de influencia y por último explicar la relación de la cultura con otros fenómenos como la biología y la ecología.

También, el mismo investigador Ratner (2000), establece algunas clases de fenómenos culturales con los que se está de acuerdo, y que se presentan a continuación:

- “Actividades culturales tales como producir bienes, criar y educar a los niños, elaborar y hacer cumplir políticas y leyes, brindar atención médica. Es a través de estas actividades

que los humanos sobreviven y se desarrollan. Son básicos para las formas en que las personas interactúan con los objetos, las personas e incluso con uno mismo”.

- “Valores culturales, esquemas, significados, conceptos. Las personas colectivamente otorgan significado a las cosas. La juventud, la vejez, el hombre, la mujer, los rasgos corporales, la riqueza, la naturaleza y el tiempo significan cosas diferentes en diferentes sociedades”.
- “Artefactos físicos como herramientas, libros, papel, cerámica, utensilios para comer, relojes, ropa, edificios, muebles, juguetes, juegos, armas y tecnología que se construyen colectivamente”.
- “Los fenómenos psicológicos como las emociones, la percepción, la motivación, el razonamiento lógico, la inteligencia, la memoria, las enfermedades mentales, la imaginación, el lenguaje y la personalidad se construyen y distribuyen colectivamente”.
- “Agencia. Los humanos construimos y reconstruimos activamente los fenómenos culturales. Esta "agencia" está dirigida a la construcción de fenómenos culturales y también está influenciada por actividades culturales, valores, artefactos y psicología existentes”.

Además, el mismo autor especifica que los cinco fenómenos culturales a los que se refiere son interdependientes y entrelazados, además de distintivos. Ninguno de ellos es reducible a otros, pero ninguno de ellos está solo fuera de los demás. Cada uno encarna el carácter distintivo de los demás dentro de sí mismo. Al ser aspectos integrales de la cultura, los fenómenos psicológicos se originan, reflejan y funcionan para facilitar actividades, conceptos,

artefactos y agencia. (De manera similar, la agencia se origina, refleja y facilita actividades, conceptos, artefactos y fenómenos psicológicos).

La importancia de abordar el concepto de cultura, en el papel que juega en los procesos de aprendizaje y en la actividad, se justifican en el hecho de que lo que sustenta la actividad humana está relacionado directamente con el uso de signos que están situados culturalmente tal como lo expone Radford:

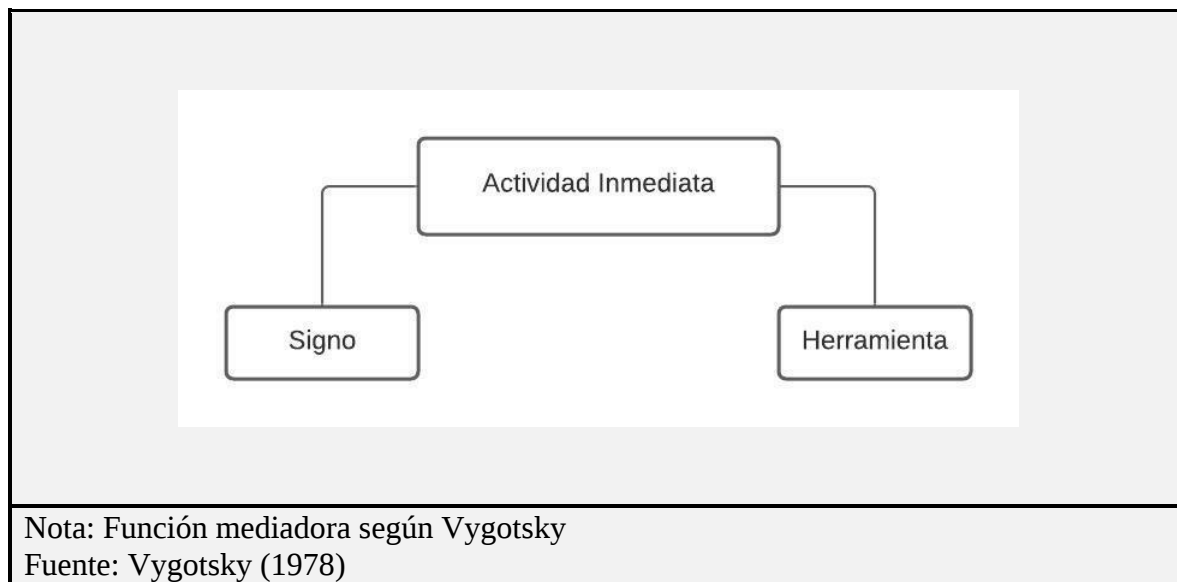
... suggests that the actual form of such activity takes in a culture constrains and, in turn, is constrained by its own "Modes of Acting", which are generated by the dialectical interaction of Activity and what we call Cultural Semiotic Systems (CSSs)- i.e., those socio-historically constituted systems in which we find the beliefs of a culture, the generative patterns of meaning-making, and so on. [sugiere que la forma real de dicha actividad conlleva restricciones culturales y, a su vez, está limitada por sus propios 'Modos de actuación', que se generan por la interacción dialéctica de la Actividad y lo que llamamos Sistemas Semióticos Culturales (CSS), es decir, aquellos sistemas constituidos socio-históricamente en los que encontramos las creencias de una cultura, los patrones generativos de la creación de significado, etc.] (2001b, p. 49)

Lo anterior, conlleva a el estudio de aspectos culturales, abordados desde la semiótica, lo cual ha sido ampliamente estudiado por Vygotsky en su teoría sociocultural del desarrollo cognitivo.

2.2.6. Teoría Sociocultural en el Desarrollo del Pensamiento

En su obra Vygotsky (1978) plantea sobre el modo en que están unidos el uso de signos y la herramienta y la analogía básica entre estas dos, descansa en la función mediadora que caracteriza a ambas como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. *Función mediadora según Vygotsky*



Establecer esta relación entre signo y herramienta se hace importante dado que como lo explica Vygotsky (1978):

El uso de medios artificiales, la transición a la actividad mediata, cambia fundamentalmente todas las funciones psicológicas, al tiempo que el uso de herramientas ensancha de modo ilimitado la serie de actividades dentro de las que operan las nuevas funciones psicológicas (1978, p. 4).

Esta es una característica especial que ha constituido la idea de esta investigación, ya que implementar artefactos computacionales en el proyecto tiene como finalidad analizar cómo se

realizan los cambios en las formas de pensamiento de los estudiantes. Vygotsky ha descrito acciones como el gesto de señalar, la reconstrucción interna de una operación externa y son la búsqueda de esta, las que se quieren identificar en los procesos de interacción de artefactos, signos y estudiantes. A ese proceso de reconstrucción se le asignó el nombre de internalización, este proceso consiste en una serie de transformaciones, como lo describe Vygotsky :

1. “Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente”.
2. “Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal. En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica)”.
3. “La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal es el resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos”. (1978, p. 5)

El proceso de internalización de las formas culturales es el proceso que se intenta analizar en la propuesta dado que esta conducta involucra “la reconstrucción de la actividad psicológica basadas en las operaciones con signos y la internalización de las actividades socialmente arraigadas e históricamente desarrolladas es el rasgo distintivo de la psicología humana, y como lo explicita Vygotsky, la base del salto cualitativo de la psicología animal a la humana”.

Como ya se ha expuesto, el proceso de internalización se da desde la actividad, esta asumida como lo expresa Hegel :

El pensar en cuanto actividad es por ende lo universal activo y precisamente lo que se activa, siendo lo hecho o producido también lo universal. El pensar, representado como

sujeto, es lo pensante y la expresión simple del sujeto EXISTENTE, en cuanto pensante, es yo. (1997, p. 126)

El concepto de actividad fue determinado por Hegel (1840) citado por Vygotsky, (1978) como:

«La razón», escribió, - «es tan astuta como poderosa. Su astucia consiste principalmente en su actividad mediadora, que, haciendo actuar a los objetos y reaccionar los unos con los otros de acuerdo con su naturaleza, sin ninguna interferencia directa en el proceso, lleva a cabo las intenciones de la razón» (1978, p. 4)

La actividad se hace importante en el proceso de estudio, dado que es aquí donde se realiza el trabajo de campo y este a su vez tiene un papel fundamental en los procesos de internalización de los estudiantes involucrados en la investigación, la exposición de este argumento da una idea importante en los procesos que permiten analizar los datos en cuanto a las formas de pensamiento algebraico que se evidencian en el trabajo en el aula.

Lo anterior muestra que la idea de actividad tienen una relación muy fuerte con el entramado ajustado al concepto del desarrollo del niño en edad escolar y la idea de signo, lo cual se puede apreciar desde la perspectiva de Wertsch (1988), en donde presenta el trabajo de Vygotsky acerca del desarrollo como la aparición y transformación de las diferentes formas de mediación, análisis también asociado a la investigación de Vergel (2014); además Wertsch (1988) también establece que los tres temas importante en el desarrollo de la teoría de Vygotsky están relacionados con la creencia en el método genético o evolutivo, con que los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales, y que los procesos mentales o cognitivos pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos

que actúan como mediadores. La mediación a la que se hace referencia, Vygotsky la plantea como que:

El desarrollo cultural de cualquier función, incluida la atención, consiste en que el ser social en el proceso de su vida y actividad elabora una serie de estímulos y signos artificiales. Gracias a ellos se orienta la conducta social de la personalidad; los estímulos y signos así formados se convienen en el medio fundamental que permite al individuo dominar sus propios procesos de comportamiento. (1987, p. 149)

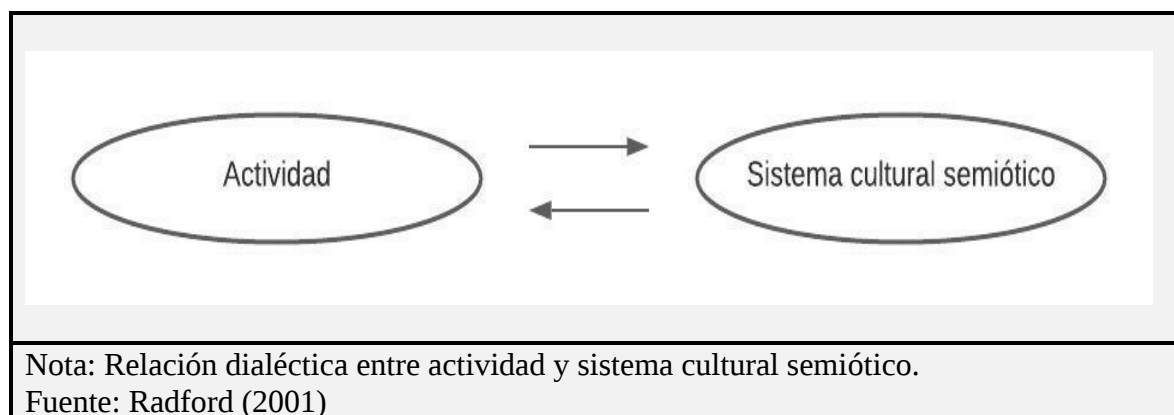
Y esto conlleva a que aspectos propios de los orígenes sociales de los procesos psicológicos superiores, es decir, al funcionamiento intersicológico que Vygotsky ha llamado como la ley genética general del desarrollo cultural, y la define como lo cita Wertsch, que en:

“... cualquier función en el desarrollo cultural del niño aparece en escena 2 veces, en 2 planos: primero como algo social, después como algo psicológico; primero entre la gente como una categoría intersíquica, después, dentro del niño, como una categoría intrapsíquica ... de aquí que uno de los principios más importantes de nuestra voluntad sea el de la división de las funciones entre la gente, de nuevo la división en 2 de aquello que ahora está fusionado en uno solo, el despliegue experimental del proceso psíquico superior en aquel drama que tiene lugar entre las personas ... todas las funciones superiores se han ido constituyendo no en la biología, no en la historia de la pura filogénesis, sino en el propio mecanismo, que se encuentra en la base de las funciones psíquicas superiores constituye relaciones interiorizadas de orden social, que ellas son la base de la estructura social de la personalidad. Su composición, la estructura genética, el modo de acción, en una palabra, toda su naturaleza, es social; incluso, al convertirse en

proceso psíquico, permanece siendo casi social ... estimamos que el desarrollo no va en dirección a la socialización, sino hacia la conversión de las relaciones sociales en funciones psíquicas...” (1988, p. 130)

La teoría planteada por Vygotsky, para efectos prácticos del presente trabajo, tiene importancia en cuanto a la relación entre actividad y el sistema semiótico cultural en cuanto a que esta relación juega un papel estructurador en las actividades que realizan los individuos, por lo cual está determinada, en un nivel más general, por una estructura simbólica. Investigadores como Radford (2001), presenta esta relación en cuanto a que los significados sociales son creados por actividades y viceversa, lo presenta en la Figura 3:

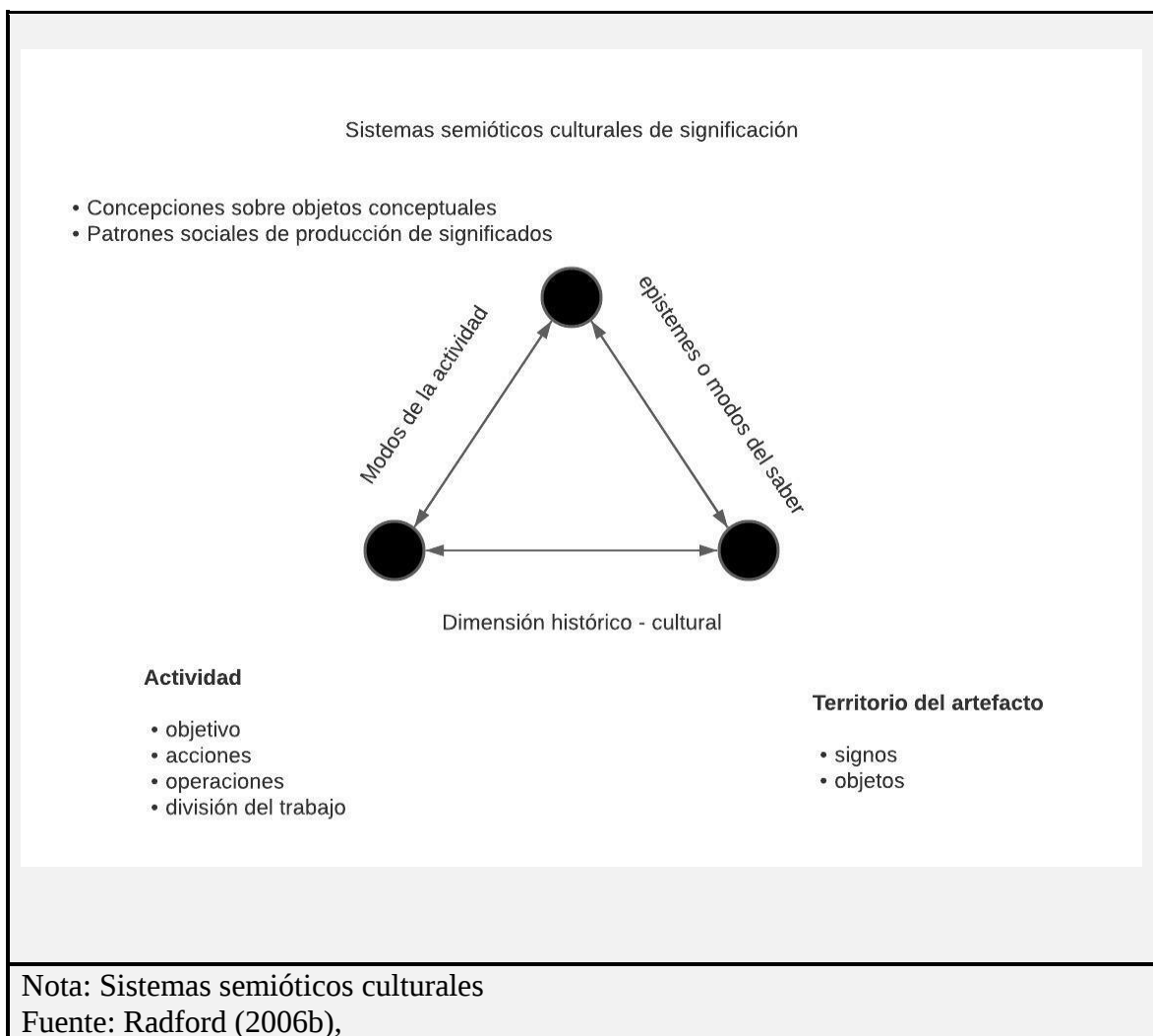
Figura 3. *Relación dialéctica entre actividad y sistema cultural semiótico.*



En síntesis, se explica que la relación expuesta entre actividad y sistema cultura semiótico, determina que la internalización es un proceso complejo incrustado en una estructura simbólica cultural que solo puede entenderse con referencia a su propio sistema semiótico cultural, por lo cual se hace necesario que el concepto de internalización planteado por Vygotsky, asuma un concepto más amplio y más rico de mediación semiótica capaz de

relacionar la internalización con la estructura simbólica de la sociedad, y plantea específicamente que “Nuestro concepto de sistema semiótico cultural, y los gráficos primarios y duales que lo caracterizan funcionalmente, es un intento de abordar, desde una perspectiva post-vygotskiana, la formación social de la mente”. El concepto en mención puede ser explicado por el gráfico presentado por Radford (2006b), que se presenta en la Figura 4.

Figura 4. *Interacción entre sistemas semióticos culturales con la actividad y el territorio del artefacto*



Tal situación, ha determinado la necesidad de establecer una teoría asociada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por tal razón Radford (2006b), se basa en epistemologías y ontologías no racionalistas que presentan, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje, construyendo así la teoría de objetivación que expresa sobre que:

... lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada sino sobre todo su modo de ser en tanto que praxis reflexiva. El aprendizaje de las matemáticas es tematizado como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados. (2006b, p. 103)

Esta postura es compartida para desarrollo de la presente propuesta, por lo cual en el siguiente apartado se ahondará en la teoría mencionada.

2.2.7. Artefactos Culturales

Como se puede observar la idea de representación es de un especial interés en el campo de la educación matemática y el uso de nuevas tecnologías ha desarrollado un enfoque particular en cuanto a las nuevas formas de representación que ofrece la tecnología, específicamente Morgan & Kynigos (2014) plantean dos características de las representaciones con tecnologías digitales que se consideran especialmente significativas para la educación matemática. La primera de ellas es la posibilidad de vincular diferentes sistemas semióticos, por ejemplo, expresiones algebraicas y gráficos cartesianos, de tal manera que la manipulación dentro de un

sistema produzca un cambio correspondiente en el otro, es decir, se considera que esta vinculación de múltiples representaciones del "mismo" objeto matemático tiene el potencial de enriquecer las conceptualizaciones de los estudiantes. Y la segunda característica significativa es la posibilidad de que las representaciones tengan un elemento dinámico. A medida que los estudiantes manipulan tales representaciones, la manipulación y los cambios que se producen se convierten en parte de la representación misma, permitiendo nuevamente que se desarrollen nuevas formas de conceptualización matemática. Es decir, la mediación producto del uso de artefactos hace parte de la comprensión que el profesor tiene de determinados problemas contruidos a través de la historia como lo manifiestan Moretti & Radford (2016):

... la historia de las matemáticas es esclarecedora, ya que permite al docente comprender los límites de los problemas matemáticos que se pueden formular, así como la mediación necesaria para que el alumno tome conciencia creativa de las formas teóricas de pensar matemáticamente. (p. 511)

Sobre esta relación de mediación, artefactos tecnológicos y representaciones (Radford, 2014), se plantea una discusión sobre qué representaciones y artefactos digitales requiere tener en cuenta el artefacto fenomenológico y la representación mediada, ya que los estudiantes en el aula se relacionan con el objetivo cultural matemático de conocimiento y tal explicación requiere una concepción ontológica explícita del conocimiento y el saber.

El autor sugiere que la historia depositada en artefactos ofrece líneas de desarrollo que, en términos generales, están en sintonía con el conocimiento cultural, pero esto no es suficiente. La teleología del significado, en lo que respecta a la enseñanza y el aprendizaje, reside en la actividad de enseñanza-aprendizaje. Como lo manifiesta Rickenmann (1998), "Los artefactos

culturales – lenguajes naturales y formales, gráficos, textos y obras de arte, etc...-- son instrumentos que mediatizan las relaciones entre profesor y alumno(s) o entre alumnos y saber” (1998, p. 2). En otras palabras, no son los artefactos los que impresionan el significado con su teleología. La teleología del significado es impulsada por la actividad de la cual los artefactos son parte. Martos & García (2014) expresan sobre el tema en cuestión que “Los artefactos culturales son sin duda piezas básicas del engranaje del ser humano con el mundo físico y de las personas entre sí” (p. 122).

Desde la presente propuesta de investigación se abordan los artefactos culturales como tema central dentro de los futuros análisis alrededor de los procesos de transición de la aritmética al álgebra, dada su importancia y su relación con nuevas tecnologías que a lo largo de los últimos años se han venido incorporando en el aula de clase.

2.2.8. Teoría de la Objetivación

La teoría en mención nos servirá como base metodológica para la aplicación e implementación de las actividades en el aula de clase de matemática dado que de acuerdo a Radford, esta teoría busca “una concepción no mentalista del pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados” (2006b, p. 105). El autor en mención argumenta que es usual entender el pensamiento como una especie de vida interior, una sucesión de procesos mentales sobre ideas que realiza un individuo, sin embargo autores como Geertz sobre este tema manifiesta que:

... como es imposible definir de manera suficientemente específica los procesos neurales predominantes desde el punto de vista de parámetros intrínsecos, el cerebro humano

depende por entero de recursos culturales para operar; y esos recursos son, en consecuencia, no agregados a la actividad mental, sino elementos constitutivos de ésta. (1973, p. 82)

Esta concepción asociada al pensamiento genera la idea de una concepción no mentalista del pensamiento y la actividad mental, por lo cual Radford (2006b) concluye que esta es una práctica social y en la cual define que “el pensamiento es considerado una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos” (2006b, p. 108). Tal definición lleva a asociar esta teoría con la mediación semiótica planteada por Vygotsky, dado que el carácter mediatizado del pensamiento conlleva al análisis de cómo se refleja el papel desempeñan artefactos como objetos, instrumentos y sistemas de signos, en la realización de la práctica social y además concluye que los artefactos no son ayudas al pensamiento sino, que son parte constitutivas y consustanciales de este.

Lo anterior establece que, de acuerdo con la teoría de objetivación, el pensamiento de los aprendices no es algo que pasa únicamente en el plano del cerebro, sino que transcurre en el plano social, en el territorio del artefacto, por lo cual estos mediatizan y materializan el pensamiento siendo parte integral del pensamiento.

Por otro lado, se tiene en cuenta que, por su naturaleza de reflexividad del pensamiento, este no es una escueta asimilación de una realidad externa, sino que este es un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente. Esto es importante dado que como lo manifiesta el autor en mención, ninguna realidad puede ser reconstruida a través de la experiencia personal y como lo manifiesta Leontiev, “Ninguna experiencia individual, por rica que fuere, puede conducir por sí sola a la formación de un pensamiento abstracto lógico o

matemático, o a la formación espontánea del sistema de conceptos correspondiente” (2013, p. 7). En síntesis, se expresa que, de forma más general, la reflexividad del pensamiento radica en que, desde una visión filogenética, los individuos generan el pensamiento y a los objetos que este crea.

Lo que hace importante incluir artefactos computacionales en el diseño de la presente investigación tiene relación con el hecho de que el pensamiento es la reflexión mediatizada del mundo según con la forma de la actividad de los individuos, lo que da entender que la manera de pensar y de conocer los objetos del saber están enmarcados por significados culturales que van más lejos del incluido mismo de la actividad en la cual sucede el acto de pensar.

Es decir, se busca a través de la teoría de objetivación “se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” (2006b, p. 113) y que una de los orígenes de adquisición del saber es el resultado del contacto con el mundo material, el mundo de los artefactos culturales, en el que se guarda la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de antiguas generaciones. Sin embargo, no solo los artefactos juegan un papel importante en esta teoría, la interacción desempeña un papel que no es solamente de adaptación o facilitadora.

En la teoría en mención el mismo autor explica que esa interacción es consustancial del aprendizaje, por lo cual concluye que aprender no se reduce a apropiarse de algo o asimilar algo, sino es el proceso mismo en donde se forman nuestras capacidades humanas, es decir los procesos de objetivación en el cual Gobara & Radford (2020) los define como “... aquellos procesos sociales, colectivos de *toma de conciencia*: toma de conciencia progresiva y crítica, de un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituido, sistema que gradualmente notamos, y que al mismo tiempo dotamos de sentido” (p. 20). Tal postura, evidente

en la teoría de objetivación y en su relación con los artefactos culturales hace importante su inclusión en la presente objetivación desde su perspectiva epistemológica hasta los efectos prácticos de implementación de instrumentos en el aula y los análisis que se requieran para esta investigación.

2.2.9. Medios Semióticos de Objetivación

De acuerdo a Vergel (2016), los procesos con los cuales se da la objetivación son interpretados “como los métodos sociales con los cuales los alumnos captan la lógica cultural en la cual los objetos de saber han sido obtenidos y se acostumbran con las formas de acción y pensamiento históricamente constituido”, el investigador concluye que la objetivación señala un proceso que tiene como objetivo mostrar algún objeto a alguien y los medios por los cuales se muestran el objeto, se llaman medios semióticos de objetivación, específicamente Radford los define como:

... objetos, herramientas, dispositivos lingüísticos y signos que los individuos intencionalmente utilizan en procesos de creación de significado social para lograr una forma estable de conciencia, para hacer evidentes sus intenciones, y para llevar a cabo sus acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades. (2003, p. 41)

Esta idea es importante en esta investigación dado que los medios semióticos de objetivación, de acuerdo a Vergel (2016), no son únicamente herramientas con las cuales se manipula el mundo, sino que además son mediadores de los actos que para nosotros son intencionales, portadores de conciencia histórica y que ha sido construida desde la actividad cognitiva de las generaciones pasadas.

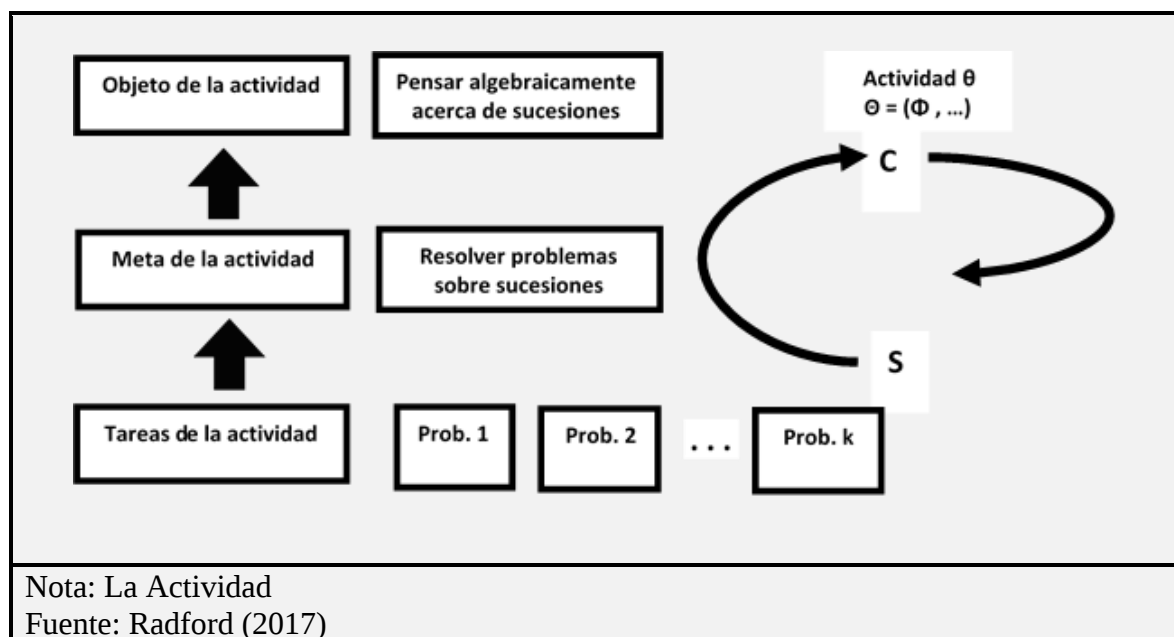
2.2.10. La Actividad

Como se ha planteado, la investigación de la objetivación se enfoca en las formas culturales e históricamente codificables del pensamiento y acción y como estas se convierten en objetos de reconocimiento u objetos de conciencia. Investigar la objetivación tiene como característica el rol mediador de la actividad entre el saber y el conocimiento. El concepto de actividad que el investigador mencionado resalta va más allá de personas interactuando entre ellas y artefactos. Radford, plantea que la actividad “... es una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una búsqueda común – es decir una búsqueda con otros – de la solución de un problema planteado, búsqueda que al mismo tiempo es cognitiva, emocional y ética” (2017, p. 125).

Específicamente, en el aula la actividad tiene un objeto matemático, este es determinado rápidamente “por el proyecto del profesor y este puede ser el encuentro de los alumnos con formas culturalmente codificadas de pensar algebraicamente sobre secuencias, la actividad que es un sistema en movimiento se mueve hacia su objeto”. Para que esto ocurra se deben identificar una o varias metas, en el caso concreto de esta investigación las metas pueden estar enfocadas en resolver problemas sobre secuencias de manera algebraica y para alcanzar dichas metas se requiere de tareas específicas.

De acuerdo con Radford (2017) la estructura objeto – meta – tarea corresponde a la componente Φ , “en el caso de la teoría de objetivación, esta componente implica un análisis epistemológico del contenido matemático con un análisis a priori”. La actividad es el proceso que actualiza la potencialidad, que siempre es individual o singular y se expresa con la letra griega Θ .

Figura 5. Estructura de la actividad



En general, Radford (2017) presenta la actividad Θ que actualiza el saber S en un conocimiento C , lo cual es un proceso sujeto a cambio: es lo que las discontinuidades de las flechas sugieren, es decir, si bien es cierto que la actividad media S y C , S y C median también la actividad y esta mediación recíproca es el significado de la naturaleza de los elementos en un proceso dialéctico como se muestra en la Figura 5.

2.2.11. Pensamiento Algebraico y la Generalización

El razonamiento o pensamiento algebraico está caracterizado por recurrir a cantidades indeterminadas, modos idiosincrásicos o específicos de evolución cultural e histórica de representar o simbolizar estas cantidades indeterminadas y sus operaciones y por último tratar estas cantidades indeterminadas de manera analítica.

Cuando Radford (2017) nos habla de cantidades indeterminadas se refiere al hecho de que la situación a la que se enfrentan los estudiantes de una manera algebraica implica más que números dados u otras entidades matemáticas, las cantidades indeterminadas pueden ser incógnitas, variables, parámetros, números generalizados, etc. En segundo lugar, nos dice que, aunque se pueden expresar cantidades indeterminadas a través del simbolismo alfanumérico, también se pueden expresar a través de otros sistemas semióticos, sin perjuicio de la naturaleza algebraica del pensamiento. Por último, las cantidades indeterminadas y sus operaciones se manejan analíticamente, es decir, a pesar de que estas cantidades no se conocen, se suman, restan, multiplican, dividen, etc., como si se conocieran, sin distinguir entre lo conocido y lo desconocido.

Esta forma de caracterizar el pensamiento algebraico conlleva la idea de generalización, ya que de acuerdo con Mason (1985), las generalizaciones constituyen una parte fundamental de la actividad humana y este proceso se apoya muy bien en el lenguaje algebraico, es necesario aclarar que en esta investigación se está de acuerdo con Mason en cuanto a que el desarrollo del pensamiento algebraico es un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético que se inicia a comienzos del ciclo escolar, sin embargo, se es consciente de las diferencias que radican entre la concepción del desarrollo del pensamiento algebraico en cuanto a que Radford (2011) propone una categorización del pensamiento algebraico que puede ser factual o contextual, que incluye el uso de gestos y movimientos y Mason (1985) presenta el ver y decir como una secuencia que permite el mismo desarrollo del pensamiento en el cual no se refiere a estos elementos propios de la multisensorialidad, por lo cual se entiende para efectos de esta investigación que ambos autores se refieren a un momento específico en el que emerge la

generalización y es necesario tener en cuenta todos los elementos descrito gestos, movimiento, discurso como medios semióticos de objetivación susceptibles de ser estudiados y que hacen parte del rol cognitivo que permite el proceso de objetivación.

Desde la teoría la generalización de forma implícita tiene tres componentes entrelazados: un componente fenomenológico, un componente epistemológico y un componente semiótico. La generalización está formada por dos términos más simples: generalización y acción, y significa una inferencia general. De acuerdo al origen de la expresión se tiene en cuenta que la idea de que la generalización opera dentro de un ámbito lógico o epistemológico dentro del cual la inferencia aludida se reconoce como correcta o verdadera.

Específicamente Radford (2015) presenta que el componente fenomenológico tiene que ver con la elección “de las determinaciones sensibles del modo en que la intuición, la atención y la intención se relacionan para tratar con los objetos específicos que forman la base o el fundamento de la generalización”. En el mismo sentido explica que el componente epistemológico-ontológico, permite al conocedor extrapolar o generalizar algo de una matriz de objetos particulares, de modo que algo se infiere y afirma sobre otro objeto y por último hay un componente semiótico que involucra medios semióticos (como el lenguaje oral y escrito, pero también gestos y signos como diagramas y fórmulas) a través de los cuales se infieren y afirman cosas sobre el objeto generalizado. Así mismo, el investigador mencionado menciona que estos tres componentes no son independientes entre sí y señala que siempre se practica una generalización dentro de un cierto modo de conocimiento.

Autores como Mason et al. (1985) plantean acerca de la generalidad como “la vida de las matemáticas y el álgebra como el lenguaje con el cual se enuncia esa generalidad y para

aprender el lenguaje del álgebra es necesario que se tenga algo que decir, percibir una regularidad o algún patrón y luego tratar de expresarlo en forma sucinta de tal manera que pueda comunicar su percepción a alguien y responder a preguntas específicas sobre esta”.

Acerca de las generalizaciones Radford (2001a) explora tipos pre-simbólicos de generalización de patrones y encuentra tres tipos. Estas generalizaciones aparecen como esquemas operativos basados en diferentes medios semióticos de objetivación.

Los tipos de generalización a los que se refiere Radford (2001a) se determinan en primer lugar por generalizaciones fácticas que permanecen ligadas a un nivel numérico y su objetivación se basa en un proceso de semiosis perceptiva que enfatiza el efecto modelado a través de adverbios de acciones generativas (por ejemplo, "siempre") o mediante dispositivos semióticos articulados como el ritmo y el movimiento.

En segundo lugar, se determinan las generalizaciones contextuales, que toman como argumentos, objetos numéricos generales no específicos, estos objetos proto-matemáticos que se muestran en una capa de discurso aún no completamente matematizada, se objetivan a través de términos lingüísticos, no simbólicos. Al hacerlo, en el curso de una práctica discursiva, los estudiantes logran una fijación de la atención y extraen del horizonte indiferenciado de los objetos ciertos elementos que hacen aparentes nuevos objetos que están más allá de la percepción directa y el tipo de denotación de los estudiantes es uno que transmite la encarnación de la experiencia matemática que proporciona una vista en perspectiva de los objetos generales emergentes. Como resultado, los objetos proto-matemáticos tienen una característica muy importante: siguen siendo objetos contextuales debido a su modo de ser espacial-temporal, es decir que son objetos deícticos abstractos.

Desde esta perspectiva, acerca de las generalizaciones simbólicas expresa que estas expresiones denotan el mismo objeto matemático y la diferencia entre los significantes explica las diferencias en los modos de denotación y sus respectivos sentidos. Por otro lado, sugiere que los diálogos con los estudiantes presentan que para alcanzar la desubjetivación y terminar con el núcleo objetivo de la generalización algebraica, el significado tiene que ser incorpóreo y convertirse en un sentido matemático puro. Tal perspectiva debe estar inmersa dentro de la construcción de instrumentos que se implementan en el aula de clase y que pretendan evidenciar los procesos de argumentación de los estudiantes alrededor de esos procesos de objetivación en relación con la transición de la aritmética al álgebra.

Capítulo 3

3. Marco Metodológico

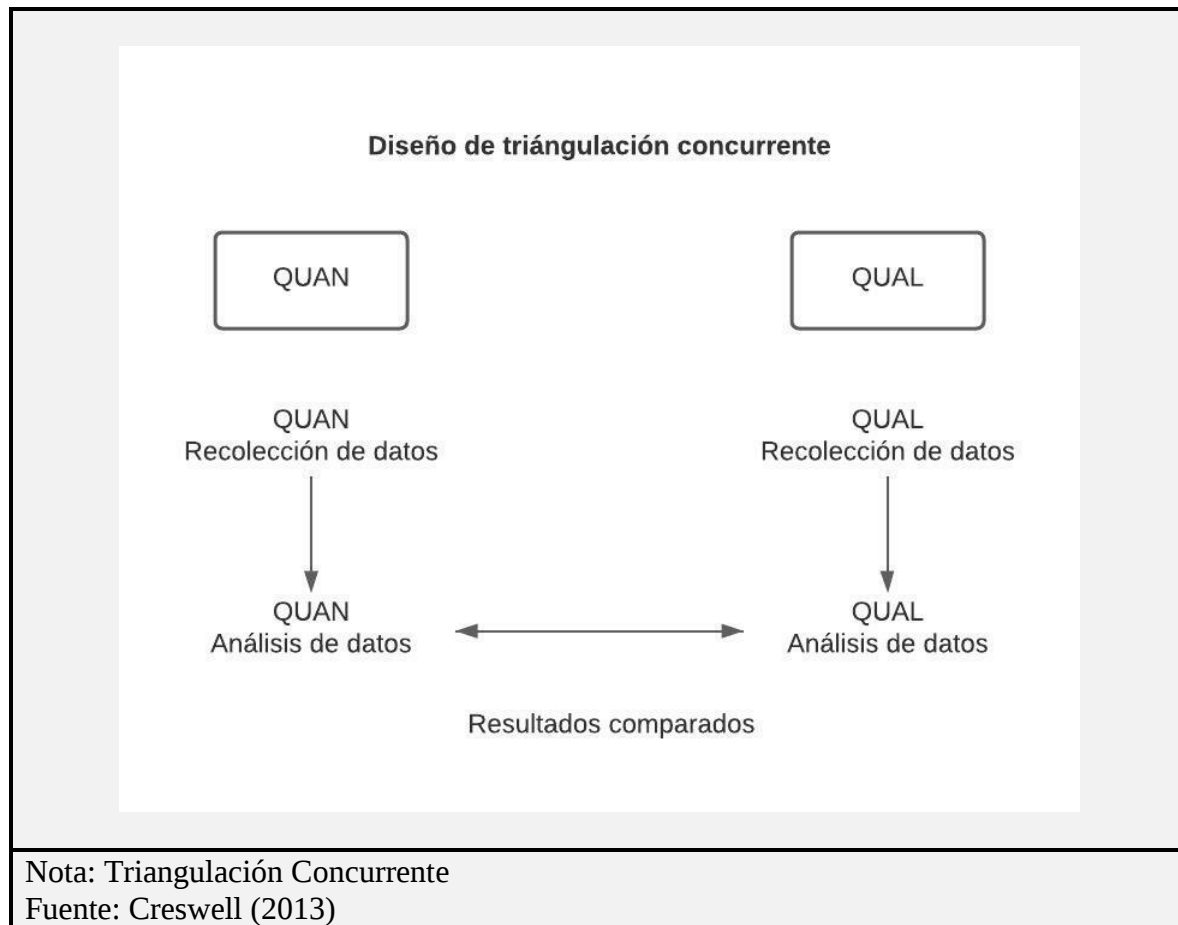
En este capítulo se presenta el paradigma, enfoque y fases metodológicas con los cuales se obtienen, organizan, categorizan y analizan datos para la interpretación de los resultados alrededor del objeto de estudio de manera que pueda darse respuesta a la pregunta de investigación, lo cual generará un aporte significativo al conocimiento relacionado con la naturaleza del pensamiento algebraico.

Este trabajo asume el diseño de triangulación concurrente tal como lo describe Creswell & Clark (2018) este diseño mixto de investigación se establece a razón de los aportes que ofrece dadas sus posturas filosóficas y epistemológicas de los tipos de investigación cuantitativos y cualitativos; razón por la cual este estudio en específico pretende cruzar datos obtenidos desde los instrumentos asociados a los datos cualitativos determinados por las interacciones de estudiantes y docente en el proceso de desarrollo del pensamiento algebraico y los coeficientes de correlación que se determinan de acuerdo a datos resultantes de los medios de objetivación movilizados por estudiantes en el desarrollo de actividades de tipo algebraico.

El abordaje de la propuesta de investigación requerirá de recolección de datos cualitativos a los cuales se les dará un tratamiento inferencial, por lo cual se plantea la idea de integrar dichos datos de forma mixta de tal manera que sea posible la consecución de respuestas a la pregunta planteada. La integración de los datos se realizará de manera concurrente, es decir se obtendrán datos de forma simultánea, se integran los datos lado a lado desde los análisis cualitativos y cuantitativos y su recolección tendrá la misma importancia, lo que comúnmente llama Creswell

(2009), diseño de triangulación concurrente, quien además presenta el esquema de la Figura 6 para explicar este tipo de diseño:

Figura 6. *Diseño de Triangulación Concurrente. Tomado de Creswell (2013)*

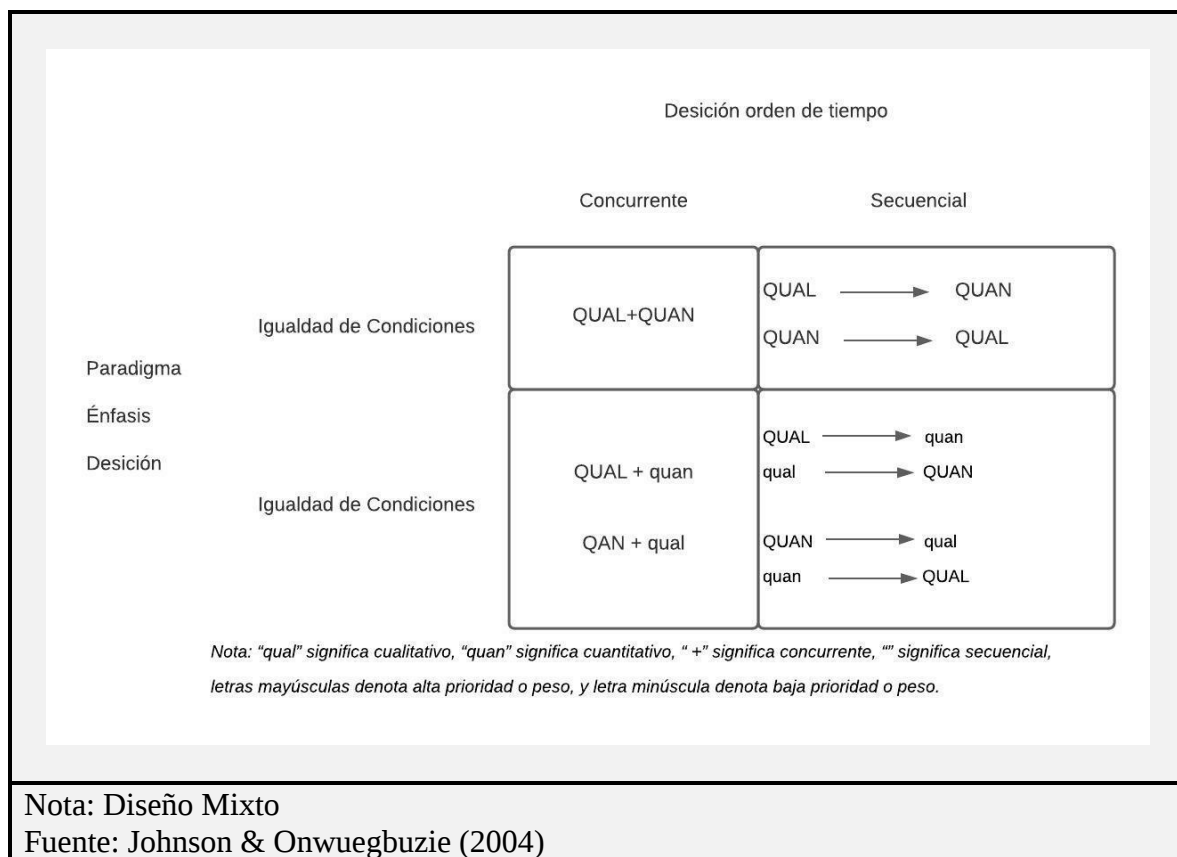


Como se puede observaren la Figura 6, se da una igualdad de condiciones a los datos cualitativos y cuantitativos arrojados por la investigación, lo cual es importante en el desarrollo de la presente propuesta.

3.1. Paradigma metodológico: Triangulación

El diseño de triangulación concurrente es concebido por Creswell & Clark (2018) como el diseño de dos métodos para obtener resultados triangulados cuantitativos y cualitativos sobre un mismo tema. Este diseño es presentado por Johnson & Onwuegbuzie (2004) en la Figura 7:

Figura 7. *Matriz de Diseño Mixto*

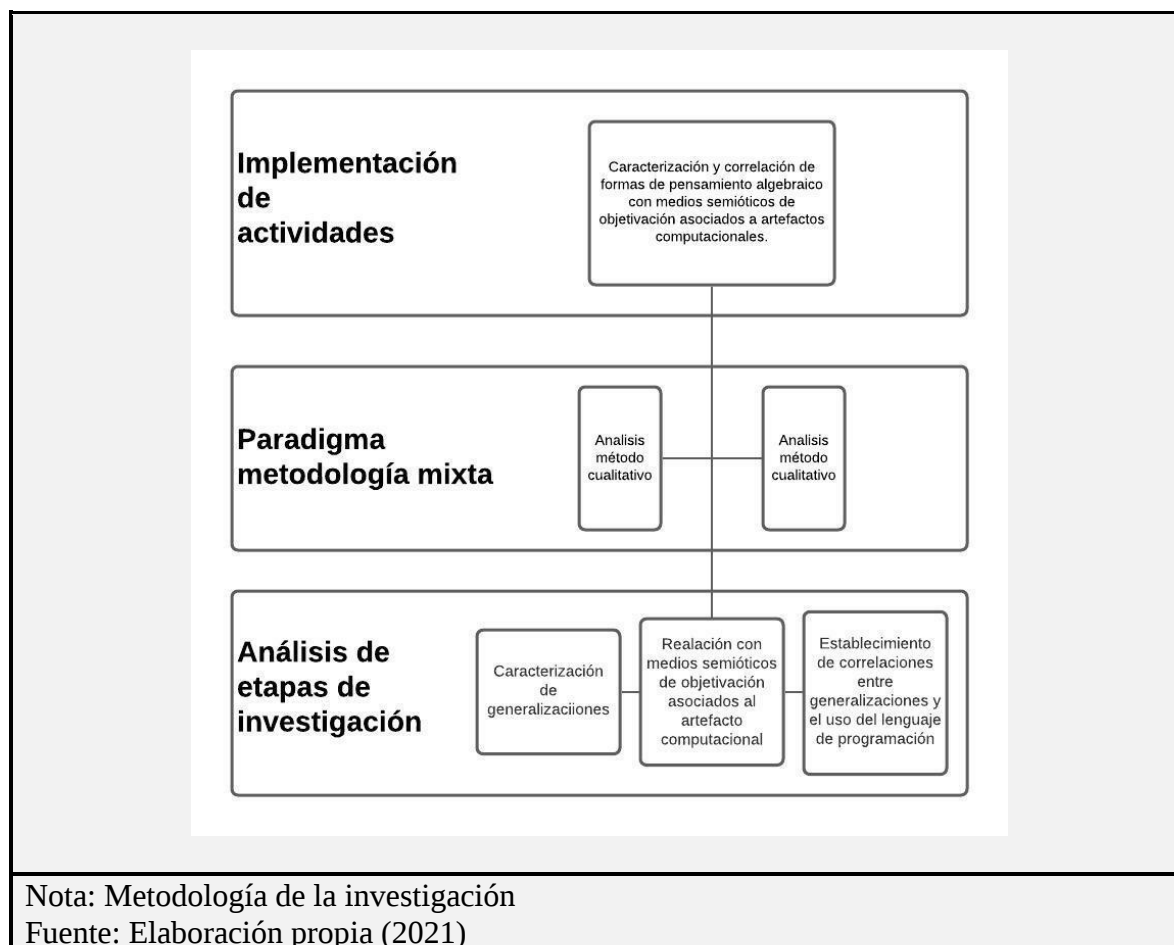


En general, el paradigma de investigación mixto de triangulación concurrente es el que mejor se ajusta a la idea de solución a la pregunta de investigación y presenta un fuerte potencial en cuanto al tratamiento de los datos. Así mismo, como el paradigma en una triangulación entre

lo cuantitativo y lo cualitativo, Marin (2018) expresa que el método debe corresponder con el tipo de enfoque y este se debe a su fundamentación epistemológica.

En relación con el método establecido se espera seguir una ruta que permita establecer un análisis de las categorías asociadas a las formas de pensamiento algebraico y los medios semióticos de objetivación; la siguiente ruta de la Figura 8 muestra las etapas en las que se obtendrán y se realizará el tratamiento de datos, es necesario aclarar que el concepto de actividad para esta investigación está ligado al carácter colectivo y dialéctico de la relación educativa.

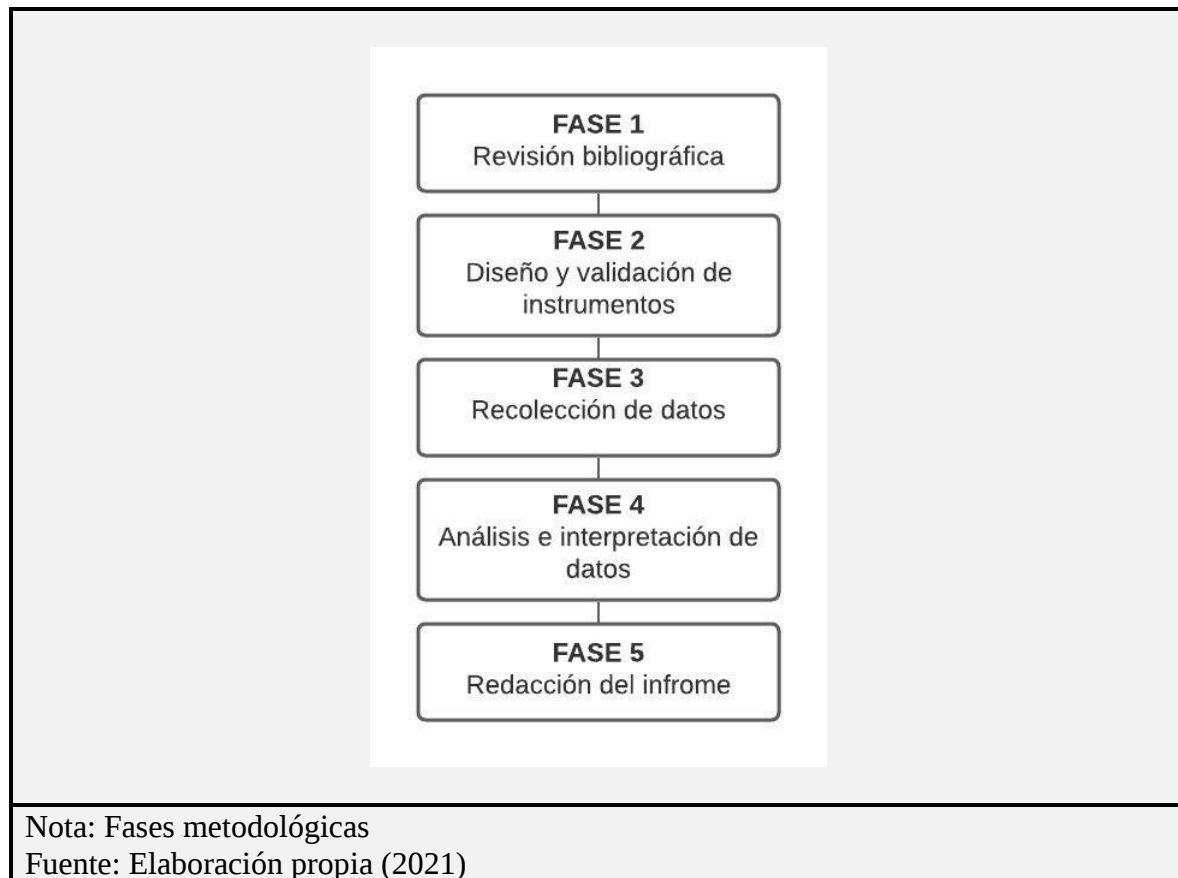
Figura 8. *Método mixto en la presente investigación*



3.2. Fases Metodológicas

Para la presente investigación se tuvieron en cuenta dentro del proceso metodológico 5 fases dentro de la investigación como se muestra en la Figura 9, las cuales fueron 1. Revisión bibliográfica; 2. Diseño y validación de instrumentos; 3. Recolección de datos; 4. Análisis e interpretación de datos; 5. Redacción del informe; las anteriores fases para desarrollar los objetivos propuestos, con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación.

Figura 9. *Fases metodológicas de la investigación*



El trabajo de campo se realizará en 4 fases, las cuales fueron estructuradas desde el trabajo metodológico realizado por Miranda et al., en este se plantea cómo los procesos de

interacción social y mediación semiótica son de vital importancia por lo que las tareas aplicadas en el aula de matemáticas se conciben como “un proceso social de dotación de significados dentro de una actividad mediatizada por la interacción social, artefactos y signos de naturaleza diferente (símbolos matemáticos, lenguaje, gestos, etc.)” (2007, p. 10), en general los criterios de selección de discusiones atienden a las actitudes de acción que pueden adoptar los agentes con el fin de anunciar en la actividad, y que Rickenmann (2007) en posturas sobre la actividad conjunta la atiende como elementos “en los cuales se encuentra la actividad didáctica del profesor en donde propone reglas, da indicios para que el estudiante establezca y respete las reglas del juego, interprete los indicios, edifique con base a los elementos propuestos y son estas situaciones las que son atendidas en esta investigación y que en especial son analizadas desde las grabaciones realizadas”. Atendiendo a lo anterior, se modifican estas fases de la siguiente forma:

Primera Fase (Implementación): En esta fase se realizará el registro general de la clase con una cámara, además, con otras cámaras se focalizará a diferentes grupos de estudiantes que manifiesten diversas discusiones acerca de las tareas implementadas.

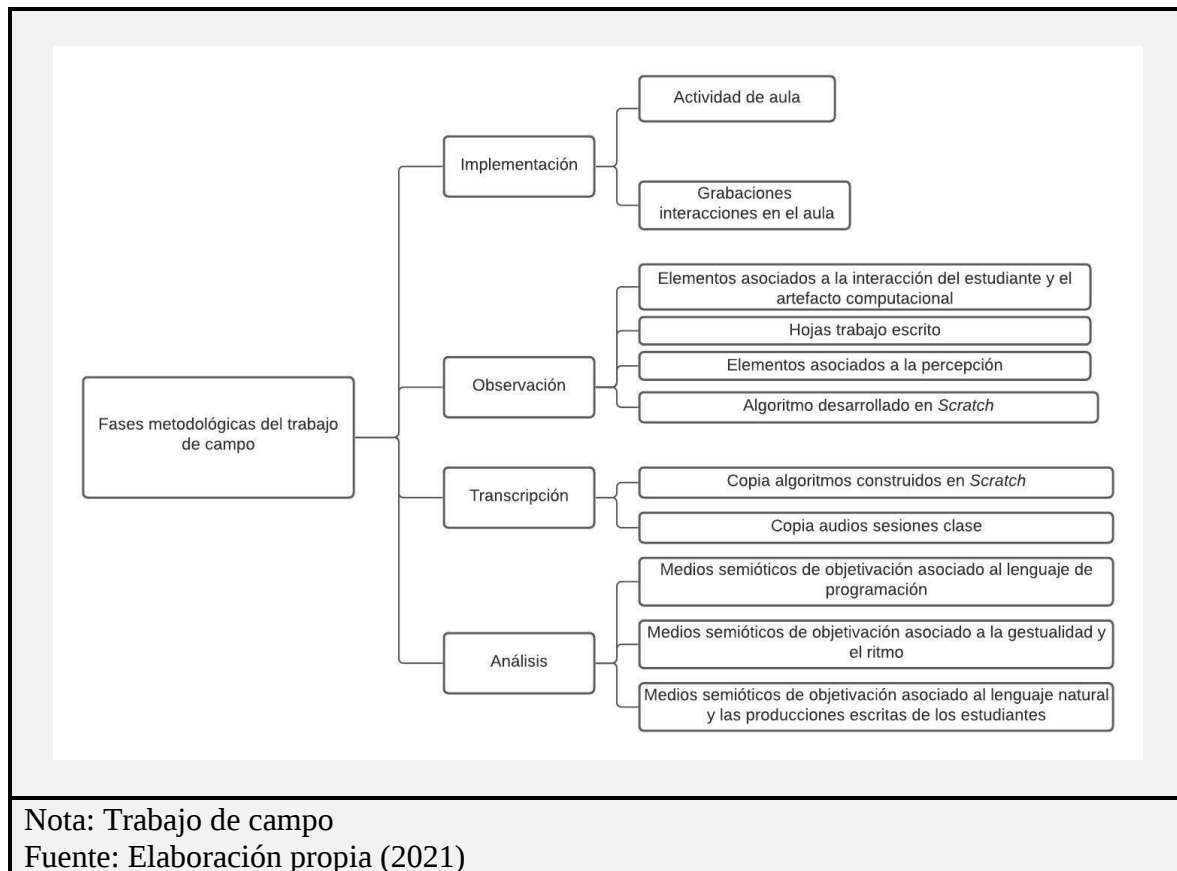
Segunda Fase (Observación): Observación de hojas de trabajo y algoritmos programados en SCRATCH, en donde los estudiantes plasmen sus diferentes conjeturas acerca de la tarea planteada.

Tercera Fase (Transcripción): Transcripción del audio de todos los videos correspondientes a las sesiones de trabajo, es decir, los discursos de los estudiantes.

Cuarta Fase (Análisis): Análisis de los videos, de las hojas de trabajo y los algoritmos programados por los estudiantes, de acuerdo a las tareas planteadas y el proceso de resolución de problemas.

En el siguiente diagrama jerarquizado de la Figura 10 se muestra cómo se realizará el trabajo de investigación en el aula en términos de la aplicación del método.

Figura 10. *Fases metodológicas del trabajo de campo*



3.3. Enfoque Metodológico

En el paradigma de la investigación cualitativa existen varios enfoques, de acuerdo a los objetivos de esta investigación, se requiere la perspectiva epistemológica y filosófica enmarcada desde un enfoque descriptivo e interpretativo, desde la perspectiva de Ernest, quien específicamente plantea que “Mathematics is multi-faceted, and as well as a body of prepositional knowledge, it can be described in terms of its concepts, characteristics, history and

practices.” [“La matemática es multifacética y, además de ser un cuerpo de conocimiento preposicional, puede describirse en términos de sus conceptos, características, historia y prácticas”] (1991, p. 25). De igual manera se plantea en el método la concepción de superar dificultades educativas en el contexto de la educación matemática que a lo largo del tiempo vienen siendo repetitivas como lo plantea Ernest (2013):

The difference between a symbol and a thing is that symbols have meaning and that meaning is always something personal and thus subjectively biased. To counteract this fact, logic and mathematics have tried to formalize sense or meaning, reducing it to formal syntax, to sets of rules and recipes. Hence result specific educational difficulties. For example, difficulties to stimulate creativity and encourage insight. [La diferencia entre un símbolo y una cosa es que los símbolos tienen significado y que el significado siempre es algo personal y, por lo tanto, subjetivamente sesgado. Para contrarrestar este hecho, la lógica y las matemáticas han tratado de formalizar el sentido o el significado, reduciéndolo a una sintaxis formal, a conjuntos de reglas y recetas. De ahí resultan dificultades educativas específicas. Por ejemplo, dificultades para estimular la creatividad y fomentar la comprensión.] (2013, p. 61)

Por lo anterior, este trabajo de investigación plantea su método desde la educación matemática, con el enfoque desde la teoría cultural de la objetivación, en esta, Gobara & Radford (2020) consideran que el saber es concebido como un sistema de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión, constituidos histórica y culturalmente. Esta teoría centrada en procesos de enseñanza y aprendizajes está fundamentada en el materialismo dialéctico y en la escuela del pensamiento de Vygotsky.

En consecuencia, dado que este trabajo estudia la emergencia del pensamiento algebraico, lo cual es una situación inherente a la actividad matemática que permite el diseño y aplicación de tareas que involucren secuencias figurales, específicamente este estudio tiene un asidero en la investigación socio-cultural en donde como lo manifiesta Cole citado por Radford (2018b), se enfatiza el vínculo entre cognición y contexto, pero también se enmarca dentro de la teoría dialéctica materialista de objetivación, dado que concibe que la cognición solo puede estudiarse en movimiento, es decir a través de la actividad de aula.

3.3.1. *Proceso Metodológico para la Recolección de Datos*

En este apartado se muestra cómo se realizará la recolección de datos, para tal fin se acude a la definición de dato, de acuerdo con Marin (2018):

Los datos se convierten, entonces, en el material necesario a partir del cual el investigador realiza el proceso de análisis, es decir, las operaciones lógico-metodológicas para estructurar el conjunto de la información en un todo sistemático y coherente, y para construir así el nuevo conocimiento científico. (2018, p. 95)

Los datos a recolectar están determinados por variables cualitativas, en el contexto de la etnografía educativa planteada por Goetz & LeCompte (1988) que además plantea como:

La elección de estrategias de selección y muestreo depende de los fines y cuestiones formulados, la naturaleza de la unidad empírica que se va a estudiar, los marcos teóricos o conceptuales generales que informan el estudio y la credibilidad que el investigador pretende conferir a la generalización o a la comparación de sus resultados. (1988, p. 103)

Es decir, que hay una serie de criterios que se establecen en esta investigación, que permiten establecer las características de la población que en ella participa, para este caso,

específicamente son estudiantes de séptimo grado con edades entre los 10 y 14 años, de un colegio público de Bogotá - Colombia. Las unidades de análisis que se pretende observar en la muestra recogida son establecidas desde el marco teórico y se realizará un análisis cualitativo que sea posible cuantificar, como lo presenta Goetz & LeCompte (1988):

Aunque los datos se analicen cualitativamente, la mayoría de los investigadores intenta utilizar técnicas enumerativas para determinar sus frecuencias de forma válida y fiable. Ello requiere unidades claramente cuantificables. La valoración de este tipo de observaciones suele adoptar como criterio la fiabilidad interobservador, determinable con coeficientes de correlación que indican la medida en que los observadores coinciden en situar los datos en las diversas unidades categoriales. (1988, p. 156)

Por otro lado, el tamaño de la muestra se obtiene por saturación, que en concordancia con Carlsen & Glenton (2011) tiene un papel dominante en la investigación cualitativa, es decir, en concordancia con la postura de Tójar (2006) “El número de casos, escenarios, situaciones, no es relevante en el muestreo cualitativo. Lo relevante es no dejar a un lado información que pudiera ser esencial para la investigación que se está desarrollando. Habitualmente se utiliza el término *saturación*” (2006, p. 187).

Estos casos serán revisados bajo la búsqueda de información revelada en términos de las variables de estudio, para lo cual, estas han sido enmarcadas en las siguientes variables cualitativas que se muestra en la Tabla 2:

Tabla 2 *Variables de investigación*

Variable	Resultado
Realiza Generalización	Si/No
Tipo de Generalización	Aritmética/Aritmética sofisticada/Algebraica

La determinación de la existencia de evidencia en las categorías asociadas a la variable están determinadas por la teoría en el marco de las investigaciones que tienen que ver con el pensamiento algebraico y los medios semióticos de objetivación. Dado que la información se recolecta usando videos de la actividad en aula, esta se ha codificado como *Vid – Act# – Fecha – #*.

3.3.2. Diseño de Tareas y Trabajo en el Aula

En este apartado se describe como se concibe la actividad como la plantea Radford (2017), en el aula de matemáticas la actividad está en relación con un objeto, que es identificado con el proyecto didáctico del profesor. Es decir, para esta investigación: “El encuentro de los estudiantes con formas culturalmente codificadas de pensar algebraicamente sobre secuencias” (p. 125). La actividad relacionada con el objeto mencionado está identificada con metas, que en este caso específico tienen que ver con resolver problemas sobre secuencias de manera algebraica y para alcanzar estas metas se necesita de unas tareas específicas.

En general lo que se proyecta en el trabajo de aula está determinado por la estructura objeto-meta-tarea de la forma como se explicitó en el marco teórico y el apartado 3.1.9. referido a la actividad. En cuanto a la tarea, su diseño está enmarcado por una densidad epistemológica

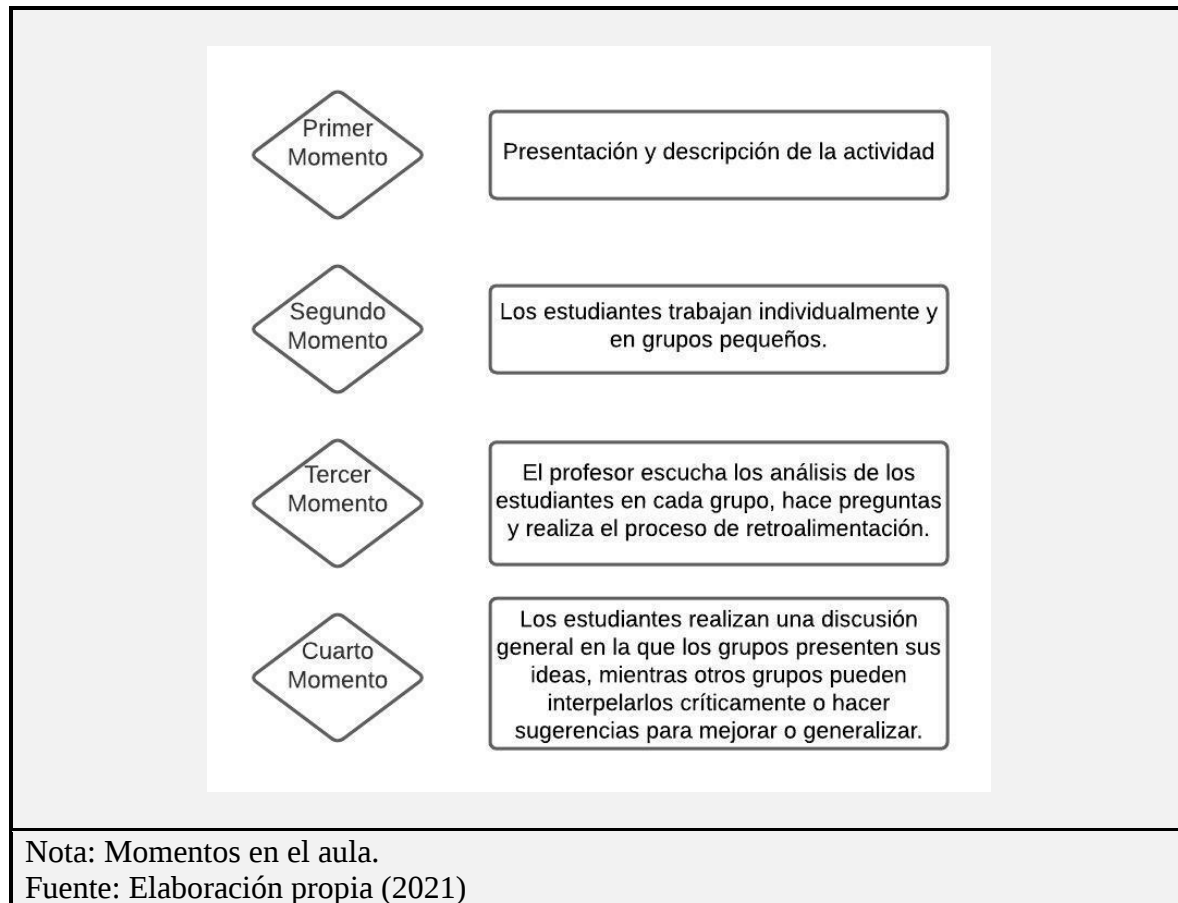
importante para crear las condiciones que permitan la observación de cierto fenómeno, de acuerdo con Vergel & Rojas (2018):

La tarea, pues, constituye un elemento artificial de la educación del alumno, pues intentamos crear condiciones para que ocurra un cierto fenómeno, en este caso diseñamos tareas o situaciones —intramatemáticas o extramatemáticas— para observar en su abordaje unas ciertas características del desarrollo del pensamiento matemático.” (2018, p. 76)

De esta manera, se diseñan las tareas para implementar en el aula de clase con el fin de fortalecer habilidades que permitan el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes participantes del proyecto, además del análisis de la naturaleza de dicho pensamiento, desde los objetivos propuestos. La importancia de esta investigación se encuentra alrededor de la inclusión del estudio de un lenguaje de programación visual que se constituye en un factor esencial y novedoso al ser analizado como un posible medio semiótico de objetivación, por lo anterior, dado que existe un estudio amplio en el tema en cuestión, en relación con las formas de pensamiento algebraico y los procesos de generalización, se usarán los instrumentos propuestos por Vergel (2015b) y se adecuarán para incluir artefactos computacionales desde la programación visual de computadores.

De manera particular desde teoría de objetivación se orienta el proceso de forma que se identifican momentos en la actividad. Se divide la clase en pequeños grupos de dos, tres o cuatro estudiantes y se generan los siguientes momentos, como se muestra en la Figura 11:

Figura 11. *Momentos de la actividad*



3.4. Análisis Multimodal

El análisis cualitativo de los datos se basa en la concepción multimodal del pensamiento humano, es decir, como lo plantea Arzarello (2006), los primeros signos, gestos y miradas constituyen un primer paquete semiótico básico en el cual los niños comienzan sus actividades y a partir de ellos se enriquecen con otros paquetes semióticos como dibujos y números. Por eso, la necesidad de analizar los procesos de producción de significado de los estudiantes en términos de la forma en que diversos recursos semióticos se entrelazan durante la actividad matemática.

En general, se realizará un análisis de las formas del pensamiento desde los diferentes recursos semióticos utilizados por los estudiantes como gestos, miradas, sonidos, dibujos, expresiones escritas y visuales en el computador, entre otros, de tal forma que los análisis permitan dar cuenta de los procesos de inducción, abducción y deducción que se dan en los estudiantes participantes del proyecto.

3.5. Análisis desde el Método Correlacional

Este método inferencial se refiere al grado de asociación entre dos variables mediante herramientas estadísticas de correlación. Específicamente uno de los objetivos de esta investigación tiene que ver con la relación que existe entre los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes y el tipo de pensamiento algebraico asociado a las generalizaciones planteadas en la actividad matemática, es decir, el pensamiento factual, el pensamiento contextual y el pensamiento simbólico.

Para el desarrollo del objetivo de la investigación inscrito en la relación entre variables planteadas, se está de acuerdo con Marin (2018), en cuanto a que “.. lo importante es determinar el grado de relación o asociación existente entre las variables” (2018, p. 129). Particularmente, se plantean dos variables cualitativas que son: formas de pensamiento algebraico y la movilización del medio semiótico de objetivación asociado al lenguaje de programación visual utilizado en la actividad en el aula, dichas variables se generalizarán en tablas de contingencia de la siguiente manera como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Variables a relacionar en las tablas de contingencia

Variable	Resultado
¿Realiza algún tipo de Generalización?	SI/NO
Tipo de Generalización	Aritmética/Aritmética sofisticada/Algebraica
Estrategia usando artefacto computacional	SI/NO

Como se puede observar tenemos dos variables en cada tabla, siendo estas de tipo dicotómico dada la posibilidad de respuesta. De esta manera, es posible determinar los grados de libertad asociados a la prueba chi-cuadrado usando la fórmula $v = (r - 1)(c - 1)$, de la cual podemos esperar que $v = 1$, es decir 1 grado de libertad asociado a cada tabla de contingencia.

Por otro lado, se plantean dos hipótesis, la hipótesis nula y la hipótesis alternativa:

H_0 : Los parámetros son independientes

H_1 : Los parámetros no son independientes

Para probar la hipótesis nula de independencia se hará uso del siguiente criterio de decisión:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

La decisión estará determinada por $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ con v grados de libertad, sin embargo, se debe tener en cuenta que, si las frecuencias esperadas tienen ciertos valores determinados, para este estudio en particular, con 1 grado de libertad es muy probable que se tenga que realizar la corrección de Yates para continuidad:

$$\chi^2_{\text{corregida}} = \sum_i \frac{(|o_i - e_i| - 0.5)^2}{e_i}$$

Es de tener en cuenta que medir la intensidad de la correlación se hace necesaria por lo cual se acude a estadísticos como “el coeficiente de correlación de Pearson que es una medida de dependencia lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. A discrepancia de la covarianza, la correlación de Pearson es autónoma de la escala de medida de las variables”. Cuando este coeficiente se aplica a una población típicamente se representa por la letra griega ρ (rho).

Capítulo 4

4. Resultados

Este capítulo expone los resultados obtenidos de la indagación que se ha llevado a cabo a partir de la propuesta de investigación, la información se ha organizado de acuerdo con cada una de las tareas ejecutadas en el grupo experimental y el grupo de control y para su organización y presentación se establecen en primera instancia las caracterizaciones y algunas relaciones que surgen de los hallazgos relacionados con la información encontrada. Es de aclarar que esta organización también tiene en cuenta la información relevante desde el análisis multimodal y las características cuantificables que subyacen a la información reportada, para lo cual se categorizan cinco tareas a partir de las cuales se expone una diferenciación entre los resultados obtenidos en el grupo experimental y el grupo de control.

4.1. Desarrollo de la Investigación

En esta sección se presenta la organización y caracterización de los datos obtenidos en la investigación sobre la base de la pregunta y los objetivos previamente establecidos. Este apartado se centra en las diferentes producciones que generan los estudiantes desde los grupos experimentales y los grupos de trabajo en general, teniendo en cuenta los diferentes medios semióticos de objetivación que movilizan y las diferentes argumentaciones que presentan en sus trabajos. La investigación está enmarcada desde la perspectiva propuesta por la teoría cultural de objetivación planteada por Radford (2018), los análisis se han propuesto a partir de la concepción multimodal del pensamiento humano según el trabajo de (Arzarello & Edwards,

2005; Arzarello, 2006) y los análisis se han llevado a cabo desde las producciones argumentativas de los estudiantes basándose en las teorías desarrolladas por (Peirce, 1960; Duval, 1999; Fischbein, 2002).

4.1.1. La Concepción Multimodal del Pensamiento Humano

Es de resaltar que la generalización es la vida de las matemáticas y para expresarla se usa el álgebra, específicamente, Mason et al., (1985) menciona que el ver y decir son elementos propios de los sentidos que son usados cuando el aprendiz realiza identificaciones mentales de patrones o relaciones para posteriormente intentar articular palabras para mostrarse a sí mismo o a alguien más las regularidades encontradas. Sin embargo, menciona también el elemento de registro, en el cual se hace visible el lenguaje como elemento que articula símbolos y la comunicación escrita a partir de la cual se argumenta que, dado el nivel de dificultad para ser empleado, debe utilizarse más tiempo en los procesos asociados a los registros visuales y orales.

Por lo anterior, se está de acuerdo con Lakoff & Nunez (2002) en cuanto a que las matemáticas son consideradas ciencias exactas y precisas, lo cual se manifiesta en el uso de símbolos, sin embargo, estos en sí mismos no son ideas sino que constituyen solo representaciones que muestran el contenido intelectual de las matemáticas que reside en sus ideas, no en los símbolos mismos. Así mismo Nemirovsky et al., (1998) explora las formas como emergen el habla, las actuaciones y las gesticulaciones en la actividad matemática usando gráficas computacionales; en esta investigación se concluye sobre la importancia de tener perspectivas diferentes a concebir el aprendizaje únicamente a través del análisis simbólico y busca un referente para otorgar un nuevo significado al cuerpo y a las expresiones perceptuales y motoras que se producen en actividades relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas.

En general, es posible establecer una idea importante en torno a aquellos actos de comunicación y creación de sentido que se presentan en las generalizaciones y que como lo plantea Arzarello & Edwards (2005) deben ponerse en contraste los actos formales de generalización con los actos de comunicación más inmediatos, que se refieren a actos naturales que emergen en el desarrollo del pensamiento algebraico desde los gestos, el habla y la entonación. De igual manera, se está de acuerdo con que la noción de nodo semiótico incorporada por Radford (2013) quién aporta a las reflexiones sobre cómo construir y profundizar nuestra comprensión de cómo el habla, los gestos y los diferentes sistemas de signos incluidos las representaciones computacionales, estas últimas, importantes en este trabajo de investigación dado que tal como se manifiesta en las conclusiones del trabajo investigativo de Moretti (2011), las condiciones para que los docentes, en este caso específico, el investigador cree nuevas acciones mediadoras, permitieron la creación de nuevas necesidades para la constitución de nuevos significados, lo cual nos permite concluir según la perspectiva de que la objetivación del conocimiento particularmente en educación, es un fenómeno multimodal desde la semiótica, por lo cual los datos han sido organizados de acuerdo a esta concepción.

4.1.2. La Argumentación desde la Práctica Social

La lengua puede ser empleada en una conversación habitual, o por el especializado en enunciado en teoremas matemáticos o por el literario en la escritura, en general la lengua permite la construcción del discurso expresando algo con referencia al mundo, de acuerdo a Benveniste (1966), lo propio de la lengua es permitir en el discurso una referencia a un mundo real de manera que pueda ser compartida entre los que quieran comunicarse entre sí.

Lo anterior conlleva a la bifurcación que se da en cuanto a las funciones discursivas de la lengua, las cuales Duval (1999), llama funciones meta-discursivas y funciones discursivas, esta distinción nos permitirá ahondar en la comparación entre los diferentes empleos de la lengua natural y su pasaje al lenguaje formal. La anterior discriminación es importante dado que esta puede modificar el funcionamiento cognitivo y lingüístico de los aprendices.

En este sentido, Duval (1999) plantea que las funciones meta-discursivas son las funciones comunes a todos los registros de representación lingüísticos, simbólicos o figurativos; por otro lado, las funciones discursivas son las funciones cognitivas que un sistema semiótico debe cumplir para que sea posible un discurso. Es desde esta perspectiva que se realizan los análisis de las producciones de los estudiantes a partir de las cuales es posible observar la evidencia de una relación discursiva de tipo argumentativo. Esta debería explicarse desde algunas exigencias en cuanto a la gramática y estas son como lo presenta Calderón (2007), un tratamiento explícito del conocimiento discutido, la determinación del punto de partida de la argumentación y la determinación de la función, el estatus de los enunciados que constituyen la estructura del discurso argumentativo, el reconocimiento y uso de técnicas para la producción de argumentos, la generación de reglas de construcción verosímil en relación con lo verdadero y lo aparente y la construcción de situaciones argumentativas.

En este sentido la información presentada en los datos obtenidos de la muestra, presenta una serie de análisis que no deja de lado las funciones meta-discursivas aunque estas se analizan por separado de acuerdo a las funciones discursivas del lenguaje.

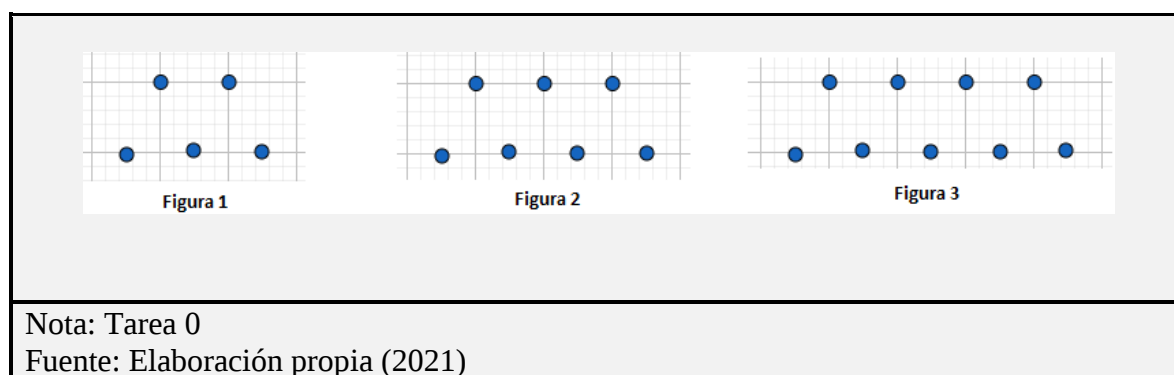
4.2. Tarea 0 - Indagación Inicial.

Inicialmente se desarrolla una actividad que se propone establecer las habilidades individuales de los estudiantes que forman parte del grupo de control y experimental. Esta actividad denominada como la Tarea 0, está diseñada conforme a las evidencias de investigaciones desarrolladas alrededor del tema en cuestión y se puede observar en varias investigaciones como las de Radford (2017) y Vergel (2014). A continuación, se presentan los resultados obtenidos en los procesos de desarrollo de las clases, en primera instancia en el grupo experimental y posteriormente en el grupo de control.

4.2.1. Grupo Experimental

En esta tarea se les presenta a los estudiantes una secuencia figural usando puntos como se muestra en la Figura 12.

Figura 12. Tarea 0



De acuerdo a la metodología de la clase desde la teoría de la objetivación, se presentan las figuras para después en la actividad conjunta interactuar con el grupo de estudiantes de forma individual y de forma general; a continuación, se presentan algunas de dichas interacciones que para esta investigación son relevantes desde el punto de vista cualitativo:

En la siguiente conversación evidenciada en el video Vid-Act0-150321-01, se observa el proceso de construcción del discurso y sus características desde las funciones discursivas del lenguaje del estudiante 1:

Estudiante 1: *Bueno...me di cuenta de que aquí hay una secuencia...que la figura 1 en la parte de arriba tiene uno más que el número de la figura y en la parte de abajo tiene uno más que el número de arriba, entonces ...*

Profesor: *Y... ¿cómo sabes que esta es la figura 4, esta es la figura 5 y esta es la figura 6?*

Estudiante 1: *Porque este tiene cinco punticos arriba y la figura de arriba y la figura 1 ... ah no... y la figura 2 tiene un puntico más de la figura... entonces este tiene 5 cuadritos y uno más ... que serían 5 y uno más...serían 5.*

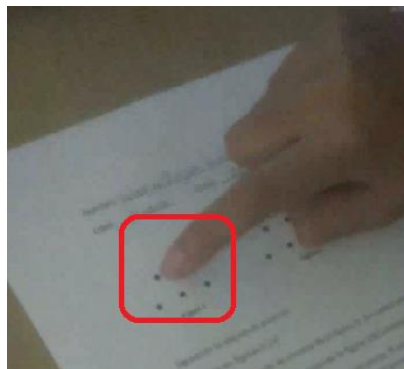
Profesor: *Y... ¿en la figura 5 como sería entonces?*

Estudiante 1: *6 punticos porque es la figura 5 y se supone que tiene un número más ... y abajo un número más serían 7.*

En este contacto cultural, entre profesor y estudiante, se plantea la necesidad de que este último genere argumentos que den cuenta de cada uno de los resultados expuestos, el trabajo del docente se centra entonces en recibir de la estudiante a través de su discurso una explicación relacionada con cada una de las actividades mentales que desarrolla y es por medio de dichos argumentos que se pueden evidenciar que razonamientos son los que expresan los estudiantes. De esta manera es factible observar cómo hallazgos encontrados por (Otte, 2006; Radford, 2005;

Vergel, 2016), acerca del uso del indexical se hacen evidentes en el momento de argumentar las respuestas dadas por la estudiante como se muestra en la Figura 13, Peirce (1960) se refiere a este uso como cualquier objeto de experiencia directa en la medida en que dirige la atención a un objeto por el cual su presencia es causada.

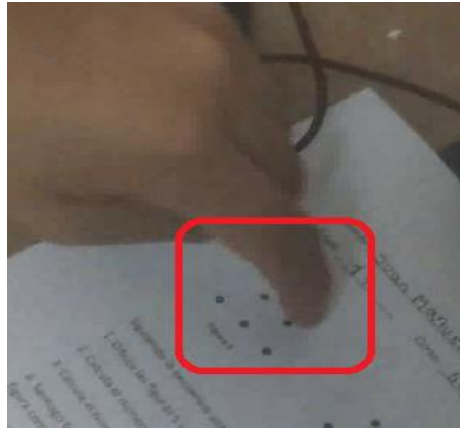
Figura 13. *Gesto usado por el estudiante1*



El discurso del estudiante 2 codificado como Vid-Act0-150321-02, presenta elementos importantes que vale la pena analizar, en vista de que presenta una forma de generalización desde el discurso y sus expresiones gestuales como se muestra en la Figura 14.

Estudiante 2: *Bien... yo las pude entender fue porque cada vez por ejemplo en la figura 1 hay tres y encima hay dos ... cada vez se le suma 1 ... por ejemplo aquí habían 3 y se le suma 1 y son cuatro en cada uno se le suman 4 y entonces así pude entender cómo se hacía...*

Figura 14. *Gesto usado por el estudiante 2*



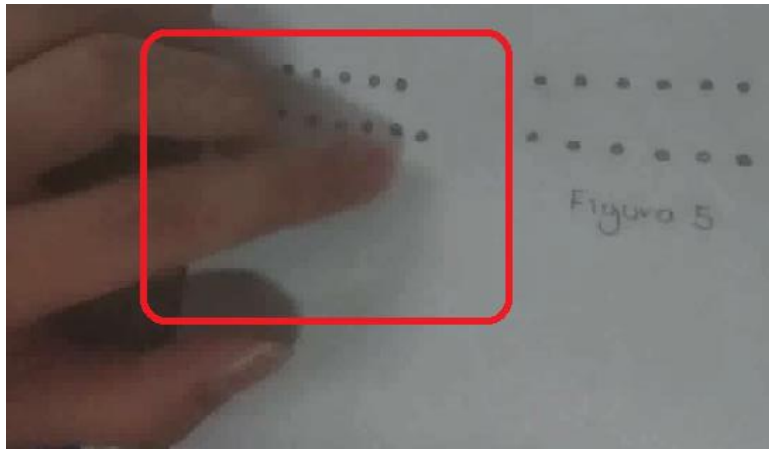
En el mismo sentido, el estudiante 3 muestra las siguientes producciones gestuales en la Figura 15 que se evidencian en Vid-Act0-150321-03:

Estudiante 3: *Yo observando esto, miré que la figura 1 tiene ... eeehhh... la misma cantidad de la figura 2 entonces tiene 2 y un puntico más y la figura 2 tiene 3 y un puntico más y la figura 3 tiene 4 y un puntico más.*

Profesor: *¿Y en las de abajo?*

Estudiante 3: *La figura 4 tiene 5 y un puntico más y la figura 5 tiene 6 y un puntico más y la figura 6 tiene 7 y un puntico más.*

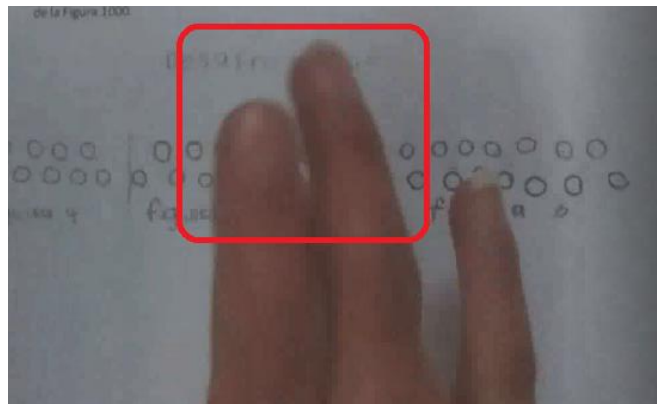
Figura 15. *Gesto usado por el estudiante 3*



De la misma forma el estudiante 4, presenta en Vid-Act0-150321-04, su producción como se evidencia en la Figura 16.

Estudiante 4: *Con cada número que es mayor de la figura se aumentaban dos puntos, así que las puse en dos cada una son dos puntos más que la anterior.*

Figura 16. *Gesto usado por el estudiante 4*



Esta constante en el uso del signo indexical muestra un patrón social a partir del cual los estudiantes basan sus argumentos para construir su discurso. El uso de este signo cumple una función referencial, que Duval (1999) la define como una función discursiva de la lengua que

moviliza un complejo juego de operaciones. En la acción repetitiva de señalar con el dedo se observa una *designación pura* dado que se identifica un objeto, en este caso una figura de la secuencia, mostrándola con un gesto asociado al señalamiento.

En las expresiones manifestadas por los estudiantes nos encontramos con operaciones de categorización simple en las cuales se identifica una cualidad común entre ellas, por ejemplo, en la construcción de oraciones tales como: (*...que en cada número que es mayor de la figura se aumentaban dos puntos*), a este tipo de categorización le siguió la operación de descripción en la cual los estudiantes obtenían un cruce de información a partir de categorizaciones simples.

En la siguiente conversación se evidencia un resultado importante que para efectos de esta investigación debe ser analizado, como se muestra en Vid-Act0-150321-05:

Estudiante 1: ... Me di cuenta de una ...bueno lo mismo que ... el patrón de los punticos entonces me dio 10 más 11 y me dio 22.

Profesor: ¿De dónde te sale el 10 y de dónde te sale el 11?

Estudiante 1: El 10 de la parte de arriba que tiene un puntico más que el número de la figura y la parte de abajo que tiene dos punticos más que el número de la figura.

Como ya se señaló existen elementos que muestran una designación de los objetos asociados a la secuencia figural desde la función referencial, sin embargo, esta designación no es suficiente para demostrar una actividad discursiva por lo cual, nos encontramos con la función apofántica de enunciados completos, en esta se puede observar en el estudiante 1 al aportar una

información completa acerca del objeto asociado a los puntos de la figura, Duval (1999), los llama unidad apofántica. En esta puede observar cómo el estudiante 1 en su expresión “*El 10 de la parte de arriba que tiene un puntico más que el número de la figura y la parte de abajo que tiene dos punticos más que el número de la figura.*”, utiliza una conjunción, proposición compuesta para determinar el valor de verdad del discurso que presenta en lenguaje natural.

Hay elementos importantes recolectados que deben ser parte del análisis dado, ~~que~~ como se muestra en los videos Vid-Act0-150321-06 y Vid-Act0-150321-07:

Estudiante 5: *Sumando el resultado de la anterior figura la sumé más 2, esto me dio más dos y más dos.*

Profesor: *¿Y en la figura 9 entonces cuánto da?*

Estudiante 5: *21*

Estudiante 6: *En la figura 9 hay 21 porque en cada figura se le van sumando 2 entonces aquí hay 5, 7, 9, 11, 13 y 15 en la 7 hay 17 en la 8 hay 19 y en la 9 hay 21 y ya...*

Como se puede observar en las expresiones del estudiante 5 y el estudiante 6 se enuncia una regularidad que tienen que ver con una forma de generalización aritmética, a la cual Vergel (2019) ha identificado como una zona entre la generalización aritmética y la generalización algebraica y que se ha denominado como formas sofisticadas de generalización aritmética y proto-formas de pensamiento algebraico basadas en una proto-analiticidad. Lo anterior permite en una primera instancia dar un valor de argumentación desde la función de expansión discursiva

que presenta una explicación, basado en la descripción de las diferentes figuras de la secuencia. Esta expansión discursiva se realiza por inferencia, es decir funciona sustituyendo ~~que~~ cada vez que se perciba la aplicación de la regla utilizada que se encuentra implícita en la secuencia.

En el discurso del estudiante 1 que se encuentra en el video Vid-Act0-150321-07:

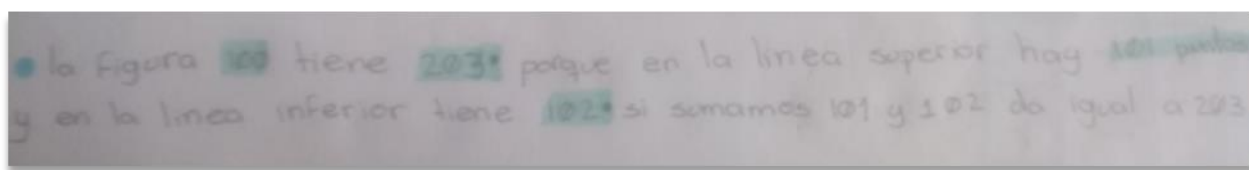
Profesor: *¿Cuántos círculos tiene la figura 100?*

Estudiante 1: *La figura 100 tiene 203 círculos ... mmm... porque según ...mmm... el que yo hice, la línea superior tiene un puntico más que el número de la figura y como la figura es la 100 entonces tendría 101 punticos y la parte de abajo tiene un número más que la línea de arriba entonces tendría 102 punticos ... eeeeehhh... 101 más 102 da 203 punticos.*

En su discurso el estudiante 1 presenta que tiene claro una idea de variabilidad de los puntos y en general se puede observar un sentido de la indeterminancia en cuanto a que es capaz de observar una regularidad en la secuencia basada en la cantidad de puntos que observó en una línea superior y una línea inferior, es decir, el estudiante 1 logra generalizar desde su razonamiento espacial ubicando siempre un punto más en la línea de abajo con respecto a la línea de arriba. Tal expresión muestra la movilización de la función de reflexividad en el discurso, dado que previo a la proposición planteada acerca del número de puntos de la figura existe la expresión “porque según lo que yo hice...”, el valor de verdad del enunciado completo puede variar cuando se sustituye esta expresión, es decir, como lo manifiesta Duval “el encaje de una proposición p en una expresión de actitud proposicional $a(p)$ tiene como efecto neutralizar el valor lógico de verdad de esta proposición p .”(1999, p. 116).

Tal esfuerzo por construir el discurso se ve enmarcado en la manifestación de un tipo de pensamiento algebraico contextual al describir algunas regularidades de forma verbal, que da cuenta de la movilización de medios semióticos de objetivación desde el lenguaje natural al lenguaje escrito como lo muestra el mismo estudiante 1 en la figura 17.

Figura 17. *Producción escrita del estudiante 1*



Esta producción hecha por los estudiantes refleja una evidencia de identificación del significado de los números resaltados como variables dentro del contexto del problema, es decir, existe un tratamiento en el registro escrito que permite diferenciar los números como designaciones simbólicas a través del uso del resaltador, lo que podría considerarse como una forma inicial de simbolización poco elaborada, que puede dar indicios de una posible analiticidad, es decir, la idea de hacer operaciones con lo indeterminado que le permite mostrar la regularidad y establecer una posible formula deducida que aún no es presentada de forma explícita.

Otro elemento importante que requiere análisis tiene que ver con lo expuesto en el video Vid-Act0-150321-09:

Profesor: *Listo ... cuéntame ¿cómo resolviste ese punto?*

Estudiante 1: *Yo me puse a pensar cuántos cuanto daría una suma de más o menos números cercanos que darían 81 y lo más cercano si le quitas el 1 sería 80 y lo más*

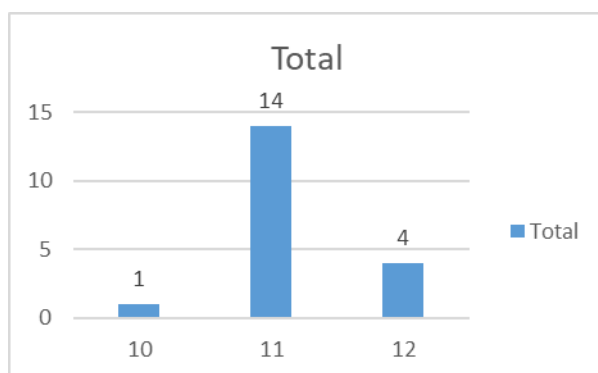
cercano lo más par sería 40 más 40 que da 80 entonces sería la figura 39 que arriba tendría 40 puntos y abajo 41 o sea 40 más 41 o sea 81.

En el discurso el estudiante 1 deja ver como la construcción de su discurso se basa en una generalización desde el pensamiento contextual en el que se permite observar el cumplimiento de elementos desde el análisis funcional del discurso como la designación de objetos asociada a los puntos de la figura , es decir que el estudiante realiza designaciones a los objetos invariantes de la secuencia y establece algún patrón que a través de su discurso es señalado. “...que arriba tendrían 40 puntos y abajo 41 ...” cumpliendo así la función referencial, la constitución de un enunciado completo “lo más cercano si le quitas el 1 sería 80 y lo más cercano lo más par sería 40...”, una proposición compuesta que cumple la función apofántica, la articulación del enunciado completo desde la función de expansión y la transformación potencial recurrente “Yo me puse a pensar ...” cumpliendo así la función de reflexividad que permite construir un razonamiento que se expresa en una argumentación retórica que se enuncia como un razonamiento de tipo inductivo, de acuerdo a Polya (1966) citado en Cañadas & Castro (2004) en un proceso correcto de razonamiento inductivo para la resolución de problemas se debe cumplir que exista un trabajo en casos particulares, exista la formulación de una conjetura, se justifique tal conjetura y haya una comprobación con nuevos casos particulares.

En general, el grupo experimental evidencia algunos datos cuantificables, la edad de los estudiantes tiene como media cercana los 14 años, como se observa claramente en la Gráfica 1.

Tabla 4 *Edad de estudiantes del grupo experimental*

Edad	Cantidad de estudiantes	
10	1	5,26%
11	14	73,68%
12	4	21,05%
Total	19	100,00%

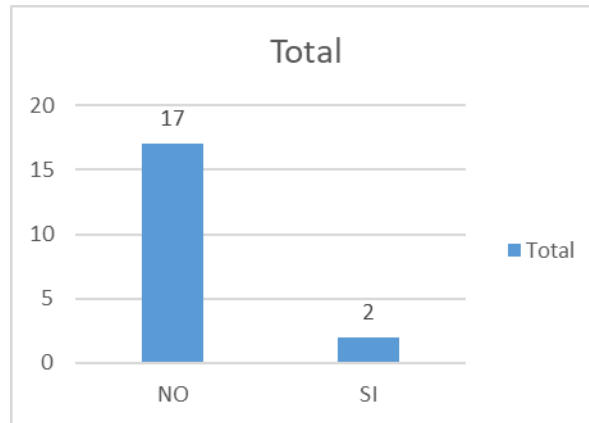
Gráfica 1 *Edad de los estudiantes del grupo experimental*

En cuanto a si los estudiantes que pertenecen a este grupo realizan generalizaciones alrededor de la tarea planteada se encuentra la información organizada en la Tabla 6.

Tabla 5 *Estudiantes que realizan generalización T0 (Grupo experimental)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	17	89,47%
SI	2	10,53%
Total	19	100,00%

Gráfica 2 *Estudiantes que realizan generalización T0 (Grupo experimental)*

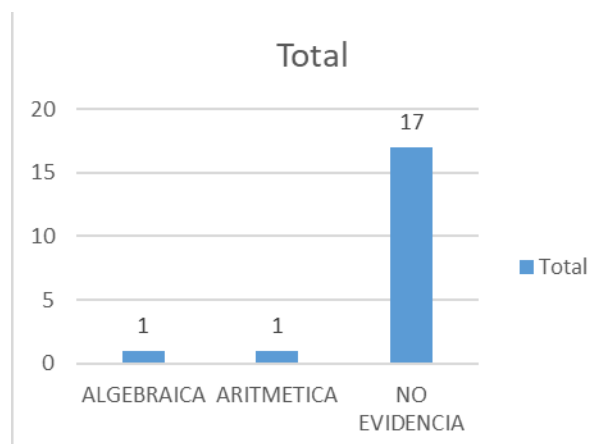


De la anterior organización es posible observar que la mayoría de estudiantes no logra realizar algún tipo de generalización y los estudiantes que alcanzan alguna, se clasifican como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 6 *Tipo de generalización T0 (Grupo experimental)*

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	1	5,26%
ARITMÉTICA	1	5,26%
NO EVIDENCIA	17	89,47%
Total	19	100,00%

Tabla 7 *Tipo de generalización T0 (Grupo experimental)*



En general frente al grupo experimental cuando se aborda la Tarea 0, los resultados evidencian que en los escolares existe una dificultad evidente en la ejecución de los procesos de generalización, que no les permite desarrollar algún tipo de pensamiento alrededor del pensamiento algebraico.

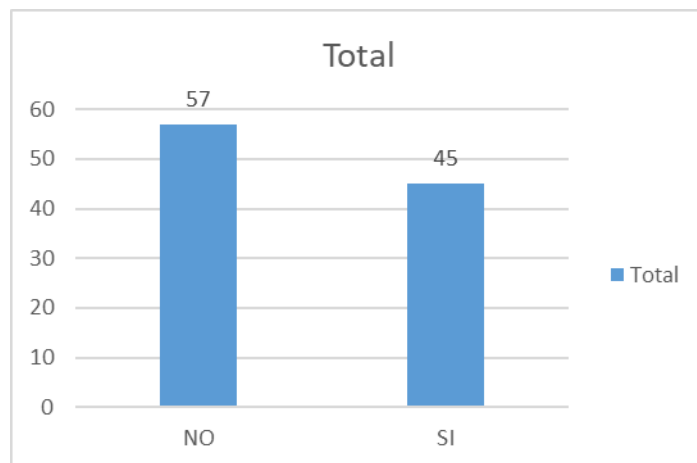
4.2.2. Grupo de Control

En relación con el grupo de control es importante tener en cuenta que la información se obtuvo a partir de la realización de encuentros sincrónicos y dicha información se recogió haciendo uso de formularios remotos, por lo cual no es posible revisar datos desde el método multimodal y la información se restringe a las interacciones realizadas de manera concreta en cuestionarios como anteriormente se describió.

En esta recolección de información nos encontramos con 5 grupos de 40 estudiantes de grado sexto, sin embargo, el acceso a conectividad es reducido para esta primera actividad, por lo cual solo participaron 102 estudiantes de este grupo y en virtud de los cuales se puede observar lo siguiente:

Tabla 8 *Estudiantes que realizan generalización T0 (Grupo de control)*

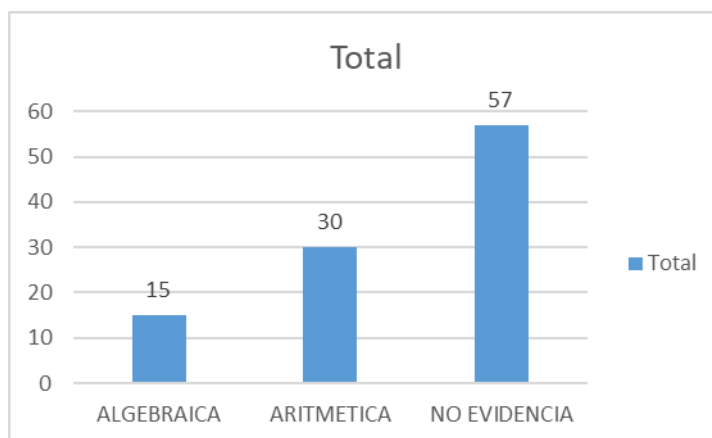
¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	57	55,88%
SI	45	44,12%
Total	102	100,00%

Gráfica 3 *Estudiantes que realizan generalización T0 (Grupo de control)*

En cuanto a qué tipo de generalización realizan los estudiantes nos encontramos con que las generalizaciones de tipo algebraica se evidencian simbólicamente como “ $N+n+3$ ”, “ $(n+1) + (n+2)$ ”, “lo obtuve con $2*n+3$ ”.

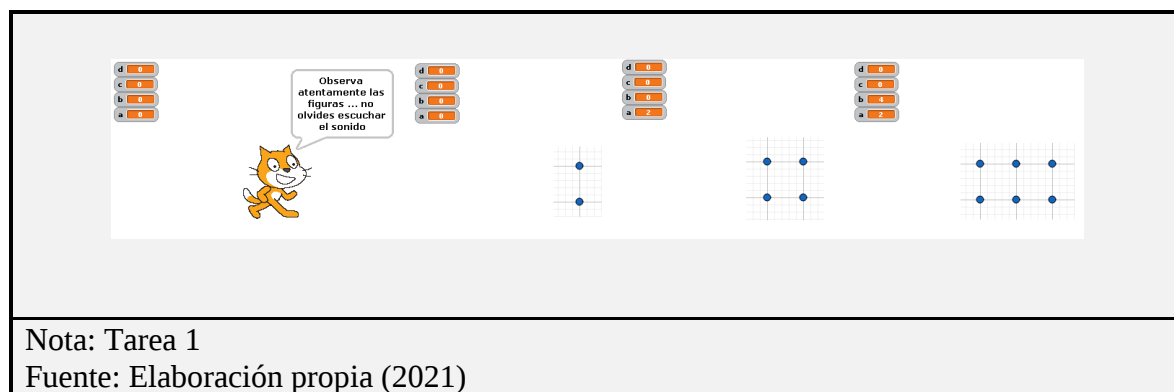
Tabla 9 *Tipo de generalización T0 (Grupo de control)*

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	15	14,71%
ARITMÉTICA	30	29,41%
NO EVIDENCIA	57	55,88%
Total	102	100,00%

Gráfica 4 Tipo de generalización T0 (Grupo de control)

4.3. Tarea 1 - Secuencias Figural Números Pares

En esta tarea se presenta a los estudiantes una secuencia figural usando un programa en Scratch, como se muestra en la Figura 18.

Figura 18. Secuencia de imágenes Tarea 1 presentada usando Scratch

En esta secuencia que se presenta cuadro a cuadro, también es utilizado el sonido como otro medio de percepción para que los estudiantes tengan la posibilidad de asociar el número a cada figura utilizando su sentido auditivo. Como se puede observar en los cuadros, a medida que

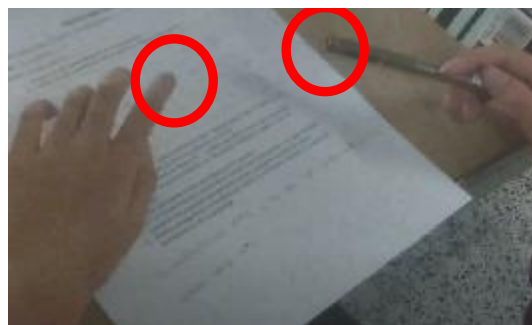
los estudiantes expresan el número asociado a cada figura, que corresponde al número de puntos y al número de sonidos que perciben los estudiantes, los resultados introducidos por los estudiantes se van guardando en las diferentes letras que se ubican en la parte superior izquierda de la figura.

4.3.1. Grupo Experimental

Con el fin de que el estudiante construya una generalización se realizan varias preguntas orientadoras que al final dan como resultado la construcción de un algoritmo en Scratch realizado por los aprendices que buscan presentar la generalización para cualquier número de puntos asociado a la figura “n”, de la secuencia figural; las construcciones discursivas de los estudiantes se describen a continuación de acuerdo al video codificado como Vid-Act1-170321-01:

Estudiante 1: Bueno, me di cuenta de que hay un patrón que por ejemplo es 1 por 2 da 2, 2 por 2 da 4, 3 por 2 da 6 y así sucesivamente entonces para saber la figura 15 toca multiplicar 15 por 2 y me dio 30 y la variante sería n por 30.

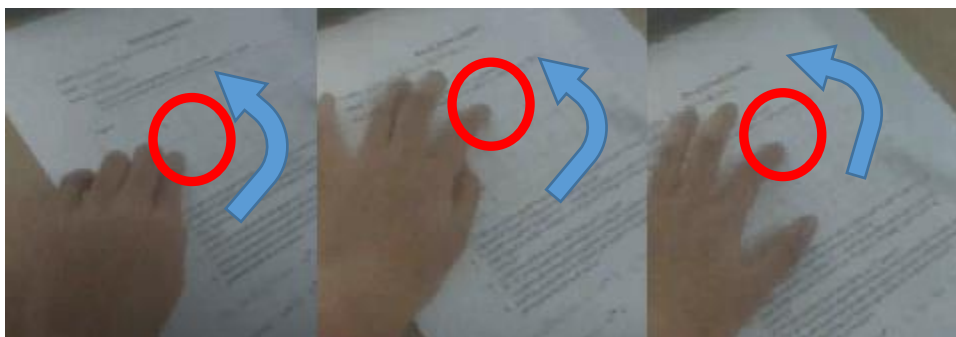
Figura 19. Señalamientos usados por el estudiante 1



En el discurso expresado por la estudiante es posible observar como el señalamiento con el dedo y el esfero, como se muestra en la Figura 19, complementa el relato que realiza la estudiante, el uso del indexical asociado al lugar donde se encuentra, con el fin de designar un objeto asociado a un símbolo que se relaciona con la invariante encontrada por la niña e identificada como el doble del número, hace posible determinar que existe una operación de designación pura de la función referencial detectada en el discurso como lo presenta en los principios de los análisis funcional del discurso de Duval (1999).

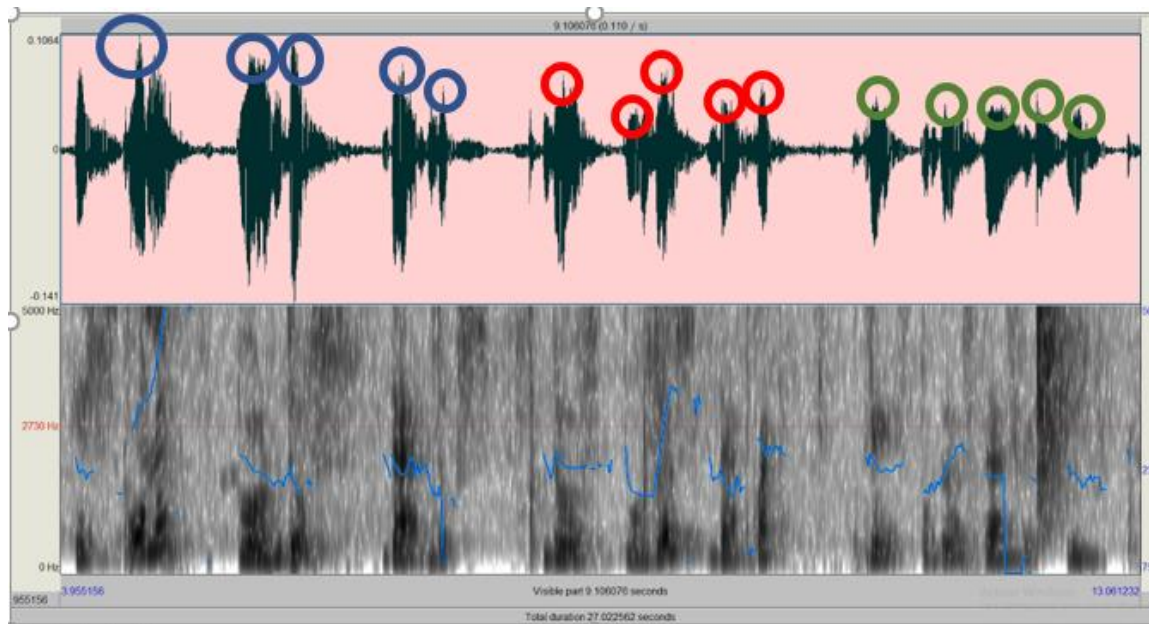
La movilización del gesto realizado al usar señalamientos muestra la manera en que utiliza tres figuras para determinar la objetivación de la regularidad encontrada, al mencionar verbalmente el patrón y acudir a una estructura rítmica que permite detectar la articulación de varios medios semióticos de objetivación, el señalamiento con los dedos que se mueven articulados con las expresiones verbales como de muestra en la Figura 20, el lenguaje natural y el ritmo cumplen así, la función referencial en el discurso de la estudiante. Es de aclarar que este análisis está sustentado desde investigaciones realizadas por Radford (2002) y Vergel (2014).

Figura 20. *Movimiento gestual del estudiante 1*



Como se puede observar en la Figura 21 obtenida usando el software libre “Praat”, que es un programa diseñado para hacer investigaciones en fonética, los puntos azules describen los picos de frecuencia obtenidos en el discurso de la estudiante al mencionar “1 por 2 da 2”, los números asociados a los círculos rojos muestran “2 por 2 da 4” y los números asociados a los círculos verdes muestra “3 por 2 da 6”. Esta gráfica muestra que la movilización de los medios semióticos de objetivación gestuales, en lenguaje natural y el ritmo que se manifiesta en los picos de más altas frecuencias se articulan para señalar los elementos variables dentro de la regularidad que encuentra la estudiante, identificando así unidades significantes dentro de los registros de representación semiótica que la estudiante moviliza como medios semióticos de objetivación y que permiten a la estudiante encontrar el patrón, describirlo y asociarlo de una forma intuitiva a un elemento que varía y se ve reflejado de forma indexical.

Figura 21. Evidencia del uso del ritmo como medio semiótico de objetivación



Esta actividad discursiva que expresa la estudiante tiene una característica importante en cuanto a que tiene un valor de verdad, el cual se presenta como una proposición compuesta. La implicación que plantea la estudiante nos muestra cómo usando hechos similares, se hace verdadera la conclusión acerca de la cantidad de puntos de la figura 15 correspondiente a la secuencia figural planteada en la tarea, es decir, nos muestra cómo se concluye un hecho diferente con base en hechos establecidos previamente en un proceso de razonamiento inductivo; dicho proceso de razonamiento se ubica en que el discurso de la estudiante, cumple una operación de predicación de la función apofántica, dada la proposición compuesta propuesta. En el análisis del discurso de la estudiante, también se puede observar que aparece una misma unidad lexical bajo el modo fonético “... *por 2*”, lo cual implica una forma de expansión lexical discursiva, forma que nos muestra cómo hasta este punto del discurso, la estudiante no logra realizar una expansión formal que permitiría mostrar en su discurso un tipo de razonamiento deductivo, sin embargo, el análisis muestra que en la expresión “... *me di cuenta* ...”, emerge una forma asociada a la función de reflexividad discursiva, dado que la manifestación expresada, permite observar un tipo de razonamiento que puede ser una *démarche* de prueba y de modificación de la convicción.

Como se puede observar, las funciones que cumple el discurso de la estudiante se enmarcan desde la designación pura como función referencial y la predicación desde la función apofántica, además guarda lexicalidad desde la función de expansión y así mismo cumple una función de reflexividad, por lo cual el discurso elaborado se asocia a un tipo de razonamiento inductivo, sin embargo, después de esta elaboración por parte de la aprendiz, se detecta un complemento del discurso como se muestra en el video codificado como *Vid-Act1-1703-02*:

Estudiante 1: Bueno ...eeemmmm... primero empecé por el comienzo, y emmm por el programa que tú pusiste, yo fui poniendo los punticos, luego conté cuántos punticos había y el número de la figura hasta la figura 5.

Profesor: ¿Crees que existe alguna manera de saber cuántos puntos tiene la figura 15?

Estudiante 1: Me di cuenta de que acá en la tabla hay un patrón de que 1 por 2 me da 2 por 2 me da 4, 2 por 3 me da seis ... y así sucesivamente entonces yo multipliqué 15 por 2 y me dio 30, esa es mi forma de saberlo sin construirla, además de que no debemos olvidar de que siempre hay dos líneas, entonces por ejemplo acá es la figura 1 y hay un punto en cada línea, y acá hay... es la figura 2 y hay dos puntos en cada línea y así sucesivamente, entonces fue así más o menos también.

Profesor: ¿Bueno qué figura se puede construir con 28 puntos?

Estudiante 1: Con 28 puntos el número más cercano a 28 par es 30 entonces como el número 15 es 15 por 2 me da 30, entonces es 14 por dos me da 28.

Profesor: O sea, ¿qué figura sería?

Estudiante 1: Sería la 14

Profesor: ¿Crees que podría existir una figura con 51 puntos?

Estudiante 1: No, eeeeeeehh.... porque todos los números multiplicados por dos son pares

Profesor: ¿Si n es una letra que representa el número que corresponda a la figura puedes construir una expresión que permita conocer cualquier cantidad de puntos?

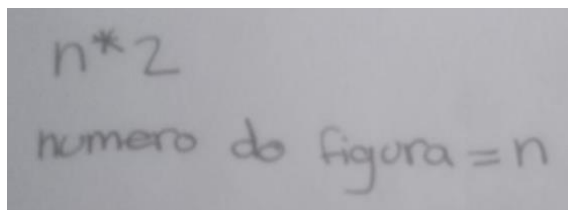
Estudiante 1: Sí, n por 2

Profesor: ¿Y ... la escribiste?

Estudiante 1: Sí, acá.

En esta parte del discurso se observa que la estudiante, además de evidenciar un pensamiento algebraico, al utilizar la frase “ n por 2” para describir la generalización, identifica un rasgo característico de este tipo de pensamiento que tiene que ver con la indeterminancia numérica y describe el término general usando una letra. En definitiva, la estudiante logra un nivel de pensamiento algebraico simbólico dado que designa el objeto indeterminado usando la letra “ n ”, y mostrando así un primer uso de signos alfanuméricos.

Figura 22. Generalización algebraica construida por la estudiante



La expresión planteada por la estudiante en la Figura 22, muestra el asterisco (*), símbolo traído de la matemática computacional y que la estudiante ha asociado desde el uso del lenguaje de programación visual Scratch, dando así muestras de un razonamiento abductivo, ya que al presentar la fórmula e inscribirla en el contexto de bloques de programación en Scratch, hace de ella una posibilidad que pone a prueba usando el computador, y movilizand así otro medio semiótico de objetivación que le permite hacer de dicha fórmula que parece plausible, una hipótesis que es sometida a varias pero infinitas pruebas, lo que evidencia un tipo de generalización algebraica tal como se presenta en las investigaciones de Radford :

“Para que la generalización sea algebraica se requiere, de acuerdo a lo expuesto arriba, que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera analítica. Esto

quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término”. (2013, p. 6).

La expresión llevada a prueba usando el algoritmo en Scratch, muestra un elemento importante que le permite a la estudiante identificar el indeterminado de acuerdo a la expresión “el resultado que dijo la persona por dos”, como se observa en el diálogo del video codificado como Vid-Act1-1703-02:

Profesor: Realiza un algoritmo en Scratch que valide los resultados obtenidos.

Cuéntame cómo hiciste el algoritmo.

Estudiante 2: Bueno acá... eeeeeehhh... entonces para la figura... ah bueno... puse que preguntara el perrito que pregunta, que de qué número quería saber la cantidad de puntos entonces para la figura la respuesta de la persona emmm.... Ahí tuvimos que multiplicar la respuesta de la persona por 2 entonces le puse decir hay emmm... y el resultado que dijo la persona por dos.

Profesor: ¿Y sí te funciona?

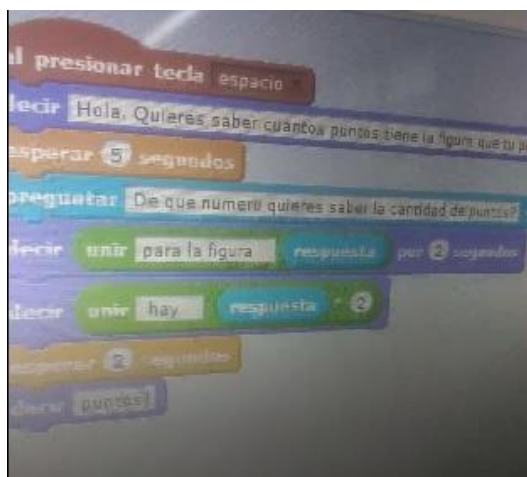
Estudiante 2: Sí

Figura 23. Construcción en Scratch



De esta manera, la estudiante 2 utiliza un actor externo, como se muestra en la Figura 23, para presentar su razonamiento, en este caso la generalización que subyace a la Tarea 1. Este elemento se torna importante en la construcción del discurso que permite exponer la validez del razonamiento. Sin embargo, se está de acuerdo con Duval (1999), en cuanto a que las representaciones usadas por los sujetos y el funcionamiento comandado por las reglas de validez, las investigaciones y aproximaciones psicológicas no muestran evidencia de procesos cognitivos comunes entre ellos. Lo relevante aquí es que, en este punto, el razonamiento expresado por la estudiante, no guarda relación con algún modelo “lógico”, sino que muestra una relación con factores de interacción social que se configuran en la actividad conjunta en el proceso dialógico de intercambio de saberes de los estudiantes.

Figura 24. *Algoritmo construido en Scratch para la Tarea 1*



En cuanto a la producción que se realiza en la construcción del algoritmo dentro de Scratch, como se muestra en la Figura 24, es posible concluir que la fórmula obtenida ha sido deducida apodícticamente, dado que la misma construcción del algoritmo permite establecer una

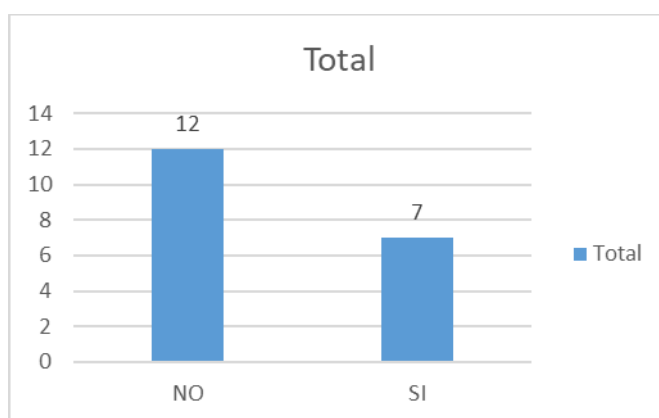
serie de pruebas a la aplicación de términos que incluso, pueden ser determinados con respecto a su dificultad de cálculo y que en definitiva hace tránsito a un proceso de abducción analítica a la deducción de la fórmula.

De forma implícita el algoritmo construido muestra la deducción de una fórmula que se expresa como proposición simple y que determina la generalización de la secuencia figural. Lo importante aquí se relaciona con que la estudiante le da sentido a esta proposición, no solo desde el contenido semántico de la misma sino por los valores que toma al enunciarla. Es decir, el valor epistémico dado por la estudiante a su resultado tiene que ser puesto a prueba para que otros interlocutores también le den el mismo valor epistémico, por lo cual, para establecer el valor lógico de verdad, la estudiante tiene que mostrar resultados específicos de verificación o prueba, lo que demuestra tal y como lo presenta Duval, “El valor epistémico y el valor lógico de verdad, en tanto componente de “sentido” de una proposición enunciada, deben poder explicarse de la misma manera que su contenido”(1999, p. 183). Lo que pone de manifiesto la situación es que para que el estudiante pueda comunicar sus resultados, incorpora en su enunciación las pruebas de validez realizadas con la ejecución del algoritmo en Scratch y sus pruebas de validez, lo cual permite unificar el valor epistémico de la proposición presentada como generalización.

En cuanto a los resultados obtenidos por el grupo, se encuentra que un porcentaje alto de los estudiantes no logra ningún tipo de generalización como se evidencia en la Tabla 11 y la Gráfica 5.

Tabla 10 *Estudiantes que realizan generalización T1 (Grupo experimental)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	12	63,16%
SI	7	36,84%
Total	19	100,00%

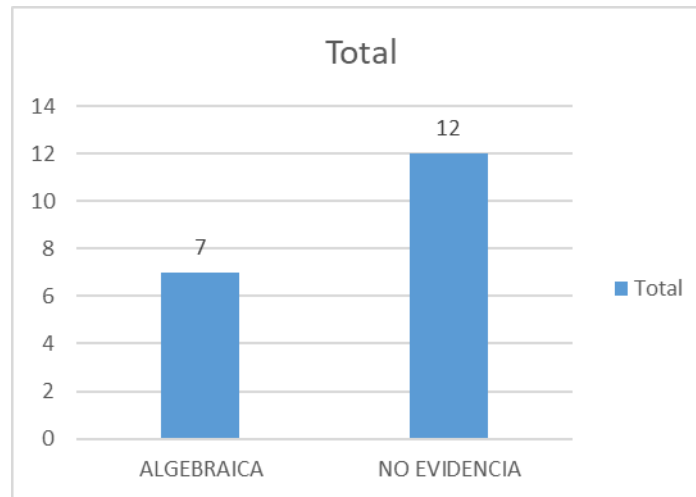
Gráfica 5 *Estudiantes que realizan generalización T1 (Grupo experimental)*

Con relación a los estudiantes que realizaron las generalizaciones, se puede observar que existe un tránsito directo hacia la generalización algebraica como se puede observar en la Tabla 12 y la Gráfica 6.

Tabla 11 *Tipo de generalización T1 (Grupo experimental)*

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	7	36,84%
NO EVIDENCIA	12	63,16%
Total	19	100,00%

Gráfica 6 *Tipo de generalización T1 (Grupo experimental)*



Como se puede interpretar a partir del gráfico, el uso del computador establece la necesidad de realizar una generalización que puede ser aritmética sofisticada o algebraica, identificándose así el lenguaje de programación visual como un medio semiótico de objetivación que direcciona el trabajo acerca de las generalizaciones desde la fórmula que puede ser establecida como la abducción proto-analítica hasta la abducción analítica. Lo anterior conlleva el direccionamiento de la tarea en la obtención de una fórmula desde lo simbólico.

A nivel general es posible establecer que la tarea implica que no existe una necesidad de establecer una fórmula, por lo cual en varios de los casos individuales no se logra una abducción proto-analítica o analítica, en algunos casos no se evidencia ningún tipo de generalización o simplemente no hay evidencia de algún tipo de razonamiento deductivo.

Como puede verse en el gráfico, la producción de los estudiantes señala un porcentaje que supera la mitad de ellos en cuanto a los procesos de generalización simbólica y la abducción

analítica que permite la deducción de la fórmula. Así pues, no es posible para un porcentaje considerable de estudiantes mostrar elementos que lleven a pensar que han tenido procesos de razonamiento abductivo por lo cual no se establece ningún tipo de generalización.

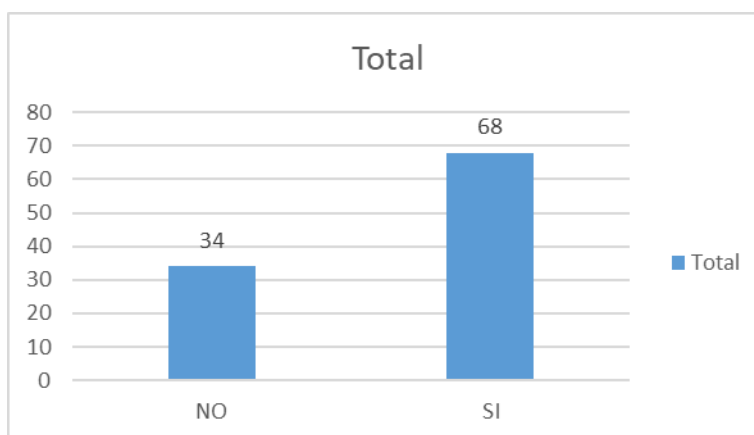
4.3.2. Grupo de Control

En este grupo se encuentra que los resultados obtenidos en los dos grupos de control y experimental son similares, los estudiantes son capaces de realizar generalizaciones en un porcentaje cercano a la tercera parte como se muestra en la Tabla 13 y la Gráfica 7:

Tabla 12 *Estudiantes que realizan generalización T1 (Grupo de control)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de Estudiantes	Porcentaje de Estudiantes
NO	34	33,33%
SI	68	66,67%
Total	102	100,00%

Gráfica 7 *Estudiantes que realizan generalización T1 (Grupo de control)*

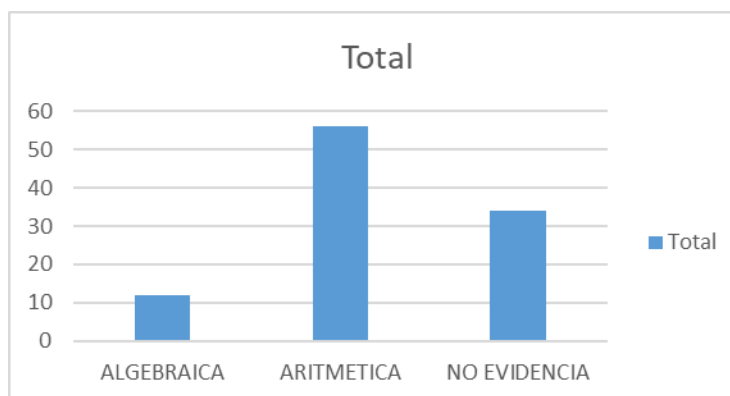


Frente a los resultados obtenidos en cuanto al tipo de generalización, se evidencia un alto número de estudiantes que logra una generalización de tipo aritmético, reduciendo sus procesos de solución a razonamientos de tipo inductivo como se muestra en la Tabla 14 y la Gráfica 8:

Tabla 13 Tipo de generalización T1 (Grupo de control)

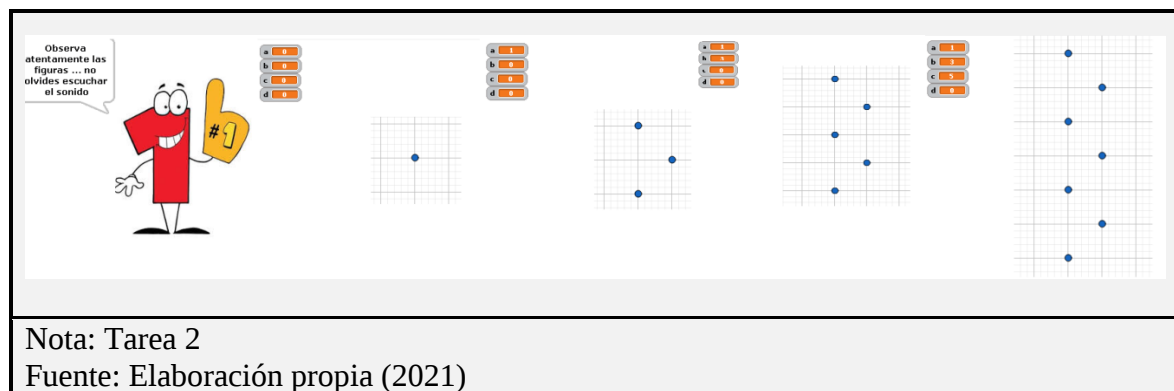
Tipo de Generalización	Cantidad de Estudiantes	Porcentaje de Estudiantes
ALGEBRAICA	12	11,76%
ARITMÉTICA	56	54,90%
NO EVIDENCIA	34	33,33%
Total	102	100,00%

Gráfica 8 Tipo de generalización T1 (Grupo de control)



4.4. Tarea 2 – Secuencia Figural Números Impares

En esta tarea se les presenta a los estudiantes una secuencia figural usando un programa en Scratch, como se observa en la Figura 25.

Figura 25. *Secuencia de imágenes Tarea 2 presentada usando Scratch*

En esta secuencia que se presenta cuadro a cuadro, también es utilizado el sonido como otro medio de percepción para que los estudiantes asocien el número a cada figura utilizando su sentido auditivo. Como se puede observar en los cuadros, en la medida en que los estudiantes contestan el número asociado a cada figura, que corresponde al número de puntos y al número de sonidos que perciben, los resultados introducidos por los estudiantes se van guardando en las diferentes letras que se ubican en la parte superior izquierda de la figura.

4.4.1. Grupo experimental

De la misma forma que en las otras actividades, la dinámica de aprendizaje se desarrolla a partir de preguntas orientadoras que permiten realizar una caracterización de las diferentes formas de producción que realizan los estudiantes acerca de la generalización en secuencias figurales. En el siguiente diálogo con el estudiante 1 se pueden describir varias situaciones susceptibles de analizar que se muestran en el video codificado como Vid-Act2-250321-01:

Profesor: *¿Crees que existe alguna manera de saber cuántos puntos tiene la figura 15 sin dibujarla sin construirla?*

Estudiante 1: *Sí, yo creería que podría sumar de dos en dos, 15 veces.*

Profesor: *¿De dos en dos, 15 veces?*

Estudiante 1: *Sí, la figura 10 lo mismo, pero tendría que ser el resultado impar.*

Profesor: *¿Tiene que dar un resultado impar, sí? ¿Y entonces puede dar 28 puntos una figura?*

Estudiante 1: *No, no creo. Porque yo hice digamos lo mismo como hice las otras y me da o 27 o 29, entonces por eso no creo.*

Profesor: *¿Y se puede construir una expresión?*

Estudiante 1: *Sí, yo puse un ejemplo, ahí yo quería que la n representa cualquier número entonces digamos 4 por 1, 4 menos 3.*

En el diálogo se observa una comprensión de la regularidad que se encuentra implícita en la secuencia figural, esta se evidencia en la expresión “*Sí, yo creería que podría sumar de dos en dos, 15 veces*”, sin embargo, no es posible detectar en la estudiante el sentido de indeterminancia que pueda ser traducido verbalmente a una forma particular de nombrarlo. Pero de la misma forma, el estudiante es capaz de representar usando bloques en Scratch ese sentido de indeterminancia que dentro de este sistema semiótico representado en bloques es nombrado como una variable. El estudiante además es capaz de determinar la regularidad que se expresa como la identificación de números impares y su respectiva forma de encontrar por inducción la relación aritmética entre el número asociado a la figura que tiene 27 puntos y la figura que tiene 29 puntos, estableciendo así, la imposibilidad de encontrar una figura que tenga 28 puntos.

Las expresiones que se articulan dialécticamente con las formas de manipular las fórmulas que muestran la generalidad, se pueden describir como se muestra en la figura 24 y que evidencian la necesidad de exponer los resultados obtenidos desde la gestualidad, de la misma

manera, se encuentra una forma de señalar usando el artefacto tecnológico demostrando una migración de los gestos usualmente utilizados, tal como se observa en las Figuras 26 y 27.

Figura 26. *Asociación del gesto con producciones escritas*

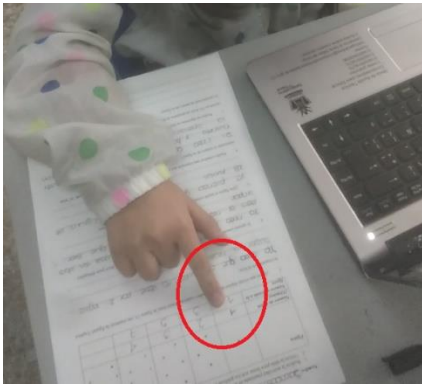
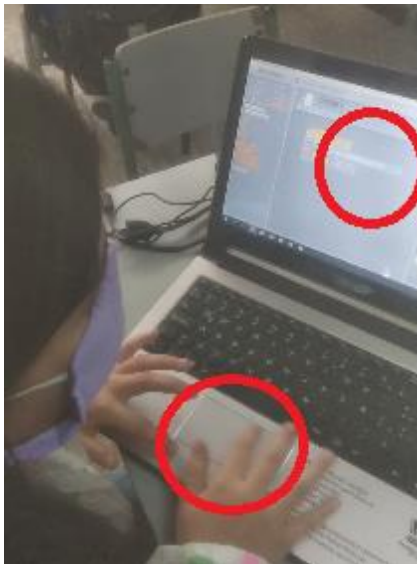


Figura 27. *Gestos asociados al artefacto computacional*



El proceso que incluye la gestualidad va acompañado de una construcción argumentativa que inicialmente se presenta por la estudiante 1 en la frase a continuación donde se le escucha exponer la generalización realizada de acuerdo a la actividad y asociada a su expresión simbólica y al lenguaje de programación usado, como se muestra en el video Vid-Act2-240321-02:

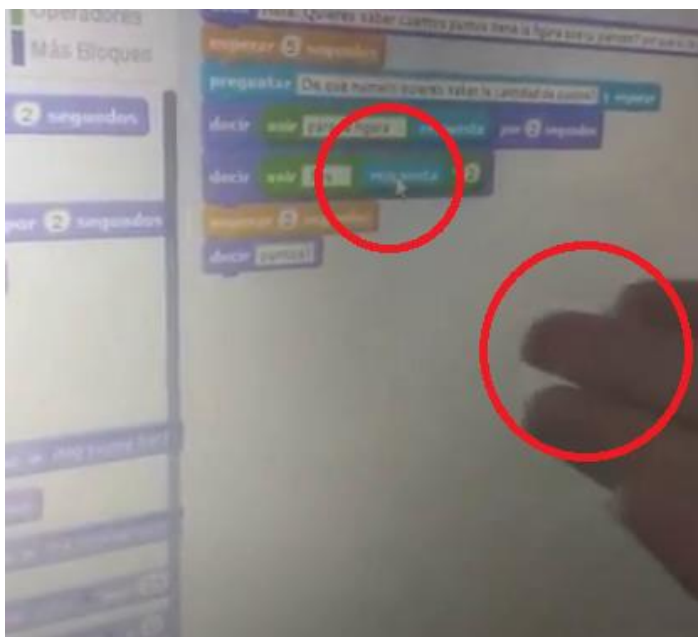
Estudiante 1: Puse $n-1$ la variable menos 1 y luego le di unir y puse más n y mi teoría es esta... mmm ...es agregar el número de la figura anterior a la figura actual...digamos para la figura 15 tendríamos que agregar 14, para la figura 13 deberíamos agregar 12, para la figura 4 deberíamos agregar 3 y así sucesivamente...entonces lo que yo hice fue poner n menos 1 más n puntos.

En la presentación realizada por el estudiante es posible ver como ya en su discurso refleja su sentido de indeterminancia que, además, es asociado a una letra que llama variable, dado que para su manejo en el lenguaje de programación Scratch su construcción requiere del uso de esta denominación. Es decir que esta indeterminancia no solo se limita a su simbolización en el sistema alfa-numérico sino que también se ve reflejado en el sistema de bloques asociado al lenguaje de programación, por otro lado, el estudiante en su presentación da a entender que identifica la expresión verbal dada como un término el cual tiene características de operatividad, que no solo se limita a las operaciones de suma y resta usuales en la aritmética, sino que también menciona “*el unir*”, como el bloque que le permite desarrollar una operación desde el lenguaje de programación para así mostrar sus infinitos resultados a partir de la compilación del mismo. La manera específica de nombrar la variable “ n ” dentro del bloque correspondiente al lenguaje de programación, caracteriza de forma completa las condiciones necesarias planteadas por Radford (2010), para que se evidencie el pensamiento algebraico.

Es importante mostrar cómo el uso del lenguaje de programación como medio semiótico de objetivación, presenta situaciones en los cuales el desarrollo de la generalización modifica elementos importantes que hacen parte de la dialéctica con la que los estudiantes logran comunicar los resultados obtenidos en sus diferentes expresiones, en este caso desde la

gestualidad; la Figura 28 muestra como los señalamientos que usualmente son realizados por los estudiantes utilizando sus manos, migran hacia los señalamientos usando el cursor del mouse.

Figura 28. *Migración de elementos gestuales en interacción con el lenguaje de programación*



De igual manera, se evidencian diferentes formas de expresión que logran manifestar la regularidad encontrada en la secuencia figural, así es como el estudiante 2, desde el uso de la entonación como medio semiótico de objetivación logra comunicar el patrón encontrado como se muestra en la figura asociada al video Vid-Act2-240321-02

Figura 29. *Amplitud de onda y entonación en el reconocimiento del patrón*

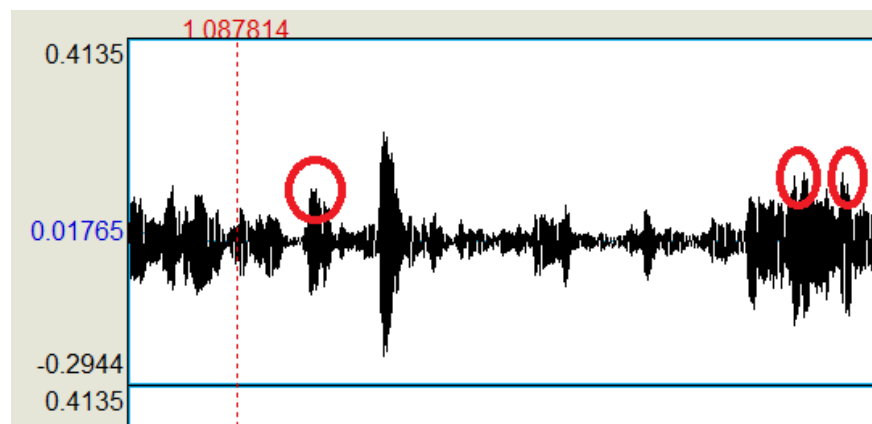
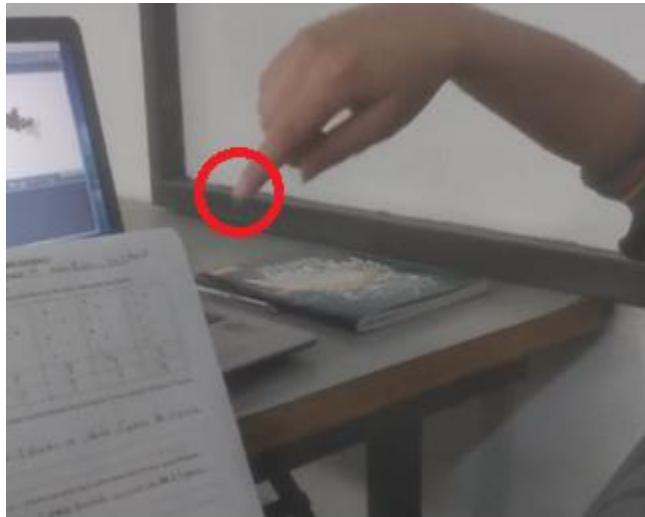


Figura 30. Señalamiento siguiendo el ritmo y la entonación en la construcción discursiva del estudiante



En estas figuras, además de evidenciar el uso del indexical como medio semiótico de objetivación, es posible encontrar una forma de presentar el patrón de la secuencia figural desde la entonación. Los círculos rojos de la Figura 29 representan el aumento en la amplitud de la onda desde el discurso del estudiante: “*como se le van sumando dos y comienza con uno entonces son números impares entonces se le van sumando de a dos y como tenemos aquí la figura dos tiene tres puntos la figura tres cinco hay se ve que se le van sumando dos entonces la figura tiene siete puntos*”. En la comunicación que presenta el estudiante no solo se evidencia el uso de medios semióticos de objetivación asociados al movimiento y señalamiento usando sus manos como se muestra en la Figura 30 y a la entonación alrededor del patrón encontrado, también es posible observar cómo construye su discurso para expresar sus conclusiones. El estudiante hace uso de esta entonación para realizar una designación pura como función

referencial, para luego asociar una operación de categorización simple identificando que el patrón encontrado está relacionado con los números impares.

En el argumento presentado por el estudiante, también es posible observar cómo se evidencia una operación de predicación de la función apofántica y su forma de expresión en lenguaje natural deja ver una estructura remática dado que articulan la identificación del patrón como un número impar y además logra integrarlo con la propiedad asociada a la regularidad que permite establecer una diferencia de dos números entre cada término. Lo importante de esta situación, es que dado que en la proposición asociada a la implicación que presenta el estudiante, se establece que además de la función meta-discursiva de comunicación que se evidencia, también existe la función de objetivación como lo deja ver Duval (1999), “Lo interesante de las unidades apofánticas de estructura remática es que pueden cumplir funciones meta-discursivas de comunicación o de objetivación” (p. 103)

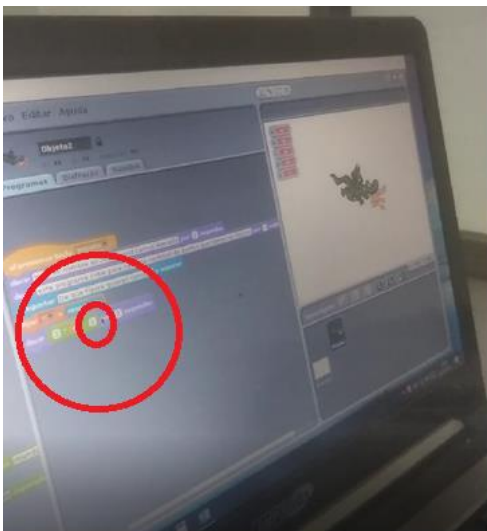
La comunicación realizada por el estudiante refleja también una función de expansión discursiva, por cuanto presenta una progresión de proposiciones, que responde a un orden no modificable y esta se hace por sustitución de nuevos resultados de proposiciones anteriores. La forma asociada a esta expansión discursiva se relaciona con la expansión cognitiva, dado que de alguna manera existe un empleo especializado del lenguaje natural que se evidencia en la construcción de diferentes proposiciones, la explicación y las proposiciones de estructura remática, que dejan ver como resultados un tipo de argumentación que implica un razonamiento deductivo que se ve reflejado en la obtención de la fórmula de números impares.

De igual manera en la expresión “*La construí con, ... eeehh ... mira cómo se le van sumando dos y comienza con uno, entonces son números impares.*”, es posible establecer que

existe una función de reflexividad, puesto que existe una intención y empeño por establecer una relación con el interlocutor, es decir el estudiante emplea la lengua usando enunciados para decir lo que quiere expresar.

Esta posibilidad de estructurar el discurso desde las diferentes funciones, muestra cómo una cantidad considerable de estudiantes logró establecer una generalización para la secuencia figural y cómo esta se refleja desde el uso del lenguaje de programación como se evidencia en la Figura 31, el estudiante 2 expresa: *“pues entonces lo hice haciendo el dos por la figura menos uno y así fue el resultado”*.

Figura 31. Representación simbólica desde el uso del lenguaje de programación



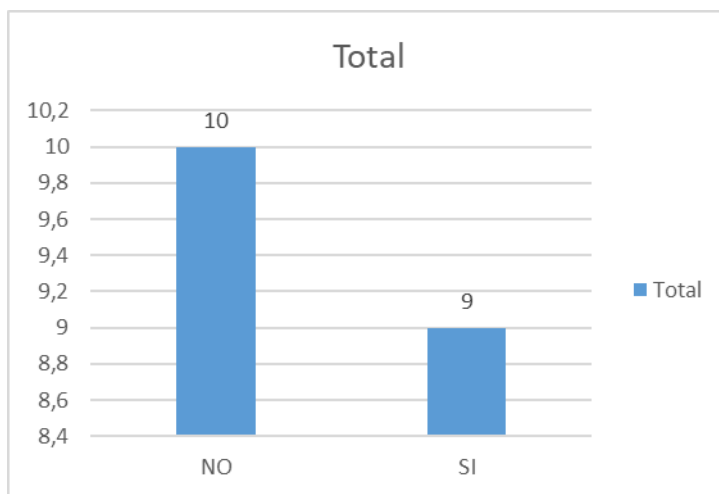
La expresión en lenguaje natural del estudiante no solo es posible representarla desde un lenguaje especializado alfa-numérico, sino que el estudiante en su afán por comprobar tal resultado utiliza los bloques de Scratch como medio semiótico de objetivación lo que permite evidenciar una abducción analítica, al deducir apodóticamente una expresión directa que con ayuda del lenguaje de programación le permite establecer cualquier término de la secuencia.

En general este grupo experimental evidenció resultados muy parecidos a los de la Tarea 1 que se muestran en la organización a continuación, de la cual se puede observar que un alto número de estudiantes tiene dificultades para realizar generalizaciones de cualquier tipo como se evidencia en la Tabla 15.

Tabla 14 *Estudiantes que realizan generalización T2 (Grupo experimental)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	10	52,63%
SI	9	47,37%
Total	19	100,00%

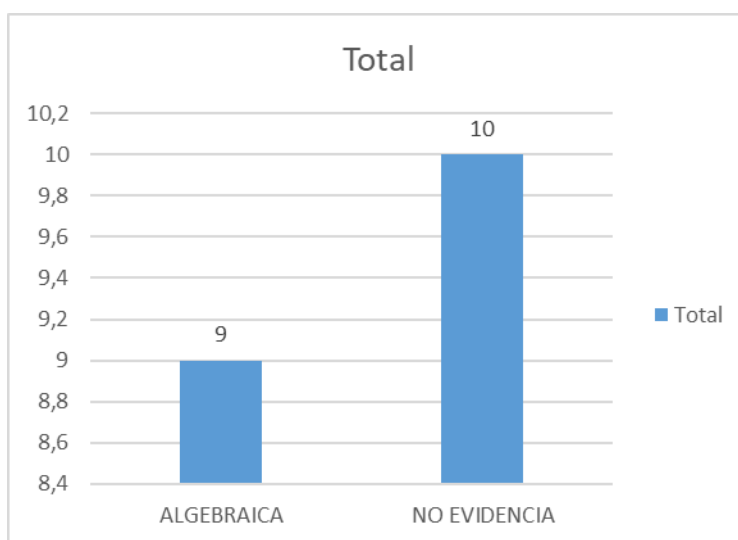
Figura 1 *Estudiantes que realizan generalización T2 (Grupo experimental)*



En cuanto al tipo de generalización que llevan a cabo los estudiantes se puede observar en la Tabla 16 y la Gráfica 9 que realizan una transición directa a la generalización algebraica.

Tabla 15 *Tipo de generalización T2 (Grupo experimental)*

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	9	47,37%
NO EVIDENCIA	10	52,63%
Total	19	100,00%

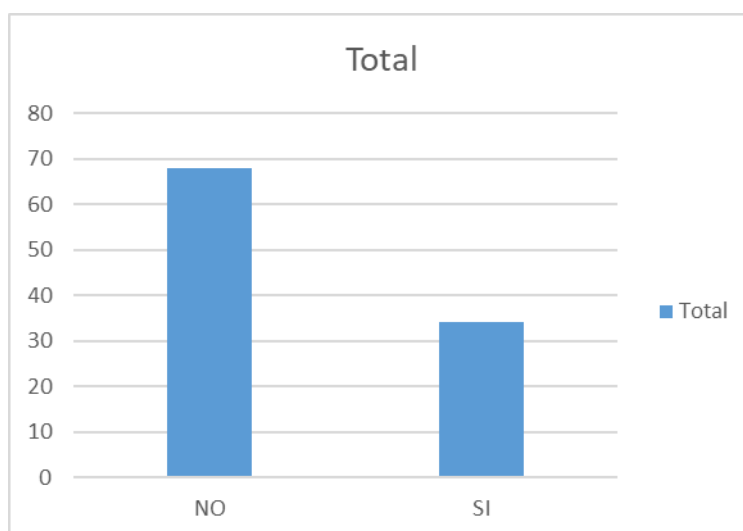
Gráfica 9 *Tipo de generalización T2 (Grupo experimental)*

4.4.2. Grupo de Control

Si bien, los resultados son similares al grupo experimental se puede observar claramente que un porcentaje mayor de estudiantes no logró realizar ningún tipo de generalización como se evidencia en la Tabla 17 y la Gráfica 10.

Tabla 16 *Estudiantes que realizan generalización T2 (Grupo de Control)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	68	66,67%
SI	34	33,33%
Total	102	100,00%

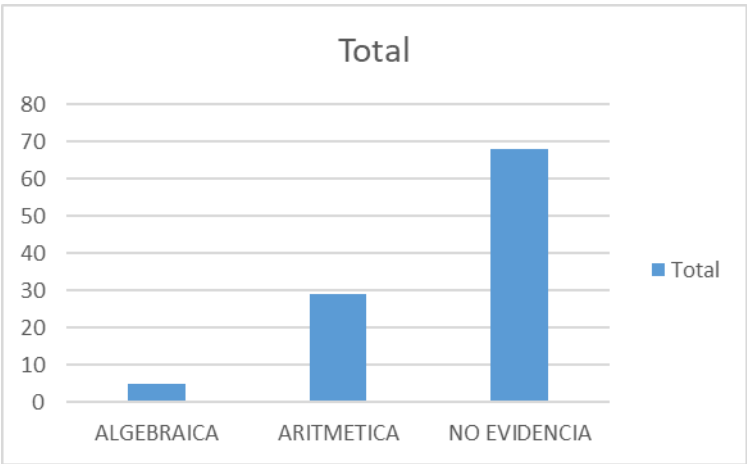
Gráfica 10 *Estudiantes que realizan generalización T2 (Grupo de Control)*

De la misma manera, los estudiantes que logran realizar la generalización se quedan en generalizaciones de tipo aritmético y no alcanzan a plasmar simbólicamente la relación entre números naturales y el número asociado a la secuencia figural, tal como se muestra en la Tabla 18 y gráfica 11.

Tabla 17 Tipo de generalización T2 (Grupo de control)

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	5	4,90%
ARITMETICA	29	28,43%
NO EVIDENCIA	68	66,67%
Total	102	100,00%

Gráfica 11 Tipo de generalización T2 (Grupo de control)



4.5. Tarea 3 – Secuencia Figural Números Triangulares

En esta tarea se les presenta a los estudiantes una secuencia figural usando un programa en Scratch, de la siguiente forma:

Figura 32. Secuencia de imágenes Tarea 3 presentada usando Scratch

a

b

c

d



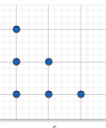
Observa atentamente las figuras ... no olvides escuchar el sonido



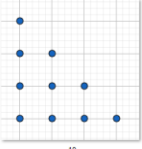
1



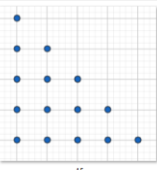
3



6



10



15

Nota: Tarea 3

Fuente: Elaboración propia (2021)

4.5.1. Grupo experimental

Esta actividad posee las mismas características de las dos anteriores, pero con un grado de dificultad mayor. Los estudiantes exhiben sus aprendizajes desde los diferentes medios semióticos de objetivación utilizados, tal como se describe a continuación y en el video codificado como Vid-Act3-260321-01.

La estudiante dos presenta como resultado en esta afirmación una intención de construir una generalización, que en primera instancia llega a crear una expresión verbal que establece el valor de cualquier término, a partir de un término conocido menor:

***Estudiante 2:** Yo, la primera vez que hice el ... mi operación matemática fue que me había dado cuenta de que uno, más el número de la fila tres que era el número de la fila anterior, más el número de la anterior y así sucesivamente.*

Este tipo de comprensión y comunicación se establece como una generalización aritmética, que ha sido estudiada por Vergel (2019), analizándola como un tipo de abducción proto-analítica, es decir que por el momento es pura posibilidad, aun no existe un valor lógico de verdad que pueda establecer una expresión que muestre un razonamiento deductivo en el proceso. Sin embargo, la misma estudiante expresa lo siguiente:

***Estudiante 2:** Pero luego, me di cuenta de que necesitaba una fórmula y realizar el programa, entonces no sabía cómo poner el número de la figura y pues me di cuenta de una secuencia que era que multiplica el número de la figura por el número de la figura anterior y luego ese número lo dividía... digamos, trabajamos con n y b entonces n por b me daba y , y dividido en dos me daba el número, el número de b .*

Figura 33. Señalamientos para expresar generalización aritmética

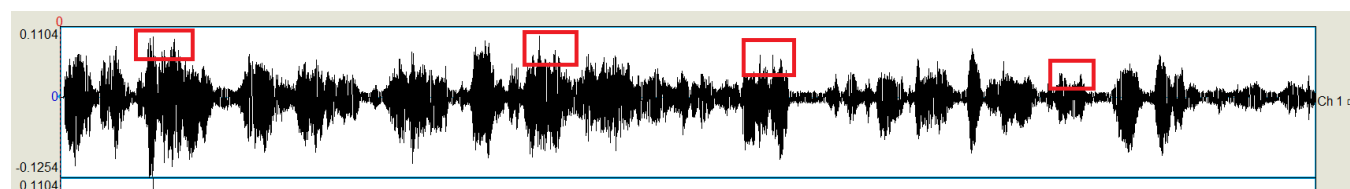


Las dos fotos de la Figura 33 evidencian cómo la estudiante a partir del señalamiento con el dedo logra expresar un tipo de proto-analiticidad que se pone de manifiesto en la expresión de generalización aritmética, pero cuando intenta expresar sus resultados como una expresión algebraica obligatoriamente tiene que migrar del medio semiótico gestual a un medio semiótico que utiliza el lápiz y el papel como consecuencia de su dificultad para transmitir y explicar la información.

De la misma manera la estudiante dos, pasa primero por una fase de abducción proto-analítica para luego deducir la fórmula como lo manifiesta en el video Vid-Act3-270321-02:

Estudiante 2: *Como la primera figura que hicimos que era la figura y la anterior y ahí le sumamos, por ejemplo, tres más dos más uno, cuatro más tres más dos más uno cinco más cuatros más tres más dos más uno.*

Figura 34. Ritmo como medio semiótico de objetivación



La figura 34 muestra cómo se puede establecer el ritmo como el uso de medio semiótico de objetivación por parte de la estudiante, dado que la regularidad manifestada en la amplitud del sonido expresa la obtención del patrón encontrado en la secuencia figural. Tal regularidad se manifiesta como particularidad en la posibilidad de encontrar una cantidad de puntos para la figura específica como lo expresa la estudiante:

Profesor: *Y si quieres construir la figura 10 entonces, ¿qué debes hacer?*

Estudiante 2: *Tengo que multiplicar y sumar, como sumar, multiplicar 10 por diez más uno y también tengo que dividir el resultado por dos y ahí me da 110.*

Profesor: *Bueno, ¿se puede construir una figura con 28 puntos?*

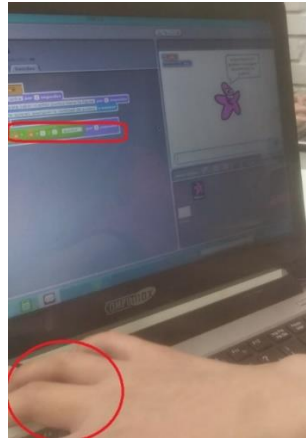
Estudiante 2: *No se puede, porque no hay una figura que se pueda formar porque si la del cinco da 15, la del ocho da 32 y ya se pasaría porque la del siete no da y la del seis.*

Esta generalización expresada por la estudiante desde un caso particular, conlleva a que realice la generalización desde la utilización del lenguaje de programación usando Scratch. Para esto es posible ver como la estudiante lo presenta:

Estudiante 2: *Primero escribí mi nombre, pregunté y saqué la variable n y saqué el más, el n más uno y el n por dividido 2 y luego lo uní.*

En esta manifestación realizada por la estudiante, se puede observar como la construcción de bloques le permite plasmar la particularidad presentada a partir de la construcción de la variable y su comprensión de la misma basada en la situación problema planteada en la secuencia figural.

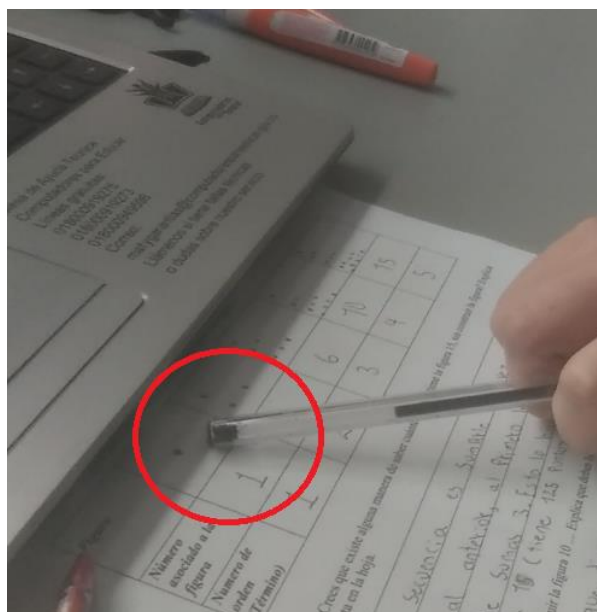
Figura 35. *Formas actuales de representación de la generalización*



La Figura 35 muestra como la estudiante 2 migra, sus formas tradicionales en las que utiliza medios semióticos de objetivación, a nuevas formas de representación que le permiten objetivar su conocimiento desde el uso de herramientas computacionales. Como ya se ha podido detectar, existe una relación entre los señalamientos que usualmente se realizaban con la mano y que pasaron a utilizar el cursor del mouse y las formas de escritura de la generalización algebraica que migran a formas de representación desde el uso de bloque de programación que guardan también sistemas semióticos alfanuméricos, pero que le dan sentido a su escritura. De igual forma, la estudiante 3 expresa sus resultados desde el siguiente discurso que se evidencia en el video Vid-Act3-270321-03:

Estudiante 3: *Me guie de los sonidos que quedaban ahí, entonces si había un sonido solo había un sonido uno y así, y la secuencia es añadirle acá le añades dos, acá le añades tres y así cada vez le añades un número mayor.*

Figura 36. Señalamiento que detecta una designación pura

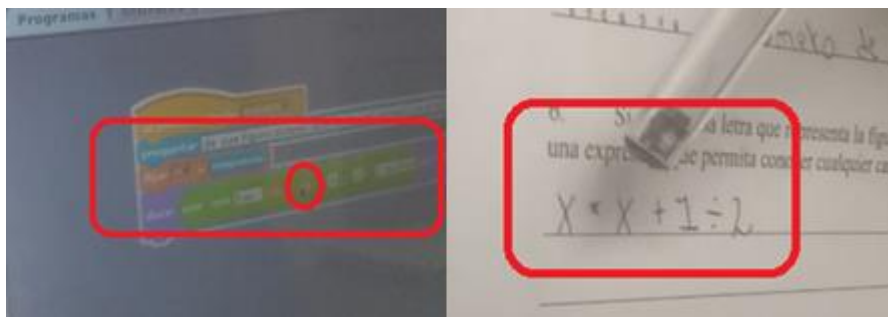


Igual que en los anteriores casos, el estudiante tiene que usar señalamientos como se muestra en la Figura 36 para complementar su discurso, cumpliendo así con la función referencial de designación pura, lo que muestra una generalidad en todos los estudiantes de utilización de deícticos y simbolizaciones constantes como formas de expresión. Su discurso evidencia su función apofántica en cuanto a que se evidencia una operación de predicación e ilocución con diferentes frases simples que demuestra el establecimiento de la regularidad. En esta función se puede determinar que la unidad apofántica determinada está asociada a la presencia del verbo añadir que en últimas es el que permite a la estudiante desde su comprensión determinar una abducción proto-analítica, dado que sus conclusiones están determinadas por términos anteriores de la secuencia. En el mismo sentido, esta unidad apofántica enunciada de estructura funcional permite un tipo de expansión discursiva que se ve reflejada al final en su expresión deducida como fórmula que deja ver la asociación con la función meta-discursiva del

lenguaje de tratamiento, como después se puede detectar en la expresión mostrada en el uso del lenguaje de programación:

Estudiante 3: *La expresión es x por x más uno dividido dos, ..., acá están los operadores más, menos, por y dividido, entonces pongo n por n más uno dividido dos.*

Figura 37. Representaciones simbólicas con diferentes artefactos



La estudiante muestra cómo su expresión algebraica ha sido construida usando Scratch, para su posterior validación. En la Figura 37 se puede observar cómo en su discurso utiliza el señalamiento usando el cursor del mouse y cómo traduce esto en una expresión alfa-numérica asociada a los bloques de programación. En esta expansión discursiva evidenciada en la estudiante, se observa cómo el uso de notaciones y escrituras algebraicas le da características de similitud semiótica externa que es una forma de expansión formal, lo que conlleva al razonamiento deductivo plasmado en el papel y en el uso de bloques de programación en Scratch.

Por último, también es posible establecer en el discurso de la estudiante 3 cómo se cumple la función de reflexividad por cuanto al referirse a que: “*cada vez le añades un número mayor*”, representa un sentido de que el enunciado puede recibirse como una aserción, pero sin

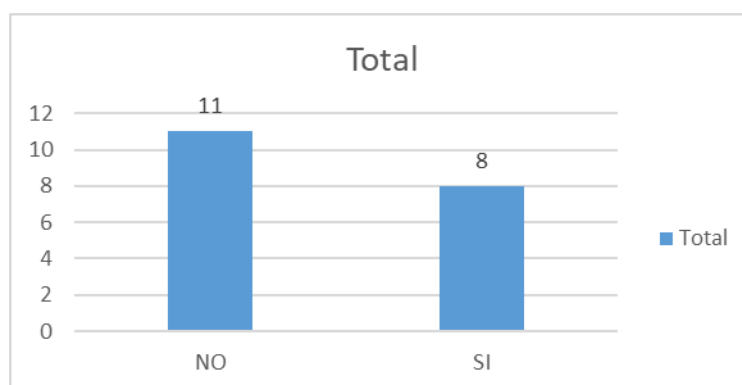
dejar de ser una opinión, esta función que hace parte de toda la *dermarche* discursiva lo presenta Duval (1999), como que el razonamiento puede ser un *demarche* de prueba y de modificación de la convicción.

Frente al grupo experimental en general, se puede decir que no existe una variación significativa en cuanto a la cantidad de estudiantes que logran la generalización como se puede observar en la Tabla 19 y Gráfica 12.

Tabla 18 *Estudiantes que realizan generalización T3 (Grupo experimental)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	11	57,89%
SI	8	42,11%
Total	19	100,00%

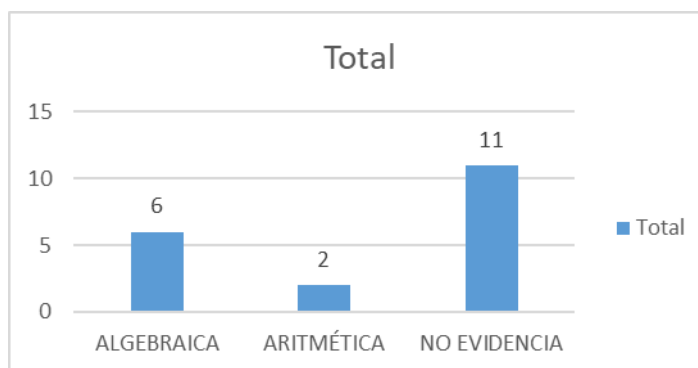
Gráfica 12 *Estudiantes que realizan generalización T3 (Grupo experimental)*



Al respecto de los tipos de generalizaciones que realizan los estudiantes, se observa que la mayoría logra hacer generalizaciones algebraicas influenciados por el uso del artefacto computacional como lo muestra la Tabla 20 y la Gráfica 13.

Tabla 19 Tipo de generalización T3 (Grupo experimental)

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	6	31,58%
ARITMÉTICA	2	10,53%
NO EVIDENCIA	11	57,89%
Total	19	100,00%

Gráfica 13 Tipo de generalización T3 (Grupo experimental)

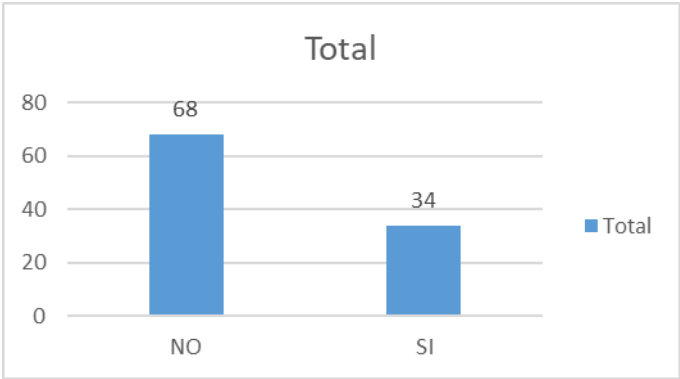
4.5.2. Grupo de Control

En el grupo de control se evidencia una dificultad en un alto porcentaje de estudiantes que no logra realizar algún tipo de generalización como se observa en la Tabla 21 y la Gráfica 14.

Tabla 20 Estudiantes que realizan generalización T3 (Grupo de control)

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	68	66,67%
SI	34	33,33%
Total	102	100,00%

Gráfica 14 *Estudiantes que realizan generalización T3 (Grupo de control)*

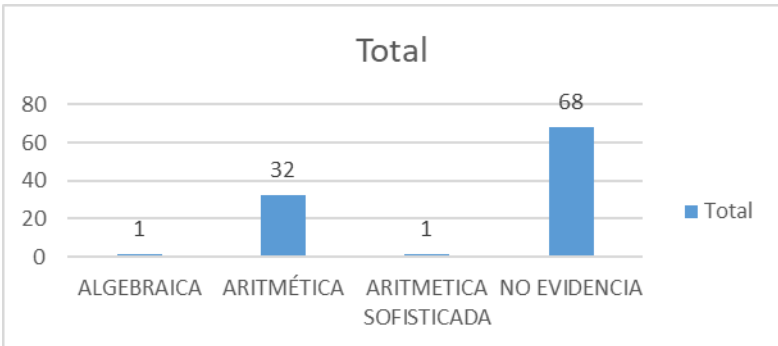


En cuanto a al tipo de generalización que realizan quienes lo lograron, se puede observar que la mayoría se queda en generalizaciones aritméticas con una particularidad, en cuanto a que uno de los estudiantes logra una generalización aritmética sofisticada que enuncia como “ $A(\text{anterior}) + n$ ”, esta información se organiza como se muestra en la Tabla 22 y la Gráfica 15.

Tabla 21 *Tipo de generalización T3 (Grupo de control)*

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	1	0,98%
ARITMÉTICA	32	31,37%
ARITMÉTICA SOFISTICADA	1	0,98%
NO EVIDENCIA	68	66,67%
Total	102	100,00%

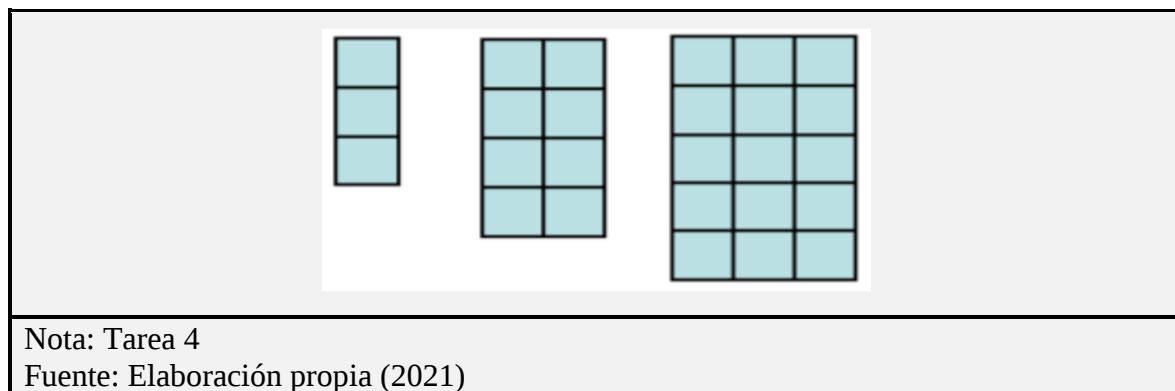
Gráfica 15 *Tipo de generalización T3 (Grupo de control)*



4.6. Tarea 4 – Secuencia Figural Final

En esta tarea se les presenta a los estudiantes una secuencia figural usando el lápiz y el papel como únicas herramientas, es decir, no hay actividad con computadores. En general, la idea central es establecer las correlaciones existentes entre el grupo experimental y de control sin incluir el artefacto computacional.

Figura 38. *Secuencia de imágenes Tarea 4*



4.6.1. Grupo Experimental

A partir de los resultados obtenidos, se puede observar en la caracterización, algunos parámetros obtenidos en las otras actividades, tal como se presenta en el discurso planteado por la estudiante que se evidencia en el video codificado como Vid-Act4-290321-01:

Estudiante 1: *Pues me di cuenta de que acá le iba agregando uno, digamos acá era tres y acá era cuatro, entonces le agregaba uno y da cuatro, acá lo mismo, pero con cinco, entonces acá le agregué seis multiplicado por el número de la figura y así sucesivamente.*

Profesor: Bien y entonces ¿cómo puedes saber cuántos cuadraditos tiene la figura?

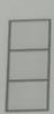
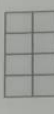
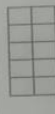
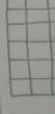
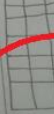
¿Digo, quince? No hice el dibujo para construirla.

Estudiante 1: Le agregas dos, porque digamos el número de la figura uno, le agregabas dos, al número de la figura dos le agregabas 4, entonces le agregabas dos el número de la figura tres eran cinco, entonces le agregabas dos.

En la presentación que expone la estudiante 1 es posible ver el uso del lenguaje natural para tratar de describir la regularidad alcanzada, sin embargo, se puede evidenciar una dificultad en el momento de describirla, si bien verbalmente se puede identificar tal dificultad, este uso de medio semiótico de objetivación va acompañado del uso de los señalamientos como medio semiótico que respalda el discurso como se puede ver en la Figura 39.

Figura 39. Señalamientos como medio semiótico de objetivación

1. Utiliza la tabla para llenar con tus gráficos ordenando las figuras:

Figura					
Número de orden (Término)	3	8	15	24	35
Número asociado a la figura	1	2	3	4	5

...que existe alguna manera de saber cuántos puntos tiene la figura 15, sin con
ta respaldar en la hoja.
agregas 2 al número de la figura y lo m

Sin embargo, la misma estudiante 1 después de algunas preguntas orientadoras logra describir de una manera más clara la regularidad encontrada como se puede observar en el video codificado como Vid-Act4-290321-01:

Profesor: ¿Cómo puedes saber cuántos cuadraditos tiene la figura quince?

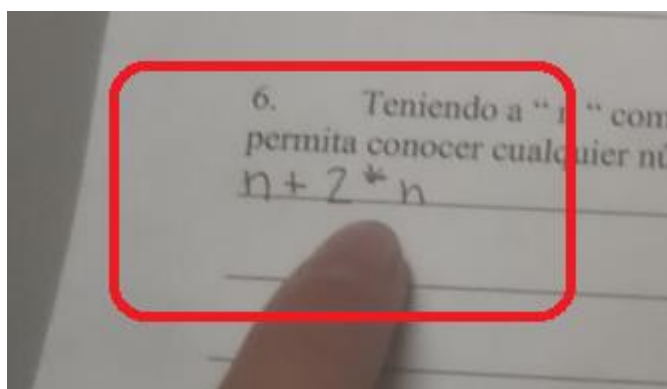
Estudiante 1: Le agregas dos el número de la figura que en este caso sería 15 y lo multiplicas por el número de la figura que en este caso sería 15.

Profesor: Y ¿por qué así?

Estudiante 1: Porque mira, acá le agregas dos, el número de la figura es uno y le agregas dos y los multiplicas por uno quedaría tres, acá dos el número de la línea son cuatro y de la columna dos y lo multiplicas por dos, lo cual da ocho y así sucesivamente entonces es lo mismo con la figura quince.

En esta conversación se puede observar como la estudiante 1 logra describir el patrón encontrado de forma asertiva, la explicación que muestra es clara y da cuenta de una forma de generalización aritmética que se asocia a un razonamiento que no le permite aún una expresión que determine cualquier término de la secuencia. Tiempo después la estudiante expresa cómo construir la figura y ofrece la siguiente expresión como generalización:

Figura 40. Generalización simbólica desarrollada por el estudiante



Estudiante 1: $n+2$ por n .

Profesor: Y, ¿qué quiere decir $n+2$?

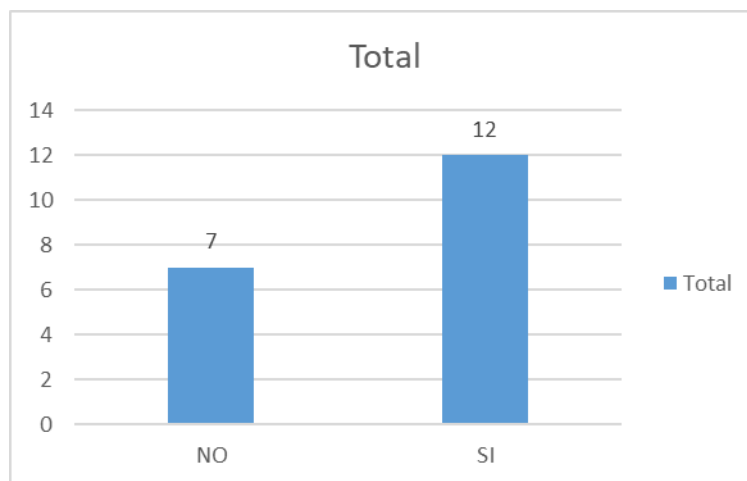
Estudiante 1: $n+2$ sería el número de la figura más dos por n .

En este punto ya es posible establecer cómo la estudiante logra una abducción analítica al presentar la expresión representada de forma alfanumérica, que evidencia un tipo de función discursiva asociada a la expansión formal desde la similitud semiótica externa como forma de expansión discursiva. El grupo experimental presentó resultados no muy lejanos a las otras tareas, sin embargo, es importante exaltar que más de la mitad de los estudiantes logró la generalización como se puede observar en la organización de la información de la Tabla 23 y la gráfica 16.

Tabla 22 *Estudiantes que realizan generalización T4 (Grupo experimental)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	7	36,84%
SI	12	63,16%
Total	19	100,00%

Gráfica 16 *Estudiantes que realizan generalización T4 (Grupo experimental)*

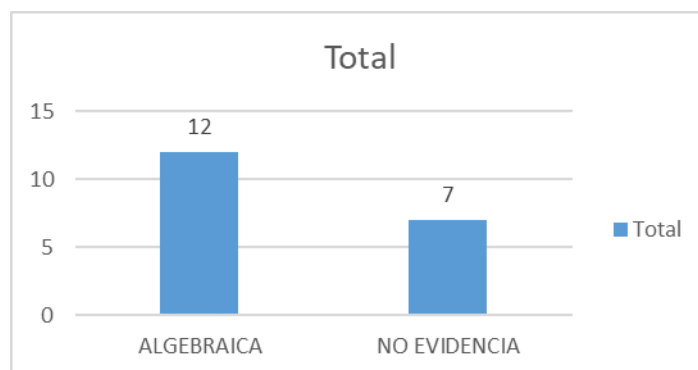


En el mismo sentido, es posible observar que la generalización que realizan los estudiantes es de tipo algebraica demostrando un componente de analiticidad en sus razonamientos, lo que conlleva a determinar que existió la deducción apodíctica de la expresión directa de lo cual se concluye que hay una abducción analítica, como se muestra en la Tabla 24 y Gráfica 17.

Tabla 23 Tipo de generalización T4 (Grupo experimental)

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	12	63,16%
NO EVIDENCIA	7	36,84%
Total	19	100,00%

Gráfica 17 Tipo de generalización T4 (Grupo experimental)

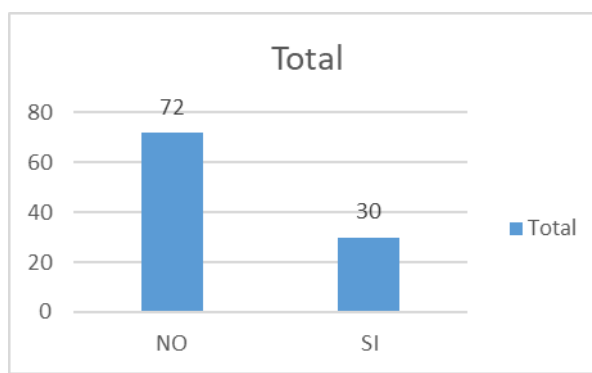


4.6.2. Grupo de Control

En el grupo de control, se puede establecer que una cantidad predominante de estudiantes no logró obtener la generalización, lo cual puede ser un indicador de la dificultad que se presenta y la necesidad de implementar nuevos recursos semióticos que puedan objetivar el conocimiento en los estudiantes; esto se puede observar en la información de la Tabla 25 y la Gráfica 18.

Tabla 24 *Estudiantes que realizan generalización T4 (Grupo de control)*

¿Realiza algún tipo de generalización?	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
NO	72	70,59%
SI	30	29,41%
Total	102	100,00%

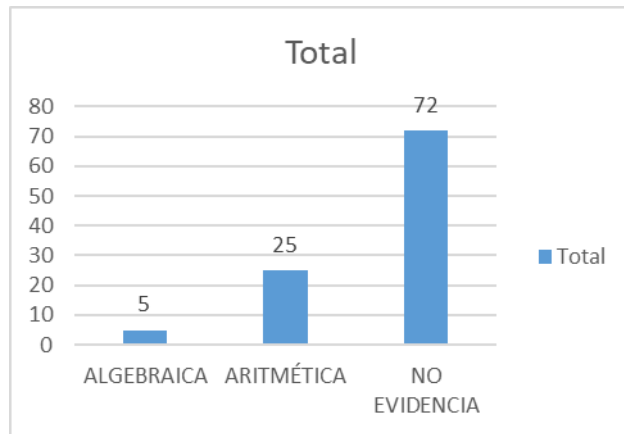
Gráfica 18 *Estudiantes que realizan generalización T4 (Grupo de control)*

De la misma forma en que se obtuvieron datos en las tareas anteriores, es posible observar que de los estudiantes que lograron una generalización, la mayoría no llegan a deducir una expresión que les permita determinar cualquier término de la secuencia logrando solo un tipo de generalización aritmética, como se observa en la Tabla 26 y la Gráfica 19.

Tabla 25 *Tipo de generalización T4 (Grupo de control)*

Tipo de Generalización	Cantidad de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
ALGEBRAICA	5	4,90%
ARITMÉTICA	25	24,51%
NO EVIDENCIA	72	70,59%
Total	102	100,00%

Gráfica 19 Tipo de generalización T4 (Grupo de control)



4.7. Relación Abducción Analítica – Artefacto Computacional

Para este apartado la recolección de datos de la Tarea 4 permite contrastar la relación entre la variable cualitativa asociada a la realización de la generalización y la variable cualitativa de implementación del artefacto computacional y su potencial adopción como medio semiótico de objetivación desde el lenguaje de programación visual. La relación que se menciona busca establecer si existe independencia entre las variables tratadas, por lo cual se utiliza el método de prueba de independencia chi-cuadrado del cual se obtienen los siguientes datos:

La Tabla 26 muestra la relación existente entre la variable cualitativa que determina si el estudiante evidencia algún tipo de generalización (*Sí/No*) y la variable cualitativa que representa el grupo (*experimental/control*) al cual estuvieron vinculados los estudiantes. Es de resaltar que solo los estudiantes que hicieron parte del grupo experimental tuvieron acceso a la herramienta computacional, específicamente al uso de *Scratch* como lenguaje de programación visual, entonces se plantean las siguientes hipótesis:

Hipótesis nula (Ho): La generalización realizada por los estudiantes es independiente de la estrategia en la que se realiza la inclusión del lenguaje de programación en procesos de generalización de secuencias figurales.

Hipótesis alternativa (H1): La generalización realizada por los estudiantes está relacionada con la estrategia en la que se realiza la inclusión del lenguaje de programación en procesos de generalización de secuencias figurales.

Tabla 26 Tabla de Contingencia y de valores esperados para la relación de dos variables

Tabla cruzada ¿Realiza algún tipo de generalización? *Grupo de implementación de estrategia					
			Grupo de implementación de estrategia		Total
			No se implemento el uso de Scratch	Se implemento Scratch	
¿Realiza algún tipo de generalización?	No realiza generalización	Recuento	72	7	79
		Recuento esperado	66,6	12,4	79,0
		% dentro de Grupo de implementación de estrategia	70,6%	36,8%	65,3%
	Si realiza generalización	Recuento	30	12	42
		Recuento esperado	35,4	6,6	42,0
		% dentro de Grupo de implementación de estrategia	29,4%	63,2%	34,7%
Total	Recuento	102	19	121	
	Recuento esperado	102,0	19,0	121,0	
	% dentro de Grupo de implementación de estrategia	100,0%	100,0%	100,0%	

La tabla 26, además permite observar los porcentajes y valores esperados con los cuales se realiza el análisis de asociación de las variables usando la prueba chi cuadrado tal y como se presenta en los resultados de la tabla 27.

Tabla 27. Prueba de independencia Chi-cuadrado para variables grupo - generalización

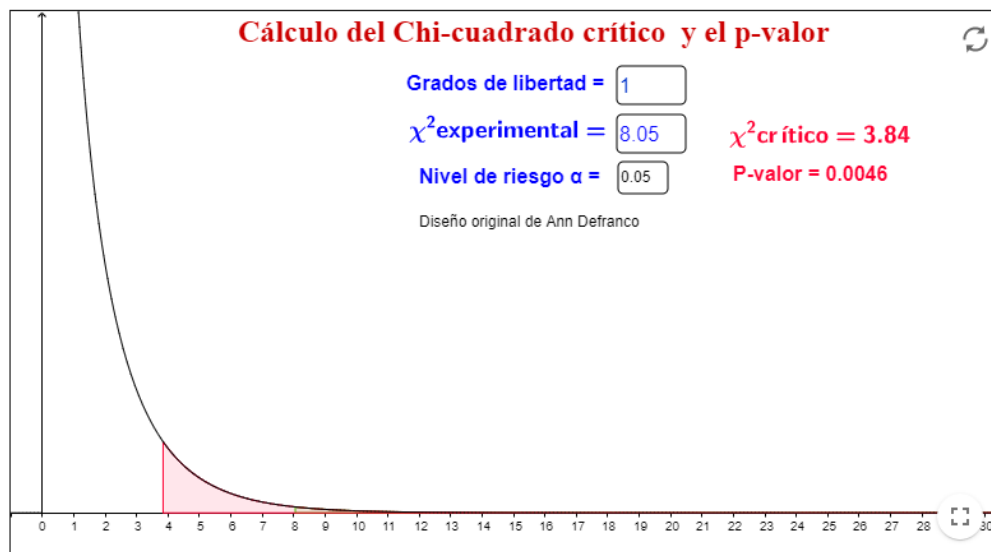
Pruebas de chi-cuadrado					
	Valor	gl	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	8,048 ^a	1	,005		
Corrección de continuidad ^b	6,628	1	,010		
Razón de verosimilitud	7,653	1	,006		
Prueba exacta de Fisher				,008	,006
N de casos válidos	121				

a. 0 casillas (0,0%) han esperado un recuento menor que 5. El recuento mínimo esperado es 6,60.

b. Sólo se ha calculado para una tabla 2x2

Como se puede observar en la tabla 27, no se requiere de ningún tipo de corrección que permita determinar si existe algún tipo de dependencia entre las variables por lo cual nos ceñimos estrictamente al valor generado por la distribución Chi-cuadrado que es de 8.048 con un nivel de confianza del 95% y tal como lo podemos observar en la gráfica 20.

Gráfica 20 Chi-cuadrado crítico y valor p, para relación de variables grupo - generalización



De los valores obtenidos encontramos que el chi-cuadrado experimental es mayor al chi-cuadrado crítico, por lo cual se puede afirmar que existe una dependencia entre las variables, es decir, rechazamos la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa que nos muestra que *la generalización realizada por los estudiantes está relacionada con la estrategia en la que se realiza la inclusión del lenguaje de programación en procesos de generalización de secuencias figurales*, esto se puede observar también dado que el valor de la significación asintótica es 0.005 y este valor es menor al valor de alfa que es de 0.05.

De la misma manera la Tabla 28 muestra la intensidad de asociación entre las variables usando los coeficientes Phi de Pearson, V de Cramer y el coeficiente de contingencia, lo cual deja ver que si bien existe la relación de dependencia entre las variables que relacionan estudiantes que tuvieron una implementación de Scratch y la realización de la generalización, es de aclarar que la intensidad de esta correlación es estadísticamente significativa baja dado que estos coeficientes son cercanos al cero.

Tabla 28 *Prueba de intensidad de asociación entre las variables grupo - generalización*

Medidas simétricas		Valor	Significación aproximada
Nominal por Nominal	Phi	,258	,005
	V de Cramer	,258	,005
	Coefficiente de contingencia	,250	,005
N de casos válidos		121	

Por otro lado, de la muestra también se detectó que en los estudiantes que realizaban generalización se podía observar que algunos obtenían generalizaciones aritméticas y otros generalizaciones algebraicas, por lo cual se realiza el análisis de si existe una relación de dependencia entre la utilización de Scratch como estrategia que implementa la posibilidad de su uso como medio semiótico de objetivación y el tipo de generalización realizado por los estudiantes, visto lo anterior se plantean las siguientes hipótesis:

Hipótesis nula (Ho): *El tipo de generalización realizada por los estudiantes es independiente de la estrategia en la que se realiza la inclusión del lenguaje de programación en procesos de generalización de secuencias figurales.*

Hipótesis alternativa (H1): *El tipo de generalización realizada por los estudiantes está relacionada con la estrategia en la que se realiza la inclusión del lenguaje de programación en procesos de generalización de secuencias figurales.*

Tabla 29 *Tabla de Contingencia y de valores esperados para la relación de dos variables*

Tabla cruzada Implementación de estrategia usando Scratch*Tipo de generalización					
			Tipo de generalización		Total
			Generalización Algebraica	Generalización Aritmética	
Implementación de estrategia usando Scratch	Grupo de Control	Recuento	5	25	30
		Recuento esperado	12,1	17,9	30,0
		% dentro de Tipo de generalización	29,4%	100,0%	71,4%
	Grupo Experimental	Recuento	12	0	12
		Recuento esperado	4,9	7,1	12,0
		% dentro de Tipo de generalización	70,6%	0,0%	28,6%
Total	Recuento	17	25	42	
	Recuento esperado	17,0	25,0	42,0	
	% dentro de Tipo de generalización	100,0%	100,0%	100,0%	

La Tabla 29, deja ver que una de las frecuencias esperadas es menor que 5, por lo cual al desarrollar el análisis de asociación de las variables usando la prueba chi cuadrado debe hacerse una corrección de continuidad de Yates, tal y como se presenta en los resultados de la tabla 30.

Tabla 30 *Prueba de independencia Chi-cuadrado para variables grupo - Tipo de generalización*

Pruebas de chi-cuadrado					
	Valor	gl	Significación asintótica (bilateral)	Significación exacta (bilateral)	Significación exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	24,706 ^a	1	,000		
Corrección de continuidad ^b	21,368	1	,000		
Razón de verosimilitud	29,658	1	,000		
Prueba exacta de Fisher				,000	,000
N de casos válidos	42				

a. 1 casillas (25,0%) han esperado un recuento menor que 5. El recuento mínimo esperado es 4,86.

b. Sólo se ha calculado para una tabla 2x2

Como se puede observar en la tabla 30, el valor de corrección de continuidad es de 21.368, por lo cual con un nivel de confianza del 95% podemos notar como lo muestra la misma tabla, que la significación asintótica es menor que 0,05 entonces *existe una relación de*

dependencia entre las variables tipo de generalización y el grupo en el que se implementa el artefacto computacional, aceptando así la hipótesis alternativa. Por otro lado, la Tabla 31 permite observar los coeficientes que miden la intensidad de correlación.

Tabla 31 *Coeficiente de intensidad de asociación para variables tipo de generalización y grupo*

Medidas simétricas		
		Significación aproximada
		Valor
Nominal por Nominal	Coeficiente de contingencia	,609
N de casos válidos		42

En esta tabla es posible analizar que los valores correspondientes al coeficiente de contingencia son valores cercanos a 1, por lo cual es posible deducir que la relación entre las variables *es estadísticamente significativa* lo cual permite concluir que el uso de Scratch como herramienta que puede ser movilizadada como un medio semiótico de objetivación tiene efectos que llevan a razonamientos deductivos al abordar problemas que tienen que ver con secuencias figurales.

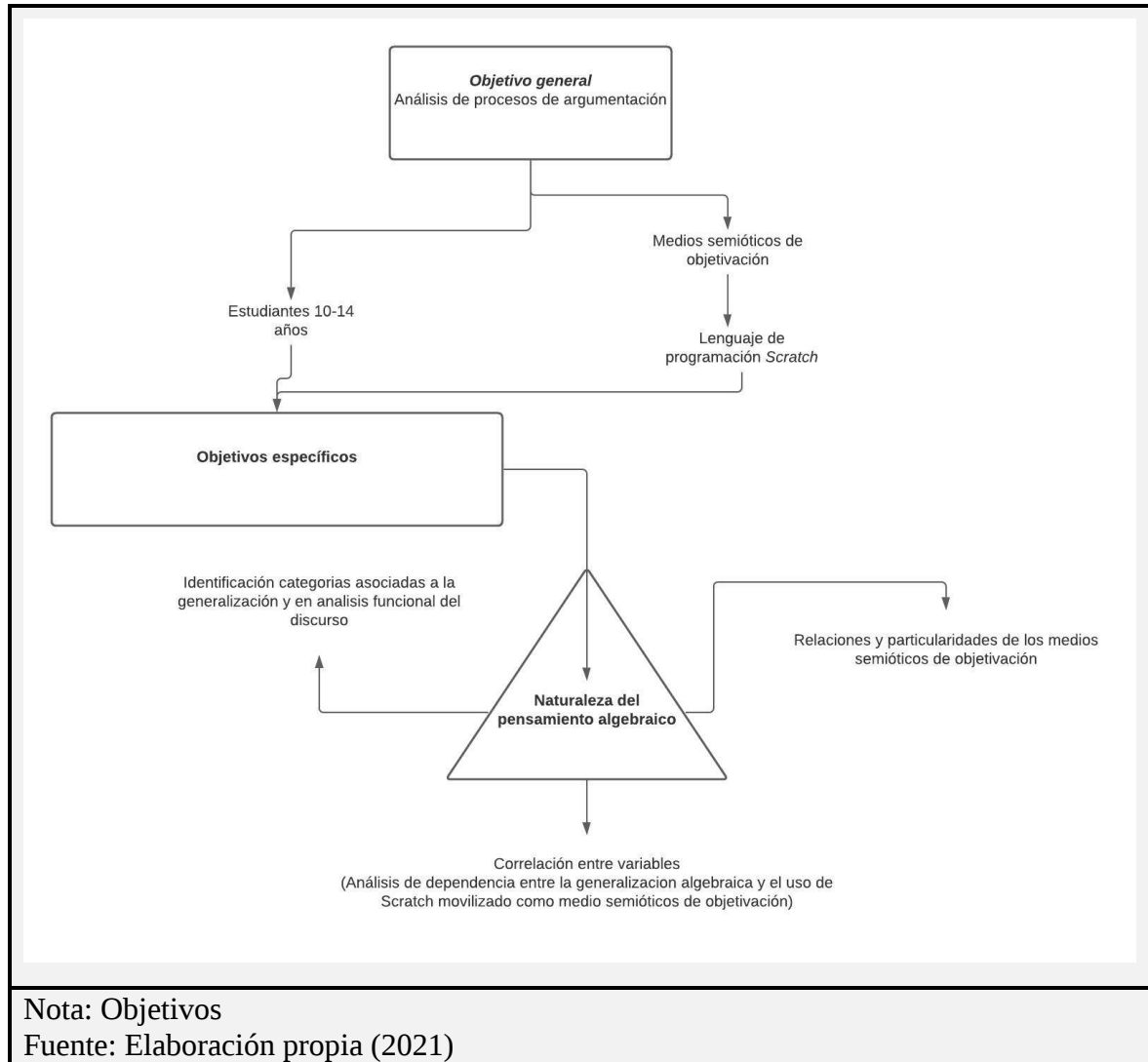
Capítulo 5

5. Discusión de Resultados

En este capítulo se expone la discusión de resultados en torno a los objetivos planteados, el estudio ha tenido en cuenta las relaciones que se evidencian entre los medios semióticos de objetivación y las expresiones que dan cuenta de las funciones discursivas del lenguaje que proporcionan elementos fundamentales y que permiten evidenciar formas de razonamiento que se muestran en las deducciones de generalizaciones cuando los estudiantes trabajan usando un artefacto computacional y específicamente un lenguaje de programación visual como *Scratch*.

De la misma manera, desde un punto de vista cuantitativo se realiza un estudio acerca de la relación de dependencia entre variables asociadas al uso del lenguaje de programación como medio semiótico de objetivación y las formas de generalización ya sea aritmética o algebraica que ~~me~~ permiten analizar la posibilidad de encontrar elementos de razonamiento abductivo que se evidencia en el proceso de generalización de patrones en secuencia figurales, como se manifiesta en el esquema de la Figura 41, en la que, a partir de procesos de identificación, descripción de relaciones, particularidades y el establecimiento de correlaciones entre el uso de *Scratch* y la consecución de generalizaciones algebraicas se realiza un análisis de procesos de argumentación de los estudiantes que develan razonamientos inmersos en su aprendizaje.

Figura 41. *Objetivos de la investigación*



5.1. Medios Semióticos de Objetivación

En este trabajo de investigación, al igual que Gobara & Radford (2020) se comparte el planteamiento de concebir el *saber* cómo un sistema de pensamiento y acción cultural históricamente constituido. No se piensa en el *saber* cómo una mercancía, sino como algo que

existe en nuestra cultura y al encuentro de los seres humanos con este saber es al que se le denomina ***objetivación***.

Tal concepción del saber supone que los estudiantes realizan esfuerzos para la elaboración de significados y la toma de conciencia de los objetos matemáticos llevados al aula, para lo cual requieren de medios semióticos de objetivación alrededor de los cuales los estudiantes logran realizar generalizaciones en tareas de secuencias figurales; en el proceso del presente estudio se encuentra en la sección 4.1., una especial atención a medios semióticos asociados a la gestualidad, al ritmo y a su relación con el uso del lenguaje de programación desde el análisis de las funciones discursivas del lenguaje, por tal razón a continuación se presentan los análisis desde cada uno de estos elementos asociados a los medios semióticos de objetivación.

5.1.1. Artefacto Computacional y Gestualidad

Cuando se habla de tecnología se recurre a la idea del uso de herramientas que contribuyen a potenciar al ser humano, este uso progresa y se modifica con el tiempo generando así nuevas técnicas que ocasionan cambios en lo cotidiano y en las formas de representación que utiliza el cuerpo para actualizar el conocimiento, precisando así su compatibilidad con artefactos como el computador.

Los estudiantes participantes en la investigación realizan actividades motoras de interacción con herramientas como el lápiz y el papel como se muestra en la Figura 16, que en contextos de uso de computador migran hacia la interacción con esta herramienta como se muestra en la Figura 26, donde podemos encontrar en los datos organizados un ejercicio común de expresión corporal de los estudiantes transformadas en señalamientos hacia elementos

importantes que cumplen con características de unidades significantes dentro del sistema de representación que en este caso se asocia a los bloques de programación utilizados en *Scratch* y que se ubican de forma implícita en el uso del computador como recurso semiótico. Estos señalamientos son de vital importancia por cuanto cumplen con una designación pura dentro de la función referencial en la construcción del discurso, Roth expresa que esta interacción es importante y lo expresa como que “La presencia de artefactos visuales y la disponibilidad de gestos permiten a los estudiantes comunicarse” (2001, p. 365). Este elemento es importante ya que en los procesos por los cuales los estudiantes alcanzaron algún tipo de generalización, muestran en su función meta-discursiva de comunicación la necesidad de plasmar gestualmente ese elemento de designación que en un primer momento pasa de asociarse a herramientas usuales como el lápiz y el papel a interacciones de designación en el artefacto computacional, que en ocasiones llegan a desarrollarse como categorizaciones simples, identificando la clase con calificativos como números pares o números impares como se observa en la conversación de la sección 4.3.1.

Es de resaltar que los estudiantes que logran llegar a algún tipo de generalización, transfieren esos señalamientos kinestésicos a elementos propios del ambiente computacional que se categorizan como variables y ubican como elementos importantes dentro del sistema de representación que les permite establecer posteriormente un proceso de validación. Cuando la designación como variable se hace por categorización, se vuelve importante en vista de que puede ser presentado como un léxico sistemático que en relación con lo que presenta Duval (1999), “no permiten designar más que objetos que pertenecen a un dominio particular” (1999, p. 92), por lo cual cuando la designación se asocia a unos caracteres específicos demanda un

número más elevado de presentaciones que el aprendizaje de las primeras asociaciones, obligando a los estudiantes a establecer múltiples pruebas de verificación en los procesos que llevan a una generalización plausible que puede ser representada deductivamente como una fórmula, como por ejemplo se observa en la Figura 23.

5.1.2. Artefacto Computacional, Ritmo y Entonación

Durante la implementación de diferentes actividades, se utilizó el sonido como un recurso importante de interacción a partir del cual los estudiantes pudieran establecer algún tipo de patrón. Por tal razón nos encontramos con que las tareas puestas a disposición del grupo experimental presentaron elementos que pudieron establecer algún tipo de relación rítmica con las regularidades plasmadas en la secuencia figural como se muestra en la Figura 20. Este es un recurso semiótico importante que nos brinda el artefacto ya que los datos, que en este caso se asocian a una secuencia numérica, llegan a generar sonidos que se pueden amplificar, gracias a su condición de información y que al final se convierten en un recurso más ligado a la percepción y a elementos corporales que sirven como apoyo para los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes.

Pero no solamente el sonido se expresa como algo exterior que puede ser captado por los aprendices, sino que su uso se hace importante en las relaciones asociadas a su lenguaje natural, puesto que el habla está constituida por sonidos, pero también por otros fenómenos suprasegmentales que lo afectan, tales como, el acento, el ritmo y la entonación que hacen parte de esos procesos de objetivación y que se convierten también en medios semióticos de objetivación. Ramos (2018) establece que no hay habla sin entonación y sin ritmo, ni puede haberla, lo cual hace importante tener en cuenta cómo los estudiantes que realizan algún tipo de

generalización incluyen en su discurso elementos que se asocian al sonido que se encuentra en una recurrencia de acentos en expresiones que dejan ver la regularidad encontrada por el estudiante en la secuencia figural y que se percibe en las gráficas de frecuencia como mayores amplitudes de onda que pueden ser después convertidas en elementos propios del lenguaje de programación asociado a esta investigación, tal como se evidencia en la Figura 28.

Estas asociaciones rítmicas y de amplitud sonora que son identificables como hallazgos en esta investigación tienen una característica común y es que se relacionan con la mención verbal de varias proposiciones simples que permiten establecer un patrón dentro de la secuencia numérica detectada en la secuencia figural y que se identifican como elementos de razonamiento inductivo que posteriormente son sometidos a procesos de validación para plasmarlos como la organización discursiva de una argumentación que obedece a criterios de pertinencia y que el computador usado como herramienta, lo complementa, para expresarlo como criterio de validez que se establece con un grado de fiabilidad que para el estudiante parece plausible, es decir con un valor epistémico que se traduce en un tipo de razonamiento abductivo.

5.1.3. Generalización y Lenguaje Natural

En los datos asociados a los estudiantes que lograron realizar una generalización de tipo algebraica como se evidencia en la Tabla 24, se presta atención al análisis de los discursos presentados. Mediante estos análisis nos encontramos que, en un primer momento establecemos una interacción directa con aquellos participantes de la investigación que realizan un empleo común o social de la lengua natural y específicamente se interactúa con los estudiantes que muestran elementos que se traducen en designación de objetos y la referencia a algún aspecto

relacionado a la secuencia trabajada que es enunciada como proposición, además de la producción de varias de estas y sus diferentes relaciones que le permiten darles un valor.

Específicamente, en este trabajo se encuentra que en un primer momento en la organización del discurso de los estudiantes se evidencia la función referencial desde una operación de designación pura, cuando se hacen uso inicialmente de gestos y expresiones deícticas como por ejemplo las que se muestra en la Figura 33 que les permiten a los aprendices señalar elementos constitutivos que identifican objetos asociados a la secuencia trabajada y que inicialmente le permiten empezar a establecer asociaciones con signos desde lo figural y lo numérico. Sin embargo, en las tareas con secuencias de números pares e impares se puede observar fácilmente que la operación no se limita a ser de designación pura, sino que los estudiantes identifican los números, detectan una característica desde su cualidad, es decir, identifican los números con adjetivos como pares e impares y la función referencial se realiza desde una operación de caracterización simple como se evidencia en la sección 4.4.1.

De la misma manera, continuando con el análisis de los estudiantes que presentan un discurso asociado a sus producciones intelectuales frente a las tareas implementadas, se determina una necesidad de decir algo frente a los señalamientos realizados, de estos objetos los estudiantes que muestran algún tipo de generalización presentan una enunciación que cumple una función apofántica desde la operación de predicación, es decir, expresan una particularidad del objeto referenciado usando proposiciones como por ejemplo “1 por 2 da 2, 2 por 2 da 4, 3 por 2 da 6”, que se evidencia en la sección 4.3.1., pero también se detecta que expresiones como estas son de tipo remática, es decir, incluyen el uso de verbos, además de la operación de predicación, también permiten la operación de ilocución dado que se pone en juego elementos

propios de la entonación como una marca lingüística en la enunciación que es posible observar en la Figura 20, la Figura 28 y la Figura 34 de gráficas de onda obtenidas con el programa fonético “*Praat*”, .

En el análisis se encuentra que en el discurso de los estudiantes que logran algún tipo de generalización, es posible ver un intento de explicación que después se transforma en argumento y que se expresa como el cumplimiento de la función de expansión discursiva, este tipo de función se da desde una similitud semiótica interna, cuando los estudiantes no logran deducir una expresión simbólica que muestre una generalización, hasta los estudiantes que sí lo hacen desde una similitud semiótica externa formal, en la que se evidencia un tipo de razonamiento deductivo. Por último el elemento que permite establecer los argumentos de los estudiantes como un discurso se traduce en el cumplimiento de la función de reflexividad, cuando los estudiantes presentan sus conclusiones como aserciones construidas alrededor de verbos que son conformadas con actitud proposicional, pero que tienen como efecto neutralizar el valor lógico de verdad lo que conlleva un tipo de razonamiento abductivo en relación a que el razonamiento es un *demarche* de prueba que al final termina siendo contrastado con el uso del lenguaje de programación como medio semiótico de objetivación.

5.2. Tipos de Generalización y Análisis del Discurso

Desde los trabajos realizados por Radford (2006a, 2011, 2018b), Vergel (2015a, 2016, 2019), Vergel & Rojas (2018) y Bayona (2021) se indica una clasificación de generalizaciones como generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas. Entre los planteamientos de Radford encontramos que clasifica una generalización aritmética cuando la recolección de información de una secuencia se limita a encontrar una

característica común, que además pueden ser varias y que Peirce (1965), llama abducción, es decir, cuando el estudiante a través de su experiencia basada en procesos inductivos logra realizar una predicción sin ninguna certeza segura de que la regularidad encontrada llegue a ser totalmente verdadera. En este punto el proceso abductivo desarrollado por el estudiante genera procesos y tratamientos desde sus funciones meta-discursivas, pero no le permite deducir una fórmula que refleje el patrón encontrado en las secuencias.

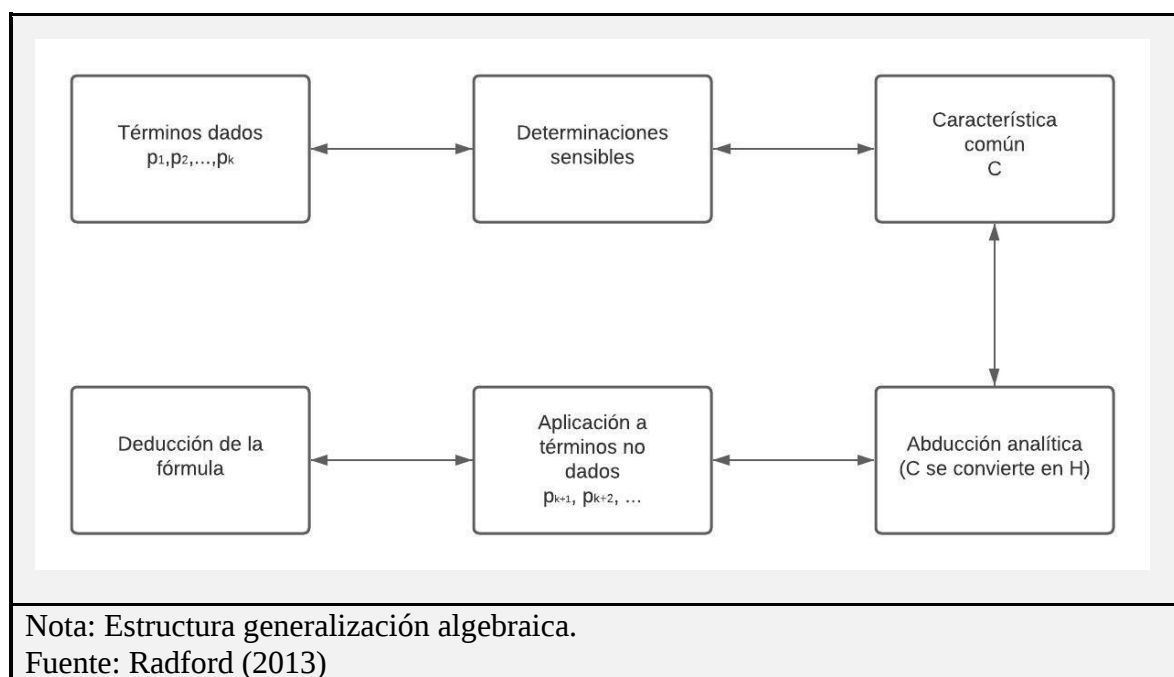
En este punto cabe resaltar que las funciones discursivas del lenguaje que se encuentran en los procesos dialécticos con los estudiantes, si bien permiten observar operaciones de designación pura como función referencial que incluso pueden ser de categorización simple, operaciones de predicación e ilocución como función apofántica cuando expresan una afirmación de las cuales aún no muestran un grado total de certeza, no manifiestan formas de similitud externa desde la función de expansión, situación por la cual se evidencia su dificultad de llegar a concretar un deducción de la fórmula.

En investigaciones recientes Vergel (2019) y Bayona (2021), se realiza una especial investigación en torno al tipo de generalización que ha sido categorizada como generalización aritmética sofisticada, en la cual la abducción no llega a desarrollarse hasta el razonamiento deductivo, se encuentra dentro de una zona que se presenta entre generalización aritmética y generalización algebraica pero sin embargo existe una forma de realizar una representación alfanumérica $Tn = [(n - a)2] + Ta$, que permite establecer el valor numérico de un término cualquiera (Tn), a partir de un término anterior (Ta). Sin embargo, en la presente investigación no se encuentra en el grupo experimental ningún tipo de desarrollo abductivo que permita evidenciar que algún

estudiante alcanza como máximo una generalización aritmética sofisticada; por otro lado en el grupo de control, se encontró como se observa en la Tabla 21, en la producción de un estudiante una expresión simbólica que escribe como “ $A(anterior) + n$ ” y que demuestra, de acuerdo a los hallazgos de los investigadores mencionados, características de abducción proto-analítica que valdría la pena ser indagada en futuras investigaciones desde el análisis de las funciones discursivas del lenguaje.

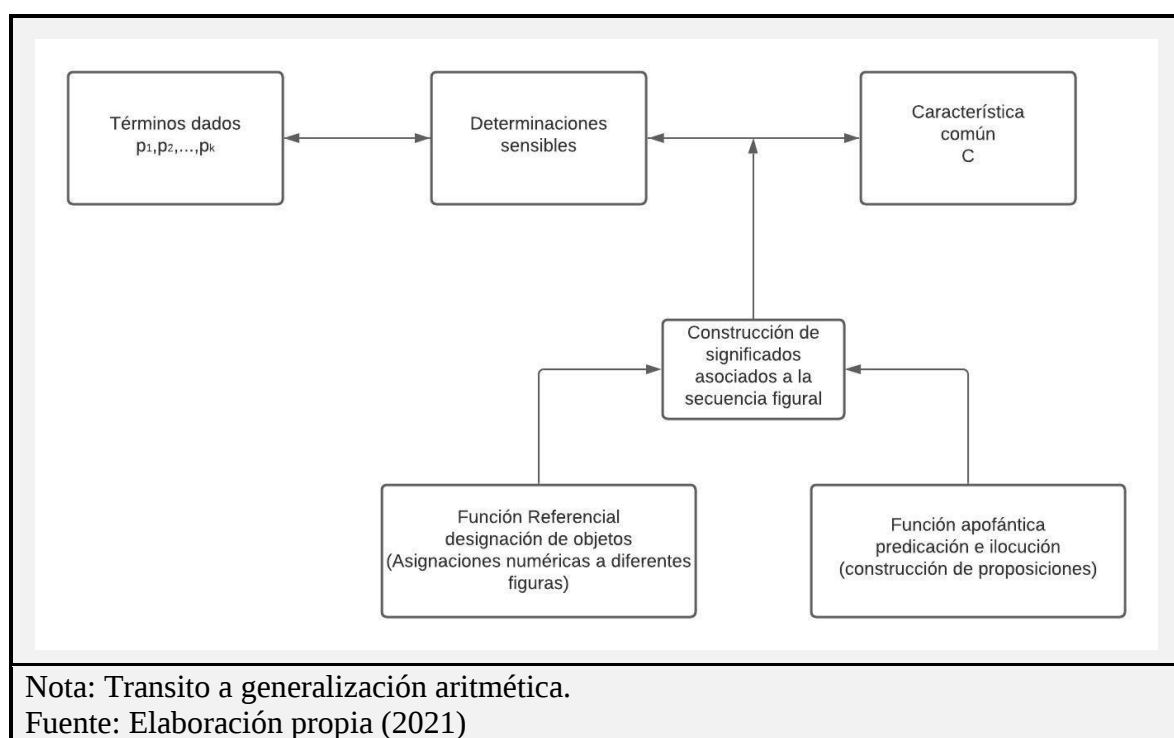
Por último, en este trabajo de investigación nos encontramos como se muestra en la Tabla 22 y Tabla 24, con un número significativo de estudiantes que llegaron a obtener generalizaciones categorizadas como algebraicas, que han sido descritas como generalizaciones que son determinadas por medio de abducciones analíticas, es decir, que la fórmula obtenida es usada para encontrar cualquier término de la secuencia, por lo cual, en este punto la abducción ya no es una simple posibilidad sino un principio asumido. Este proceso con el cual se logra una generalización algebraica ha sido representada por Radford (2013), con la Figura 42.

Figura 42. Estructura de la generalización algebraica



La estructura algebraica que se presenta se evidencia en estudiantes del grupo experimental que lograron una transición hacia la generalización aritmética cuando en la construcción de sus argumentos solo se evidencian elementos asociados a la función referencial y la función apofántica como se propone en la Figura 43.

Figura 43. *Tránsito a generalizaciones aritméticas observadas desde funciones discursivas*

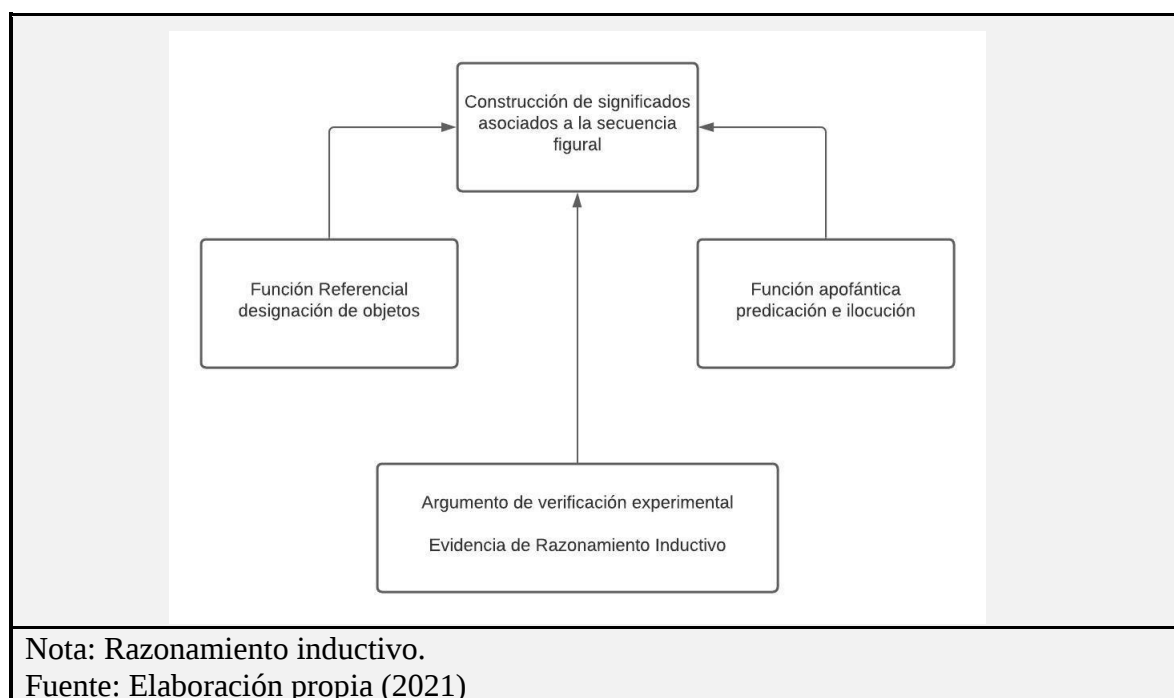


La organización que se propone en la Figura 43, intenta caracterizar las formas de expresión en estudiantes que logran realizar una generalización aritmética y que se evidencia con el uso de medios semióticos de objetivación que en general se muestran desde el lenguaje natural y se complementan usando gestualidades. Dado que en este punto no se identifican razonamientos de tipo abductivo, los estudiantes no logran proponer algún tipo de fórmula que permita calcular cualquier término de la secuencia, sin embargo, se puede observar que a través del tratamiento numérico, los estudiantes utilizan métodos en los que descubren en la secuencia

numérica algún tipo de patrón que les permite realizar, a través de la conversión entre registros semióticos de representación, transformaciones desde el registro semiótico figural a un registro semiótico numérico y además realizar una verificación de una predicción general cuya conclusión es verificada como lo expresa Peirce (1965) con tanta frecuencia como experimentalmente se encuentre para ser verificada, por lo cual se determina que en este punto los razonamientos realizados por los estudiantes logran expresar un tránsito hacia la generalización algebraica desde métodos inductivos, como se muestra en la Figura 44.

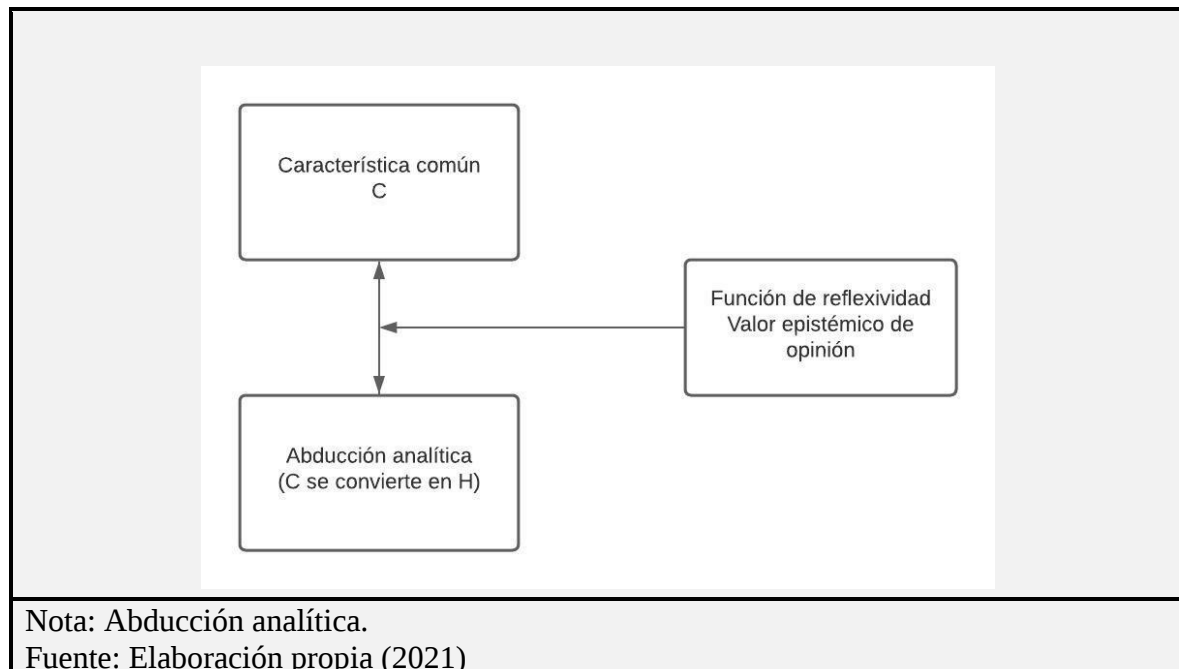
La Figura 44, permite observar cómo dentro de la característica común encontrada por los estudiantes existe un tránsito hacia la obtención de una hipótesis, que en general se confronta de manera analítica con nuevos datos experimentales y que se evidencia desde la función discursiva referencial.

Figura 44. *Evidencia de razonamiento inductivo en el proceso de generalización aritmética*



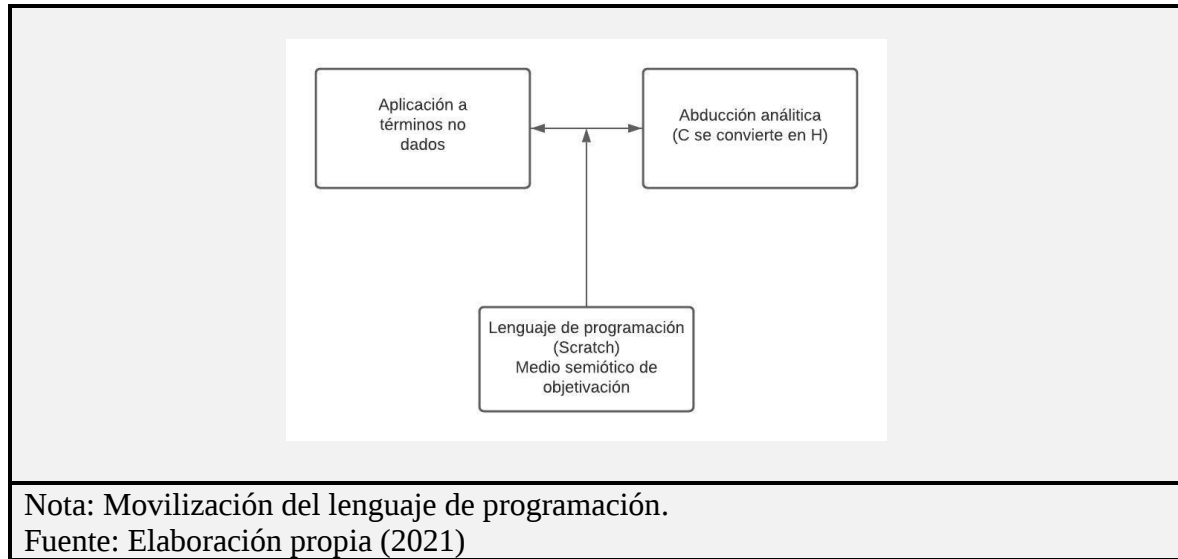
Para el caso que nos ocupa, la regularidad encontrada que se manifiesta como característica común, es puesta a prueba de forma analítica con el uso del artefacto computacional que para este trabajo de investigación se propone categorizar como una **analiticidad computacional** y que se contrasta con la abducción proto-analítica y abducción analítica de la que se han realizado ya algunos trabajos de investigación por Vergel (2019) y Bayona (2021), lo cual deja ver como la utilización de *Scratch* como lenguaje de programación se transforma en la movilización de este como un medio semiótico de objetivación; este proceso en el cual se evidencia la abducción analítica se presenta de forma general en la Figura 46.

Figura 45. Evidencia de abducción analítica desde la función discursiva de reflexividad



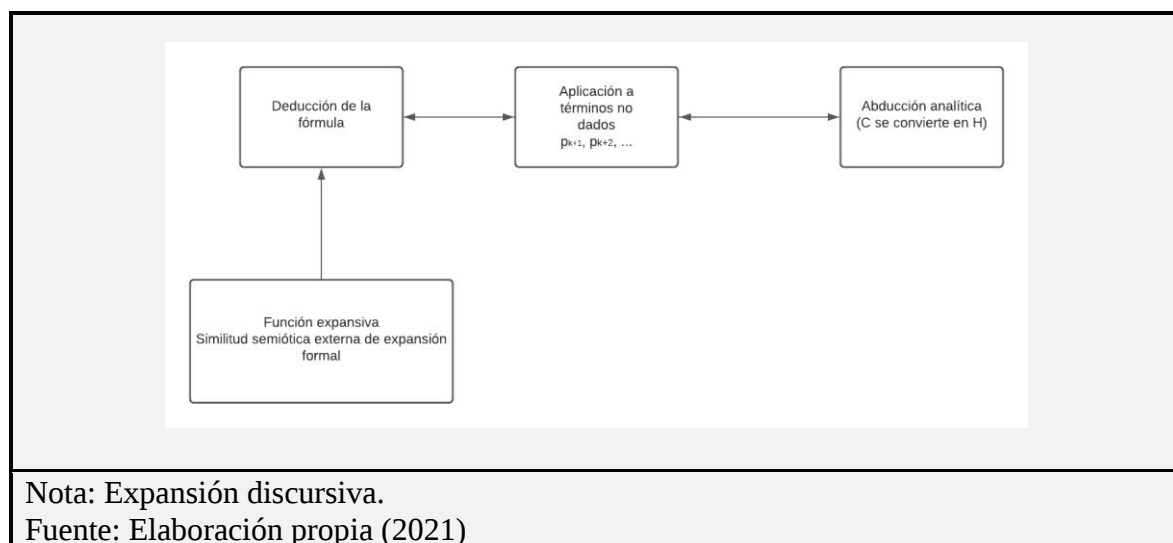
Tal relación que emigra hacia una generalización más especializada y que presenta un argumento, en el cual los estudiantes desde su discurso demuestran la función de reflexividad Duval (1999), lo ha llamado como un tipo de razonamiento que es un “*demarche* de prueba”. En el proceso de razonamiento nos encontramos con la deducción de la fórmula cuando los estudiantes que participaron del grupo experimental lograron presentar en su argumento desde el análisis funcional del discurso como se muestra en la Figura 46, elementos asociados a unidades apofánticas y de expansión discursiva que se relacionaban desde los significantes que constituían cada una de estas, es decir que la característica común encontrada, en la que en algunos casos los estudiantes, por ejemplo realizaban la categorización simple como “números pares”, dentro de una proposición simple y que además presentaban algún tipo de entonación y ritmo, desde una análisis prosódico se determinó que la podían asociar a una similitud semiótica en la escritura algebraica; esta similitud además iba acompañada de reglas de equivalencia algebraica basadas en símbolos alfa-numéricos que se constituían en proposiciones simples que formaban una aserción de partida cumpliendo formas de expansión formal y que además podían reflejarse en la construcción del programa en *Scratch* y que se observa en la asociación de los símbolos alfa-numéricos con los bloques del software mencionado.

Figura 46. *Uso de Scratch como medio semiótico de objetivación en el proceso de verificación*



La deducción presentada en forma de expansión formal de similitud externa, por cuanto se obtiene una expresión que tiene un destinatario que tiene un status social cuando es expuesta en relación con los compañeros de clase y docente, presenta características que están relacionadas con tasas de frecuencia que se validaron analíticamente usando *Scratch* y como lo presenta Peirce, “que razonamientos exactamente análogos producirían, partiendo de premisas verdaderas, conclusiones verdaderas, en la mayoría de los casos, a largo plazo” (1965, p. 40) . Esta forma de similitud externa de expansión formal se relaciona directamente con la deducción de la fórmula como se presenta en la Figura 47.

Figura 47. *Función expansiva como evidencia de deducción de la fórmula*

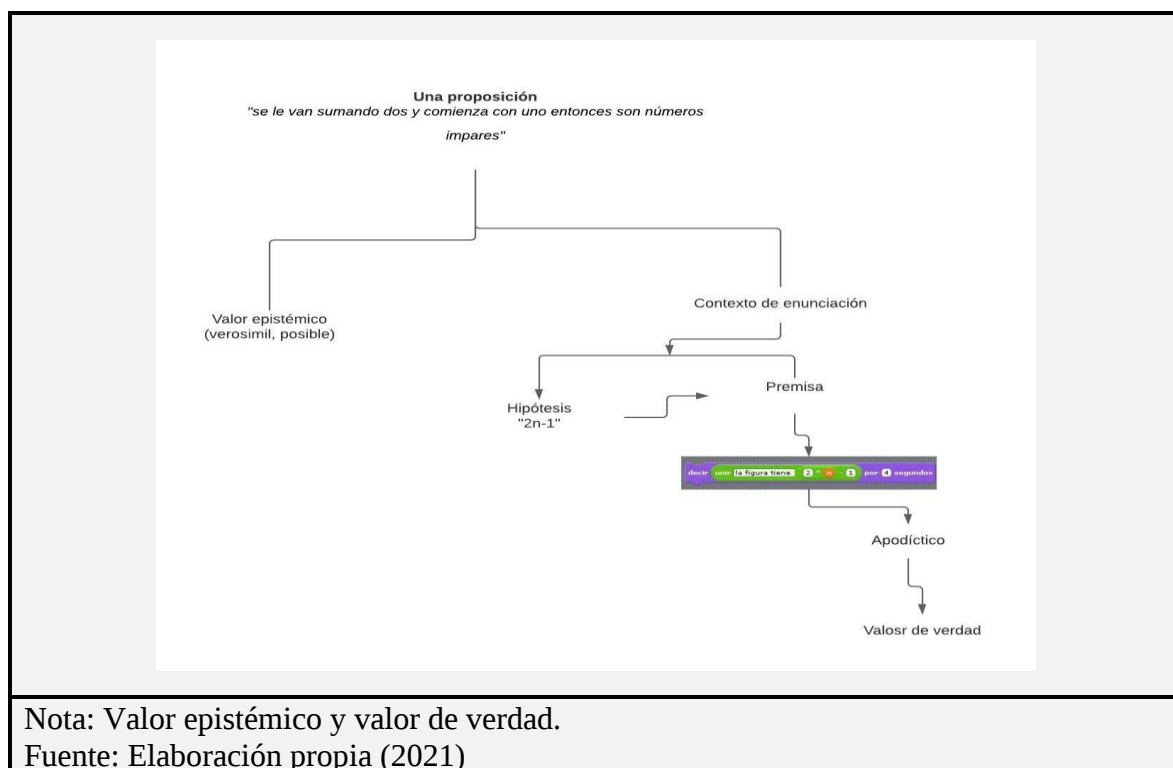


5.3. Razonamiento Deductivo y Medios Semióticos de Objetivación

En relación con los datos obtenidos y el contraste realizado entre los grupos experimental y de control se ha podido determinar que existe una relación de dependencia entre la obtención de generalizaciones algebraicas y la adopción de los estudiantes de *Scratch* como un medio semiótico de objetivación. Esta afirmación es importante en la medida en que las proposiciones planteadas por los estudiantes en sus argumentos poseen inicialmente valores epistémicos plausibles que pueden ser llevados a prueba para determinar su valor ya sea de verdad o falsedad, sin embargo un hallazgo importante en el proceso de análisis tiene que ver con que la utilización del lenguaje de programación permite al estudiante reducir el valor de verdad a una de dos posibilidades, las cuales dejan de lado la indeterminación, que se encuentra muy arraigada en algunos estudiantes que no logran generalizaciones algebraicas y no concretan una abducción analítica. Estos razonamientos deductivos se plasman en proposiciones que podrían explicarse

como por ejemplo se presenta en la Figura 48, que muestra cómo se llega a la deducción de la fórmula a partir de una hipótesis planteada por el estudiante.

Figura 48. *Valor epistémico y de verdad en una proposición*



Lo que de manera general muestran en sus razonamientos los estudiantes que llegan a generalizaciones algebraicas, está orientado a modificar el valor epistémico que tiene su encuentro con las propuestas de secuencias figúrales y en consecuencia la verificación del cumplimiento de ciertas condiciones que permiten modificar el valor de verdad de sus diferentes hipótesis. Por lo anterior, en el contraste entre los grupos experimental y de control se puede observar claramente una tendencia a sobrepasar el solo acto de encontrar un patrón en las secuencias figúrales, a realizar abducciones analíticas que en general se logran en mayor

proporción en estudiantes que se apropian del lenguaje de programación y lo usan como medio semiótico de objetivación.

Por tal razón, la presente investigación sugiere la categorización de un componente de analiticidad asociado directamente al uso del artefacto computacional, dado que en el proceso de análisis de los resultados expuestos es posible determinar que el uso de procesos de ensayo y error en la articulación de bloques para la programación en *Scratch*, hace parte de una forma de concreción de una propuesta plausible que puede convertirse en una generalización que evidencie un razonamiento deductivo. Dado lo anterior, específicamente este trabajo de investigación presenta la manera como un artefacto computacional se ha instaurado como un elemento cultural que evidentemente se ha establecido de forma importante en la historia de los últimos tiempos y se vuelve trascendental en los procesos de generalización en donde los estudiantes lo han logrado incorporar como un medio semiótico de objetivación y han puesto en evidencia como este es un elemento útil para los procesos de formación que permiten desarrollar razonamientos abductivos que conllevan a la deducción de la fórmula, por lo cual, se hace necesario ahondar más en elementos asociados a la generalización de patrones y el uso de artefactos computacionales que permitan procesos de analiticidad desde el uso de los mismos y cómo estos permiten complementar las investigaciones que se realizan en cuanto a la naturaleza del pensamiento algebraico.

Estos hallazgos contribuyen a ampliar el campo de conocimiento de la educación matemática al integrar la programación de computadores como un medio semiótico de objetivación que puede ser movilizado por los estudiantes que requieren realizar generalizaciones algebraicas y que presenten dificultades al realizar abducciones analíticas,

situación importante en los procesos de objetivación que llevan a cabo cuando consiguen elaborar comprensiones alrededor de la transición de la aritmética al álgebra, lo cual favorece un desarrollo del pensamiento algebraico desde elementos asociados a la percepción y vinculados a artefactos tecnológicos que se usan en la actualidad, que además posibilitan cambios en las formas de pensar y en sus funciones cognitivas tal y como lo expuso en su momento la teoría planteada por Vigotsky.

Por otro lado, el presente estudio contribuye a la línea de investigación del doctorado en el establecimiento de las relaciones entre educación, cultura y sociedad con el análisis de la naturaleza del pensamiento algebraico desde una perspectiva asociada a la teoría de objetivación Radford (2013), que en sus planteamientos sugiere el desarrollo del pensamiento desde un punto de vista no consumista que le da un valor a la educación diferente a la de la simple difusión del saber matemático y al aprendizaje, convirtiendo así el ejercicio educativo en un acto de transformación. Por tal razón este trabajo escudriña en la lógica cultural de producción y en las formas de cooperación entre los estudiantes desde las cuales, el saber y elementos asociados a las subjetividades son reproducidos en el aula de clase a partir de artefactos computacionales.

Conclusiones

Como consecuencia de los análisis realizados alrededor de las producciones intelectuales que los estudiantes evidenciaron en el desarrollo de tareas que involucran secuencias figurales, se ahonda en el tema con relación a los procesos de razonamiento a partir de los cuales los estudiantes abordan los objetos matemáticos planteados. De esta investigación es posible establecer que a partir del análisis multimodal y el análisis del discurso como componente de esta misma multimodalidad se encuentran ciertas etapas asociadas a los diferentes tipos de generalización que se establecen como operaciones que hacen parte de las funciones discursivas del lenguaje.

El aporte más importante que se realiza desde esta investigación tiene que ver con el tránsito que se realiza de generalizaciones aritméticas a generalizaciones algebraicas, cuando se asume “*el lenguaje de programación visual*” como un medio semiótico de objetivación, es decir, a través de procesos de iconicidad y contracción semiótica como los ha llamado Radford (2008), los estudiantes participantes de la investigación logran desarrollar razonamientos deductivos que llevan a la consecución de fórmulas asociadas a representaciones algebraicas de tipo alfa-numérico.

Es de aclarar que en el proceso de objetivación se logra establecer que en el discurso de estudiantes que se quedan en generalizaciones aritméticas se encuentran elementos asociados a funciones referenciales de designación pura o incluso pueden ser de categorización simple. Esta situación limita a los estudiantes a usar métodos de razonamientos de tipo inductivo que se

expresan con gestualidades o expresiones verbales de señalamientos. Esta restricción es sobrepasada cuando los estudiantes expresan en su discurso elementos de función discursiva como la predicación e ilocución que se ven manifestadas como proposiciones simples que particularmente pueden tener elementos asociados a la prosodia y que de manera específica se encuentran en desarrollos que van evidenciando la obtención de una característica común y generalizable de las secuencias planteadas en las tareas.

De igual forma, en el proceso de consecución de patrones o características comunes en las secuencias, se evidencia en los estudiantes que sus razonamientos muestran propuestas y opiniones que se dejan ver como razonamientos abductivos y que se manifiestan en su discurso como función de reflexividad que en general le da prioridad al valor epistémico sobre el valor lógico de verdad. Este tipo de razonamientos se establece como una abducción analítica que es sometida a prueba usando el artefacto computacional, para su potencial propuesta deductiva la prueba en mención se ha decidido categorizar en complemento de la teoría enunciada acerca de la naturaleza del pensamiento algebraico, y desde este trabajo de investigación como un componente importante de “**analiticidad computacional**”, que conlleva a la obtención de un número finito de pruebas, que sobrepasan las que podrían ser realizadas usando medios semióticos asociados al lápiz y el papel y que generan un cambio en el valor epistémico que al final implica un valor lógico de verdad, desarrollado en el discurso de los estudiantes como formas semióticas de similitud externa como función de expansión formal, esa categoría emergente dentro de esta investigación tiene características de a priori, es decir pronosticar y dar un valor epistémico a una expresión simbólica, trabajo con los objetos indeterminados desde la programación usando los bloques en el lenguaje de programación visual, tiene función de

determinar bloques de *programación* que representan variables que permiten el trabajo de elementos desconocidos dentro de la secuencia como si fueran números específicos (En este caso los bloques en *Scratch*), el carácter operatorio de los objetos indeterminados se vuelve un trabajo automatizado que permite probar y dar validez de forma más efectiva los mismos, el valor epistémico que se le da a una determinada expresión termina siendo validado y convertido en un valor lógico de verdad en la función de reflexividad discursiva y además cuando se añade la posibilidad de movilizar otro medio semiótico de objetivación asociado a un artefacto computacional se amplían las formas de pensar de los estudiantes dado que la cantidad de actividades que se integran inciden y transforman las funciones psicológicas..

En general, como conocimiento didáctico esta investigación propone la inclusión de artefactos computacionales en tareas que requieran deducción de expresiones en secuencias, dado que se concluye que la adopción de un lenguaje de programación como medio semiótico de objetivación sugiere una transición directa hacia la generalización algebraica, dado su componente de “***analiticidad computacional***” y la inclusión de argumentos deductivos como método de generalización, lo cual sugiere un cambio fundamental en las funciones psicológicas tal como lo presentó Vygotsky (1978), respondiendo con esto a la pregunta de investigación ***¿Qué aportes genera el uso de un lenguaje de programación visual, a los procesos de argumentación en tareas que permiten el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes escolares entre los 10 y 14 años?***

Aportes y proyecciones

Con respecto a las contribuciones que esta investigación doctoral aporta de forma general a la línea de investigación “Educación, cultura y sociedad” y al proyecto curricular del Doctorado en Educación de la Universidad Santo Tomás de Colombia sugiere un avance en la comprensión de los procesos concernientes a la generalización de patrones y su relevancia en el desarrollo del pensamiento algebraico, desde el análisis multimodal y de las funciones discursivas del lenguaje como elemento de comprensión de aspectos propios de la educación matemática, de manera que se permita reflexionar sobre las formas de pensamiento algebraico y su relación con medios semióticos de objetivación asociados a tecnologías actuales que históricamente se han constituido, desde un estudio interdisciplinar.

Además, esta investigación realiza aportes acerca de la naturaleza del pensamiento que puede potenciar los estudios concernientes al álgebra temprana y que constituyen una contribución a cambios curriculares que pueden ser estudiados a nivel nacional e internacional, que hagan a un lado las prácticas escolares en educación centradas en tratamientos sin sentido en un único registro de representación, además de la propuesta de adopción de un artefacto computacional como mediador en el proceso de aprendizaje.

Por otro lado, la presente investigación proporciona un análisis que agrega elementos susceptibles de ser abordados desde la didáctica de las matemáticas, las nuevas tecnologías y las actuales transformaciones culturales a partir de las cuales se realizan otras lecturas de la sociedad desde la investigación educativa, en este caso desde la inclusión de artefactos computacionales en el aula y la motivación por la adopción de lenguajes de programación como medio semiótico

de objetivación para enriquecer el estudio sobre conocimientos asociados al pensamiento matemático y los artefactos culturales, que actualicen el saber y que contribuyan a la transformación de escenarios socio-educativos.

Referencias

- Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* [Universidad de Granada]. <http://digibug.ugr.es/handle/10481/31332>
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, May.
- Arzarello, F., & Edwards, L. (2005). Gesture and the Construction of Mathematical Meaning. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 123–154.
- Balcaza, T. (2018). *Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del enfoque Ontosemiótico y de la teoría de los registros de representación semiótica*. Universidad de Jaén.
- Bayona, L. (2021). *Generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria (con edades de 10 y 11 años)*. Santo Tomas de Colombia.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). v. *Approaches to Algebra*, 3–12.
https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_1
- Benveniste, E. (1966). *Problemas de Linguística General* (S. Veintiuno (ed.)).
- Butto, C., & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22, 55–86.

- Cai, J., Lew, H., Morries, A., Moyer, J., Ng, S., & Schmittau, J. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 5–14.
- Calderon, D. (2007). La Argumentación en tanto TÈCHNE: Una vía discursiva para el desarrollo del sujeto social. In *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas* (pp. 63–86).
- Cañadas, M. C., & Castro, E. (2004). Razonamiento Inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. *Actas Del Octavo Simposio de La Sociedad Española de Investigación En Educación Matemática (SEIEM)*, 173–182.
- Carlsen, B., & Glenton, C. (2011). What about N? A methodological study of sample-size reporting in focus group studies. *BMC Medical Research Methodology*, 11. <https://doi.org/10.1186/1471-2288-11-26>
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, January 2007*, 669–705.
- Clement, J., Lochhead, J., & Soloway, E. (1980). Positive effects of computer programming on students' understanding of variables and equations. *Proceedings of the ACM 1980 Annual Conference, ACM 1980*, 467–474. <https://doi.org/10.1145/800176.810002>
- Creswell, J. (2009). *John W. Creswell's Research Design 3rd Ed.* <https://www.worldcat.org/title/research-design-qualitative-quantitative-and-mixed-methods-approaches/oclc/269313109>

Creswell, J., & Clark, V. (2018). *Designing and Conducting Mixed Methods Research* (Third edit).

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. *Énfasis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, 192.

http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y

Demonty, I. Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. Springer.

De la Fuente, J. (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas . El rol del conocimiento del profesor*. Universitat Autònoma de Barcelona.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semioticos y aprendizajes intelectuales* (U. del Valle (ed.)).

Eco, U. (1986). *La estructura ausente. Introducción a la semiótica* (Lumen S.A. (ed.); Tercera ed). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education* (Taylor & Francis e-Library (ed.)).

Ernest, P. (2013). The philosophy of mathematics education today. In *The Philosophy of Mathematics Education*. <https://doi.org/10.4324/9780203058923>

Fischbein, E. (2002). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach* (K. A. Publishers (ed.)).

- García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. Universidad de Granada.
- Geertz, C. (1973). *La interpretación de las culturas*.
- Gobara, S. T., & Radford, L. (2020). *Teoria da objetivção: Fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática*. www.livrariadafisica.com.br
- Godino, J., Castro, W., & Aké, L. (2012). Naturaleza del razonamiento matemático. *Boletim de Educação Matemática*, 26, 483–511. <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/05.pdf>
- Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1988). *Diseño cualitativo en investigación educativa* (Morata (ed.)).
- Hegel, G. W. F. (1997). *Enciclopedia de las Ciencias Filosóficas*. [www .alianzaeditorial.es](http://www.alianzaeditorial.es)
- Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come. *Educational Researcher*, 33(7), 14–26.
<https://doi.org/10.3102/0013189X033007014>
- Kant, I. (1929). *Critique of pure reason* (M. and Co (ed.)).
- Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the k-12 curriculum. *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum : Proceedings of a National Symposium May 27 and 28, 1997*, Ccm, 21.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In S. Publisher (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past Present and*

Future. http://www.amazon.com/Handbook-Research-Psychology-Mathematics-Education/dp/9077874194/ref=pd_sim_b_1

Kieran, C. (2007). *Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation*.

Kieran, C. (2019). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 33–56. <https://doi.org/10.4324/9781315044378-4>

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *RELIEVE - Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 19(2), 229–240. <https://doi.org/10.7203/relieve.19.2.3024>

Lakoff, G., & Nunez, R. (2002). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. *The American Mathematical Monthly*, 109(7), 672. <https://doi.org/10.2307/3072449>

Ledbetter, L. (2017). *A Qualitative Content Analysis of Early Algebra Education iOS Apps for Primary Children* (Issue June). University of south Florida.

Leontiev, A. (2013). *El hombre y la cultura* (Omegalfa (ed.)).

Leontyev, A. (2009). Subjectivity and Consciousness. *Proceedings of the XXIII World Congress of Philosophy*, 35–39. <https://doi.org/10.5840/wcp232018571215>

Marin, J. (2018). *Investigar en educación y pedagogía. Sus fundamentos epistemológicos y metodológicos* (Magisterio (ed.); Segunda ed).

- Martos, E., & García, A. E. M. (2014). *Artefactos culturales y alfabetización en la era digital: Discusiones conceptuales y praxis educativa*. 119–135.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Rutas/Raíces hacia el álgebra* (T. O. University (ed.)).
- McGowen, M. (2017). Examining the Role of Prior Experience in the Learning of Algebra. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest Is Just Noise* (Springer, pp. 19–42).
- Mejías, C. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria*. Universitat de Girona.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Ministerio de Educación Nacional.
<https://doi.org/958-691-290-6>
- Miller, J. (2014). *Young indigenous students. experiences in mathematics: An exploration in pattern generalisation*. Australian Catholic University.
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5–30.
- Morales, R. (2018). *Resolución de tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos por estudiantes de 6-7 años*. Universidades de Granada.
- Moretti, V. (2011). O sentido em movimento na formação de professores de matemática. *Zetetike*, 18(2), 155–180. <https://doi.org/10.20396/zet.v18i34.8646682>

Moretti, V., & Radford, L. (2016). Towards aculturally meaningful history of concepts and the organization of mathematics teaching activity. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *International Study Group on the relations between the history and pedagogy of mathematics* (pp. 47–50). HPM.

Morgan, C., & Kynigos, C. (2014). Digital artefacts as representations: Forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 357–379. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9523-1>

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). Executive Summary: Principles and Standards for School Mathematics. *National Council of Teachers of Mathematics*, 1–6. http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf

Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction*, 16(2), 119–172. https://doi.org/10.1207/s1532690xc1602_1

OCDE. (2016). Resultados de la Evaluación PISA 2015. *OCDE Mejores Políticas Para Una Vida Mejor*.

OECD. (2016). *La educación en Colombia* (L. línea de la OCDE (ed.)).

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? in what sense? *Synthese*, 134(1–2), 181–216. <https://doi.org/10.1023/A:1022191731931>

Otte, M. (2006). Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. In Clame (Ed.), *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático: Vol. Número esp.*

Peirce, C. S. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce (1931-1958), Vol. 1 & 2.*

Peirce, C. S. (1965). *La ciencia de la semiótica* (N. Visión (ed.)). <http://mastor.cl/blog/wp-content/uploads/2015/08/PEIRCE-CH.-S.-La-Ciencia-de-La-Semiótica.pdf>

Penrose, R. (2006). *El camino a la realidad: una guía completa de las leyes del universo* (p. 1472). <https://books.google.com/books?id=uWgyPQAACAAJ&pgis=1>

Pérez, H. (2017). *Uso de Scratch como herramienta para el desarrollo del pensamiento computacional en programación I de la carrera de informática de la Universidad Central del Ecuador*. Universidad de Alicante.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. (Tecnos (ed.)).

Radford, L. (2000). Signs and meanings in Students' emergent algebraic. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237–268. <https://doi.org/10.1023/A:1017530828058>

Radford, L. (2001a). Factual, Contextual and symbolic generalizations in algebra. *Pme Conference*, 4, 81–89. <http://142.51.79.168/NR/rdonlyres/EC5EAFF0-AC76-45DD-9674-AFA6E68F4E31/14848/PME26.pdf>

Radford, L. (2001b). *On Culture and mind: a post-vygotskian semiotic perspective with an example from greek mathematical thought*. 3(Chapter 2), 73–102. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044529-8.50007-0>

Radford, L. (2002). Algebra as Tekhne. Artefact, Symbols and Equations in the Classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 31–56.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0501_02

Radford, L. (2005). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification.

Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 143–145. <http://laurentian.ca/NR/rdonlyres/36500089-ECC7-4BEF-9DDC-D1FFEB92A8DA/0/PME05RF.pdf>

Radford, L. (2006a). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic

Perspective. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1(March 1987), 2–21.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *RELIME. Revista*

Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 9(1), 103–130.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic

generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83–96. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in*

Mathematics Education, 12(1), 1–19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pna*,

4(2), 37–62. <http://digibug.ugr.es/handle/10481/3505>

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. *ZDM—International*

Reviews on Mathematical Education, 40(1), 187–214. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>

- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. In Comares (Ed.), *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (Vol. 15, Issue 2). <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo93.pdf>
- Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 405–422. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x>
- Radford, L. (2015). Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. In *PNA* (Vol. 9, Issue 3). http://www.wga.hu/html_m/p/piero/2/91/
- Radford, L. (2018a). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *Pna*, 2(12), 61–80. [http://funes.uniandes.edu.co/10155/1/RadfordPNA12\(2\)2018Desafios.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/10155/1/RadfordPNA12(2)2018Desafios.pdf)
- Radford, L. (2018b). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*, 3–25. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1
- Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., & Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4(1), 55–62.
- Ramos, A. (2018). El acento , el ritmo y la entonación en la enseñanza del español como LE.

Instituto Cervantes de São Paulo, 22–31.

Ramos, L. (2018). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Secundaria en Honduras : evaluación y concepciones docentes*. Universidad de extremadura.

Ratner, C. (2000). Outline of A Coherent, Comprehensive Concept of Culture. *21st Century Anthropology: A Reference Handbook*, 34, 5–11.
<https://doi.org/10.4135/9781412979283.n14>

Rickenmann, R. (1998). *El rol de los artefactos culturales en la estructuración y gestión de secuencias de enseñanza-aprendizaje*. 1–21.

Rickenmann, R. (2007). Investigación y formación docente: dispositivos de formación y elementos para la construcción de una identidad profesional. *Eccos. Revista Científica*, 9, 435–463.

Roberta, J. M. (2013). *Developing early algebraic reasoning in a mathematical community of inquiry*. Plymouth University.

Rodriguez, G. (2015). *Estudiantes en desventaja resolviendo tareas de generalización de patrones con la mediación de plantillas visuales y manipulativos virtuales*. Universidad pedagógica nacional de México.

Rodríguez, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria*. Universidad de Granada.

Roth, W. (2001). *Gestures : Their Role in Teaching and Learning* Author (s): Wolff-Michael

Roth Source : Review of Educational Research , Autumn , 2001 , Vol . 71 , No . 3 (Autumn , 2001), Published by : American Educational Research Association Stable URL : [https://www.71\(3\),365-392](https://www.71(3),365-392).

Saussure, F. (1945). *Título del original francés: Cours de linguistique générale*. 255.

http://fba.unlp.edu.ar/lenguajemm/?wpfb_dl=59

Somasundram, P. (2018). *A cognitive model of year five pupils' Algebraic thinking*. Universidad de Malaya Kiala Lumpur.

Suharman, L. (2018). *Raciocínio algébrico na formacao inicial de professores em Timor-Leste*. Universidad de Aveiro.

Tójar, J. (2006). *INVESTIGACIÓN CUALITATIVA. Comprender y actuar* (L. muralla S.A. (ed.)).

Vasco, C. (2007). Análisis semiótico del algebra elemental. In *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas* (Universida, pp. 107-136).

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales En El Currículo de Matemáticas*, 109.

<http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf>

Vega, D. (2013). *Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*. Universidad de Granada.

Vergel, R. (2010). La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para

desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria : Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. *11ª Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 1980, 69–81.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2015a). Cómo emerge el pensamiento algebraico. El caso del pensamiento algebraico factual. *Uno Revista de Didáctica de Las Matemática*, 68, 9–17.

Vergel, R. (2015b). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *Pna*, 9(3), 193–215. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220>

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (UD Editori).

Vergel, R. (2019). Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético " sofisticado " y proto-formas de pensamiento algebraico. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: Aportes para el trabajo en el aula* (U. D. F. J. de Caldas (ed.)).

Verschaffel, L., & Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. *International Handbook of Mathematics Education*, 139–160. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_5

Vygotsky, L. S. (1960). Obras escogidas: Tomo 3, Hist del desarrollo de las funciones psiquicas

sup. *Historia*, III, 1–261.

Vygotsky, L. S. (1978). Internalización de las funciones psicológicas superiores. *El Desarrollo de Los Procesos Psicológicos Superiores*, 224.

Vygotsky, L. S. (1987). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. In E. C. Técnica (Ed.), *Obras escogidas Tomo III* (Vol. 58, Issues 3–4).
<https://doi.org/10.1007/BF01112773>

Vygotsky, L. S. (1995). Pensamiento y Lenguaje: Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas. *Archives of General Psychiatry*, 52(7), 583–593.
<https://doi.org/10.1001/archpsyc.1995.03950190065010>

Wagner, S., & Kieran, C. (1989). *Part II Teaching of Algebra*. 220–237.

Wertsch, J. V. (1988). *Vygostky y la formación social de la mente de James Wertsch.pdf* (Paidós (ed.)).

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 361–378.
<https://doi.org/10.1023/A:1020291317178>