

**Diseño de un controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida**

**Juan Diego Pimiento Serrano**

**Trabajo de grado para optar el título de Ingeniero Mecatrónico**

**Director**

**MSc. William Razvan Castro Jaluba**

**Magister en Redes y Sistemas de Comunicaciones**

**Codirector**

**MSc. Carlos Mateo Beltrán Larrota**

**Magister en Matemáticas Aplicadas**

**Universidad Santo Tomás, Bucaramanga**

**División de Ingenierías y Arquitectura**

**Ingeniería Mecatrónica**

**2026**

### **Dedicatoria**

Agradezco a Dios por darme la sabiduría y creatividad para desarrollar este trabajo.

Le dedico este trabajo a mi familia, especialmente a mi madre, Jennis, que me apoyan incondicionalmente en todos mis proyectos.

### **Agradecimientos**

Agradezco a mi director de tesis, el Ing. William Castro, cuya experiencia fue fundamental para desarrollar el presente trabajo. Agradezco también a mi codirector de tesis, el Mat. Mateo Beltrán, y al Fís. Rafael Gelvez, por su apoyo constante en proyectos de investigación y junto a quienes se creó el semillero de investigación FIMAB, la base del presente trabajo.

## Contenido

Introducción .....	18
1. Diseño de un controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida.....	20
1.1 Planteamiento del problema.....	20
1.2 Justificación .....	23
1.3 Objetivos .....	24
1.3.1 <i>Objetivo general</i> .....	24
1.3.2 <i>Objetivos específicos</i> .....	25
1.4 Alcance .....	25
1.5 Aportes del trabajo.....	26
1.6 Organización del documento .....	27
2. Marco referencial.....	29
2.1 Marco teórico.....	29
2.1.1 <i>Teoría de control automático</i> .....	29
2.1.2 <i>Modelos de dinámica poblacional de plagas</i> .....	36
2.2 Marco conceptual.....	40
2.2.1 <i>Plaguicida</i> .....	40
2.2.2 <i>Control biológico</i> .....	40
2.2.3 <i>Ecuaciones y variables de estado</i> .....	41
2.2.4 <i>Valores propios o autovalores</i> .....	41
2.2.5 <i>Variable controlada, manipulada y de perturbación</i> .....	42
2.2.6 <i>Punto de consigna o setpoint</i> .....	42

SISTEMA DE CONTROL DE PLAGAS POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS	5
2.2.7 Error y offset .....	42
2.3 Marco legal .....	43
2.4 Estado del arte.....	43
2.4.1 Condiciones iniciales del proyecto .....	46
3. Diseño Metodológico.....	47
3.1 Descripción de etapas y tareas .....	48
3.1.1 Etapa 1: Análisis de modelos Chacón y LV de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida .....	48
3.1.2 Etapa 2: Representación en espacio de estados de los modelos ampliados.....	48
3.1.3 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados.....	48
3.1.4 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación .....	49
3.2 Descripción de los productos finales .....	49
4. Desarrollo.....	50
4.1 Modelo de única aplicación del pesticida .....	51
4.1.1 Etapa 1: Análisis del modelo de única aplicación del pesticida .....	51
4.1.2 Etapa 2.1: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de única aplicación del pesticida – antes del tiempo de aplicación $T$ . .....	54
4.1.3 Etapa 2.2: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de única aplicación del pesticida – durante el pulso de aplicación entre $(T, T+\Delta]$ .....	58
4.1.4 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados para el modelo de única aplicación del pesticida .....	65

4.1.5 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación para el modelo de única aplicación del pesticida.....	68
4.2 Modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida .....	97
4.2.1 Etapa 1: Análisis del modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida.....	97
4.2.2 Etapa 2: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida – durante los pulsos de aplicación entre $(T_j, T_j + \Delta]$ .....	99
4.2.3 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados para el modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida .....	107
4.2.4 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación para el modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida.....	110
4.3 Modelo Lotka-Volterra (LV) ante aplicación de pesticida .....	139
4.3.1 Etapa 1: Análisis del modelo LV ante aplicación de pesticida .....	139
4.3.2 Etapa 2.1: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo LV ante aplicación del pesticida – antes del tiempo de aplicación $T$ y después de $T + \Delta$ .....	142
4.3.3 Etapa 2.2: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo LV ante aplicación del pesticida – durante el pulso de aplicación entre $(T, T+\Delta]$ .....	147
4.3.4 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados para el modelo LV ante aplicación del pesticida .....	151
4.3.5 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación para el modelo LV ante aplicación del pesticida .....	155

4.4 Discusión de resultados.....	162
4.4.1 <i>Modelo de única aplicación de pesticida</i> .....	162
4.4.2 <i>Modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida</i> .....	166
4.4.3 <i>Modelo LV ante aplicación de pesticida</i> .....	171
5. Conclusiones y trabajos Futuros .....	173
5.1. Conclusiones .....	173
5.2. Trabajos Futuros .....	176
Referencias.....	177
Apéndices.....	183

**Lista de Tablas**

<b>Tabla 1.</b> <i>Impactos esperados</i> .....	27
<b>Tabla 2.</b> <i>Resultados finales</i> . ....	49
<b>Tabla 3.</b> <i>Resultados obtenidos</i> . ....	51

### Lista de Figuras

<b>Figura 1.</b> <i>Metodología propuesta para el diseño del controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de pesticidas.....</i>	47
<b>Figura 2.</b> <i>Simulación de la solución particular de la función población antes del tiempo de aplicación.....</i>	71
<b>Figura 3.</b> <i>Gráfica de la ecuación (4-64). .....</i>	75
<b>Figura 4.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X_1</math> durante el pulso de aplicación.....</i>	84
<b>Figura 5.</b> <i>Simulación de señal de control a partir de <math>X_1</math> durante el pulso de aplicación. ....</i>	85
<b>Figura 6.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X_2</math> durante el pulso de aplicación.....</i>	86
<b>Figura 7.</b> <i>Simulación de señal de control a partir de <math>X_2</math> durante el pulso de aplicación. ....</i>	86
<b>Figura 8.</b> <i>Simulación de función por partes (poblacion de plaga) a partir de <math>x_1</math> desde cero hasta la finalización del pulso de aplicación. ....</i>	88
<b>Figura 9.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x_2</math> desde cero hasta la finalización del pulso de aplicación. ....</i>	88
<b>Figura 10.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>x_1</math> después del pulso de aplicación.....</i>	94
<b>Figura 11.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>x_2</math> después del pulso de aplicación.....</i>	95
<b>Figura 12.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x_1</math> antes, durante y después del pulso de aplicación.....</i>	96

<b>Figura 13.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x_2</math> antes, durante y después del pulso de aplicación en el rango: (a) <math>t \in [0,4.6]</math> (b) <math>t \in [0,7]</math>.</i> .....	96
<b>Figura 14.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X_1</math> durante el pulso de aplicación <math>T_2, T_2 + \Delta</math>.</i> .....	123
<b>Figura 15.</b> <i>Simulación de señal de control a partir de <math>X_1</math> durante el segundo pulso de aplicación.</i> .....	123
<b>Figura 16.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X_2</math> durante el pulso de aplicación <math>T_2, T_2 + \Delta</math>.</i> .....	124
<b>Figura 17.</b> <i>Simulación de señal de control a partir de <math>X_2</math> durante el segundo pulso de aplicación.</i> .....	125
<b>Figura 18.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x_1</math> desde cero hasta la finalización del segundo pulso de aplicación.</i> .....	125
<b>Figura 19.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x_2</math> desde cero hasta la finalización del segundo pulso de aplicación.</i> .....	126
<b>Figura 20.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X_1</math> después del segundo pulso de aplicación y antes del tercer pulso de aplicación <math>T_2 + \Delta, T_3</math>.</i> .....	128
<b>Figura 21.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X_2</math> después del segundo pulso de aplicación y antes del tercer pulso de aplicación <math>T_2 + \Delta, T_3</math>.</i> .....	128
<b>Figura 22.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x_1</math> desde cero hasta el inicio del tercer pulso de aplicación.</i> .....	129
<b>Figura 23.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x_2</math> desde cero hasta el inicio del tercer pulso de aplicación.</i> .....	129

<b>Figura 24.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X1</math> durante el pulso de aplicación <math>T3, T3 + \Delta</math>.</i> .....	130
<b>Figura 25.</b> <i>Simulación de señal de control a partir de <math>X1</math> durante el tercer pulso de aplicación.</i> .....	131
<b>Figura 26.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X2</math> durante el pulso de aplicación <math>T3, T3 + \Delta</math>.</i> .....	132
<b>Figura 27.</b> <i>Simulación de señal de control a partir de <math>X2</math> durante el tercer pulso de aplicación.</i> .....	132
<b>Figura 28.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x1</math> desde cero hasta la finalización del tercer pulso de aplicación.</i> .....	133
<b>Figura 29.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x2</math> desde cero hasta la finalización del tercer pulso de aplicación.</i> .....	133
<b>Figura 30.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X1</math> después del tercer pulso de aplicación <math>T3 + \Delta, T4</math>.</i> .....	135
<b>Figura 31.</b> <i>Simulación de la solución de la función población a partir de <math>X2</math> después del tercer pulso de aplicación <math>T3 + \Delta, T4</math>.</i> .....	136
<b>Figura 32.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x1</math> desde cero hasta <math>T4</math>.</i> .....	137
<b>Figura 33.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x2</math> desde cero hasta <math>T4</math>.</i> .....	137
<b>Figura 34.</b> <i>Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de <math>x2</math> en el rango <math>[0,17.3]</math>.</i> .....	138
<b>Figura 35.</b> <i>Simulación del sistema LV antes del tiempo de aplicación <math>T=6</math>.</i> .....	157

<b>Figura 36.</b> <i>Simulación del sistema LV durante el pulso de aplicación <math>(T, T+\Delta]</math>.</i> .....	159
<b>Figura 37.</b> <i>Simulación de la señal de control por realimentación de estados del sistema LV durante el pulso de aplicación.</i> .....	159
<b>Figura 38.</b> <i>Simulación del sistema LV después del pulso de aplicación <math>t &gt; T + \Delta</math>.</i> .....	161
<b>Figura 39.</b> <i>Simulación del sistema LV antes, durante y después del pulso de aplicación de pesticida.</i> .....	162
<b>Figura 40.</b> <i>Gráfica de (4-276) para <math>x_0 = 35, a = 0.9, b = 0.8, c = 1.2, T = 1</math>.</i> .....	163
<b>Figura 41.</b> <i>Gráfica de (4-276) para <math>x_0 = 35, a = 0.9, b = 0.8, c = 0.9, T = 1</math>.</i> .....	163
<b>Figura 42.</b> <i>Gráfica de (4-276) para <math>x_0 = 35, a = 0.4, b = 0.8, c = 1.2, T = 1</math>.</i> .....	164
<b>Figura 43.</b> <i>Gráfica de (4-276) para <math>x_0 = 35, a = 1, b = 0, c = 1.2, T = 1</math>.</i> .....	164
<b>Figura 44.</b> <i>Gráfica de (4-277) para <math>x_0 = 35, a = 0.9, b = 0.8, c = 1.2, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2</math>.</i> .....	167
<b>Figura 45.</b> <i>Gráfica de (4-277) para <math>x_0 = 35, a = 0.9, b = 0.8, c = 0.9, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2</math>.</i> .....	167
<b>Figura 46.</b> <i>Gráfica de (4-277) para <math>x_0 = 35, a = 0.4, b = 0.8, c = 1.2, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2</math>.</i> .....	168
<b>Figura 47.</b> <i>Gráfica de (4-277) para <math>x_0 = 35, a = 1, b = 0, c = 1.2, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2</math>.</i> .....	168

**Lista de Apéndices**

**Apéndice A.** Algoritmo para el diseño y simulación del control por realimentación de estados para los modelos Chacón de única aplicación y sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida 1831

**Apéndice B.** Algoritmo para el diseño y simulación del control por realimentación de estados para el modelo Lotka-Volterra ante aplicación de pesticida..... 1831

### Resumen

Los cultivos agrícolas representan una parte vital de la economía global y son esenciales para la seguridad alimentaria. La agricultura produce la mayor parte de los alimentos consumidos por los humanos, y es el mayor empleador a nivel mundial, con más de un billón de personas trabajando en agricultura. En Colombia, el 15% de la fuerza laboral trabaja en el sector agrícola, y en 2021 este sector representó el 15.3% del PIB.

Sin embargo, los cultivos son constantemente amenazados por diversas plagas que afectan la producción y disponibilidad de productos alimenticios, generando pérdidas económicas considerables. Los áfidos, por ejemplo, son una familia de plagas presente en una amplia variedad de cultivos, y el manejo de sus poblaciones ha sido un reto constante para los agricultores debido a su acelerada capacidad reproductiva y adaptabilidad a diversos entornos. Al menos 250 especies de áfidos son consideradas plagas de importancia económica por su capacidad de causar graves daños a los cultivos agrícolas.

Para hacer frente a las poblaciones de plagas, se suelen emplear métodos convencionales como la aplicación de insecticidas químicos, que pueden ser costosos e ineficientes en el largo plazo debido a las múltiples formas de resistencia que generan las plagas a dichas sustancias. Teniendo en cuenta que los residuos de los pesticidas pueden comprometer significativamente la calidad de los cultivos, alterando propiedades fisicoquímicas, acumulándose en los suelos, e introduciendo riesgos toxicológicos a los consumidores, los agricultores deben aplicar los pesticidas con precisión.

En este contexto, la Teoría de Control Automático puede ser aplicada para formular la aplicación de pesticida como un problema de optimización, buscando un balance entre supresión efectiva de

plagas y uso mínimo de pesticidas. En el presente trabajo de grado se diseña un controlador para estimar el uso periódico de pesticida en modelos de dinámica poblacional de plagas a partir del análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad, y simulación del controlador.

*Palabras Clave:* Sistemas de Control, Manejo de plagas, Lotka-Volterra, Representación en espacio de estado, Control por realimentación de estados.

### **Abstract**

Agricultural crops represent a vital part of the global economy and are essential for ensuring food security. Agriculture is responsible for the production of most of the world's food, and it is the largest employer on a global scale, with more than one billion people working in this sector. In Colombia, 15% of the workforce is employed in the agricultural sector, and in 2021 this sector accounted for 15.3% of GDP.

However, agricultural crops are constantly under threat from a variety of pests that have a detrimental effect on food production and availability, causing significant economic losses. Aphids, for instance, are a family of pests present in a wide variety of crops, and managing their populations has been a constant challenge for farmers due to their rapid reproductive capacity and adaptability to diverse environments. It is estimated that at least 250 species of aphids are considered pests of economic importance due to their ability to cause significant damage to agricultural crops.

Regarding the issue of pest populations, conventional methods such as the application of chemical insecticides are frequently employed. Nevertheless, these methods can be costly and inefficient in the long term due to the development of multiple forms of resistance by pests to these substances. It is imperative for farmers to exercise precision in the application of pesticides, given the potential for pesticide residues to compromise crop quality by altering physicochemical properties, accumulating in soils, and introducing toxicological risks to consumers.

In this context, Automatic Control Theory can be applied to formulate pesticide application as an optimization problem, seeking a balance between effective pest suppression and minimal pesticide use. In this thesis, a controller is designed to estimate the periodic use of pesticides in pest

population dynamics models based on stability, observability, and controllability analysis, and controller simulation.

*Key Words:* Control Systems, Pest Management, Lotka-Volterra, State-Space Representation, State Feedback Control.

## Introducción

Los cultivos agrícolas representan una parte vital de la economía global y son esenciales para la seguridad alimentaria. La agricultura es “la base del sistema alimentario global. Es responsable de producir la mayor parte de los alimentos consumidos por los humanos” [1] y es el mayor empleador a nivel mundial, con más de un billón de personas trabajando en agricultura [2]. En Colombia, el 15% de la fuerza laboral trabaja en el sector agrícola [3], y en 2021 este sector representó el 15.3% del PIB [4].

Sin embargo, los cultivos son constantemente amenazados por diversas plagas que afectan la calidad de los productos y reducen las ganancias. En 2019, Savary et al. [5] documentaron pérdidas económicas del 10-40% en cultivos fundamentales como el arroz, el trigo y el maíz, debido a la acción de 137 patógenos y plagas a nivel global, representando una amenaza significativa a la producción y disponibilidad de alimentos. Ha sido demostrado que estas plagas no solo generan pérdidas económicas considerables, también comprometen la calidad de la producción, incrementando los riesgos en materia de seguridad alimentaria.

Para hacer frente a las poblaciones de plagas, se suelen emplear métodos convencionales de manejo de plagas, como la aplicación de pesticidas, que pueden ser costosos e ineficientes en el largo plazo debido a las múltiples formas de resistencia que generan las plagas a dichas sustancias [6][7].

Teniendo en cuenta que los residuos de los pesticidas pueden comprometer significativamente la calidad de los cultivos, alterando propiedades fisicoquímicas, acumulándose en los suelos, e introduciendo riesgos toxicológicos a los consumidores [8], los agricultores deben aplicar los pesticidas con precisión.

En este contexto, la Teoría de Control Automático puede ser aplicada para formular la aplicación de pesticida como un problema de optimización, buscando un balance entre supresión efectiva de plagas y uso mínimo de pesticidas. Al integrar estrategias de control automático, los agricultores podrían optimizar sistemáticamente el uso de pesticidas, reducir impacto medioambiental y costos de operación, y garantizar una calidad constante ante diversas condiciones en los cultivos.

Diseñar un controlador para estimar el uso periódico de pesticida en modelos de dinámica poblacional de plagas permite abordar la problemática del uso eficiente de pesticidas como un problema de optimización, aplicando conceptos de la teoría de control automático como el análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad. El análisis de los modelos de dinámica poblacional de plagas se llevará a cabo a través de una representación en espacio de estados, para la cual se diseñará un controlador que busque evitar el crecimiento de la población de plagas, y posteriormente se validará en entorno de simulación.

# 1. **Diseño de un controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida**

## 1.1 **Planteamiento del problema**

El manejo de las poblaciones de plagas es uno de los problemas recurrentes a los que se enfrenta la agricultura. En 2019, Savary et al. [5] documentaron pérdidas económicas del 10-40% en cultivos fundamentales como el arroz, el trigo y el maíz, debido a la acción de 137 patógenos y plagas a nivel global, representando una amenaza significativa a la producción y disponibilidad de alimentos. Ha sido demostrado que estas plagas no solo generan pérdidas económicas considerables, también comprometen la calidad de la producción, incrementando los riesgos en materia de seguridad alimentaria. Como ejemplo, los áfidos son una familia de plagas presente en una amplia variedad de cultivos, y el manejo de sus poblaciones ha sido un reto constante para los agricultores, debido a su acelerada capacidad reproductiva y adaptabilidad a diversos entornos. Se conocen al menos 5500 especies de áfidos, dentro de las cuales más de 250 especies son consideradas plagas de importancia económica por su capacidad de causar graves daños a los cultivos agrícolas, ya sea de forma directa, por consumir las plantas hospederas, o de forma indirecta por la transmisión de virus a las plantas [9]. Adicionalmente, a pesar de que las especies de áfidos se suelen especializar en una cantidad reducida de plantas, existen especies generalistas cuya adaptación es preocupante. Este es el caso de *Myzus persicae*, siendo una plaga de distribución global, transmisora de más de 100 virus en plantas y con la capacidad de colonizar más de 100 especies de plantas de 40 familias diferentes [10].

Tradicionalmente, el uso de pesticidas ha sido una de las alternativas más efectivas y usadas para reducir o erradicar a las plagas y evitar las enfermedades que estas pueden ocasionar en los

cultivos. Idealmente, un pesticida debe ser letal para las plagas objetivo, pero no para otras especies, incluyendo al ser humano [11]. Para ello, es fundamental determinar la concentración adecuada de pesticida para cada cultivo, a pesar de que esta sea una de las dificultades de su aplicación. Diversas instituciones recomiendan estimar la cantidad o proporción de pesticida adecuada para cada cultivo y su cálculo se da en función de la cantidad de ingrediente activo requerido por hectárea o acre, cantidad real de formulación requerida por hectárea o acre, cantidad real de formulación requerida por litro o galón, o el porcentaje de concentración requerida en el difusor de agua [12]. La concentración de pesticida se basa en la especie de mayor tolerancia o resistencia al químico, en un rango en el que no se promueva la resistencia local de la plaga por el exceso o insuficiente concentración de pesticida [6][7][13]. Otra dificultad se encuentra en la aplicación en sí misma, pues el método usado puede modificar significativamente la concentración que efectivamente llega a la plaga y a los organismos no objetivos que se ven afectados, teniendo en cuenta que la gran mayoría de pesticidas aplicados no alcanzan las plagas objetivo y se dispersan por el ambiente [13].

La aplicación precisa de los pesticidas es fundamental para evitar que sus residuos comprometan significativamente la calidad de los cultivos, alterando propiedades fisicoquímicas, acumulándose en los suelos, e introduciendo riesgos toxicológicos a la salud humana y el medio ambiente [8] [11] [13]. La exposición a pesticidas químicos en seres humanos está relacionada con enfermedades crónicas como el cáncer y enfermedades cardíacas, respiratorias y neurológicas. La contaminación puede ocurrir por el consumo de alimentos o agua con residuos de pesticida, o exposición ocupacional ante la aplicación en cultivos [14]. En el medio ambiente, los pesticidas pueden contaminar el suelo, agua y vegetación, e intoxicar organismos no objetivos, especies cuya presencia puede ser beneficiosa para el cultivo [11]. El impacto en los organismos no objetivos es

diverso pues afecta su supervivencia, crecimiento, reproducción y comportamientos, o efectuar cambios en procesos metabólicos o fisiológicos. Así mismo, el impacto de los pesticidas no se mantiene en las especies afectadas directamente pues también se propaga a través de los niveles tróficos [15].

A raíz de los efectos de los pesticidas en la salud humana y el medio ambiente, se presentan alternativas basadas en procesos naturales preexistentes, como el control biológico. El control biológico hace uso de enemigos naturales de las plagas para reducir la población de plaga.

Sin embargo, en entornos como los monocultivos, la diversidad de plantas es escasa, lo que favorece el crecimiento de plagas pero reduce las poblaciones de enemigos naturales al no tener suficientes lugares de refugio y reproducción [6][16].

En el contexto de los pesticidas, los enemigos naturales o agentes de control biológico hacen parte de los organismos “no objetivo” que se ven afectados por la aplicación del químico (de forma directa por la interacción de la especie con el pesticida, o indirecta por el consumo de residuos de otra especie que contienen pesticida [17]), reduciendo significativamente el impacto de esta alternativa.

A partir de esta problemática diversos estudios han planteado modelos matemáticos para la aplicación de pesticida, sin embargo, no consideran sus efectos en poblaciones “no objetivo” cuya presencia puede ser beneficiosa para el cultivo. Otras investigaciones urgen al desarrollo de modelos dinámicos y complejos donde se integren factores que permitan mejorar el análisis de riesgos ambientales [18].

## 1.2 Justificación

Teniendo en cuenta las dificultades para estimar la dosificación de pesticida y las limitaciones de los modelos matemáticos que no consideran la interacción con otras especies, el presente trabajo aborda tres modelos ampliados (a partir de los modelos de Chacón y Lotka-Volterra descritos en el marco teórico) de dinámica poblacional de plagas ante la aplicación periódica de pesticida para estimar el pesticida requerido a partir de su efectividad para disminuir la población de plagas en un determinado cultivo.

Los modelos ampliados de dinámica poblacional se obtienen a partir de:

- Los modelos de dinámica poblacional de plagas propuestos por Chacón, donde se aborda la aplicación única de pesticida, y la sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida.
- El sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra de interacción depredador-presa. Este modelo se considera dado que el impacto de los pesticidas se extiende a otras especies diferentes a las plagas, por lo que el presente trabajo también considera el impacto directo del pesticida en la población de una especie que está presente o es introducida al cultivo como agente de control biológico.

En este contexto, se aplica la Teoría de Control Automático para formular la aplicación de pesticida como un problema de optimización, buscando un balance entre la supresión efectiva de plagas y el uso mínimo de pesticidas. Al integrar estrategias de control automático, los agricultores podrían optimizar sistemáticamente el uso de pesticidas, reduciendo el impacto medioambiental y los costos de operación, para garantizar una calidad constante ante diversas condiciones en los cultivos.

La Teoría de Control Automático se aplica a través del diseño de un controlador para estimar el uso periódico de pesticida en modelos de dinámica poblacional de plagas. Así mismo, se aplican análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad a los modelos a través de una representación en espacio de estados, para la cual se diseña un controlador que busque evitar el crecimiento de la población de plagas.

Este análisis y diseño de un controlador para modelos de dinámica poblacional permite a los agricultores predecir el comportamiento de un cultivo ante diversas condiciones. Y para ello también se requieren soluciones que futuras investigaciones deben abordar, como estrategias para el muestreo y cuantificación de las poblaciones de plagas y organismos “no objetivo” (como agentes de control biológico), a través de modelos de Inteligencia y Visión Artificial o sistemas IoT (Internet de las cosas, por sus siglas en inglés) de monitoreo de variables ambientales que permitan deducir o aproximar la cantidad de plagas presentes en el cultivo. Así mismo, las futuras investigaciones deberán abordar la estimación de la efectividad del pesticida a partir de su concentración en disoluciones o el impacto de sus componentes en la plaga en un cultivo en particular (considerando la resistencia al pesticida), para que el controlador pueda calcular correctamente la dosis de pesticida en cada aplicación.

## **1.3 Objetivos**

### ***1.3.1 Objetivo general***

Diseñar un controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida.

### 1.3.2 *Objetivos específicos*

1. Analizar la estabilidad, observabilidad y controlabilidad de la representación en espacio de estados de los modelos ampliados de Chacón y Lotka-Volterra de dinámica poblacional de plagas considerando la aplicación periódica de un pesticida.
2. Diseñar un controlador por realimentación de estados a los modelos ampliados de Chacón y Lotka-Volterra de dinámica poblacional de plagas considerando la aplicación periódica de un pesticida.
3. Comprobar la viabilidad en entornos de simulación del controlador por realimentación de estados aplicado los modelos ampliados de Chacón y Lotka-Volterra de dinámica población de plagas considerando la aplicación periódica de un pesticida.

### 1.4 **Alcance**

El alcance de la presente investigación es el diseño de un control por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida. Los modelos analizados son: los modelos propuestos por Chacón [19], y el modelo de Lotka-Volterra [20]. Los modelos propuestos por Chacón plantean que el crecimiento de la población de plagas está establecido por parámetros de natalidad de la plaga, migración y efectividad ante la aplicación única o periódica de pesticida, periodicidad que es representada como una sumatoria. Las ecuaciones de Lotka-Volterra en cambio, proponen que la interacción entre dos poblaciones, depredador y presa, esta descrita por parámetros de natalidad de la presa, intercambio de biomasa entre las poblaciones y tasa de decesos del depredador. El modelo de Lotka-Volterra requiere añadir un término que representa el impacto directo del pesticida sobre la población de depredador.

Sin embargo, no se considera el impacto indirecto del pesticida en los depredadores dado el consumo de residuos de la plaga que contienen trazas de pesticida [17].

El análisis necesario para el diseño del control se limita al planteamiento de una representación en espacio de estado de los modelos; un análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad de la representación en espacio de estado; el diseño del controlador para evitar el crecimiento de la población de plagas; y por último la validación del controlador en un entorno de simulación.

## 1.5 Aportes del trabajo

El principal aporte del presente trabajo es el desarrollo de los controladores para los modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de pesticida y su validación en entornos de simulación, que contribuye al cuerpo de conocimiento con respecto al diseño de sistemas de control para sistemas biológicos y de agricultura. Este trabajo promueve la investigación y aplicación de la teoría de control automático a sistemas biológicos y de agricultura, a los que se puede contribuir con modelos que, en el largo plazo, permitan optimizar el uso de recursos para el manejo de plagas ante diversas restricciones como valores máximos de pesticida en el cultivo (a razón de proteger la salud humana y el medio ambiente) o concentraciones bajas para mantener la coexistencia de especies no objetivo que sean beneficiosas para los cultivos, como los agentes de control biológico.

El desarrollo del controlador para los modelos de plagas seleccionados servirá como base para investigaciones futuras que validen experimentalmente la aplicación de diversas estrategias de control automático no solo en los modelos descritos, sino también en sistemas más complejos que, por ejemplo, consideren la interacción de la cosecha constante del cultivo o zonas de refugio de la plaga. Los impactos del presente trabajo de grado se presentan en la

Tabla 1.

**Tabla 1.** *Impactos esperados.*

Aspecto	Impacto	Supuesto	Plazo
Académico	Contribución al cuerpo de conocimiento teórico con respecto al diseño de sistemas de control para sistemas biológicos y de agricultura	Falta de investigación en teoría de control automático aplicada a dinámica poblacional de plagas.	Corto
Académico	Promoción de la investigación y aplicación de la teoría de control automático a sistemas biológicos y de agricultura para la optimización de recursos para el manejo de plagas.	Falta de investigación en teoría de control automático aplicada a dinámica poblacional de plagas.	Largo

*Nota:* Impactos esperados tras finalizar la presente investigación, principalmente en el área académica, relacionando la teoría de control automático con sistemas biológicos.

## 1.6 Organización del documento

El presente trabajo de grado inicia en el *Capítulo 1. Introducción* presentando la problemática de las poblaciones de plagas, la justificación, finalidad, alcance y aportes de la presente investigación. En el *Capítulo 2. Marco de Referencia* se describe el marco teórico, relacionando principalmente la teoría de control automático y los modelos de dinámica poblacional que se van a analizar y controlar; posteriormente se aborda el marco conceptual con la terminología relacionada, el marco legal con normativas relacionadas con la regulación e implementación de pesticidas, el Estado del Arte relacionando investigaciones previas que han diseñado estrategias de control para modelos similares o relacionados con la dinámica poblacional de plagas, y por ultimo una sección de condiciones iniciales del proyecto relacionando esta investigación con propuestas de investigación anteriores presentadas en semilleros de investigación. En el *Capítulo*

3. *Diseño Metodológico* se abordan las etapas de la metodología y los productos finales desarrollados en el presente trabajo de grado. En el *Capítulo 4. Desarrollo* se presenta el análisis, diseño y simulación de los controladores por realimentación de estado para los modelos de única aplicación de pesticida, de sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida y Lotka-Volterra ante aplicación de pesticida; finalizando con la discusión de resultados en cada modelo con respecto a la literatura. En el *Capítulo 5. Conclusiones y Trabajos Futuros* se presentan las principales conclusiones del presente trabajo de grado y las áreas en las que trabajos futuros se pueden enfocar para profundizar en esta rama de investigación. Por último, se presenta la *Bibliografía*, y en la sección de *Anexos* se adjuntan los algoritmos con los que se desarrolló el presente trabajo de grado.

## 2. Marco referencial

### 2.1 Marco teórico

#### 2.1.1 Teoría de control automático

La Teoría de Control Automático o los Sistemas de Control Automático consisten en componentes interconectados que forman una configuración del sistema con la cual se obtiene una respuesta deseada [21]. Un sistema de control automático analiza y compara la variable a controlar y aplica correcciones al proceso si no se presenta la respuesta deseada [22]. La respuesta deseada del sistema de control se puede identificar como una entrada o señal actuante, y la salida del sistema es la variable controlada. El objetivo del sistema de control es controlar las salidas a partir de una entrada a través de los elementos del sistema de control [23]. El análisis de los sistemas se basa en la teoría de sistemas lineales, donde se asume una relación causa efecto entre los componentes del sistema [21].

En los sistemas de control se presentan dos categorías en función del uso de retroalimentación, que es la información de variables medidas con sensores [21]. Los sistemas de control en lazo abierto no retroalimentan la información del proceso al controlador. Por otro lado, los sistemas de control en lazo cerrado realimentan la información de la variable controlada por medio de un sistema de medición y la comparan con la respuesta deseada [21][22].

El diseño de sistemas de control se realiza a partir del establecimiento de la respuesta deseada, las variables a controlar, y las métricas con las cuales se compara el rendimiento del controlador. Así mismo, es necesario definir y modelar el sistema para posteriormente diseñar el controlador, simularlo y analizarlo [21].

### 2.1.1.1 Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

El análisis de un sistema dinámico bajo la teoría de los sistemas lineales se cumple siempre y cuando el sistema sea Lineal e Invariante en el Tiempo (LTI). Cuando los parámetros del sistema de control son estacionarios con respecto al tiempo, el sistema se denomina invariante con el tiempo [23]. “Un sistema lineal es aquel regido por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes o variables en función del tiempo. En cambio los sistemas no lineales están regidos por ecuaciones diferenciales no lineales, con derivadas parciales, entre otros” [24].

Para que un sistema sea clasificado como LTI debe cumplir con el principio de superposición: homogeneidad y aditividad. La homogeneidad consiste en que si las entradas son multiplicadas por un mismo factor, las salidas son multiplicadas por ese mismo factor. La aditividad implica que la salida de la suma de las entradas equivale a la suma de la salida de cada entrada individualmente [24].

Aquellos sistemas que no cumplan con dichas características son No LTI, como el sistema de ecuaciones LV, donde se presentan términos no lineales que dependen del producto de dos variables (no homogéneo), o como el modelo propuesto por Chacón, donde la magnitud de la variable de población depende del producto entre la efectividad y el histórico de la población medida en cada periodo de aplicación (no aditivo).

**2.1.1.2 Linealización** *Cómo se mencionó en la sección de sistemas LTI, los sistemas no lineales son más complejos, por lo que la obtención de modelos lineales es conveniente para simplificar el análisis. El proceso de obtener un modelo lineal a partir de un sistema no lineal se denomina linealización. Sin embargo, es importante recalcar que los modelos linealizados solo son válidos entorno a un punto o región de equilibrio, en la que la respuesta del modelo linealizado y el modelo no lineal son aproximadamente iguales.*

Algunos métodos de linealización son las Series de Taylor y la Matriz Jacobiana. La Serie de Taylor permite obtener una aproximación de una ecuación a partir de una sumatoria de derivadas, entorno a los valores de equilibrio de las variables de la ecuación. Para aproximar usando la Serie de Taylor, se seleccionan la cantidad de derivadas necesarias para linealizar adecuadamente y se agrega un parámetro de error [25].

La linealización por medio de la matriz Jacobiana consiste en la derivada parcial del sistema de ecuaciones en torno a un punto de equilibrio. Este método de linealización se aplica en la representación en espacio de estados, donde las matrices de coeficientes se pueden obtener aplicando la matriz jacobiana al sistema de ecuaciones, seleccionando los puntos de equilibrio para las variables de estado y la entrada del sistema.

La definición matemática de la matriz jacobiana se presenta en la ecuación (2-1):

$$J^* = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x_e} \quad (2-1)$$

La ecuación (2-1) representa la matriz jacobiana de un sistema de orden  $n$ , con  $n$  funciones  $f$  que dependen de  $n$  variables  $x$ . Así mismo,  $J^*$  representa la matriz jacobiana evaluada en los puntos de equilibrio  $x_e$  de las  $n$  variables  $x$  [25].

### 2.1.1.3 Representación en Espacio de Estados.

Para los diversos sistemas dinámicos se presentan representaciones que permiten analizar diversos comportamientos. La función de transferencia es una de las representaciones matemáticas más utilizadas pues permite analizar el cambio de la salida de un sistema ante el cambio de la entrada en una función. Sin embargo, esta representación requiere que las condiciones iniciales de las variables de entrada y salida sean iguales a cero, y tampoco permite analizar en detalle el comportamiento de los estados intermedios entre la entrada y la salida. Cuando se tienen condiciones iniciales diferentes a cero y se busca analizar diversos estados al mismo tiempo, se puede recurrir a la representación en espacio de estados.

La representación en espacio de estados es una representación en función del tiempo de un sistema. Esta representación es de utilidad cuando se tiene un sistema de orden superior  $n$ , ya que con esta representación se establecen  $n$  variables de estado en  $n$  ecuaciones de primer orden, facilitando el análisis del sistema [26].

La representación en espacio de estado de un sistema LTI se puede describir con las ecuaciones (2-2) y (2-3):

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2-3)$$

Donde  $x(t)$  representa el vector de variables de estado, un vector columna de dimensiones  $n \times 1$ . El vector  $u(t)$  representa las entradas del sistema en un vector columna de dimensiones

$p \times 1$ , donde  $p$  es la cantidad de entradas. El vector  $\mathbf{y}(t)$  representa las salidas del Sistema en un vector columna de dimensiones  $q \times 1$ . La matriz  $\mathbf{A}$  de la ecuación (2-2) contiene los coeficientes o funciones que indican la relación entre las variables de estado y sus derivadas con respecto al tiempo; y tiene dimensiones  $n \times n$ . La matriz  $\mathbf{B}$  de la ecuación (2-2) contiene los coeficientes o funciones que indican la relación entre las entradas del sistema y la derivada de las variables de estado con respecto al tiempo; y tiene dimensiones  $n \times p$ . La matriz  $\mathbf{C}$  de la ecuación (2-3) contiene los coeficientes o funciones que indican la relación entre las variables de estado y las salidas del sistema; tiene dimensiones  $q \times n$ . Y por último la matriz  $\mathbf{D}$  de la ecuación (2-3) contiene los coeficientes o funciones que indican la relación entre las entradas y las salidas del sistema; y tiene dimensiones  $q \times p$ . La ecuación (2-2) se conoce como la ecuación de estados, y la ecuación (2-3) como la ecuación de salida en la representación en espacio de estados [27] [28].

Para el presente trabajo de grado, los modelos de dinámica poblacional se analizan usando la representación de espacio de estados ya que los modelos tienen condiciones iniciales diferentes de cero y, al ser no lineales, se pueden obtener aproximaciones lineales de primer orden.

#### **2.1.1.4 Estabilidad.**

En el análisis de sistemas dinámicos, la estabilidad es la capacidad de un sistema de lograr un nuevo punto de equilibrio ante una perturbación, en un tiempo finito y partiendo de un punto de equilibrio o estado estable.

El análisis de estabilidad se realiza a partir del análisis de los valores propios (también llamados autovalores, eigen-valores, *eigenvalues* en inglés, o polos característicos cuando se analizan en la función de transferencia). La estabilidad de un sistema a partir de sus autovalores se determina a partir de las siguientes reglas [29]:

- Los autovalores reales o complejos ubicados en el semiplano derecho hacen el sistema inestable.
- Los autovalores reales iguales a cero o autovalores puramente imaginarios hacen el sistema marginalmente estable. En esta condición puede haber un solo autovalor real o un par de autovalores imaginarios.
- Los autovalores reales o complejos ubicados sobre el semiplano izquierdo hacen el sistema estable.

### 2.1.1.5 Observabilidad.

“A partir de un sistema LTI, se considera que un estado  $\mathbf{x}(t_0)$  es observable si ante cualquier entrada  $\mathbf{u}(t)$  existe un tiempo finito  $t_f \geq t_0$  para el cual el conocimiento de la entrada  $\mathbf{u}(t)$  para el tiempo  $t_0 \leq t < t_f$ , de las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ ; y de la salida  $\mathbf{y}(t)$  para el tiempo  $t_0 \leq t < t_f$  son suficiente para determinar  $\mathbf{x}(t_0)$ . Si cada estado del sistema es observable para un tiempo finito  $t_0$ , se dice que el sistema es completamente observable” [27].

La matriz de observabilidad  $\mathbf{V}$  se utiliza para verificar si un sistema es completamente observable, y se construye a partir de la matriz  $\mathbf{A}$  de la ecuación de estados (2-2) y la matriz  $\mathbf{C}$  de la ecuación de salida (2-3), como se presenta en la ecuación (2-4):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$\text{Rank}(\mathbf{V}) = n \quad (2-5)$$

Para que un sistema sea completamente observable, es necesario que la matriz de observabilidad de dimensiones  $n \times np$  tenga rango  $n$ , como indica la ecuación (2-5) [27].

### 2.1.1.6 Controlabilidad.

Un proceso se denomina completamente controlable si cada variable de estado del proceso puede ser controlada para alcanzar cierto objetivo en un tiempo finito por alguna señal de control  $u(t)$  sin restricciones. Si al menos una de las variables de estado es independiente de la señal de control, en este ejemplo  $u(t)$ , el sistema se considera no controlable. Este concepto de controlabilidad también es denominado controlabilidad de los estados, y también se puede analizar a partir de la matriz de controlabilidad [27].

La matriz de controlabilidad  $S$  se construye a partir de las matrices  $A$  y  $B$  de la ecuación de estados (2-2), como se presenta en la ecuación (2-6):

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2-6)$$

$$\text{Rank}(S) = n \quad (2-7)$$

Para que un sistema sea denominado completamente controlable, la matriz de controlabilidad de dimensiones  $n \times nr$  debe tener rango  $n$ , como indica la ecuación (2-7) [27].

### 2.1.1.7 Control por Realimentación de Estados.

Usando la representación de espacio de estados se pueden aplicar diversas estrategias de control. El control por realimentación de estados consiste en realimentar los estados a través de ganancias constantes para determinar el valor de la señal de entrada [27] [30]. En términos matemáticos, el control por realimentación de estados se define con la ecuación (2-8):

$$\mathbf{u}(t) = -k \mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (2-8)$$

Donde  $\mathbf{u}(t)$  es el vector de entradas del sistema;  $\mathbf{x}(t)$  el vector de variables de estado;  $\mathbf{r}(t)$  es la magnitud de referencia que se desea en la salida del sistema y el vector  $k$  corresponde a las

ganancias del controlador que serán aplicadas a cada estado en función de la ubicación deseada de los polos [27]. Es necesario recalcar que el signo negativo de la constante se establece pues generalmente se propone una realimentación negativa de los estados, situación que puede ser distinta en cada sistema. Ahora bien, si se considera que la referencia  $r(t)$  es cero, al reemplazar la ecuación (2-8) en la ecuación de estados (2-2) se obtiene (2-9):

$$\frac{d x(t)}{dt} = A x(t) - Bk x(t) \quad (2-9)$$

$$\frac{d x(t)}{dt} = (A - Bk)x(t) \quad (2-10)$$

A partir de la ecuación (2-9) se pueden hallar los nuevos autovalores del sistema, al factorizar en torno a  $x(t)$  cómo se presenta en la ecuación (2-10) [27].

Para el presente trabajo de grado se aplica el control por realimentación de estados, con el fin de modificar la posición de los autovalores para lograr otras condiciones dinámicas.

### **2.1.2 Modelos de dinámica poblacional de plagas**

El análisis de modelos matemáticos de dinámica poblacional de plagas permite predecir el crecimiento de estas poblaciones ante diversos estímulos o limitaciones. En esta sección se abordan los dos modelos analizados para el diseño del controlador: el modelo de crecimiento de plagas propuesto por Chacón y las ecuaciones de Lotka-Volterra.

#### **2.1.2.1 Modelos propuestos por Chacón.**

El modelo de crecimiento de plagas propuesto por Chacón [19] propone un crecimiento exponencial de la población de plagas en un cultivo determinado, a partir de: una población inicial de individuos; la migración de la plaga hacia y desde el cultivo; y la aplicación de un pesticida con

cierta efectividad para reducir la población de plaga. El modelo matemático se presenta en la ecuación (2-11):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - c \cdot x(t) \cdot \delta(t - T) \quad (2-11)$$

Donde  $x(t)$  representa la población de plaga en función del tiempo  $t$ ; y  $\dot{x}$  la derivada con respecto al tiempo de la población de plaga. El coeficiente  $a$  representa la tasa de natalidad de la plaga en unidades adimensionales sobre unidades de tiempo. El coeficiente  $b$  representa la tasa de migración de plaga desde o hacia el cultivo en unidades de población de plaga sobre unidades de tiempo, donde las magnitudes negativas de  $b$  indican emigración y las magnitudes positivas indican inmigración. El coeficiente  $c$  representa la efectividad del pesticida que se está aplicando para reducir la cantidad de plaga, en unidades adimensionales sobre unidades de tiempo. Así mismo, en la ecuación (2-11) se encuentra la función Delta de Dirac  $\delta$  desplazada un tiempo  $T$ . El tiempo  $T$  corresponde al instante en que se realiza una única aplicación de pesticida. Con base en esto, el término  $c \cdot x(t) \cdot \delta(t - T)$  representa la cantidad de individuos de la plaga que murieron tras la aplicación del pesticida de efectividad  $c$ .

Posteriormente, Chacón expande el modelo de la ecuación (2-11) para considerar la aplicación periódica de pesticida a través de una sumatoria de impulsos, cómo se presenta en la ecuación (2-12):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - \sum_{i=1}^m c \cdot x(t) \cdot \delta(t - T_i) \quad (2-12)$$

El tiempo  $T_i$  corresponde a intervalos de tiempo  $T$  entre las aplicaciones  $i$  que van desde uno hasta la  $m$ -ésima aplicación realizada.

La investigación de Chacón se enfocó en determinar los coeficientes de los modelos de las ecuaciones (2-11) y (2-12) aplicando técnicas de control difuso. Los modelos de aplicación única

y de sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida se abordan dado que incluyen la aplicación de pesticida a la población de plaga, acción que se puede aprovechar como estrategia de control.

### 2.1.2.2 Ecuaciones de Lotka-Volterra.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra (LV) fueron planteadas como un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales donde dos poblaciones, una de presa y otra de depredador, interactúan constantemente [20]. Este sistema de ecuaciones se basa en la depredación como un intercambio de biomasa que permite el crecimiento de la población de depredador a partir de la caza de la presa. El sistema de ecuaciones LV se presenta en las ecuaciones (2-13) y (2-14):

$$\frac{dU(t)}{dt} = \alpha \cdot U(t) - \gamma \cdot U(t) \cdot V(t) \quad (2-13)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \varepsilon \cdot \gamma \cdot U(t) \cdot V(t) - \beta \cdot V(t) \quad (2-14)$$

La ecuación (2-13) describe la derivada con respecto al tiempo de la población de presa  $U(t)$  en función del tiempo, donde el coeficiente  $\alpha$  representa el promedio per cápita de la tasa de nacimiento de la presa por unidad de tiempo, y el coeficiente  $\gamma$  representa la fracción de presas atrapadas por depredador por unidad de tiempo.

La ecuación (2-14) describe la derivada con respecto al tiempo de la población de depredador  $V(t)$  en función del tiempo, donde el coeficiente  $\beta$  representa el promedio per cápita de la tasa de decesos del depredador por unidad de tiempo, y el parámetro  $\varepsilon$  representa la conversión de presas consumidas a cría de depredadores, usando la analogía de una conversión de biomasa [31]. El término que contiene el producto  $\varepsilon\gamma$  representa entonces la cantidad de crías de depredador que nacen dada la cantidad presas consumidas por los depredadores adultos. Es

necesario mencionar que, en este modelo, no se consideran diferencias entre las etapas de crecimiento de ambas poblaciones.

El sistema de ecuaciones LV es un sistema marginalmente estable, lo que implica que la magnitud de las poblaciones de presa y depredador oscila en función del tiempo. Esta oscilación indica que la población de depredador crecerá hasta un punto donde la población de presa no es suficiente para alimentar a todos los depredadores, llevando entonces al decrecimiento de estos últimos. Y por el contrario, ante la ausencia de depredadores, la población de plaga aumentara hasta el punto en que la población de depredadores aumenta nuevamente [31].

Dado que la oscilación para cada sistema depredador-presa es diferente, la literatura no suele asignar una unidad de tiempo específica para estos modelos (segundos, minutos, años) y se mantiene solo como una unidad de tiempo. Así mismo, considerando que la estimación de las constantes de las ecuaciones (2-13) y (2-14) no es sencilla, se han propuesto versiones adimensionales del sistema LV donde se reduce la cantidad de constantes a una sola, lo que simplifica el análisis y simulación de este sistema no lineal [31]. Sin embargo, en este trabajo de grado se parte de las ecuaciones (2-13) y (2-14) del sistema original LV para identificar el impacto de las constantes en los análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad.

Los sistemas LV asumen que la interacción depredador-presa se basa en las siguientes condiciones:

- El sistema es cerrado, es decir que solo se presenta la interacción entre las dos especies descritas.
- La presa y el depredador se alimentan todo el tiempo, es decir que no se consideran ciclos sin interacción de las dos especies. Así mismo, el ecosistema presenta alimento ilimitado para la presa.

- La magnitud de población no distingue etapas de crecimiento o ciclo de vida particular de cada especie más allá de las constantes presentes en las ecuaciones (2-13) y (2-14).

El modelo LV se aborda dado que considera la interacción de dos especies. Para considerar el impacto del pesticida en ambas poblaciones, es necesario incluir un término que afecte negativamente la derivada de las poblaciones de depredador y presa (plaga en este caso) en función de la cantidad de población actual de cada especie y una tasa de individuos muertos por interacción con el pesticida que puede cambiar según la especie.

## 2.2 Marco conceptual

### 2.2.1 *Plaguicida*

Un plaguicida, o también conocido como pesticida, es “todo agente de naturaleza química, física o biológica que sólo en mezcla o en combinación, se utilice para la prevención, represión, atracción, o control de insectos, ácaros, agentes patógenos, nemátodos, malezas, roedores u otros organismos nocivos a los animales, o a las plantas, a sus productos derivados, a la salud o la fauna benéfica. La definición también incluye los productos utilizados como defoliantes, reguladores fisiológicos, feromonas y cualquier otro producto que a juicio de los Ministerios de Salud o de Agricultura se consideren como tales” [32].

### 2.2.2 *Control biológico*

El control biológico es una técnica de manejo de plagas que despliega organismos denominados enemigos naturales para reducir la población de una plaga en particular. Un enemigo natural, como estrategia implementada dentro del concepto de control biológico, hace referencia a los organismos vivos que se utilizan para reducir o eliminar la población de una plaga [16]. Los

enemigos naturales son hongos, depredadores generalistas o especializados, parasitoides, entre otros organismos que reducen la población de plaga ya sea porque se alimentan de ella o la usan de hospedera para su reproducción.

Es necesario recordar que, a pesar de que se utilice el término Control, esta técnica de manejo de plagas no corresponde o no está relacionada directamente con la Teoría de Control Automático.

### **2.2.3 Ecuaciones y variables de estado**

El estado de un sistema se refiere a las condiciones pasadas, presentes y futuras del sistema. Los estados iniciales corresponden al valor de cada variable de estado en el tiempo inicial  $t_0$  [26].

Las ecuaciones de estado son las ecuaciones que componen la representación en espacio de estado. A partir de una ecuación diferencial de orden  $n$  se pueden obtener  $n$  ecuaciones de primer orden con  $n$  variables, que corresponden al conjunto de ecuaciones y variables de estado. “Las variables de estado de un sistema se definen como un conjunto mínimo de variables de cuyo conocimiento en cualquier tiempo  $t_0$  y del conocimiento de la información de la entrada de excitación que se aplica subsecuentemente, son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo  $t > t_0$ ” [26].

### **2.2.4 Valores propios o autovalores**

Los valores propios, autovalores o eigen-valores (de *eigenvalues* en inglés) son los polos de la ecuación característica [27]. Los valores propios también pueden ser obtenidos a partir de la matriz de coeficientes  $A$  de la representación en espacio de estados a través de la aplicación de la matriz jacobiana.

### **2.2.5 *Variable controlada, manipulada y de perturbación***

Una *variable controlada* es aquella que es medida y controlada para obtener una respuesta en particular, y es una condición o característica del medio controlado. La *variable manipulada* en cambio es la variable que es modificada por el controlador para obtener la respuesta deseada en la variable controlada. La variable manipulada es una condición o característica de la materia que entra al medio controlado. Y por último, las *perturbaciones o variables de perturbación* son aquellas variables que tienen influencia sobre la variable controlada pero que no pueden ser modificadas por la variable manipulada [22]. Las perturbaciones generan modificaciones en la variable controlada y pueden generar diferencias con respecto al punto de consigna.

### **2.2.6 *Punto de consigna o setpoint***

El punto de consigna o setpoint corresponde a la respuesta deseada o posición de referencia de la variable controlada para llevar a cabo el proceso de control [22]. El setpoint puede ser asignado tanto por el operador como por el propio sistema de control, y es el valor con respecto al cual se determina el error existente entre la medición real de la variable controlada y la salida estimada por el controlador.

### **2.2.7 *Error y offset***

El error en los sistemas de control corresponde a la diferencia o desviación instantánea entre el valor medido y el valor deseado (setpoint) en la variable controlada. Por otro lado, el offset corresponde a la desviación o error permanente propio del sistema debido a la acción proporcional del controlador [22].

### 2.3 Marco legal

El marco legal del presente proyecto de grado aborda las generalidades sobre el uso de pesticidas con respecto a los límites permitidos de residuos en alimentos de consumo humano y límites en la disposición de residuos al medio ambiente.

El decreto 1843 de 1991 [32] reglamenta el uso de manejo de plaguicidas, estableciendo categorías toxicológicas, obligaciones en la aplicación y medidas para la protección de la salud humana y el medio ambiente. Este decreto también recopila conceptos y definiciones como el Límite máximo para residuos (LMR) para reconocer si un producto con residuos de pesticida es aceptable para consumo humano o animal.

Con respecto a los límites de residuos en alimentos, la resolución 2906 de 2007 [33] expedida por el Ministerio de Salud, y confirmada por la resolución 5897 de 2018 [34], establece los LMR de pesticidas permitidos en alimentos. Para ello se establecen a diversos tipos de alimentos límites específicos por tipo de pesticida.

En cuanto a los límites con respecto a disposición de residuos de pesticidas se presentan normativas para el vertimiento y verificación de la calidad del agua ante la presencia de pesticidas. La resolución 631 de 2015 establece los parámetros y valores límites máximos permisibles en los vertimientos puntuales a cuerpos de agua superficiales, y establece un límite para la “*Suma de Ingredientes Activos de Plaguicidas*” en el sector agrícola [35].

### 2.4 Estado del arte

El análisis de sistemas de ecuaciones de LV bajo la Teoría de Control Automático también ha sido abordado previamente. El estudio de Massaroli et al. analizó un sistema LV para encontrar soluciones que eviten la extinción de las poblaciones del sistema, aplicando el marco de trabajo de

los sistemas Port-Hamiltonianos. Estos autores proponen realizar un cambio de variable para que el sistema LV tome la forma de un oscilador mecánico no lineal. Con base en el enfoque Hamiltoniano, Massaroli et al. aplican una estrategia de control conocida como “*energy shaping plus damping injection*”, que permite estabilizar asintóticamente el sistema [36]. Los autores proponen que el controlador diseñado apoya la planeación de acciones de control biológico garantizando la coexistencia de las especies analizadas en el sistema LV.

Por otro lado, la investigación de Gong y Xie analizó un sistema LV donde se considera la presencia de refugios donde las presas se ocultan del depredador y con base en este sistema desarrollaron controladores de realimentación. Para el desarrollo de los controles de realimentación, estos autores desarrollaron funciones de Lyapunov para garantizar la estabilidad global del equilibrio positivo y equilibrios límite. Este modelo permite analizar dinámicas complejas en la interacción presa-depredador que resultan útiles en entornos agrícolas y relacionados con plagas [37].

Así mismo, modelos como el analizado por Lemos-Silva y Torres, y Cristiano et al., consideran sistemas LV ante esfuerzos de cosecha o extracción constante de individuos de cada población [38][39]. El modelo analizado por Lemos-Silva y Torres incluye un término que modela la capacidad de carga como una función logística, amplía las expresiones de los coeficientes de presas atacadas por depredador y el crecimiento del depredador, y coeficientes de esfuerzo de cosecha de individuos de cada población [38]. El modelo analizado por Cristiano et al. considera un sistema LV tridimensional donde dos poblaciones de presa compiten por una población de presa en un entorno con acciones de extracción de individuos de las especies depredadoras. El trabajo de Cristiano et al. propone la extracción de individuos de las especies depredadores como acción de control para lograr la estabilidad global del sistema dado que, según el principio de exclusión

competitiva, en entornos donde dos depredadores compiten generalmente no se presenta estabilidad o coexistencia [39].

Otras investigaciones han aplicado marcos de trabajo como el control óptimo para determinar los controladores apropiados para un sistema LV. El artículo de Pashko presenta un sistema LV con dos variables de control seleccionadas para minimizar el tiempo de transición hacia un punto estacionario. La estrategia de control que el autor aplica se basa en el principio del máximo de Pontryagin y, dada la no-linealidad del sistema LV, comprueba que el controlador es óptimo aplicando la teoría de síntesis regular de Boltyanskii [40].

Una de las problemáticas de los sistemas LV es poder estimar los coeficientes del modelo ya que cada entorno y sistema presenta magnitudes diferentes para los parámetros del modelo seleccionado. El trabajo de Davis et al. compara diversas estrategias de optimización numérica para el ajuste de los modelos de información de series temporales, incluyendo métodos tradicionales como el gradiente descendiente o la búsqueda evolutiva, y métodos especializados como la inferencia algebraica LV (ALVI, por sus siglas en inglés) [41].

En cuanto a dinámicas complejas se refiere, la investigación de Biranvand et al. aplica cálculo fraccional a un sistema LV con retroalimentación negativa para asignar memoria a las especies. Esta memoria implica un análisis de estados pasados, donde la interacción de las especies y su comportamiento son almacenados en una función de pesos con respecto al tiempo. Este estudio comprueba que al incorporar la memoria en el sistema se mejora la estabilidad del modelo, y confirma que la implementación de la retroalimentación negativa facilita el equilibrio del sistema [42].

Por último, el trabajo de Mendoza et al. compara seis estrategias de control aplicadas al sistema clásico LV, aplicando una serie de criterios ecológicos que cada controlador debería

cumplir. Estos autores proponen que la acción de control se debe aplicar únicamente como acciones de extracción de individuos del depredador. Dentro de los criterios ecológicos, consideran que el controlador sea simple e independiente de los parámetros del sistema, que requiera mínimo monitoreo de las especies y que logre niveles de equilibrio positivos o coexistencia de las especies [43]. Si bien en el presente trabajo el objetivo es reducir la población de plaga, el trabajo de Mendoza et al. sirve como base para contemplar el impacto de la aplicación de pesticidas en la población del depredador, ya que se ve afectada la coexistencia depredador-presa.

#### **2.4.1 Condiciones iniciales del proyecto**

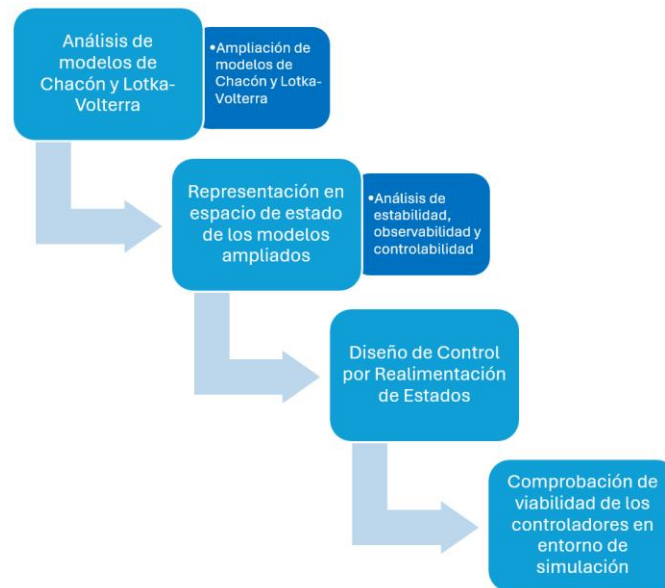
El presente trabajo de grado deriva de la investigación realizada en el proyecto “*Estudio de la dinámica poblacional de la plaga Aphididae en cultivos de Ocimum basilicum al implementar control biológico*” presentado desde el semillero FIMAB (Física y Matemáticas Aplicadas a la Biología) del Departamento de Ciencias Básicas, en la XII Convocatoria interna de semilleros 2024 de la Universidad Santo Tomas seccional Bucaramanga.

A partir del análisis de las ecuaciones de LV realizado en el proyecto de semillero mencionado, se propone el diseño de un controlador para este tipo de sistemas, planteando entonces el presente trabajo de grado.

### 3. Diseño Metodológico

La metodología propuesta para el diseño por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida se basa en el análisis de los modelos de Chacón y el sistema LV. Posteriormente se realizan modificaciones a los modelos para incorporar la variable de control que representa la aplicación periódica del pesticida. A partir de los modelos modificados, se obtiene la representación en espacio de estado y se realizan análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad de los modelos. Por último, se diseña el control por realimentación de estados para cada modelo modificado y se valida en un entorno de simulación. La metodología propuesta se presenta gráficamente en la Figura 1.

**Figura 1.** Metodología propuesta para el diseño del controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de pesticidas.



*Nota:* La metodología propuesta se aplica individualmente a cada modelo.

### **3.1 Descripción de etapas y tareas**

#### ***3.1.1 Etapa 1: Análisis de modelos Chacón y LV de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida***

En esta etapa se realiza un análisis documental y teórico del modelo de Chacón y del sistema LV, identificando las variables que se pueden utilizar posteriormente como variables de control para el diseño del controlador. Así mismo, en esta etapa se realiza la ampliación del modelo de Chacón y del sistema LV para incluir la variable de control en cada modelo.

#### ***3.1.2 Etapa 2: Representación en espacio de estados de los modelos ampliados***

A partir de los modelos ampliados de la primera etapa se desarrolla la representación en espacio de estados de los modelos ampliados. Al realizar la representación se aplica el proceso de linealización a través de la matriz Jacobiana aplicada en la matriz de coeficientes A.

Posteriormente, se realizan los análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad de la representación en espacio de estados y se determina si es viable diseñar controladores a los modelos ampliados y linealizados.

#### ***3.1.3 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados***

Una vez analizada la estabilidad, observabilidad y controlabilidad de la representación en espacio de estados de cada modelo ampliado, se realiza el diseño del controlador por realimentación de estados. Para el diseño del controlador, se aplica la ubicación o asignación de polos como estrategia de control.

### 3.1.4 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación

Por último, a partir del controlador obtenido para cada modelo ampliado en la etapa 3, se comprueba la viabilidad del controlador en un entorno de simulación cómo *Wolfram Mathematica*. Teniendo en cuenta que el análisis propuesto en el presente trabajo de grado es teórico, se asignarán rangos biológicamente plausibles a las constantes de los modelos para identificar el comportamiento del controlador en sistemas de diversas características.

## 3.2 Descripción de los productos finales

Los productos finales del presente proyecto de grado son los controladores para cada modelo analizado, junto a su respectivo algoritmo para comprobar su viabilidad en un entorno de simulación. La Tabla 2 contiene los resultados esperados del presente proyecto de grado.

**Tabla 2.** Resultados finales.

Resultado	Indicador	Objetivo Relacionado
Sistema de control para el modelo ampliado de única aplicación de pesticida de Chacón	Controlador y algoritmo de simulación	Objetivo específico 2 y 3
Sistema de control para el modelo ampliado de sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida de Chacón	Controlador y algoritmo de simulación	Objetivo específico 2 y 3
Sistema de control para el modelo ampliado de Lotka-Volterra ante aplicación periódica de pesticida	Controlador y algoritmo de simulación	Objetivo específico 2 y 3

*Nota:* Resultados esperados al finalizar la investigación, evidenciando el desarrollo de los sistemas de control propuestos.

#### 4. Desarrollo

La metodología propuesta en el *Capítulo 3* se aplicará a cada modelo en el siguiente orden: modelo de única aplicación de pesticida; modelo de sumatoria de aplicación periódica de pesticida, modelo de Lotka-Volterra ante aplicación de pesticida. Para cada modelo se aborda: una etapa de análisis del modelo, donde se describen las constantes en el presente modelo y como se modificó para aplicar la estrategia de control; una etapa de desarrollo de la representación de espacio de estados, a partir de la cual se realiza el análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad; una etapa de diseño del controlador por realimentación de estados; y por último la etapa de comprobación de viabilidad del controlador en un entorno de simulación, para lo cual se utilizó el software *Wolfram Mathematica* (versión 14.3). En la etapa de comprobación de viabilidad en entorno de simulación se aborda primero la solución analítica del modelo y posteriormente la simulación de la solución obtenida evaluada en la magnitud de las constantes definidas. Para el caso del modelo LV, la etapa de comprobación de viabilidad contiene el desarrollo de la solución obtenida por métodos numéricos y la simulación de la solución obtenida evaluada en la magnitud de las constantes definidas.

Los resultados obtenidos del diseño de un controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida se presentan en la Tabla 3. Los algoritmos correspondientes a los modelos de Chacón se presentan en el Anexo A.1, y el algoritmo correspondiente al modelo LV se presenta en el Anexo A.2.

**Tabla 3.** Resultados obtenidos.

Resultado	Indicador	Objetivo Relacionado	Porcentaje de Desarrollo
Sistema de control para el modelo ampliado de única aplicación de pesticida de Chacón	Controlador y algoritmo de simulación	Objetivo específico 2 y 3	100%
Sistema de control para el modelo ampliado de sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida de Chacón	Controlador y algoritmo de simulación	Objetivo específico 2 y 3	100%
Sistema de control para el modelo ampliado de Lotka-Volterra ante aplicación periódica de pesticida	Controlador y algoritmo de simulación	Objetivo específico 2 y 3	100%

*Nota:* Resultados obtenidos durante el desarrollo de la presente investigación. Véanse los algoritmos relacionados en los apéndices.

#### 4.1 Modelo de única aplicación del pesticida

##### 4.1.1 Etapa 1: Análisis del modelo de única aplicación del pesticida

En el trabajo de grado de Chacón, se propone un modelo de dinámica poblacional donde la aplicación única del pesticida se representa como una función impulso o Delta de Dirac desplazada, como fue presentado en la ecuación (2-11):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - c \cdot x(t) \cdot \delta(t - T) \quad (2-11)$$

Donde  $x(t)$  es la función de la población de plaga con respecto al tiempo  $t$  y  $\dot{x}(t)$  es la derivada de la función de población con respecto al tiempo. El tiempo  $T$  es el tiempo de aplicación de pesticida sobre la población de plaga. La descripción de las constantes se retoma de la sección 2.1.2.1. *Modelos propuestos por Chacón*, donde el coeficiente  $a$  representa la tasa de natalidad de la plaga en unidades adimensionales sobre unidades de tiempo. El coeficiente  $b$  representa la tasa de migración de plaga desde o hacia el cultivo en unidades de población de plaga sobre unidades de tiempo, donde las magnitudes negativas de  $b$  indican emigración y las magnitudes positivas

indican inmigración. El coeficiente  $c$  representa la efectividad del pesticida que se está aplicando para reducir la cantidad de plaga, en unidades adimensionales sobre unidades de tiempo. Así mismo, en la ecuación (2-11) se encuentra la función Delta de Dirac  $\delta$  desplazada un tiempo  $T$ . El tiempo  $T$  corresponde al instante en que se realiza una única aplicación de pesticida. En base a esto, el término  $c \cdot x(t) \cdot \delta(t - T)$  representa la cantidad de individuos de la plaga que murieron tras la aplicación del pesticida de efectividad  $c$ .

Para la selección de la variable de control, en la literatura se propone el uso de una variable de extracción o recolección de individuos de la población objetivo como variable de control (en el caso de modelos LV) [38][39]. Sin embargo, en el caso de poblaciones de plaga resulta poco práctico extraer manualmente individuos de la especie de plaga que afecta al cultivo ya que, por ejemplo, se pueden encontrar insectos plaga de menos de 3 mm de tamaño, como es el caso de la especie de áfido *Myzus persicae*.

Por otro lado, el uso de pesticidas es una de las formas más usadas y efectivas para reducir poblaciones de plagas. Es por ello por lo que, para el propósito del presente trabajo de grado, se seleccionó como variable o señal de control la efectividad  $c$  del pesticida.

Es válido recordar que, como se mencionó en el alcance del presente trabajo, futuras investigaciones deben expandir la relación entre efectividad y composición química o concentración de pesticida.

Con base en lo descrito anteriormente, se reemplaza la ecuación (4-1) en la ecuación (2-11) para obtener el primer modelo ampliado, como se observa en la ecuación (4-2):

$$c \cdot \delta(t - T) \rightarrow u(t) \cdot p(t) \quad (4-1)$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - x(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \quad (4-2)$$

$$p(t) = \theta(t - T) - \theta(t - T - \Delta) \quad (4-3)$$

Donde  $u(t)$  representa la efectividad del pesticida como señal de control. El pulso  $p(t)$  es el rango de tiempo durante el cual el plaguicida tiene efecto en la población de plaga. El pulso  $p(t)$  inicia en el instante de aplicación  $T$  y finaliza en  $T + \Delta$ , lo que se representa con la resta de escalones unitarios  $\theta$  desplazados en la ecuación (4-3).

El cambio de la función impulso en el instante de aplicación por un pulso de duración  $\Delta$ , se propone dado que los decesos de individuos de plaga no ocurrirán exactamente en el instante de aplicación, como propone el modelo de Chacón en la ecuación (2-11), y los efectos de plaguicida se mantienen durante un tiempo determinado. Sin embargo, la literatura indica que la cantidad de pesticida que interactúa con las plagas varía significativamente por condiciones ambientales y que la efectividad del pesticida no se mantiene constante sobre el tiempo [13]. Es por ello por lo que en el presente trabajo se modela la efectividad del pesticida como un pulso de tiempo finito.

Para verificar que el sistema de control, es decir la aplicación de pesticida, llega a la magnitud de población deseada al finalizar la aplicación (es decir, al punto de consigna) se establece que la duración del pulso de aplicación sea igual al tiempo de asentamiento del controlador. Sin embargo, es fundamental recalcar que el tiempo  $\Delta$  representa la duración del pulso de aplicación, y en la práctica no necesariamente coincidirá con el tiempo de asentamiento del controlador.

Así mismo, el modelo de Chacón en la ecuación (2-11), considera que la efectividad del pesticida reduce la rapidez de crecimiento de la población de plaga después del instante de aplicación  $T$ . Para el modelo de la ecuación (4-2) se debe analizar si la efectividad del pesticida mantiene sus efectos después de pulso de duración  $\Delta$ .

La ecuación (4-2) se debe analizar de forma independiente antes y después del tiempo de aplicación  $T$ . El análisis después del pulso de aplicación, después del tiempo  $T + \Delta$ , utiliza el modelo del pulso de aplicación para observar si la aplicación de pesticida tiene efectos indirectos una vez finalizada la aplicación.

#### **4.1.2 Etapa 2.1: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de única aplicación del pesticida – antes del tiempo de aplicación $T$**

La ecuación (4-2) antes del tiempo de aplicación se reduce a la ecuación (4-4):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \quad (4-4)$$

Dado que la ecuación (4-4) ya es lineal, no se requiere linealización y se puede analizar directamente la estabilidad del modelo antes del tiempo de aplicación.

##### **6.1.2.1 Representación en espacio de estado – antes del tiempo de aplicación $T$**

Cómo se describió en la sección 2.1.1.3. *Representación en Espacio de Estados* del marco teórico, la representación en espacio de estados permite analizar un sistema de orden  $n$  a partir de  $n$  variables de estado en  $n$  ecuaciones de estado, como se presentó en las ecuaciones (2-2) y (2-3):

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2-2)$$

A partir de la ecuación (2-2) y considerando que la población (la variable de estado) es la variable de salida del sistema se puede determinar que, para la ecuación (4-4): la matriz  $A$  corresponde al coeficiente  $a$ ; la matriz  $B$  y  $D$  son nulas; y la matriz  $C$  es 1. Es necesario recalcar que la representación en espacio de estados según las ecuaciones (2-2) y (2-3) no considera

coeficientes independientes a  $\mathbf{x}(t)$  ó  $\mathbf{u}(t)$ , sin embargo, los análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad se basan en las matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ .

$$\mathbf{A} = a \quad (4-5)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} = 0 \quad (4-6)$$

$$\mathbf{C} = 1 \quad (4-7)$$

Reemplazando las ecuaciones (4-5), (4-6) y (4-7) en (2-2) y (2-3) se obtiene la representación en espacio de estado para el modelo antes del tiempo de aplicación:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = a\mathbf{x}(t) \quad (4-8)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \quad (4-9)$$

### 6.1.2.2 Análisis de estabilidad – antes del tiempo de aplicación T

Para analizar la estabilidad de la ecuación (4-4) es necesario obtener los autovalores del sistema. Los autovalores se pueden hallar al igualar a cero el determinante de la diferencia entre la matriz  $\mathbf{A}^*$  y los autovalores por la matriz identidad, como se expresa en la ecuación (4-10):

$$\det|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = 0 \quad (4-10)$$

Donde  $\mathbf{A}^*$  representa la matriz de coeficientes que multiplican al vector de variables de estado  $\mathbf{x}(t)$ , que para el caso de la ecuación (4-4) es la matriz  $\mathbf{A}$ . Reemplazando la ecuación (4-5) en (4-10) y despejando los autovalores se obtiene (4-11):

$$\lambda = a \quad (4-11)$$

De acuerdo con las reglas de estabilidad presentadas en la sección 2.1.1.4. *Estabilidad* del marco teórico, los autovalores cuya parte real es mayor a cero hacen que el sistema sea inestable. Es por ello por lo que los autovalores de la ecuación (4-11) indican que el sistema es inestable.

Este comportamiento se puede observar también desde las ecuaciones (4-4) y (4-8), pues la derivada de la población solo presenta coeficientes positivos.

### 6.1.2.3 Análisis de observabilidad – antes del tiempo de aplicación T

Para el análisis de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $V$  presentada en la ecuación (2-4) y se comprueba que el rango de  $V$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-5):

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$\text{Rank}(V) = n \quad (2-5)$$

En el caso del modelo de única aplicación antes del tiempo de aplicación, ecuación (4-4), el orden  $n$  del sistema es 1, por lo que solo se requiere reemplazar la matriz  $C$  de la ecuación (4-7) en (2-4) para obtener la matriz de observabilidad que se presenta en la ecuación (4-12):

$$V = [1] \quad (4-12)$$

$$\text{Rank}(V) = 1 = n \quad (4-13)$$

El rango de la matriz  $V$  es 1 dado que solo tiene un elemento, y por ello coincide con el orden  $n$  del sistema que también equivale a 1, como se observa en la ecuación (4-13), por lo que se concluye que el modelo de la ecuación (4-4) es completamente observable.

#### 6.1.2.4 Análisis de controlabilidad – antes del tiempo de aplicación T

Para el análisis de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $\mathbf{S}$  presentada en la ecuación (2-6) y se comprueba que el rango de  $\mathbf{S}$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-7):

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2-6)$$

$$\text{Rank}(\mathbf{S}) = n \quad (2-7)$$

En el caso del modelo de única aplicación antes del tiempo de aplicación, ecuación (4-4), el orden  $n$  del sistema es 1, por lo que solo se requiere reemplazar la matriz  $\mathbf{B}$  de la ecuación (4-6) en (2-6) para obtener la matriz de controlabilidad que se presenta en la ecuación (4-14):

$$\mathbf{S} = [0] \quad (4-14)$$

$$\text{Rank}(\mathbf{S}) = 0 \neq n \quad (4-15)$$

El rango de la matriz  $\mathbf{S}$  es cero pues no tiene elementos, y por ello no coincide con el orden  $n$  del sistema que también equivale a 1, como se observa en la ecuación (4-15), por lo que se concluye que el modelo de la ecuación (4-4) no es controlable. Esto coincide con la propia definición de controlabilidad presentada en la sección 2.1.1.6. *Controlabilidad* del marco teórico, donde se indica que un sistema no es controlable si al menos una de las variables de estado es independiente de la señal de control, lo que es cierto para el modelo de la ecuación (4-4) pues antes del tiempo de aplicación no hay señal de control en el sistema.

### ***4.1.3 Etapa 2.2: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de única aplicación del pesticida – durante el pulso de aplicación entre $(T, T+\Delta]$***

Una vez analizado el sistema antes del tiempo de aplicación  $T$ , se retoma la ecuación (4-2) que describe la dinámica poblacional de la plaga durante el pulso de aplicación entre  $(T, T + \Delta)$ , como fue descrito en las ecuaciones (4-2) y (4-3).

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - x(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \quad (4-2)$$

$$p(t) = \theta(t - T) - \theta(t - T - \Delta) \quad (4-3)$$

Antes de desarrollar la representación en espacio de estado de la ecuación (4-2), es necesario linealizar la ecuación con respecto a un punto de equilibrio, ya que el sistema es no lineal por el producto  $x(t) \cdot u(t)$ . La linealización y la representación en espacio de estado se aplicarán para encontrar la ganancia del controlador por realimentación de estados; sin embargo, la respuesta del controlador se analizará en la función población que se obtiene tras integrar la función (4-2) con respecto al tiempo.

#### **4.1.3.1 Linealización – durante el pulso de aplicación entre $(T, T+\Delta]$**

Como se mencionó en la sección 2.1.1.2. *Linealización* del marco teórico, la linealización se realizará a través de la matriz jacobiana evaluada en unas condiciones de equilibrio establecidas, como se presentó en la ecuación (2-1). La matriz jacobiana de la ecuación (2-1) permite hallar la matriz de coeficientes  $A$  de la ecuación de estados (2-2), al derivar parcialmente las  $n$  funciones  $f$  con respecto a las  $n$  variables de estado del sistema, como se presenta en la ecuación (4-16). Así mismo, la matriz de coeficientes  $B$  de la ecuación de estados (2-2) se puede obtener al hallar las

derivadas parciales con respecto a las entradas del sistema y evaluar en las condiciones de equilibrio, como se presenta en la ecuación (4-17).

$$J^* = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x_e, u_e} \quad (2-1)$$

$$A = J^* \quad (4-16)$$

$$B = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{array} \right]_{x_e, u_e} \quad (4-17)$$

Los puntos de equilibrio para el modelo de única aplicación de la ecuación (4-2), se obtienen a partir de una condición de equilibrio para la linealización. Dado que el objetivo del controlador es que la población se estabilice asintóticamente en una magnitud de población deseada, por lo que la derivada de la población con respecto al tiempo debe ser igual a cero, como se presenta en la ecuación (4-18). Así mismo, la población de equilibrio debe coincidir con la población deseada para garantizar la linealidad del modelo entorno a la magnitud deseada. Si bien se puede establecer una señal de entrada (efectividad del pesticida) de equilibrio y a partir de ella determinar la población de equilibrio correspondiente, el objetivo del presente trabajo de grado es determinar la efectividad de pesticida relacionada a una magnitud de población específica de plaga,

por lo que establecer la población de equilibrio permite linealizar en torno a la población deseada y permite, posteriormente, determinar la ganancia necesaria en el controlador.

En la ecuación (4-19) se denomina  $x_r$  como la población de referencia, la magnitud deseada en la población de plaga con la cual se define la población de equilibrio  $x_e$  para linealizar.

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 \quad (4-18)$$

$$x_e = x_r \quad (4-19)$$

Para obtener la señal de entrada de equilibrio se reemplazan las ecuaciones (4-18) y (4-19) en (4-2) y se despeja la señal de entrada, como se presenta en la ecuación (4-20):

$$0 = a \cdot x_r + b - x_r \cdot u_e \cdot p(t)$$

$$u_e = \frac{a \cdot x_r + b}{x_r \cdot p(t)} \quad (4-20)$$

La expresión de la entrada (efectividad de pesticida) en equilibrio  $u_e$  de la ecuación (4-20) es equivalente a (4-21) mientras se esté analizando el pulso de aplicación de pesticida. En cualquier otro caso (*E.O.C*), el pulso de aplicación equivale a cero:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & T < t \leq T + \Delta \\ 0, & E.O.C. \end{cases} \quad (4-21)$$

$$u_e = \frac{a \cdot x_r + b}{x_r}$$

Aplicando entonces la linealización de la ecuación (4-16) al modelo de la ecuación (4-2), se obtienen la ecuación (4-22):

$$A = a - u_e \cdot p(t) \quad (4-22)$$

Y reemplazando la efectividad en equilibrio de la ecuación (4-21) en (4-22) para obtener (4-23):

$$A = a - \frac{a \cdot x_r + b}{x_r}$$

$$A = -\frac{b}{x_r} \quad (4-23)$$

Aplicando ahora la linealización de la ecuación (4-17) al modelo de la ecuación (4-2), se obtienen la ecuación (4-24):

$$B = -x_r \cdot p(t) \quad (4-24)$$

La expresión de la matriz **B** de la ecuación (4-24) es equivalente a (4-25) mientras se esté analizando el pulso de aplicación de pesticida:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & T < t \leq T + \Delta \\ 0, & E.O.C. \end{cases}$$

$$B = -x_r \quad (4-25)$$

A partir de la linealización de las matrices **A** y **B** para el modelo de única aplicación de la ecuación (4-2) se puede construir la representación en espacio de estado.

#### 4.1.3.2 Representación en espacio de estado – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ]

Para desarrollar la representación en espacio de estado del modelo linealizado de única aplicación de la ecuación (4-2), se deben definir las matrices **C** y **D** de la ecuación de salida. Considerando que la población de estado es la variable que se desea monitorear como variable de salida, la matriz **C** es igual a 1, con se presenta en la ecuación (4-26). Así mismo, dado que la señal de control está relacionada con la derivada de la variable de estado y no con la variable de estado directamente, según la ecuación (4-2), la matriz **D** es igual a cero.

$$C = 1 \quad (4-26)$$

$$D = 0 \quad (4-27)$$

Con las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de las ecuaciones (4-23), (4-25), (4-26) y (4-27) respectivamente, se construye la representación en espacio de estado del modelo linealizado durante el pulso de aplicación, cómo se presenta en las ecuaciones (4-28) y (4-29):

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{b}{x_r} \cdot x(t) - x_r \cdot u(t) \quad (4-28)$$

$$y(t) = x(t) \quad (4-29)$$

La ecuación de estados (4-28) del modelo linealizado de aplicación única durante el pulso de aplicación es analizado nuevamente al momento de aplicar la estrategia de control para la reasignación de polos y determinar la constante del controlador.

#### 4.1.3.3 Análisis de estabilidad – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ]

Con el resultado de la ecuación (4-23) se pueden determinar los autovalores del sistema linealizado al reemplazar en la ecuación (4-10):

$$\begin{aligned} \text{Si} & \quad \det|\lambda I - A^*| = 0 \\ & \quad A^* = A \\ \text{Entonces} & \quad \lambda = -\frac{b}{x_r} \end{aligned} \quad (4-30)$$

Recordando que  $A^*$  es la matriz de coeficientes que multiplica al vector de variables de estado  $x(t)$ , que corresponde a la matriz  $A$  obtenida en la ecuación (4-23). Los autovalores del modelo linealizado de aplicación única del pesticida durante el pulso de aplicación obtenidos en la ecuación (4-30) indican que el modelo es estable siempre y cuando el coeficiente  $b$  sea positivo. Es necesario recalcar que para el presente trabajo de grado se considera que:

- Si  $b > 0$ , se presenta mayor inmigración que emigración en el sistema.

- Si  $b = 0$ , no se presenta inmigración ni emigración en el sistema.
- Si  $b < 0$ , se presenta mayor emigración que inmigración en el sistema.

Acorde a la ecuación (4-30), se requiere que se presente mayor inmigración que emigración en el sistema para que el sistema sea asintóticamente estable, o que no se presente ningún tipo de migración en el sistema para que sea marginalmente estable. Así mismo, se puede observar en la ecuación (4-30) que si la magnitud de población de referencia  $x_r$  es mucho mayor a la magnitud del coeficiente de migración  $b$ , los autovalores tenderán a cero y el sistema tenderá a ser marginalmente estable.

#### 4.1.3.4 Análisis de observabilidad – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ)

Para el análisis de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $V$  presentada en la ecuación (2-4) y se comprueba que el rango de  $V$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-5).

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$\text{Rank}(V) = n \quad (2-5)$$

En el caso del modelo de única aplicación durante el pulso de aplicación, ecuación (4-2), el orden  $n$  del sistema es 1, por lo que solo se requiere reemplazar la matriz  $C$  de la ecuación (4-26) en (2-4) para obtener la matriz de observabilidad que se presenta en la ecuación (4-31):

$$V = [1] \quad (4-31)$$

$$\text{Rank}(V) = 1 = n \quad (4-32)$$

El rango de la matriz  $V$  es 1 dado que solo tiene un elemento, y por ello coincide con el orden  $n$  del sistema que también equivale a 1, como se observa en la ecuación (4-32), por lo que se concluye que el modelo de la ecuación (4-2) es completamente observable.

#### 4.1.3.5 Análisis de controlabilidad – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ]

Para el análisis de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $S$  presentada en la ecuación (2-6) y se comprueba que el rango de  $S$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-7):

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2-6)$$

$$\text{Rank}(S) = n \quad (2-7)$$

En el caso del modelo de única aplicación durante el pulso de aplicación, ecuación (4-2), el orden  $n$  del sistema es 1, por lo que solo se requiere reemplazar la matriz  $B$  de la ecuación (4-25) en (2-6) para obtener la matriz de controlabilidad que se presenta en la ecuación (4-33):

$$S = [-x_r] \quad (4-33)$$

Si  $x_r \neq 0$  ;

$$\text{Rank}(S) = 1 = n \quad (4-34)$$

El rango de la matriz  $S$  es 1 mientras la magnitud de la población de referencia  $x_r$  sea diferente de cero pues esta variable es el único elemento de la matriz de controlabilidad  $S$ , como se presenta en la ecuación (4-34), por lo que se concluye que el modelo de la ecuación (4-2) es completamente observable.

#### 4.1.4 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados para el modelo de única aplicación del pesticida

El diseño del controlador por realimentación de estados se realiza a partir de la ecuación (4-2) y de la representación de espacio de estado del modelo linealizado que se presentó en la sección 4.1.3. Etapa 2.2: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de única aplicación del pesticida – durante el pulso de aplicación entre  $(T, T+\Delta]$ . Como se mencionó durante la linealización del modelo de la ecuación (4-2), La linealización y la representación en espacio de estado se aplicaron para encontrar la ganancia del controlador por realimentación de estados. Para la señal de control  $\mathbf{u}(t)$  se propone la definición de la ecuación (4-35), donde se presenta una realimentación positiva de los estados ya que en la ecuación (4-2) el producto  $-x(t) \cdot u(t) \cdot p(t)$  ya representa una realimentación negativa.

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - x(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \quad (4-2)$$

$$\mathbf{u}(t) = k \mathbf{x}(t) \quad (4-35)$$

Donde  $\mathbf{u}(t)$  tiene unidades de  $[1/\text{tiempo}]$  y  $k$  tiene unidades de  $[\text{tiempo} * \text{población}]^{-1}$ . Reemplazando la ecuación (4-35) en la ecuación de estados (2-1) se obtiene (4-36) para hallar los autovalores.

$$\frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2-1)$$

$$\frac{d \mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k})\mathbf{x}(t) \quad (4-36)$$

A partir de la ecuación (4-36), los autovalores se pueden obtener aplicando la ecuación (4-10).

$$\det|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = 0 \quad (4-10)$$

Sin embargo, es fundamental aclarar que el despeje de los autovalores en la ecuación (4-10) hace referencia a la matriz de coeficientes  $A^*$  que multiplica al vector de variables de estado  $x(t)$ , por lo que a partir de la ecuación (4-36), se obtiene (4-37):

$$A^* = (A + Bk) \quad (4-37)$$

Donde  $A^*$  es la matriz que multiplica al vector de variables de estado  $x(t)$ . Reemplazando la ecuación (4-37) en (4-10) se obtiene (4-38):

$$\det|\lambda I - (A + Bk)| = 0 \quad (4-38)$$

Y reemplazando la definición de  $A$  y  $B$  de las ecuaciones (4-23) y (4-25) respectivamente en (4-38) se obtiene (4-39):

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{b}{x_r} + x_r k &= 0 \\ k &= -\frac{\lambda \cdot x_r + b}{x_r^2} \end{aligned} \quad (4-39)$$

La ecuación (4-39) permite hallar fácilmente la magnitud de  $k$  a partir de la magnitud de población de referencia que se desea en el sistema, estableciendo así la ganancia del control por realimentación de estados para el modelo de única aplicación de la ecuación (4-2). Sin embargo, es fundamental recalcar que la señal  $u(t)$  en la ecuación (4-35) representa la efectividad del pesticida para reducir la población de plaga, por lo que en este contexto, se debe tomar las siguientes consideraciones para cuando  $u(t)$  sea menor, igual o mayor a cero:

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & u(t) < 0 \\ \text{Entonces} & \dot{x}(t) = ax(t) + b + x(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \end{array} \quad (4-40)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & u(t) = 0 \\ \text{Entonces} & \dot{x}(t) = ax(t) + b \end{array} \quad (4-41)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & u(t) > 0 \\ \text{Entonces} & \dot{x}(t) = ax(t) + b - x(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \end{array} \quad (4-42)$$

Cuando la señal  $u(t)$  es menor a cero, como se presenta en la ecuación (4-40), los efectos del pesticida promueven el crecimiento de la población de plaga pues el producto  $x(t) \cdot u(t)$  es positivo. Si  $u(t)$  es igual a cero, como se presenta en la ecuación (4-41), el pesticida no tiene ningún efecto en la población de plaga. Y si  $u(t)$  es mayor a cero, como se presenta en la ecuación (4-42), los efectos del pesticida promueven el decrecimiento de la población de plaga pues el producto  $x(t) \cdot u(t)$  es negativo. A partir de este análisis se puede concluir que el objetivo del controlador es que la efectividad siempre sea mayor a cero, lo cual implica que la ganancia del controlador también debe ser mayor a cero para que el pesticida reduzca la población de plaga. Para hallar la magnitud de los autovalores que satisfacen la condición de ganancia  $k$  debe ser mayor a cero, se debe considerar autovalores que hacen el sistema asintóticamente estable y marginalmente estable, recordando que los autovalores del modelo de Chacón son únicamente reales (parte imaginaria  $\Im$  es igual a cero).

Si se desea un sistema asintóticamente estable, la parte real  $\Re$  del autovalor debe ser negativa, como se presenta en la ecuación (4-43). Y si la ganancia  $k$  debe ser mayor a cero entonces la ecuación (4-39) debe ser mayor a cero, y al reemplazar (4-43) en (4-39), se despejan los autovalores que satisfacen dicha condición en (4-44):

$$\lambda = \Re|\lambda| < 0 \quad (4-43)$$

y  $\Im|\lambda| = 0$   
Entonces

$$\lambda = -|\lambda|$$

$$k = -\frac{-|\lambda| \cdot x_r + b}{x_r^2} > 0$$

$$|\lambda| \cdot x_r - b > 0$$

$$|\lambda| > \frac{b}{x_r} \quad (4-44)$$

Ahora bien, si el sistema fuese marginalmente estable sus autovalores tendrían su parte real  $\Re$  igual a cero, como se presenta en la ecuación (4-45). La condición para los autovalores se obtiene en la ecuación (4-46):

$$\lambda = \Re|\lambda| = 0 \quad (4-45)$$

y  $\Im|\lambda| = 0$   
Entonces

$$\lambda = 0$$

$$k = -\frac{b}{x_r^2} > 0$$

$$\frac{b}{x_r^2} < 0 \quad (4-46)$$

Para que la inecuación (4-46) se cumpla,  $b$  debe ser negativo. Sin embargo, acorde a lo expuesto en la sección 4.1.3.3. *Análisis de Estabilidad – durante el pulso de aplicación entre  $(T, T+\Delta]$* , para que el modelo linealizado durante el pulso de aplicación sea estable se necesita que  $b$  sea positivo, es decir, que se presente mayor inmigración que emigración en el sistema. A partir de esto se concluye que la condición válida para que la ganancia  $k$  sea mayor a cero es que los autovalores cumplan con la inecuación (4-44).

#### ***4.1.5 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación para el modelo de única aplicación del pesticida***

Para la comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación, se encuentra la solución analítica de la función población antes del tiempo de aplicación  $T$ , durante el pulso de aplicación  $(T, T+\Delta]$ , y después del pulso de aplicación  $T+\Delta$ ; y se simula el crecimiento de la población en cada rango de tiempo por medio del software *Wolfram Mathematica*.

Para la simulación de las ecuaciones de población de plaga, se utilizarán las magnitudes de los coeficientes  $a, b$  y población inicial  $x(0)$  propuestas en las simulaciones de Chacón en su investigación para obtener los coeficientes para un cultivo de mora ante la presencia de plaga de *Trips* [19]. En las simulaciones de Chacón, se utilizaron los coeficientes:

$$x(0) = 35 \quad (4-47)$$

$$b = 0.8 \quad (4-48)$$

$$a(T[^\circ C]) = 1.5318 \quad (4-49)$$

En el trabajo de Chacón se explica que el coeficiente  $a$  de tasa de natalidad de la plaga depende de la temperatura ambiente, que posteriormente utiliza y compara con respecto a su sistema de control difuso para determinar la constante  $a$  [19]. En el presente trabajo de grado se considera la tasa de natalidad como una constante y se utilizan los resultados y constantes propuestas por Chacón para las posteriores simulaciones del sistema ante la aplicación del pesticida como señal de control.

#### 4.1.5.1 Solución analítica de la función población – antes del tiempo de aplicación T

La solución analítica de la función población de plaga antes del tiempo de aplicación  $T$  en el modelo de única aplicación de pesticida se obtiene al integrar la ecuación (4-4) con respecto al tiempo.

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \quad (4-4)$$

La ecuación (4-4) se integra usando el método del factor integrante, que se visualiza mejor si la ecuación (4-4) se reorganiza en su forma estándar (4-50):

$$\frac{d x(t)}{dt} - ax(t) = b \quad (4-50)$$

A partir de la ecuación (4-50) se define el factor integrante  $\mu$  de la ecuación (4-51) y la función auxiliar  $P$  (4-52):

$$\mu(t) = -a \quad (4-51)$$

$$P(t) = e^{\int \mu dt} \quad (4-52)$$

Al reemplazar la ecuación (4-51) en (4-52) se obtiene (4-53):

$$P(t) = e^{-at} \quad (4-53)$$

Al multiplicar la función  $P(t)$ , ecuación (4-53), por la ecuación (4-50) se obtiene (4-54):

$$\begin{aligned} P(t) \cdot \left( \frac{d x(t)}{dt} - ax(t) \right) &= P(t) \cdot b \\ \left( \frac{d x(t)}{dt} \cdot e^{-at} \right) - ax(t) \cdot e^{-at} &= b \cdot e^{-at} \\ \frac{d}{dt} (x \cdot e^{-at}) &= b \cdot e^{-at} \end{aligned} \quad (4-54)$$

La función auxiliar  $P$  permite que, al multiplicarse por (4-50), se puedan factorizar los términos como la derivada de un producto, como se presenta en la ecuación (4-54). Por último, al integrar la ecuación (4-54) desde cero hasta  $t$  mientras el tiempo sea menor o igual al tiempo de aplicación  $T$ , se obtiene (4-55):

$$\begin{aligned} \text{Mientras } t \leq T; \\ \int_0^t \frac{d}{dt} (x \cdot e^{-at}) dt &= \int_0^t b \cdot e^{-at} \\ x \cdot e^{-at} \Big|_0^t &= \frac{b}{-a} \cdot e^{-at} \Big|_0^t \\ x(t) \cdot e^{-at} - x(0) &= \frac{b}{-a} \cdot (e^{-at} - 1) \\ x(t) &= x(0) \cdot e^{at} + \frac{b}{a} \cdot e^{at} - \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (4-55)$$

La ecuación (4-55) representa la solución general del modelo de única aplicación antes del tiempo de aplicación  $T$ . Al reemplazar los coeficientes  $x(0)$ ,  $a$  y  $b$  de las ecuaciones (4-47), (4-48) y (4-49) en (4-55) se obtiene la solución particular en (4-56):

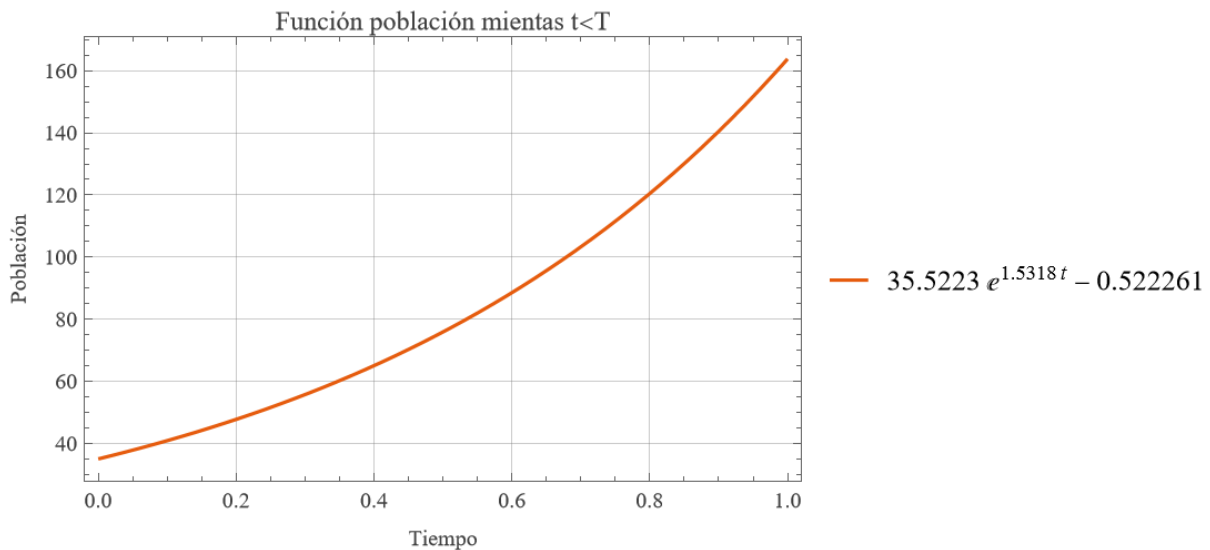
$$x(t) = 35 \cdot e^{1.5318t} + \frac{0.8}{1.5318} \cdot e^{1.5318t} - \frac{0.8}{1.5318}$$

$$x(t) = 35.5223 \cdot e^{1.5318t} - 0.5223 \quad (4-56)$$

#### 4.1.5.2 Simulación de la función población – antes del tiempo de aplicación T

Usando *Wolfram Mathematica* se simula la dinámica poblacional del modelo de única aplicación de pesticida antes del tiempo de aplicación  $T$  presentado en la ecuación (4-56). Para la simulación se establece que el instante de aplicación sea  $T = 1$ , cómo se presenta en la Figura 2:

**Figura 2.** Simulación de la solución particular de la función población antes del tiempo de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga antes del tiempo de aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

### 4.1.5.3 Solución analítica de la función población para cualquier señal de control – después del tiempo de aplicación $T$

Antes de abordar el caso donde la estrategia de control es la realimentación de estados, se propone hallar la solución analítica de la función población para cualquier señal de control después del tiempo de aplicación  $T$ . Para ello, se reorganiza la ecuación (4-2) en su forma estándar para obtener (4-57):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - x(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \quad (4-2)$$

$$p(t) = \theta(t - T) - \theta(t - T - \Delta) \quad (4-3)$$

$$\dot{x}(t) - a \cdot x(t) + x(t) \cdot u(t) \cdot p(t) = b \quad (4-57)$$

Al igual que en el caso de función población antes del tiempo de aplicación, la ecuación (4-57) se integra usando el método del factor integrante  $\mu$  que ahora se define en la ecuación (4-58), junto a la ecuación auxiliar  $P$  de la ecuación (4-59):

$$\mu(t) = -a + u(t) \cdot p(t) \quad (4-58)$$

$$P(t) = e^{\int \mu dt} \quad (4-59)$$

Al reemplazar la ecuación (4-58) en (4-59) se obtiene (4-60):

$$P(t) = e^{\int -a + u(t) \cdot p(t) dt}$$

$$P(t) = e^{-at + \int u(t) \cdot p(t) dt} \quad (4-60)$$

Al multiplicar la ecuación (4-60) con la ecuación (4-57) se obtiene (4-61), reorganizada como la derivada de un producto:

$$P(t) \cdot [\dot{x}(t) - a \cdot x(t) + x(t) \cdot u(t) \cdot p(t)] = b \cdot P(t) \quad (4-61)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt} + (-a + u(t) \cdot p(t)) \cdot x(t) \\ \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt} = b \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (x(t) \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt}) = b \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt}$$

Posteriormente se aplica la integral indefinida a la ecuación (4-61) con respecto al tiempo para obtener la ecuación (4-62):

$$\int \frac{d}{dt} (x(t) \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt}) = \int b \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt}$$

$$x(t) \cdot e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt} = \zeta_1 + b \int e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt}$$

$$x(t) = \zeta_1 \cdot e^{at-\int u(t) \cdot p(t) dt} + b \cdot e^{at-\int u(t) \cdot p(t) dt} \cdot \int e^{-at+\int u(t) \cdot p(t) dt} \quad (4-62)$$

Donde  $\zeta_1$  representa la constante de integración para el rango de tiempo que se decida evaluar la ecuación (4-62). En este caso fue favorable realizar la integral indefinida pues aún se conservan integrales en las que no se puede evaluar la función en el rango deseado pues en este caso se soluciona para una señal de control  $u(t)$  de la cual no se conoce su definición pues es un caso general.

#### 4.1.5.4 Solución analítica de la función población para la realimentación de estados – durante el pulso tiempo de aplicación (T, T + Δ]

Ahora bien, para el caso donde la estrategia de control es la realimentación de estados, se reemplaza la realimentación de estados de la ecuación (4-35) en (4-2) y se obtiene (4-63).

$$u(t) = k x(t) \quad (4-35)$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - k \cdot p(t) \cdot x(t)^2 \quad (4-63)$$

Cómo se observa en la ecuación (4-63), al reemplazar la estrategia de control se obtiene una ecuación cuadrática en el lado derecho de la igualdad. Este tipo de ecuaciones se conocen

como ecuaciones diferenciales cuadráticas o ecuación diferencial de Riccati. Una ecuación diferencial (ED) de Riccati se puede resolver a partir de la generalización de una solución particular que satisfaga la ED [44], o a partir de una solución general que considere las dos soluciones que satisfacen la ED. En el presente trabajo de grado se abordará la solución a partir de la generalización de una solución particular de la ecuación (4-63), ya que en este método es más sencilla la obtención de las constantes de integración que en el método de la solución general.

Para solucionar la ED de Riccati se requieren primero las soluciones particulares que hacen que la ecuación (4-63) equivalga a cero, como se presenta en (4-64):

$$\begin{aligned} \text{Si } \dot{x}(t) &= 0 \\ -k \cdot p(t) \cdot x(t)^2 + ax(t) + b &= 0 \end{aligned} \quad (4-64)$$

Las soluciones particulares de (4-64) se obtienen resolviendo la formula cuadrática, y considerando que el pulso  $p(t)$  equivale a 1 entre  $T$  y  $T + \Delta$ , sus resultados se presentan en (4-65) y (4-66):

$$\text{Si } p(t) = \begin{cases} 1, & T < t \leq T + \Delta \\ 0, & \text{E.O.C.} \end{cases}$$

Y

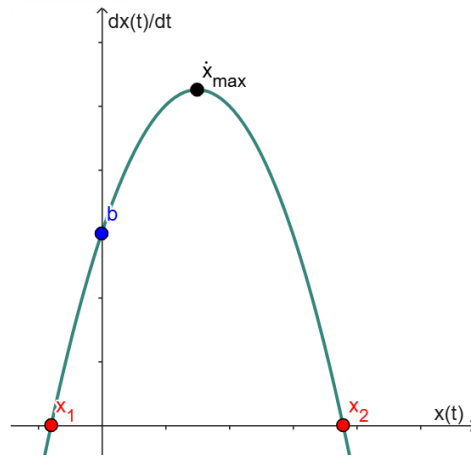
$$k \neq 0$$

Entonces

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4kb}}{2k} \quad (4-65)$$

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4kb}}{2k} \quad (4-66)$$

Es valido recalcar que la solución particular  $x_1$  de la ecuación (4-65) puede tener valores negativos por la diferencia en el numerador, mientras que los valores numéricos de la solución particular  $x_2$  de la ecuación (4-66) solo serán positivos. Así mismo, estas expresiones son válidas si y solo si la ganancia  $k$  es diferente de cero, y recordando que se requiere que la constante  $b$  sea igual o mayor a cero para que el sistema sea estable.

**Figura 3.** Gráfica de la ecuación (4-64).

*Nota:* Gráfica que representa la relación de la función población y su derivada acorde a la ED de Riccati.

La Figura 3 representa de forma general el comportamiento de la ecuación (4-64). La orientación de la Figura 3 se puede deducir a partir del signo negativo en el término  $-k \cdot p(t) \cdot x(t)^2$  de la ecuación (4-64), y se consideran cuatro puntos de interés:

- Las intersecciones con el eje del tiempo  $x(t)$  que son las soluciones particulares  $x_1$  y  $x_2$ , donde  $x_1$  puede estar ubicada en el semiplano izquierdo según el reemplazo de las constantes de la ecuación (4-65); y donde  $x_2$  siempre estará ubicada en el semiplano derecho acorde a la ecuación (4-66).
- La intersección con el eje de población  $\dot{x}(t)$  que es la constante de migración  $b$ , que se puede deducir de la ecuación (4-63) cuando  $x(t) = 0$ .
- El punto  $\dot{x}_{\max}$  donde se presenta el máximo valor de  $\dot{x}(t)$ .

Para encontrar la población en la que se encuentra el punto  $\dot{x}_{\max}$ , inicialmente se deriva  $\dot{x}$  (4-63) con respecto a  $x(t)$ , como se muestra en la ecuación (4-67). Posteriormente se iguala (4-67) a cero y se despeja  $x_m$ , como se presenta en (4-68):

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d x(t)}{dt} \right) = -2k \cdot x(t) + a \quad (4-67)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Si} \\
 \text{y} \\
 \text{Entonces}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{d}{dx} \left( \frac{d x(t)}{dt} \right) = 0 \\
 x(t) = x_m \\
 -2k \cdot x_m + a = 0 \\
 x_m = \frac{a}{2k}
 \end{array}
 \quad (4-68)$$

Donde  $x_m$  representa el punto donde se encuentra  $\dot{x}_{\max}$ . Si se reemplaza la ecuación (4-68) en (4-63) se obtiene el valor de  $\dot{x}_{\max}$  en (4-69):

$$\begin{array}{l}
 \text{Si} \\
 \text{Entonces}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \dot{x}_{\max} = -k \cdot x_m^2 + a \cdot x_m + b \\
 k \neq 0, b > 0 \\
 \dot{x}_{\max} = -\frac{a^2}{4k} + \frac{a^2}{2k} + b \\
 \dot{x}_{\max} = \frac{a^2}{4k} + b
 \end{array}
 \quad (4-69)$$

Donde  $\dot{x}_{\max}$  siempre será positivo, acorde a la ecuación (4-69), recordando que la ganancia  $k$  debe ser diferente de cero y la constante  $b$  es mayor a cero para mantener el sistema estable.

Ahora bien, para solucionar la ED de Riccati a partir de la generalización de una solución particular se utiliza la ecuación (4-70) propuesta por Euler en 1760 ya que permite linealizar la ED de Riccati [44]:

$$y(t) = y_p + \frac{1}{v(t)} \quad (4-70)$$

Donde  $y(t)$  es la solución generalizada a partir de la solución particular  $y_p$  más el inverso multiplicativo de la función auxiliar  $v(t)$ . Al derivar la ecuación (4-70) con respecto al tiempo se obtiene (4-71):

$$\frac{d y(t)}{dt} = \frac{d y_p}{dt} - \frac{1}{v(t)^2} \cdot \frac{d v}{dt} \quad (4-71)$$

Junto a la ecuación (4-71) se establecen las siguientes equivalencias:

$$P_1 = -k \cdot p(t) \quad (4-72)$$

$$P_2 = a \quad (4-73)$$

$$P_3 = b \quad (4-74)$$

$$y = y(t) = x(t) \quad (4-75)$$

$$\frac{d}{dt} y = \frac{d}{dt} x(t) \quad (4-76)$$

De manera que al reemplazar (4-72), (4-73), (4-74), (4-75) y (4-76) en (4-63) se obtiene (4-77):

$$\frac{d y}{dt} = P_1 y^2 + P_2 y + P_3 \quad (4-77)$$

Igualando (4-71) y (4-77) se obtiene (4-78):

$$\frac{d y_p}{dt} - \frac{1}{v(t)^2} \cdot \frac{d v}{dt} = P_1 y^2 + P_2 y + P_3 \quad (4-78)$$

Si consideramos que la derivada de  $y_p$  es evaluar (4-77) en  $y_p$  se obtiene (4-79):

$$P_1 y_p^2 + P_2 y_p + P_3 - \frac{1}{v(t)^2} \cdot \frac{d v}{dt} = P_1 y^2 + P_2 y + P_3$$

$$P_1 y_p^2 + P_2 y_p - \frac{1}{v(t)^2} \cdot \frac{d v}{dt} = P_1 y^2 + P_2 y \quad (4-79)$$

Reemplazando la ecuación de la solución de la ED de Riccati (4-71) en (4-79) se obtiene (4-80):

$$P_1 y_p^2 + P_2 y_p - \frac{1}{v(t)^2} \cdot \frac{d v}{dt} = P_1 \left( y_p + \frac{1}{v} \right)^2 + P_2 \left( y_p + \frac{1}{v} \right) \quad (4-80)$$

$$P_1 y_p^2 + P_2 y_p - \frac{1}{v(t)^2} \cdot \frac{dv}{dt} = P_1 y_p^2 + \frac{2P_1 y_p}{v} + \frac{P_1}{v^2} + P_2 y_p + \frac{P_2}{v}$$

$$-\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{2P_1 y_p}{v} + \frac{P_1}{v^2} + \frac{P_2}{v}$$

Multiplicando (4-80) por  $v^2$  y reorganizando en la forma estándar se obtiene la ecuación (4-81) para integrar por el método de factor integrante:

$$\frac{dv}{dt} = -(2P_1 y_p)v - P_1 - P_2 v$$

$$\frac{dv}{dt} + (2P_1 y_p + P_2)v = -P_1 \quad (4-81)$$

Definiendo el factor integrante  $\mu$  de la ecuación (4-82) y la función auxiliar  $P$  de la ecuación (4-83):

$$\mu(t) = 2P_1 y_p + P_2 \quad (4-82)$$

$$P(t) = e^{\int \mu dt} \quad (4-83)$$

$$P(t) = e^{\int (2P_1 y_p + P_2) dt} = e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} \quad (4-84)$$

En la ecuación (4-84) se evalúa (4-82) en (4-83). La integral de  $P_1$  no se resuelve inmediatamente pues esta función auxiliar contiene al pulso de aplicación  $p(t)$  que depende del tiempo. Multiplicando (4-84) por la ecuación (4-81) se obtiene (4-85):

$$\frac{dv}{dt} \cdot e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} + (2P_1 y_p + P_2)v \cdot e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} = -P_1 e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt}$$

$$\frac{d}{dt} (v \cdot e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt}) = -P_1 e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} \quad (4-85)$$

Realizando la integral indefinida de (4-85) se despeja la función auxiliar  $v$  (4-86):

$$\int \frac{d}{dt} (v \cdot e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt}) dt = \int -P_1 e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} dt \quad (4-86)$$

$$v \cdot e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} = \zeta_2 - P_1 \int e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} dt$$

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t - 2y_p \int P_1 dt} - P_1 e^{-P_2 t - 2y_p \int P_1 dt} \int e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} dt$$

En (4-87) se desarrolla la integral de  $P_1$ , retomando la definición de  $P_1$  de la ecuación (4-72):

$$\int P_1 dt = -k \int p(t) dt \quad (4-87)$$

La definición del pulso de aplicación  $p(t)$  de la ecuación (4-3) indica que esta función se compone de dos escalones unitarios, uno positivo que inicia en el tiempo de aplicación  $T$ , y uno negativo que inicia en  $T+\Delta$ . En este caso, para el rango  $(T, T+\Delta]$  se considera solo el escalón unitario  $\theta$  positivo, por la ecuación (4-87) se redefine como (4-88):

$$\int P_1 dt = -k \int p(t) dt = -k \int \theta(t-T) dt$$

$$\int P_1 dt = -k(t-T)\theta(t-T) \quad (4-88)$$

Reemplazando (4-88) en (4-86) se obtiene (4-89):

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k(t-T)\theta(t-T)} - (-k \cdot \theta(t-T)) e^{-P_2 t + 2y_p k(t-T)\theta(t-T)} \cdot \int e^{P_2 t - 2y_p k(t-T)\theta(t-T)} dt$$

Si  $\theta_T = \theta(t-T)$ ;

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k(t-T)\theta_T} + k \cdot \theta_T \cdot e^{-P_2 t + 2y_p k(t-T)\theta_T} \cdot \int e^{P_2 t - 2y_p k(t-T)\theta_T} dt$$

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k(t-T)\theta_T} + \frac{k \cdot \theta_T}{P_2 - 2y_p k} \cdot e^{-P_2 t + 2y_p k(t-T)\theta_T} \cdot e^{P_2 t - 2y_p k(t-T)\theta_T}$$

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k(t-T)\theta_T} + \frac{k \cdot \theta_T}{P_2 - 2y_p k} \quad (4-89)$$

Reemplazando la igualdad de  $P_2$  de la ecuación (4-73) se obtiene la función  $v$  acorde a las constantes del modelo original, como se observa en (4-90):

$$v = \zeta_2 e^{-at + 2y_p k(t-T)\theta_T} + \frac{k \cdot \theta_T}{a - 2y_p k} \quad (4-90)$$

Reemplazando (4-90) en (4-70), y sustituyendo  $x(t)$  por  $y(t)$  según (4-75), se obtiene la solución de  $x(t)$  en (4-91):

$$x(t) = x_p + \left( \zeta_2 e^{-at + 2x_p k(t-T)\theta_T} + \frac{k \cdot \theta_T}{a - 2x_p k} \right)^{-1} \quad (4-91)$$

Donde  $x_p$  es la solución particular en términos de  $x(t)$ , que en este caso será  $x_1$  o  $x_2$  de las ecuaciones (4-65) y (4-66) respectivamente. Como se observa en (4-91),  $x(t)$  sigue dependiendo de la solución particular  $x_p$  y la constante de integración  $\zeta_2$ . Dado que  $x_p$  es una solución conocida, se despeja la constante  $\zeta_2$  usando *Wolfram Mathematica* y se obtiene la ecuación (4-92):

$$\zeta_2 = \frac{e^{at - 2x_p k(t-T)\theta_T} (-a + kx + kx_p)}{(x - x_p)(-a + 2kx_p)} \quad (4-92)$$

La ecuación (4-92) se evalúa en  $T$  para reemplazar  $x$  por la magnitud de población en el tiempo de aplicación  $T$ , ya que dicha magnitud corresponde a la condición inicial de la función durante el pulso de aplicación ( $T, T+\Delta$ ]. La constante  $\zeta_2$  en términos de la población en el tiempo de aplicación  $T$  se presenta en la ecuación (4-93):

$$\zeta_{2(t=T)} = \frac{e^{aT} (-a + k \cdot x(T) + kx_p)}{(x(T) - x_p)(-a + 2kx_p)} \quad (4-93)$$

La constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_1$  (4-65) (solución particular con posibilidad de ser negativa), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en (4-94):

$$\zeta_{2(x_p=x_1)} = \frac{e^{aT} k (a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T))}{\sqrt{a^2 + 4bk} (-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T))} \quad (4-94)$$

Y la constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_2$  (4-66) (solución particular positiva), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en (4-95):

$$\zeta_{2(x_p=x_2)} = -\frac{e^{aT} k (-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T))}{\sqrt{a^2 + 4bk} (a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T))} \quad (4-95)$$

La solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_1$  (4-65) y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_1)}$  (4-94) se presentan en (4-96):

$$X_1(t) = x(t, x_p = x_1, \zeta_{2(x_p=x_1)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bk}}{k} \cdot \left( -\frac{1}{k} + \frac{2}{k + \frac{k \cdot e^{-(t-T)}(a + (-a + \sqrt{a^2 + 4bk})\theta_T)(a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T))}{-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T)}} \right) \right) \quad (4-96)$$

La solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_2$  (4-66) y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_2)}$  (4-95) se presentan en (4-97):

$$X_2(t) = x(t, x_p = x_2, \zeta_{2(x_p=x_2)}) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bk}}{2k} \left( 1 + \frac{2}{-1 + \frac{e^{-(t-T)}(a - (a + \sqrt{a^2 + 4bk})\theta_T)(a - \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T))}{a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T)}} \right) \quad (4-97)$$

#### 4.1.5.5 Simulación de la función población para población para la realimentación de estados – durante el pulso tiempo de aplicación (T, T + Δ]

Para la simulación de las funciones  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  de población durante el pulso de aplicación, se debe establecer la magnitud de la población de referencia  $x_r$  que se desea en el sistema, los nuevos autovalores  $\lambda$  deseados y evaluar la ganancia  $k$  del control por realimentación de estados. Para esta simulación se establece que la población de referencia sea el 70% de la población en el tiempo de aplicación  $T$ , como se presenta en (4-99).

La magnitud de los autovalores se estableció en la constante de crecimiento  $a$ , como se presenta en (4-100). Esta equivalente se establece al considerar que el sistema antes del tiempo de aplicación  $T$  es inestable y sus autovalores tienen magnitud  $a$  pero se encuentran en el semiplano derecho (4-11); por lo que se decide simular un sistema que sea asintóticamente estable con la misma magnitud  $a$  para sus autovalores.

$$x(T) = x(1) = 163.821 \quad (4-98)$$

$$x_r = 0.7x(T) = 114.675 \quad (4-99)$$

$$\lambda = -|\lambda| = -a = -1.5318 \quad (4-100)$$

Para comprobar que la ganancia  $k$  si tendrá efectos de reducción de población, se reemplazan las magnitudes de  $b$ ,  $x_r$  y  $\lambda$  (4-48), (4-99) y (4-100) en la inecuación (4-44), y se obtiene (4-101):

$$|\lambda| > \frac{b}{x_r} \quad (4-44)$$

$$a > \frac{b}{x_r}$$

$$1.5318 > \frac{0.8}{114.675}$$

$$1.5318 > 0.006976 \quad (4-101)$$

Dado que se cumple la inecuación (4-101), se continua con la obtención del valor de la ganancia  $k$ , reemplazando las magnitudes de  $b$ ,  $x_r$  y  $\lambda$  (4-48), (4-99) y (4-100) en (4-39) obteniendo (4-102):

$$k = -\frac{\lambda \cdot x_r + b}{x_r^2} \quad (4-39)$$

$$k = -\frac{(-1.5318)(114.675) + 0.8}{114.675^2}$$

$$k = 0.01329 \quad (4-102)$$

Junto a la obtención de la ganancia  $k$  se puede calcular el tiempo de asentamiento esperado. El tiempo de asentamiento se suele expresar con la ecuación

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} \quad (4-103)$$

Donde  $t_s$  es el tiempo de asentamiento,  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento y  $w_n$  la frecuencia natural del sistema. El producto  $\zeta w_n$  representa la magnitud de la parte real de un autovalor. En el caso del autovalor definido en la ecuación (4-100) solo presenta parte real, por lo que al reemplazar (4-100) en (4-103) se obtiene el tiempo de asentamiento esperado en (4-104):

Si  $|\lambda| = \zeta w_n$   
Entonces

$$t_s = \frac{4}{|\lambda|} = \frac{4}{a} = \frac{4}{1.5318}$$

$$t_s = 2.6113 \quad (4-104)$$

Según la ecuación (4-104) el tiempo de asentamiento esperado es aproximadamente 2.6 unidades de tiempo. Es valido recordar que el tiempo  $t_s$  se describe sin especificar unidades de tiempo pues la literatura no suele asignar una unidad de tiempo específica para estos modelos (segundos, minutos, años) y se mantiene solo como una unidad de tiempo.

Teniendo en cuenta que el tiempo de asentamiento  $t_s$  es el tiempo que, en teoría, requiere el sistema para estabilizarse asintóticamente, se puede establecer que la duración del pulso de aplicación debe ser igual o mayor al tiempo de asentamiento, como se establece en (4-105):

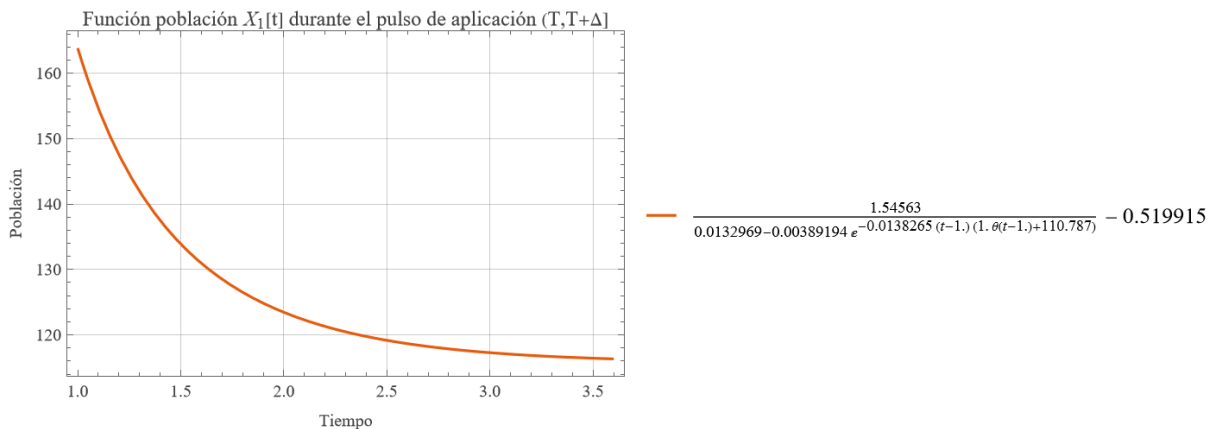
$$\Delta \geq t_s \tag{4-105}$$

Ahora bien, para simular la función  $X_1(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $x(T)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-98) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_1(t)$  (4-96), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_1(t)$  en (4-106):

$$X_1(t) = -0.5199 + \frac{1.5456}{0.0133 - 0.0039e^{-0.0138(-1+t)(110.787+\theta_T)}} \tag{4-106}$$

La función  $X_1(t)$  de la ecuación (4-106) se simula en el rango del pulso de aplicación ( $T = 1$ ,  $T + \Delta = 3.6$ ) y se obtiene la Figura 4:

**Figura 4.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_1$  durante el pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga durante aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

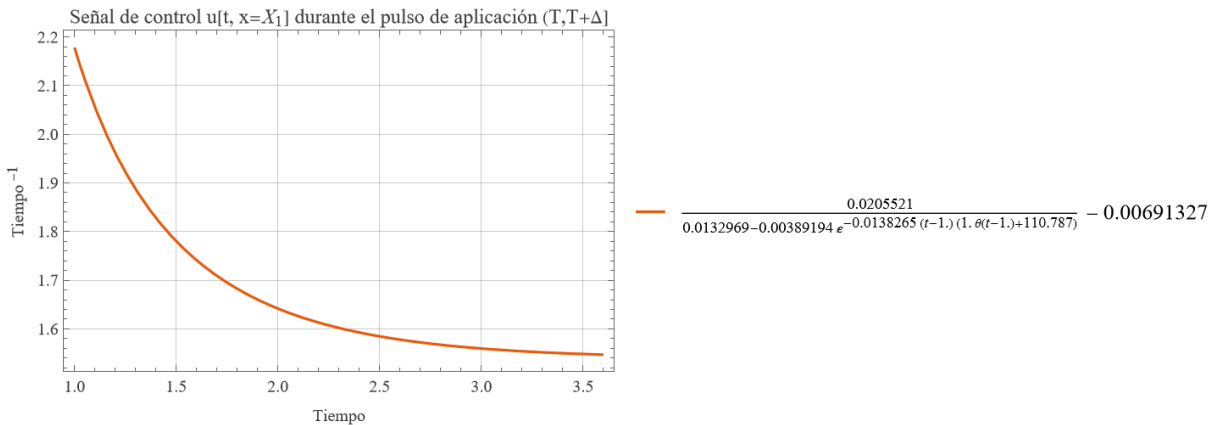
Así mismo, también se simuló la función de la señal de control de realimentación de estado para la función  $X_1(t)$ . La función de la señal de control se obtiene al reemplazar la función  $X_1(t)$  (4-106) en la ecuación de la realimentación de estado propuesta (4-35), obteniendo (4-107):

$$u(t) = k x(t) \tag{4-35}$$

$$u(t, x = X_1) = -0.0069 + \frac{0.0205}{0.0133 - 0.0039e^{-0.0138(-1+t)}(110.787+\theta_T)} \tag{4-107}$$

La función  $u(t, x = X_1)$  de la ecuación (4-107) se simula en el rango del pulso de aplicación ( $T = 1, T + \Delta = 3.6$ ] y obtiene la Figura 5:

**Figura 5.** Simulación de señal de control a partir de  $X_1$  durante el pulso de aplicación.



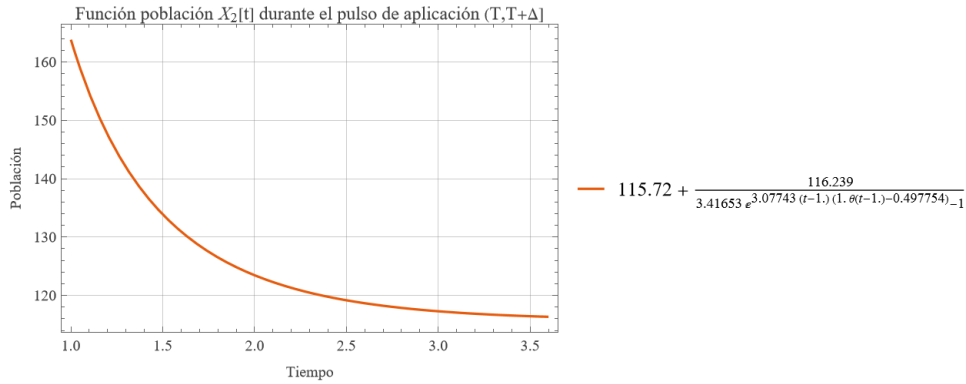
*Nota:* Gráfico de la señal de control durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Para simular la función  $X_2(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a, b, x(T)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-98) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_2(t)$  (4-97), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_2(t)$  en (4-108):

$$X_2(t) = 115.7195 + \frac{116.2394}{-1 + 3.4165e^{3.0774(-1+t)}(-0.4978+\theta_T)} \tag{4-108}$$

La función  $X_2(t)$  de la ecuación (4-108) se simula en el rango del pulso de aplicación ( $T = 1, T + \Delta = 3.6$ ] y se obtiene la Figura 6:

**Figura 6.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_2$  durante el pulso de aplicación.



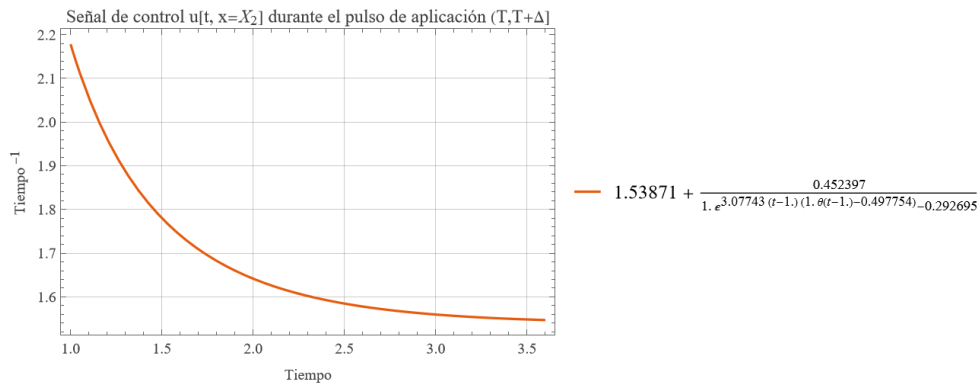
*Nota:* Gráfica de población de plaga durante aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Así mismo, se simuló la función de la señal de control de realimentación de estado para la función  $X_2(t)$ . La función de la señal de control se obtiene al reemplazar la función  $X_2(t)$  (4-108) en la ecuación de la realimentación de estado propuesta (4-35), obteniendo (4-109):

$$u(t, x = X_2) = 1.5387 + \frac{0.4524}{-0.2927 + e^{3.0774(-1+t)(-0.4976+\theta_T)}} \quad (4-109)$$

La función  $u(t, x = X_2)$  de la ecuación (4-109) se simula en el rango del pulso de aplicación ( $T = 1, T + \Delta = 3.6$ ) y obtiene la Figura 7:

**Figura 7.** Simulación de señal de control a partir de  $X_2$  durante el pulso de aplicación.



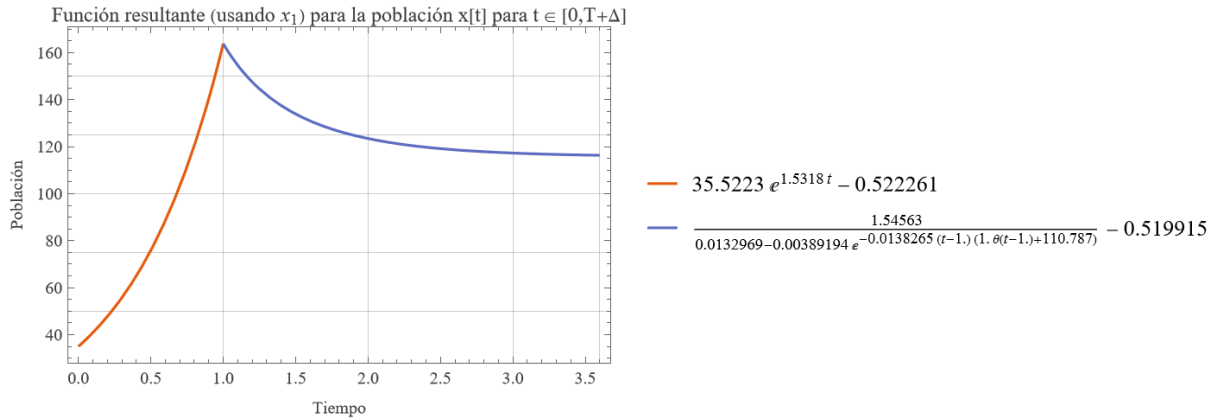
*Nota:* Gráfica de la señal de control durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Se puede notar en las simulaciones de  $X_1$  y  $X_2$ , Figura 4 y Figura 6 respectivamente, que el comportamiento de ambas funciones es igual, estabilizándose en el mismo valor de población. Por consiguiente y como se observa en las simulaciones de  $u(t, x = X_1)$  y  $u(t, x = X_2)$ , Figura 5 y Figura 7 respectivamente, la señal de control con realimentación de estados es igual pues la variable de estado se comporta de la misma forma y la ganancia  $k$  es fija, como se presentó en (4-102).

Es valido recalcar que las señales de control de las ecuaciones (4-107) y (4-109) junto a sus simulaciones en la Figura 5 y Figura 7 respectivamente, representan un cambio de la efectividad en cada instante de tiempo  $t$  en el que se evalúa la función de población, ya sea  $X_1(t)$  o  $X_2(t)$ , y por ende se modifica a su vez la retroalimentación de la señal de control  $u(t)$ . En la práctica, esto implica que la señal de control durante el pulso de aplicación se comporta como una serie de aplicaciones de pesticida consecutivas (de efectividad decreciente), más que una única aplicación de efectividad fija. Es fundamental a su vez establecer un mínimo de efectividad en el cual el pesticida siga reduciendo la población objetivo pues, como indica la literatura, las poblaciones de plaga pueden generar resistencia al pesticida si se aplica en concentraciones muy bajas [6][7][13].

Por último, se presenta la función población antes del tiempo de aplicación junto a las funciones de población durante el pulso de aplicación. La Figura 8 presenta la función por partes desde cero hasta la finalización de pulso, usando la solución particular  $x_1$ .

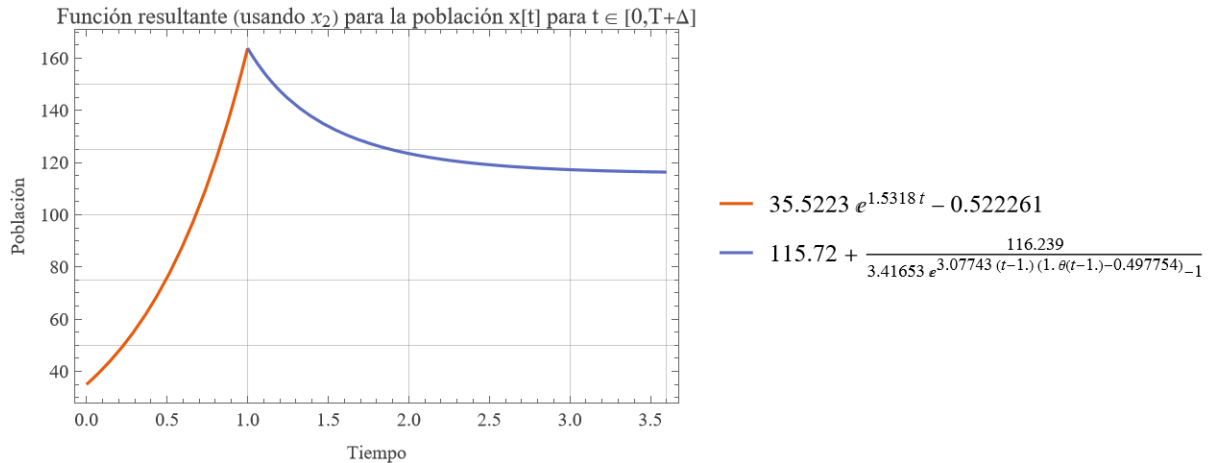
**Figura 8.** Simulación de función por partes (poblacion de plaga) a partir de  $x_1$  desde cero hasta la finalización del pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población, simulado en Wolfram Mathematica.

La Figura 9 presenta la función por partes desde cero hasta la finalización del pulso, usando la solución particular  $x_2$ .

**Figura 9.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_2$  desde cero hasta la finalización del pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

Para evaluar la eficacia del controlador se calcula el error porcentual en estado estable, lo que requiere comparar la población deseada y la población obtenida al finalizar el pulso de

aplicación. La magnitud de población de las funciones  $X_1$  y  $X_2$ , que en este caso son iguales, al finalizar el pulso de aplicación se presenta en (4-110):

$$X_1(T + \Delta) = X_2(T + \Delta) = 116.3344 \quad (4-110)$$

$$Error_{ss}(\%) = \frac{|x_{ss \text{ teorico}} - x_{ss \text{ simulado}}|}{x_{ss \text{ teorico}}} \quad (4-111)$$

La ecuación (4-111) permite calcular el error porcentual en estado estable, en donde  $x_{ss \text{ teorico}}$  corresponde a la magnitud de población que el sistema debía lograr en estado estable, que en este caso debía ser la población de referencia deseada (4-99); y  $x_{ss \text{ simulado}}$  es la magnitud de población que se alcanzó en la simulación al llegar al estado estable, es decir en el tiempo de asentamiento, que en este caso corresponde a la magnitud descrita en (4-110). Sustituyendo (4-99) y (4-110) en (4-111) se obtiene el error porcentual en estado estable del control por realimentación de estado (4-112):

$$Error_{ss}(\%) = \frac{|114.675 - 116.3344|}{114.675} = 1.447\% \quad (4-112)$$

En (4-112) se obtiene un error en estado estable de 1.45% aproximadamente, que equivale a 2 individuos de plaga por encima de la magnitud de referencia deseada en la población de plaga.

#### 4.1.5.6 Solución analítica de la función población – después del pulso de aplicación $T + \Delta$

Para la solución analítica de la función población después del pulso de aplicación  $T + \Delta$ , se debe retomar la definición de  $p(t)$  establecida en la ecuación (4-3) donde se define el pulso como resta de escalones unitarios:

$$p(t) = \theta(t - T) - \theta(t - T - \Delta) \quad (4-3)$$

La función del pulso  $p(t)$  se puede analizar de dos formas para hallar la solución analítica de la función población después de  $T + \Delta$ . La primera opción de análisis es considerar directamente

que la función  $p(t)$  es igual a cero ya que los escalones unitarios se anulan después de  $T + \Delta$ , por lo que la función población obedecería a la misma ecuación propuesta para la función población antes del tiempo de aplicación  $T$ . Este acercamiento indica que el pesticida no tiene ningún efecto después del pulso de aplicación y se retoma la dinámica original del sistema. La segunda opción de análisis es usar la definición de  $p(t)$  presentada en la ecuación (4-3), retomar la solución general para la función población durante el pulso  $T + \Delta$ , y evaluar en las funciones población resultantes la diferencia de los escalones unitarios. Dado que en las funciones de población resultantes la ganancia  $k$  del controlador también se presenta fuera del exponente, este acercamiento permite analizar si después del pulso de aplicación el pesticida afecta el crecimiento de la población de forma indirecta.

En base a lo presentado, se considera el análisis a partir de las funciones obtenidas para la población durante el pulso  $T + \Delta$ . Para ello, se retoma el desarrollo de la función auxiliar  $v(t)$  que permite generalizar la función población a partir de una solución particular, cómo fue expuesto en la sección 4.1.5.4. *Solución analítica de la función población para la realimentación de estados – durante el pulso tiempo de aplicación  $(T, T + \Delta]$* , específicamente la ecuación (4-86) antes del desarrollo de la integral de  $P_1$ :

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t - 2\gamma_p \int P_1 dt} - P_1 e^{-P_2 t - 2\gamma_p \int P_1 dt} \int e^{P_2 t + 2\gamma_p \int P_1 dt} dt \quad (4-86)$$

$$\int P_1 dt = -k \int p(t) dt \quad (4-87)$$

Reemplazando (4-3) en (4-87) se obtiene :

$$\int P_1 dt = -k \int [\theta(t - T) - \theta(t - T - \Delta)] dt$$

Si  $\theta_T = \theta(t - T)$   
 Y  $\theta_{T+\Delta} = \theta(t - T - \Delta)$   
 Entonces

$$\int P_1 dt = -k[(t - T)\theta_T - (t - T - \Delta)\theta_{T+\Delta}] \quad (4-113)$$

Si en la ecuación (4-113) se considera que  $\theta_T$  y  $\theta_{T+\Delta}$  son iguales a 1 después de  $T + \Delta$ , entonces (4-114):

Si

$$\theta_T = \begin{cases} 1, & t \geq T \\ 0, & E.O.C. \end{cases}$$

Y

$$\theta_{T+\Delta} = \begin{cases} 1, & t \geq T + \Delta \\ 0, & E.O.C. \end{cases}$$

Entonces

$$\int P_1 dt = -k\Delta \quad (4-114)$$

Con la nueva definición de la integral de  $P_1$  de la ecuación (4-114) se reemplaza en (4-86) y se obtiene (4-115):

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k \Delta} + k(\theta_T - \theta_{T+\Delta}) e^{-P_2 t + 2y_p k \Delta} \int e^{P_2 t - 2y_p k \Delta} dt$$

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k \Delta} \quad (4-115)$$

Reemplazando en (4-115) la igualdad de  $P_2$  de la ecuación (4-73) se obtiene la función  $v$  acorde a las constantes del modelo original, como se observa en (4-116):

$$v = \zeta_2 e^{-at + 2y_p k \Delta} \quad (4-116)$$

Reemplazando (4-116) en (4-70), y sustituyendo  $x(t)$  por  $y(t)$  según (4-75), se obtiene la solución de  $x(t)$  en (4-117):

$$x(t) = x_p + (\zeta_2 e^{-at + 2x_p k \Delta})^{-1} \quad (4-117)$$

Donde  $x_p$  es la solución particular en términos de  $x(t)$ , que en este caso será  $x_1$  o  $x_2$  de las ecuaciones (4-65) y (4-66) respectivamente. Como se observa en (4-117),  $x(t)$  sigue dependiendo de la solución particular  $x_p$  y la constante de integración  $\zeta_2$ . Dado que  $x_p$  es una solución conocida, se despeja la constante  $\zeta_2$  usando *Wolfram Mathematica* y se obtiene la ecuación (4-118):

$$\zeta_2 = -\frac{e^{at-2K\Delta x_p}}{x_p - x(t)} \quad (4-118)$$

La ecuación (4-118) se evalúa en  $T$  para reemplazar  $x$  por la magnitud de población en el tiempo de aplicación  $T$ , ya que dicha magnitud corresponde a la condición inicial de la función durante el pulso de aplicación ( $T, T+\Delta$ ]. La constante  $\zeta_2$  en términos de la población en el tiempo de aplicación  $T+\Delta$  se presenta en la ecuación (4-119):

$$\zeta_{2(t=T+\Delta)} = -\frac{e^{a(T+\Delta)-2K\Delta x_p}}{x_p - x(T + \Delta)} \quad (4-119)$$

La constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_1$  (4-65) (solución particular con posibilidad de ser negativa), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en (4-120):

$$\zeta_{2(t=T+\Delta, x_p=x_1)} = \frac{2ke^{aT+\Delta\sqrt{a^2+4bk}}}{-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T + \Delta)} \quad (4-120)$$

Y la constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_2$  (4-66) (solución particular positiva), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en (4-121):

$$\zeta_{2(t=T+\Delta, x_p=x_2)} = -\frac{2ke^{aT-\Delta\sqrt{a^2+4bK}}}{a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T + \Delta)} \quad (4-121)$$

La solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_1$  (4-65) y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_1)}$  (4-120) se presentan en (4-122):

$$X_1(t) = x\left(t, x_p = x_1, \zeta_{2(x_p=x_1)}\right) = \frac{e^{-a(T+\Delta)}\left(a(-e^{at} + e^{a(T+\Delta)}) - e^{a(T+\Delta)}\sqrt{a^2 + 4bk} + e^{at}(\sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T + \Delta))\right)}{2k} \quad (4-122)$$

La solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_2$  (4-66) y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_2)}$  (4-121) se presentan en (4-123):

$$X_2(t) = x\left(t, x_p = x_2, \zeta_{2(x_p=x_2)}\right) = \frac{e^{-a(T+\Delta)}\left(\alpha(-e^{at} + e^{a(T+\Delta)}) + e^{a(T+\Delta)}\sqrt{a^2 + 4bk} - e^{at}(\sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T + \Delta))\right)}{2k} \quad (4-123)$$

#### 4.1.5.7 Simulación de la función población para población para la realimentación de estados – después del pulso de aplicación $T + \Delta$

Para la simulación de las funciones  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  obtenidas en (4-122) y (4-123) respectivamente, se requiere el valor de la función población en  $T+\Delta$ , que fue presentado en la ecuación (4-110).

$$X_1(T + \Delta) = X_2(T + \Delta) = 116.3344 \quad (4-110)$$

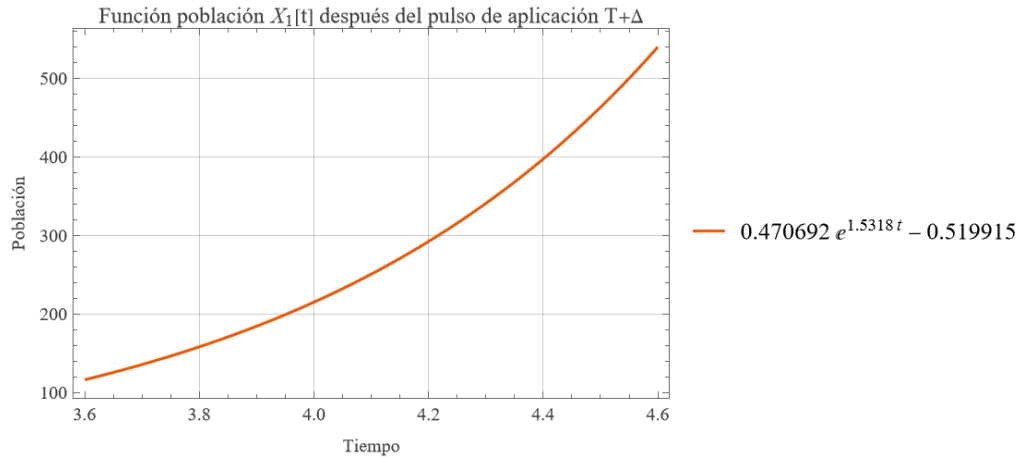
Es válido recordar que las funciones población  $X_1$  (4-106) y  $X_2$  (4-108) para el pulso de aplicación tienen el mismo comportamiento y se estabilizan asintóticamente en el mismo valor, como se demostró en las simulaciones de la Figura 8 y Figura 9 de la sección 4.1.5.5. *Simulación de la función población para población para la realimentación de estados – durante el pulso tiempo de aplicación  $(T, T + \Delta]$ .*

La función  $X_1(t)$  con valores numéricos se obtiene al reemplazar las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $x(T + \Delta)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-110) y (4-102) respectivamente en (4-122), obteniendo (4-124):

$$X_1(t) = -0.5199 + 0.4707e^{1.5318t} \quad (4-124)$$

La función  $X_1(t)$  de la ecuación (4-124) se simula en un rango posterior al pulso de aplicación ( $T + \Delta = 3.6, 4.6]$  y se obtiene la Figura 10:

**Figura 10.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $x_1$  después del pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga después de la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

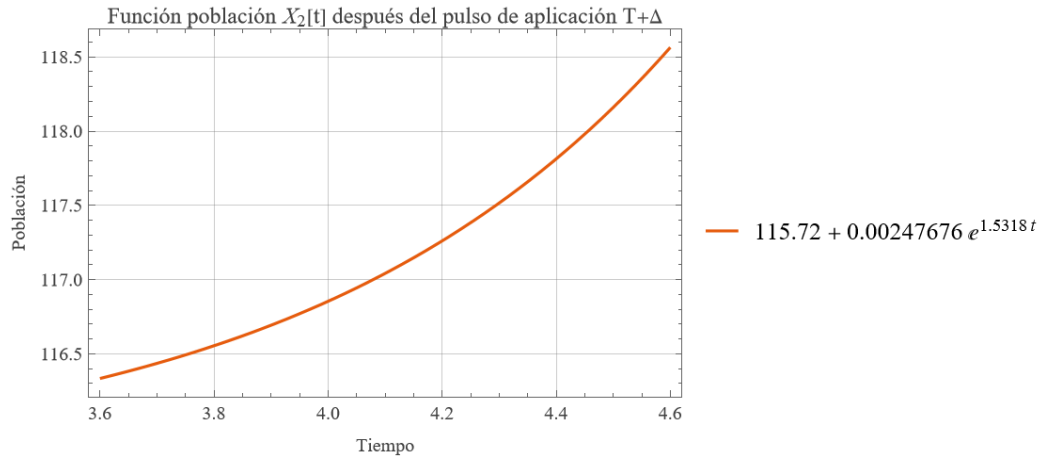
En la Figura 10 se puede observar que entre el rango de tiempo  $(3.6, 4.6]$  la población, según la función  $X_1(t)$  (4-124), aumenta a más de 500 individuos, representando un crecimiento de más de 400 individuos en una unidad de tiempo.

Ahora bien, para simular la función  $X_2(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $x(T + \Delta)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-110) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_2(t)$  (4-123), y se obtiene la función con valores numéricos de  $X_2(t)$  en (4-125):

$$X_2(t) = 115.7195 + 0.0025e^{1.5318t} \quad (4-125)$$

La función  $X_2(t)$  de la ecuación (4-125) se simula en un rango posterior al pulso de aplicación ( $T + \Delta = 3.6, 4.6]$  y se obtiene la Figura 11:

**Figura 11.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $x_2$  después del pulso de aplicación.

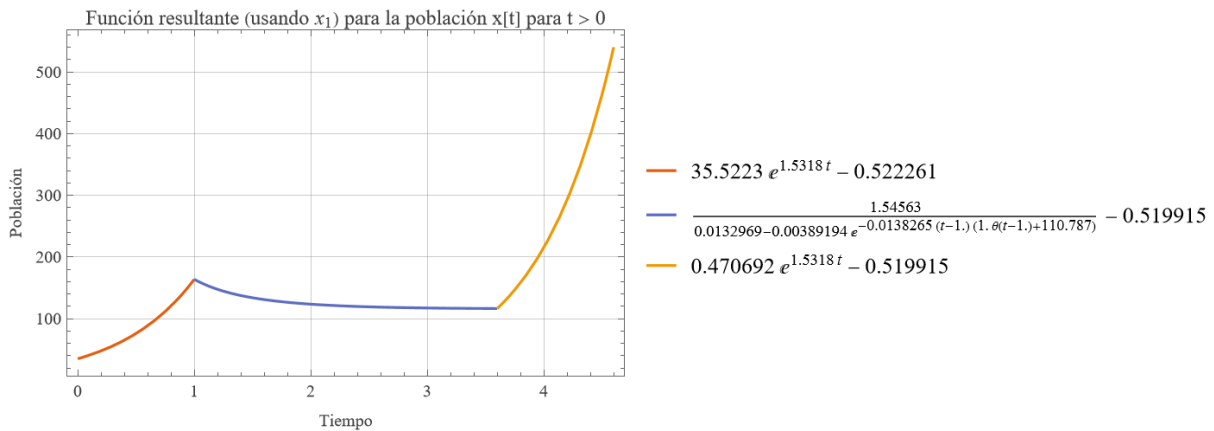


*Nota:* Gráfica de población de plaga después de la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

En la Figura 11 se puede observar que entre el rango de tiempo  $(3.6, 4.6]$  la población, según la función  $X_2(t)$  (4-124), aumenta a 118.5 individuos aproximadamente, representando un crecimiento de solo 2 individuos en una unidad de tiempo. Esta simulación sugiere que, usando la función  $X_2(t)$  (4-124), el pesticida tiene efectos en la población incluso después del pulso de aplicación.

A continuación se presentan las funciones por partes de población de plaga antes, durante y después del pulso de aplicación. La Figura 12 presenta la función por partes antes, durante y después del pulso, usando la solución particular  $x_1$ :

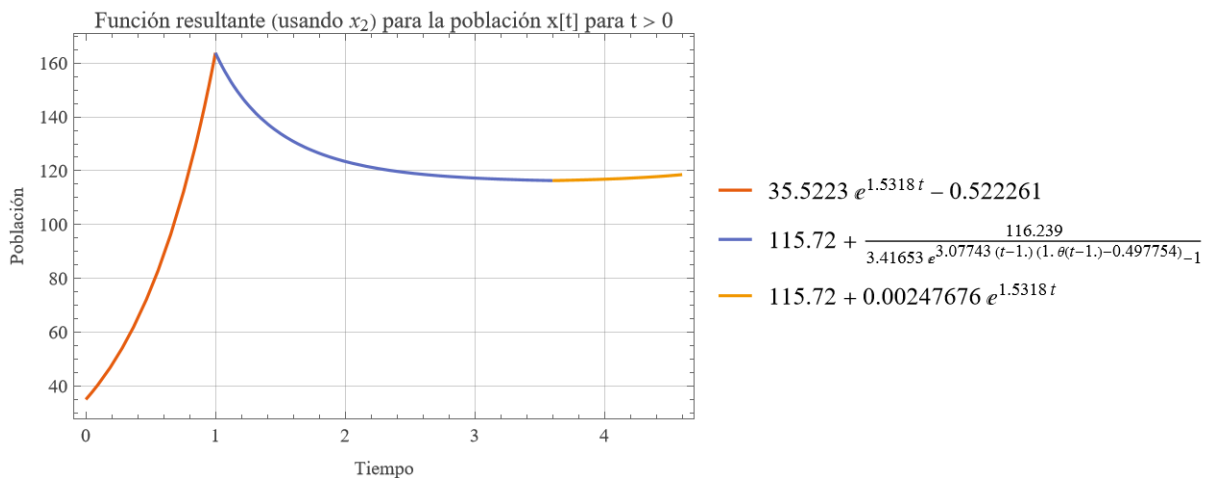
**Figura 12.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_1$  antes, durante y después del pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

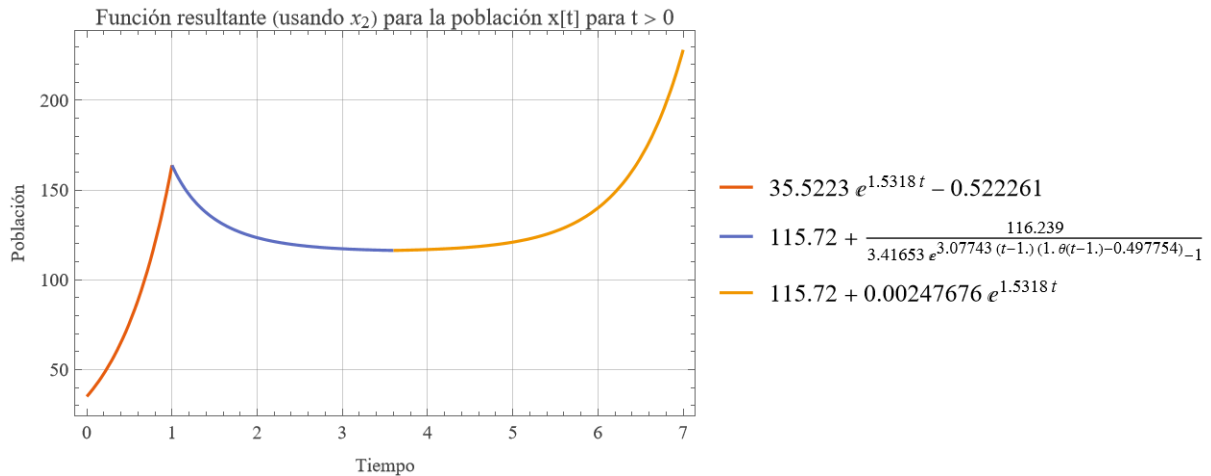
La Figura 13.a y Figura 13.b presentan la función por partes antes, durante y después del pulso, usando la solución particular  $x_2$  en los rangos  $[0, 4.6]$  y  $[0, 7]$  respectivamente:

**Figura 13.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_2$  antes, durante y después del pulso de aplicación en el rango: (a)  $t \in [0, 4.6]$  (b)  $t \in [0, 7]$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

(a)



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.  
(b)

En la Figura 13.a se observa el comportamiento de la función por partes hasta  $t = 4.6$ , alineado con la Figura 11; y en la Figura 13.b se expande la simulación hasta  $t = 7$ . La Figura 13.b exhibe el comportamiento predicho desde la Figura 11, ya que se presenta un crecimiento lento de la función población hasta  $t = 6$ , aproximadamente, donde la población aun no alcanza el pico de población en  $t = T = 1$ , para posteriormente retomar el crecimiento acelerado.

## 4.2 Modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida

### 4.2.1 Etapa 1: Análisis del modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida

Cómo se describió en el marco teórico, Chacón expande el modelo de dinámica poblacional de la ecuación (2-11) para considerar la aplicación periódica de pesticida a través de una sumatoria de impulsos, cómo fue presentado en la ecuación (2-12):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - \sum_{i=1}^m c \cdot x(t) \cdot \delta(t - T_i) \tag{2-12}$$

Donde  $x(t)$  es la función de población de plaga a lo largo del tiempo  $t$ , y  $\dot{x}(t)$  la derivada de la función población con respecto al tiempo. Los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación (2-12) corresponden a los mismos coeficientes de la ecuación (2-11). La descripción de las constantes se retoma de la sección 2.1.2.1. *Modelos propuestos por Chacón*, donde el coeficiente  $a$  representa la tasa de natalidad de la plaga en unidades adimensionales sobre unidades de tiempo. El coeficiente  $b$  representa la tasa de migración de plaga desde o hacia el cultivo en unidades de población de plaga sobre unidades de tiempo, donde las magnitudes negativas de  $b$  indican emigración y las magnitudes positivas indican inmigración. El coeficiente  $c$  representa la efectividad del pesticida que se está aplicando para reducir la cantidad de plaga, en unidades adimensionales sobre unidades de tiempo. El tiempo  $T_i$  corresponde a intervalos de tiempo  $T$  entre las aplicaciones  $i$  que van desde uno hasta la  $m$ -ésima aplicación realizada. En base a esto, la sumatoria de los  $i$  términos  $c \cdot x(t) \cdot \delta(t - T_i)$  representa la cantidad de individuos de la plaga que murieron tras cada aplicación  $i$  del pesticida de efectividad  $c$ .

De la misma forma que se planteó la señal de control como la efectividad del pesticida aplicado en el modelo de única aplicación (sección 4.1.1. *Etapa 1: Análisis del modelo de única aplicación del pesticida*), en el modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas se mantiene la señal de control como efectividad del pesticida en cada aplicación. En base a lo descrito anteriormente, se reemplaza la ecuación (4-126) en la ecuación (2-12) para obtener el segundo modelo ampliado, como se observa en la ecuación (4-127):

$$c \cdot \delta(t - T_i) \rightarrow u(t) \cdot p_i(t) \quad (4-126)$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - \sum_{i=1}^m x(t) \cdot u(t) \cdot p_i(t) \quad (4-127)$$

$$p_i(t) = \theta(t - T_i) - \theta(t - T_i - \Delta) \quad (4-128)$$

Donde  $u(t)$  representa la efectividad del pesticida como señal de control. El pulso  $p_i(t)$  representa el tiempo durante el cual el plaguicida tiene efecto en la población de plaga durante la aplicación  $i$  del pesticida. El  $i$  pulso  $p_i(t)$  inicia en el instante de aplicación  $T_i$  y finaliza en  $T_i + \Delta$ , lo que se representa con la resta de escalones unitarios  $\theta$  desplazados en la ecuación (4-128).

Para el desarrollo del controlador, se analiza la duración del pulso como el tiempo requerido para que la población llegue a la magnitud deseada, ya que dicho tiempo se puede estimar como el tiempo de asentamiento tras la aplicación del pesticida como señal de control. En teoría, este tiempo de asentamiento se debe calcular individualmente para cada pulso de aplicación  $i$ .

El análisis del modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas se puede generalizar a dos casos especiales:

- La primera aplicación ( $i = 1$ ): Se puede considerar que el modelo de única aplicación es un caso especial de la sumatoria cuando se considera que solo se ha realizado una aplicación, por lo que el análisis de la sumatoria se puede tomar a partir de la segunda aplicación ( $i \geq 2$ ).
- Desde la segunda hasta la última aplicación ( $2 \leq i \leq m$ ). Para este caso, se maneja la variable auxiliar  $j$  que expresa todas las aplicaciones distintas de la primera y la última aplicación, como se presenta en la ecuación (4-129):

$$j = i \in [2, m] \quad (4-129)$$

**4.2.2 Etapa 2: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida – durante los pulsos de aplicación entre  $(T_j, T_j + \Delta]$**

#### 4.2.2.1 Linealización – durante los pulsos de aplicación entre $(T_j, T_j + \Delta]$

Para linealizar, se retoman las ecuaciones (2-1), (4-16) y (4-17) de las matrices jacobianas presentadas en la sección 4.1.3.1. Linealización – durante el pulso de aplicación entre  $(T, T+\Delta]$ .

$$J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e} \quad (2-1)$$

$$A = J^* \quad (4-16)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e} \quad (4-17)$$

Las condiciones de equilibrio del modelo de sumatoria de aplicaciones se establecen las mismas condiciones del modelo de única aplicación, como fue presentado en la ecuación (4-18), con una modificación para para la población de equilibrio en (4-130) donde se denomina  $x_{r,j}$  como la población de referencia en cada pulso, la magnitud deseada en la población de plaga con la cual se define la población de equilibrio  $x_e$  para linealizar.

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 \quad (4-18)$$

$$x_e = x_{r,j} \quad (4-130)$$

$$x_{r,j} = \begin{Bmatrix} x_{r,2} \\ x_{r,3} \\ \vdots \\ x_{r,m} \end{Bmatrix} \quad (4-131)$$

La notación  $x_{r,j}$  se utilizó para indicar un vector de poblaciones de referencia  $x_r$  donde el valor del índice  $j$  indica la población de referencia  $x_{r,j}$  de ese pulso  $j$ . Es fundamental recalcar que si la población de referencia  $x_{r,j}$  es la misma para todos los pulsos de aplicación, el análisis de estabilidad se realizara una sola vez y corresponde al realizado en la sección 4.1.3.3. *Análisis de Estabilidad – durante el pulso de aplicación entre  $(T, T+\Delta]$* . Si cada pulso de aplicación tiene una población de referencia distinta, esto implica que la linealización y la estabilidad se deben recalcular en cada pulso de aplicación.

Para obtener la señal de entrada de equilibrio se reemplazan las ecuaciones (4-18) y (4-19) en (4-127) y se despeja la señal de entrada, como se presenta en la ecuación (4-20):

$$0 = a \cdot x_{r,j} + b - \sum_{j=2}^m x_{r,j} \cdot u_e \cdot p_j(t)$$

$$u_e = \frac{a \cdot x_{r,j} + b}{\sum_{j=2}^m x_{r,j} \cdot p_j(t)} \quad (4-132)$$

Es valido recordar que en (4-132) se está considerando el cambio de índice de la ecuación (4-129). Mientras se esté analizando dentro del rango de un pulso de aplicación  $j$  de pesticida (4-133), la expresión de la entrada (efectividad de pesticida) en equilibrio  $u_e$  de la ecuación (4-132) es equivalente a (4-134):

$$p_j(t) = \begin{cases} 1, & T_j < t \leq T_j + \Delta \\ 0, & E. O. C. \end{cases} \quad (4-133)$$

$$u_e = \frac{a \cdot x_{r,j} + b}{x_{r,j}} \quad (4-134)$$

Como se puede observar, la entrada en equilibrio de la ecuación (4-134) del modelo de sumatoria es análoga a la entrada en equilibrio de la ecuación (4-21) del modelo de única aplicación, lo que se presenta como una generalización para cada pulso de aplicación  $j$ . Aplicando entonces la linealización de la ecuación (4-16) al modelo de la ecuación (4-127), se obtienen la ecuación (4-135):

$$A = a - u_e \sum_{j=2}^m p_j(t) \quad (4-135)$$

Y reemplazando la efectividad en equilibrio de la ecuación (4-132) en (4-135) para obtener (4-136):

$$A = a - \sum_{j=2}^m \left[ \frac{a \cdot x_{r,j} + b}{\sum_{j=2}^m [x_{r,j} \cdot p_j(t)]} \right] \cdot p_j(t)$$

$$A = a - \frac{a \cdot \sum_{j=2}^m [x_{r,j} \cdot p_j(t)] + b \sum_{j=2}^m p_j(t)}{\sum_{j=2}^m x_{r,j} \cdot p_j(t)}$$

$$A = - \frac{b \sum_{j=2}^m p_j(t)}{\sum_{j=2}^m x_{r,j} \cdot p_j(t)}$$

$$A = - \frac{b}{x_{r,j}} \quad (4-136)$$

En (4-136) se vuelve a aplicar la consideración del pulso de aplicación  $j$  de pesticida de (4-133), y se observa que es análoga a la matriz  $A$  en (4-23) del modelo de única aplicación pero presentándose como una generalización para cada pulso  $j$ . Aplicando ahora la linealización de la ecuación (4-17) al modelo de la ecuación (4-127), se obtienen la ecuación (4-137):

$$B = \sum_{j=2}^m -x_{r,j} \cdot p_j(t) \quad (4-137)$$

La expresión de la matriz  $\mathbf{B}$  de la ecuación (4-138) es una generalización de la definición de la matriz  $\mathbf{B}$  en la primera aplicación (4-24), para cada pulso  $j$  mientras se esté analizando el pulso de aplicación de pesticida, acorde a (4-133):

$$\mathbf{B} = -x_{r,j} \quad (4-138)$$

A partir de la linealización de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  para el modelo de sumatoria de aplicaciones de la ecuación (4-127) se puede construir la representación en espacio de estado.

#### 4.2.2.2 Representación en espacio de estado – durante los pulsos de aplicación entre $(T_j, T_j + \Delta]$

Para desarrollar la representación en espacio de estado del modelo linealizado de única aplicación de la ecuación (4-127), se deben definir las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  de la ecuación de salida. Considerando que la población de estado es la variable que se desea monitorear como variable de salida, la matriz  $\mathbf{C}$  es igual a 1. Así mismo, dado que la señal de control está relacionada con la derivada de la variable de estado y no con la variable de estado directamente, según la ecuación (4-127), la matriz  $\mathbf{D}$  es igual a cero. En base a esto, se pueden conservar las definiciones de las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  presentadas en las ecuaciones (4-26) y (4-27) respectivamente.

Con las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  de las ecuaciones (4-136), (4-138), (4-26) y (4-27) respectivamente, se construye la representación en espacio de estado del modelo linealizado durante los pulsos de aplicación, y que coincide con la representación en espacio de estado del modelo de única aplicación presentado en las ecuaciones (4-139) y (4-140):

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{b}{x_{r,j}} \cdot x(t) - x_{r,j} \cdot u(t) \quad (4-139)$$

$$y(t) = x(t) \quad (4-140)$$

La ecuación de estados (4-139) del modelo linealizado de sumatoria de aplicaciones durante los pulsos de aplicación es analizado nuevamente al momento de aplicar la estrategia de control para la reasignación de polos y determinar la constante del controlador.

#### 4.2.2.3 Análisis de estabilidad – durante los pulsos de aplicación entre $(T_j, T_j + \Delta]$

El análisis de estabilidad durante los pulsos de aplicación en el modelo de sumatoria de aplicaciones es similar al análisis realizado para el modelo de única aplicación pues, como se presentó en el desarrollo de la representación de espacio de estado, la matriz  $A$  del modelo de sumatoria es una generalización para cada pulso  $j$  de la matriz  $A$  del modelo de única aplicación. Con el resultado de la ecuación (4-136) se pueden determinar los autovalores del sistema linealizado al reemplazar en la ecuación (4-10):

$$\begin{array}{l} \text{Si} \\ \text{Entonces} \end{array} \quad \begin{array}{l} \det|\lambda I - A^*| = 0 \\ A^* = A \\ \lambda = -\frac{b}{x_{r,j}} \end{array} \quad (4-141)$$

Recordando que  $A^*$  es la matriz de coeficientes que multiplica al vector de variables de estado  $\mathbf{x}(t)$ , que corresponde a la matriz  $A$  obtenida en la ecuación (4-136). Los autovalores del modelo linealizado de aplicación única del pesticida durante el pulso de aplicación obtenidos en la ecuación (4-141) indican que el modelo es estable siempre y cuando el coeficiente  $b$  sea positivo.

Es necesario recalcar que para el presente trabajo de grado se considera que:

- Si  $b > 0$ , se presenta mayor inmigración que emigración en el sistema.
- Si  $b = 0$ , no se presenta inmigración ni emigración en el sistema.
- Si  $b < 0$ , se presenta mayor emigración que inmigración en el sistema.

Acorde a la ecuación (4-141), se requiere que se presente mayor inmigración que emigración en el sistema para que el sistema sea asintóticamente estable, o que no se presente

ningún tipo de migración en el sistema para que sea marginalmente estable. Así mismo, se puede observar en la ecuación (4-141) que si la magnitud de población de referencia  $x_{r,j}$  para cada pulso  $j$  es mucho mayor a la magnitud del coeficiente de migración  $b$ , los autovalores en el pulso  $j$  tenderán a cero y el sistema tenderá a ser marginalmente estable.

#### 4.2.2.4 Análisis de observabilidad – durante los pulsos de aplicación entre

$$(T_j, T_j + \Delta]$$

Para el análisis de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $V$  presentada en la ecuación (2-4) y se comprueba que el rango de  $V$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-5).

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$\text{Rank}(V) = n \quad (2-5)$$

En el caso del modelo de sumatoria de aplicaciones durante los pulsos de aplicación  $j$ , ecuación (4-127), el orden  $n$  del sistema es 1, por lo que solo se requiere reemplazar la matriz  $C$  de la ecuación (4-26) en (2-4) para obtener la matriz de observabilidad, que es equivalente a la presentada en la ecuación (4-31):

$$V = [1] \quad (4-31)$$

$$\text{Rank}(V) = 1 = n \quad (4-32)$$

El rango de la matriz  $V$  es 1 dado que solo tiene un elemento, y por ello coincide con el orden  $n$  del sistema que también equivale a 1, como se observa en la ecuación (4-32), por lo que se concluye que el modelo de la ecuación (4-127) es completamente observable.

#### 4.2.2.5 Análisis de controlabilidad – durante los pulsos de aplicación entre

$$(T_j, T_j + \Delta]$$

Para el análisis de controlabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $S$  presentada en la ecuación (2-6) y se comprueba que el rango de  $S$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-7):

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2-6)$$

$$\text{Rank}(S) = n \quad (2-7)$$

En el caso del modelo de sumatoria de aplicaciones durante los pulsos de aplicación  $j$ , ecuación (4-127), el orden  $n$  del sistema es 1, por lo que solo se requiere reemplazar la matriz  $B$  de la ecuación (4-138) en (2-6) para obtener la matriz de controlabilidad que se presenta en la ecuación (4-142):

$$S = [-x_{r,j}] \quad (4-142)$$

Si  $x_{r,j} \neq 0$ ;

$$\text{Rank}(S) = 1 = n \quad (4-143)$$

El rango de la matriz  $S$  es 1 mientras la magnitud de la población de referencia  $x_{r,j}$  en cada pulso  $j$  sea diferente de cero pues esta variable es el único elemento de la matriz de controlabilidad  $S$ , como se presenta en la ecuación (4-143), por lo que se concluye que el modelo de la ecuación (4-127) es completamente observable.

### 4.2.3 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados para el modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida

El diseño del controlador por realimentación de estados se realiza a partir de la ecuación (4-127) y de la representación de espacio de estado del modelo linealizado que se presentó en la sección 4.2.2. *Etapa 2.1: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida – durante los pulsos de aplicación entre  $(T_j, T_j + \Delta]$* . Como se mencionó durante la linealización del modelo de la ecuación (4-127), La linealización y la representación en espacio de estado se aplicaron para encontrar la ganancia del controlador por realimentación de estados. Para la señal de control  $\mathbf{u}(t)$  conserva la definición propuesta en la ecuación (4-35), donde se presenta una realimentación positiva de los estados ya que en la ecuación (4-127) la sumatoria de productos  $-x(t) \cdot u(t) \cdot p_j(t)$  ya representa una realimentación negativa.

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - \sum_{i=1}^m x(t) \cdot u(t) \cdot p_i(t) \quad (4-127)$$

$$\mathbf{u}(t) = k \mathbf{x}(t) \quad (4-35)$$

Donde  $\mathbf{u}(t)$  tiene unidades de  $[1/\text{tiempo}]$  y  $k$  tiene unidades de  $[\text{tiempo} * \text{población}]^{-1}$ . Posteriormente se retoma la ecuación (4-38) para hallar los autovalores al aplicar la realimentación de estado propuesta en (4-35).

$$\det|\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}k)| = 0 \quad (4-38)$$

Y reemplazando la definición de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de las ecuaciones (4-136) y (4-138) respectivamente en (4-38) se obtiene (4-144):

$$\lambda + \frac{b}{x_{r,j}} + x_{r,j} \cdot k = 0 \quad (4-144)$$

$$k = -\frac{\lambda \cdot x_{rj} + b}{x_{rj}^2}$$

La ecuación (4-144) permite hallar fácilmente la magnitud de  $k$  a partir de la magnitud de población de referencia que se desea en el sistema, estableciendo así la ganancia del control por realimentación de estados para cada pulso  $j$  del modelo de sumatoria de aplicaciones de la ecuación (4-127). Sin embargo, al igual que en el modelo de única aplicación, es fundamental recalcar que la señal  $u(t)$  en la ecuación (4-35) representa la efectividad del pesticida para reducir la población de plaga, por lo que en este contexto, se debe tomar las siguientes consideraciones para cuando  $u(t)$  sea menor, igual o mayor a cero:

Si

$$u(t) < 0$$

Entonces

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b + \sum_{i=1}^m x(t) \cdot u(t) \cdot p_i(t) \quad (4-145)$$

Si

$$u(t) = 0$$

Entonces

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \quad (4-146)$$

Si

$$u(t) > 0$$

Entonces

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - \sum_{i=1}^m x(t) \cdot u(t) \cdot p_i(t) \quad (4-147)$$

En el modelo de sumatoria de aplicaciones, de manera análoga al modelo de única aplicación, cuando la señal  $u(t)$  es menor a cero, como se presenta en la ecuación (4-145), los efectos de las aplicaciones de pesticida promueven el crecimiento de la población de plaga pues el producto  $x(t) \cdot u(t)$  es positivo. Si  $u(t)$  es igual a cero, como se presenta en la ecuación (4-146), el pesticida no tiene ningún efecto en la población de plaga. Y si  $u(t)$  es mayor a cero, como se presenta en la ecuación (4-147), los efectos de las aplicaciones de pesticida promueven el

decrecimiento de la población de plaga pues el producto  $x(t) \cdot u(t)$  es negativo. A partir de este análisis se puede concluir que el objetivo del controlador es que la efectividad siempre sea mayor a cero, lo cual implica que la ganancia del controlador también debe ser mayor a cero para que el pesticida reduzca la población de plaga. Para hallar la magnitud de los autovalores que satisfacen la condición de ganancia  $k$  debe ser mayor a cero, se debe considerar autovalores que hacen el sistema asintóticamente estable y marginalmente estable, recordando que los autovalores del modelo de Chacón son únicamente reales (parte imaginaria  $\Im$  es igual a cero).

Si se desea un sistema asintóticamente estable, la parte real  $\Re$  del autovalor debe ser negativa, como fue presentado en la ecuación (4-43). Y si la ganancia  $k$  debe ser mayor a cero entonces la ecuación (4-144) debe ser mayor a cero, y al reemplazar (4-43) en (4-144), se despejan los autovalores que satisfacen dicha condición en (4-148):

$$\lambda = \Re|\lambda| < 0 \quad (4-43)$$

y  $\Im|\lambda| = 0$   
Entonces

$$\lambda = -|\lambda|$$

$$k = -\frac{-|\lambda| \cdot x_{r,j} + b}{x_{r,j}^2} > 0$$

$$|\lambda| \cdot x_{r,j} - b > 0$$

$$|\lambda| > \frac{b}{x_{r,j}} \quad (4-148)$$

Es valido recordar que, de forma general, la ecuación (4-148) se debe evaluar para el valor de población de referencia  $x_{r,j}$  deseado en cada pulso de aplicación  $j$ . Ahora bien, si el sistema fuese marginalmente estable sus autovalores tendrían su parte real  $\Re$  igual a cero, como fue presentado en la ecuación (4-45). La condición para los autovalores se obtiene en la ecuación (4-149):

$$\lambda = \Re|\lambda| = 0 \quad (4-45)$$

y  $\Im|\lambda| = 0$   
Entonces

$$\lambda = 0$$

$$k = -\frac{\mathbf{b}}{x_r^2} > 0$$

$$\frac{\mathbf{b}}{x_r^2} < 0 \quad (4-149)$$

Para que la inecuación (4-149) se cumpla,  $\mathbf{b}$  debe ser negativo. Sin embargo, acorde a lo expuesto en la sección 4.2.2.3. *Análisis de Estabilidad – durante los pulsos de aplicación entre*  $(T_j, T_j + \Delta]$ , para que el modelo linealizado durante el pulso de aplicación sea estable se necesita que  $\mathbf{b}$  sea positivo, es decir, que se presente mayor inmigración que emigración en el sistema. A partir de esto se concluye que la condición válida para que la ganancia  $k$  sea mayor a cero es que los autovalores cumplan con la inecuación (4-148).

#### **4.2.4 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación para el modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida**

Acorde a lo expuesto en la sección 4.2.1. *Etapa 1: Análisis del modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas del pesticida*, el modelo de sumatoria de aplicaciones es una generalización del modelo de única aplicación, por lo que las soluciones analíticas y simulaciones presentadas en la sección 4.1.5. *Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación para el modelo de única aplicación del pesticida* se usan como punto de partida para las soluciones analíticas y simulaciones del modelo de sumatoria de aplicaciones. Considerando que las simulaciones del modelo de única aplicación son el caso particular de la primera aplicación  $i = 1$ , las soluciones particulares y simulaciones que se presentan en esta sección corresponden a las aplicaciones  $2 \leq j \leq m$ .

#### 4.2.4.1 Solución analítica de la función población – durante los pulsos de aplicación entre $(T_j, T_j + \Delta]$ y después de $T_j + \Delta$

La solución analítica de la función población de plaga durante los pulsos de aplicación entre  $(T_j, T_j + \Delta]$  se obtiene al integrar la ecuación (4-150) con respecto al tiempo, aplicando el cambio de variable de  $i$  a  $j$  de la ecuación (4-129):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - \sum_{j=2}^m x(t) \cdot u(t) \cdot p_j(t) \quad (4-150)$$

Reemplazando la estrategia de control por realimentación de estados de la ecuación (4-35) en (4-150) se obtiene (4-151), una ED de Riccati:

$$\mathbf{u}(t) = k \mathbf{x}(t) \quad (4-35)$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b - k \cdot x(t)^2 \cdot \sum_{j=2}^m p_j(t) \quad (4-151)$$

Para solucionar la ED de Riccati se requieren primero las soluciones particulares que hacen que la ecuación (4-151) equivalga a cero, como se presenta en (4-152):

$$\begin{aligned} \text{Si } \dot{x}(t) &= 0 \\ \left[ -k \cdot \sum_{j=2}^m p_j(t) \right] \cdot x(t)^2 + ax(t) + b &= 0 \end{aligned} \quad (4-152)$$

Las soluciones particulares de (4-152) se obtienen resolviendo la fórmula cuadrática, y considerando que la sumatoria de pulsos  $p_j(t)$  equivale a 1 entre  $T_j$  y  $T_j + \Delta$  (4-133), sus resultados se presentan en (4-153) y (4-154):

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & k \neq 0 \\ \text{Entonces} & \end{array}$$

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4bk[\sum_{j=2}^m p_j(t)]}}{2k[\sum_{j=2}^m p_j(t)]}$$

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4bk}}{2k} \quad (4-153)$$

Si

$$k \neq 0$$

Entonces

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bk[\sum_{j=2}^m p_j(t)]}}{2k[\sum_{j=2}^m p_j(t)]}$$

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bk}}{2k} \quad (4-154)$$

Como se puede observar en (4-153) y (4-154), las soluciones particulares  $x_1$  y  $x_2$  del modelo de sumatoria de aplicaciones coinciden con las soluciones particulares encontradas en el modelo de única aplicación.

Ahora bien, para solucionar la ED de Riccati a partir de la generalización de una solución particular se utiliza la ecuación (4-70). Para ello se modifica el reemplazo de la variable  $P_1$  cómo se presenta en (4-155):

$$P_1 = -k \cdot \sum_{j=2}^m p_j(t) \quad (4-155)$$

$$P_2 = a \quad (4-73)$$

$$P_3 = b \quad (4-74)$$

$$y = y(t) = x(t) \quad (4-75)$$

$$\frac{d}{dt}y = \frac{d}{dt}x(t) \quad (4-76)$$

Las equivalencias de las ecuaciones (4-73), (4-74), (4-75) y (4-76) se conservan para mantener la ecuación que se obtuvo en (4-77):

$$\frac{dy}{dt} = P_1 y^2 + P_2 y + P_3 \quad (4-77)$$

La solución analítica de la ecuación (4-77) que se desarrolló desde (4-78) hasta (4-86) (sección 4.1.5.4. *Solución analítica de la función población para la realimentación de estados – durante el pulso tiempo de aplicación* ( $T, T + \Delta$ )) se conserva. El desarrollo cambia al momento de realizar la integral de  $P_1$  con la definición de (4-155) cómo se observa en (4-156):

$$\int P_1 dt = -k \int \left[ \sum_{j=2}^m p_j(t) \right] dt \quad (4-156)$$

La definición de los pulsos de aplicación  $p_j(t)$  de la ecuación (4-128) indica que esta función se compone de dos escalones unitarios, uno positivo que inicia en el tiempo de aplicación  $T_j$ , y uno negativo que inicia en  $T_j + \Delta$ . En este caso, se puede generalizar la solución de la integral para todo  $j$  diferente de  $m$ , la última aplicación, como se observa en (4-157):

$$\begin{aligned} \int P_1 dt &= -k \int \left[ \sum_{j=2}^m p_j(t) \right] dt \\ &= -k \int \left[ \sum_{j=2}^m \theta(t - T_j) - \theta(t - T_j - \Delta) \right] dt \\ \int P_1 dt &= -k[\Delta \cdot (j - 1) + (t - T_j) \cdot \theta(t - T_j)] \end{aligned} \quad (4-157)$$

En la ecuación (4-157) se considera  $(j - 1)$  veces la duración del pulso ya que, para cada pulso  $j$ , habrán  $(j - 1)$  pulsos iguales a cero por la diferencia de escalones unitarios y se mantendrá el escalón unitario positivo del pulso  $j$  que se encuentra activo.

Ahora bien, si la ecuación (4-156) se analiza después del pulso de aplicación  $T_j + \Delta$ , la generalización de la integral es (4-158):

$$\int P_1 dt = -k\Delta j \quad (4-158)$$

En (4-158) se puede observar como el pulso  $j$  se vuelve cero pues el escalón unitario negativo finaliza el pulso en  $T_j + \Delta$ , por lo que la integral de  $P_1$  equivale a  $j$  veces el producto de la duración  $\Delta$  del pulso y la ganancia  $k$  del controlador.

Las ecuaciones (4-157) y (4-158) permiten hallar fácilmente la definición de la integral de  $P_1$  para cualquier pulso de aplicación  $j$ , siendo un caso particular cuando se llegue a la última aplicación  $m$ , donde el índice  $j$  es igual a  $m$ .

Reemplazando la definición de la integral de  $P_1$  durante los  $j$  pulsos de aplicación (4-157) en (4-86) se obtiene (4-159), la solución analítica de la función población durante los pulsos  $j$ :

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t - 2y_p \int P_1 dt} - P_1 e^{-P_2 t - 2y_p \int P_1 dt} \int e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} dt \quad (4-86)$$

$$\text{Si } \theta_{T_j} = \theta(t - T_j)$$

Entonces

$$\begin{aligned} v &= \zeta_2 e^{-P_2 t - 2y_p \left[ -k[\Delta \cdot (j-1) + (t-T_j)\theta_{T_j}] \right]} \\ &\quad - \left[ -k \sum_{j=2}^m p_j(t) \right] e^{-P_2 t - 2y_p \left[ -k[\Delta \cdot (j-1) + (t-T_j)\theta_{T_j}] \right]} \int e^{P_2 t + 2y_p \left[ -k[\Delta \cdot (j-1) + (t-T_j)\theta_{T_j}] \right]} dt \\ v &= \zeta_2 e^{-P_2 t - 2y_p \left[ -k[\Delta \cdot (j-1) + (t-T_j)\theta_{T_j}] \right]} - \frac{[-k \cdot \sum_{j=2}^m p_j(t)]}{P_2 - 2y_p k} \\ v &= \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k [\Delta \cdot (j-1) + (t-T_j)\theta_{T_j}]} + \frac{[k \cdot \sum_{j=2}^m p_j(t)]}{P_2 - 2y_p k} \end{aligned} \quad (4-159)$$

La expresión (4-159) es equivalente a (4-160) tras aplicar la condición de la sumatoria de  $p_j$  (4-133):

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k [\Delta \cdot (j-1) + (t-T_j)\theta_{T_j}]} + \frac{k}{P_2 - 2y_p k} \quad (4-160)$$

Reemplazando (4-160) en (4-70), y sustituyendo  $x(t)$  por  $y(t)$  según (4-75), se obtiene la solución de  $x(t)$  en (4-161):

$$x(t) = x_p + \left( \zeta_2 e^{-at + 2x_p k [\Delta \cdot (j-1) + (t-T_j)\theta_{T_j}]} + \frac{k}{a - 2x_p k} \right)^{-1} \quad (4-161)$$

Donde  $x_p$  es la solución particular en términos de  $x(t)$ , que en este caso será  $x_1$  o  $x_2$  de las ecuaciones (4-153) y (4-154) respectivamente. Como se observa en (4-161),  $x(t)$  sigue dependiendo de la solución particular  $x_p$  y la constante de integración  $\zeta_2$ . Dado que  $x_p$  es una solución conocida, se despeja la constante  $\zeta_2$  usando *Wolfram Mathematica* y se obtiene la ecuación (4-162):

$$\text{Si } \theta_{T_j} = \theta(t - T_j)$$

Entonces

$$\zeta_2 = \frac{e^{at - 2kx_p((j-1)\Delta + (t-T_j)\theta_{T_j})}(-a + k \cdot x(t) + k \cdot x_p)}{(x(t) - x_p)(-a + 2k \cdot x_p)} \quad (4-162)$$

La ecuación (4-162) se evalúa en  $T_j$  para reemplazar  $x$  por la magnitud de población en el tiempo de aplicación  $T_j$ , ya que dicha magnitud corresponde a la condición inicial de la función durante cada pulso de aplicación  $j$  entre  $(T_j, T_j + \Delta]$ . La constante  $\zeta_2$  en términos de la población en el tiempo de aplicación  $T_j$  se presenta en la ecuación (4-163):

$$\zeta_{2(t=T_j)} = \frac{e^{at - 2kx_p((j-1)\Delta)}(-a + k \cdot x(T_j) + k \cdot x_p)}{(x(T_j) - x_p)(-a + 2k \cdot x_p)} \quad (4-163)$$

La constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_1$  **(4-153)** (solución particular con posibilidad de ser negativa), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en **(4-164)**:

$$\begin{aligned} \zeta_{2(t=T_j, x_p=x_1)} &= \frac{(a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T_j))k \cdot e^{aT_j + \Delta(j-1)(-a + \sqrt{a^2 + 4bk})}}{\sqrt{a^2 + 4bk} \cdot (-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T_j))} \end{aligned} \quad (4-164)$$

Y la constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_2$  **(4-154)** (solución particular positiva), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en **(4-165)**:

$$\zeta_{2(t=T_j, x_p=x_2)} = -\frac{(-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T_j))k \cdot e^{aT_j - \Delta(j-1)(a + \sqrt{a^2 + 4bk})}}{\sqrt{a^2 + 4bk} \cdot (a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T_j))} \quad (4-165)$$

La solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_1$  **(4-153)** y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_1)}$  **(4-164)** se presentan en **(4-166)**:

$$\begin{aligned} X_1(t) = x(t, x_p = x_1, \zeta_{2(x_p=x_1)}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{a}{k} + \sqrt{a^2 + 4bk} \cdot \left( -\frac{1}{k} + \frac{2}{k + \frac{k(a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T_j))e^{(t-T_j)(-a + (a - \sqrt{a^2 + 4bk})\theta_{T_j})}}{-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T_j)}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4-166)$$

Y la solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_2$  **(4-154)** y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_2)}$  **(4-165)** se presentan en **(4-167)**:

$$\begin{aligned} X_2(t) = x(t, x_p = x_2, \zeta_{2(x_p=x_2)}) &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bk}}{2k} \cdot \left( 1 + \frac{2}{-1 + \frac{(a - \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T_j))e^{(t-T_j)(-a + (a + \sqrt{a^2 + 4bk})\theta_{T_j})}}{a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T_j)}} \right) \end{aligned} \quad (4-167)$$

Es fundamental resaltar que tanto en la función  $X_1$  **(4-166)** como  $X_2$  **(4-167)** se pierde la dependencia del término  $(j - 1)\Delta$  que indicaba la cantidad de pulsos de aplicación finalizados

antes del pulso actual  $j$ . Esto indica que las funciones de población con presencia del control por realimentación de estados se comportan de la misma forma, sin presentar una acumulación por las aplicaciones anteriores, y dependiendo exclusivamente de las constantes definidas inicialmente en el modelo y de las condiciones iniciales de la función para cada pulso, como la magnitud de población con la que finaliza la función anterior.

Ahora bien, en cuanto a las funciones de población después de la finalización del pulso  $j$  en  $T_j + \Delta$  y antes del inicio del pulso  $j + 1$  en  $T_{j+1}$ , se retoma la generalización de la integral de  $P_1$  de la ecuación (4-158). Reemplazando (4-158) en (4-86) para obtener, la solución analítica de la función población después de los pulsos  $j$  y antes de los pulsos  $j + 1$ :

$$\int P_1 dt = -k\Delta j \quad (4-158)$$

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t - 2y_p \int P_1 dt} - P_1 e^{-P_2 t - 2y_p \int P_1 dt} \int e^{P_2 t + 2y_p \int P_1 dt} dt \quad (4-86)$$

Si  $\theta_{T_j} = \theta(t - T_j)$

Entonces

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t - 2y_p [-k\Delta j]} - \left[ -k \sum_{j=2}^m p_j(t) \right] e^{-P_2 t - 2y_p [-k\Delta j]} \int e^{P_2 t + 2y_p [-k\Delta j]} dt$$

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k \Delta j} - \frac{[-k \cdot \sum_{j=2}^m p_j(t)]}{P_2 - 2y_p k}$$

$$v = \zeta_2 e^{-P_2 t + 2y_p k \Delta j} \quad (4-168)$$

En (4-168) se aplicó la condición (4-133) donde la sumatoria de  $p_j(t)$  es igual a cero si se analiza fuera de los pulsos de aplicación  $j$ . Reemplazando (4-168) en (4-70), y sustituyendo  $x(t)$  por  $y(t)$  según (4-75), se obtiene la solución de  $x(t)$  en (4-169):

$$x(t) = x_p + (\zeta_2 e^{-at + 2y_p k \Delta j})^{-1} \quad (4-169)$$

Donde  $x_p$  es la solución particular en términos de  $x(t)$ , que en este caso será  $x_1$  o  $x_2$  de las ecuaciones (4-153) y (4-154) respectivamente. Como se observa en (4-169),  $x(t)$  sigue dependiendo de la solución particular  $x_p$  y la constante de integración  $\zeta_2$ . Dado que  $x_p$  es una solución conocida, se despeja la constante  $\zeta_2$  usando *Wolfram Mathematica* y se obtiene la ecuación (4-170):

$$\zeta_2 = -\frac{e^{at-2jk\Delta x_p}}{-x(t) + x_p} \quad (4-170)$$

La ecuación (4-170) se evalúa en  $T_j + \Delta$  para reemplazar  $x$  por la magnitud de población después del tiempo de aplicación  $T_j + \Delta$ , ya que dicha magnitud corresponde a la condición inicial de la función después de cada pulso de aplicación  $j$  entre  $(T_j + \Delta, T_{j+1}]$ . La constante  $\zeta_2$  en términos de la población en el tiempo de aplicación  $T_j + \Delta$  se presenta en la ecuación (4-171):

$$\zeta_{2(t=T_j+\Delta)} = -\frac{e^{a(T_j+\Delta)-2jk\Delta x_p}}{-x(T_j + \Delta) + x_p} \quad (4-171)$$

La constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_1$  (4-153) (solución particular con posibilidad de ser negativa), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en (4-172):

$$\zeta_{2(t=T_j+\Delta, x_p=x_1)} = \frac{2ke^{a(T_j+\Delta)-aj\Delta+j\Delta\sqrt{a^2+4bk}}}{-a + \sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T_j + \Delta)} \quad (4-172)$$

Y la constante  $\zeta_2$  en función de la solución particular  $x_2$  (4-154) (solución particular positiva), se obtuvo usando *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en (4-173):

$$\zeta_{2(t=T_j+\Delta, x_p=x_2)} = -\frac{2ke^{a(T_j+\Delta)-j\Delta(a+\sqrt{a^2+4bk})}}{a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T_j + \Delta)} \quad (4-173)$$

La solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_1$  (4-153) y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_1)}$  (4-172) se presenta en (4-174):

$$X_1(t) = x\left(t, x_p = x_1, \zeta_{2(x_p=x_1)}\right) = \frac{e^{-a(T_j+\Delta)}\left(a(-e^{at} + e^{a(T_j+\Delta)}) - e^{a(T_j+\Delta)}\sqrt{a^2 + 4bk} + e^{at}(\sqrt{a^2 + 4bk} + 2k \cdot x(T_j + \Delta))\right)}{2k} \quad (4-174)$$

Y la solución de  $x(t)$  a partir de la solución particular  $x_2$  (4-154) y la constante  $\zeta_{2(x_p=x_2)}$  (4-173) se presenta en (4-175):

$$X_2(t) = x\left(t, x_p = x_2, \zeta_{2(x_p=x_2)}\right) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bk} - e^{a(t-T_j-\Delta)}(a + \sqrt{a^2 + 4bk} - 2k \cdot x(T_j + \Delta))}{2k} \quad (4-175)$$

En las definiciones de  $X_1$  (4-174) y  $X_2$  (4-175) después del pulso de aplicación  $j$  y antes del pulso  $j + 1$ , al igual que en las funciones  $X_1$  (4-166) y  $X_2$  (4-167), se pierde la dependencia del término  $(j - 1)\Delta$  que indicaba la cantidad de pulsos de aplicación finalizados antes del pulso actual  $j$ . Esto implica que las funciones de población después de la acción directa del control por realimentación de estados se comportan de la misma forma, sin presentar una acumulación por las aplicaciones anteriores, y dependiendo exclusivamente de las constantes definidas inicialmente en el modelo y de las condiciones iniciales de la función para cada pulso, como la magnitud de población con la que finaliza la función anterior.

#### 4.2.4.2 Simulación de la función población – durante los pulsos de aplicación entre

$(T_j, T_j + \Delta]$  y después de  $T_j + \Delta$

Para la simulación de las funciones  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  de población durante el pulso de aplicación y después de los pulsos de aplicación se debe establecer la población de referencia para

cada pulso  $j$ , como se describió en la sección 4.2.2.1. *Linealización – durante los pulsos de aplicación entre  $(T_j, T_j + \Delta]$* . Si la población de referencia es la misma para cada pulso, el análisis de estabilidad, observabilidad, controlabilidad y representación en espacio de estado propuesta para el modelo de única aplicación es válido para cada pulso de aplicación en el modelo de sumatoria de aplicaciones. Si se establecen poblaciones de referencia diferentes para cada pulso, el análisis realizado para la representación en espacio de estado se debe repetir para cada pulso  $j$ .

Para simplificar el proceso de simulación se definió la misma población de referencia para todos los pulsos de aplicación simulados, de manera que la población de referencia  $x_r$  definida en (4-99), a partir de la población antes de la primera aplicación (4-98), es la población deseada para todos los pulsos. Si la magnitud de  $x_r$  se mantiene, los autovalores  $\lambda$  deseados definidos en (4-100), y la ganancia  $k$  definida en (4-102) se conservan para la simulación de la sumatoria de aplicaciones. Es válido recordar entonces que la ganancia  $k$  definida en (4-102) cumple con la condición establecida en (4-44), verificada numéricamente en (4-101), que establece la magnitud del autovalor debe ser mayor a una magnitud mínima para que el control por realimentación de estados reduzca la población de plaga, pues de lo contrario promoverá el crecimiento de la plaga. Para los autovalores definidos en (4-100) el tiempo de asentamiento esperado es el descrito en (4-104).

$$x(T) = x(1) = 163.821 \quad (4-98)$$

$$x_r = 0.7x(T) = 114.675 \quad (4-99)$$

$$\lambda = -|\lambda| = -a = -1.5318 \quad (4-100)$$

$$t_s = 2.6113 \quad (4-104)$$

Con respecto a la periodicidad de las aplicaciones, se estableció la ecuación (4-176), dejando una unidad de tiempo entre la finalización del pulso  $j$  y el inicio del pulso  $j + 1$ . Esta decisión se toma con el fin de mantener la misma periodicidad para ambas funciones y en base al

comportamiento de la función  $X_1(t)$  (4-124), observado en la Figura 10, que en una unidad de tiempo presenta un crecimiento de 400 individuos.

$$T_{j+1} = T_j + \Delta + 1 \quad (4-176)$$

Para la sumatoria de aplicaciones se simularán tres aplicaciones, cuyos tiempos de aplicación se establecen a partir de (4-176), como se presenta en (4-177) para  $T_2$  y en (4-178) para  $T_3$ , recordando  $\Delta$  equivale a la duración del pulso o el tiempo de asentamiento esperado (4-104):

$$T_2 = T_1 + \Delta + 1 = 4.6 \quad (4-177)$$

$$T_3 = T_2 + \Delta + 1 = 8.2 \quad (4-178)$$

$$T_4 = T_3 + \Delta + 1 = 11.8 \quad (4-179)$$

El tiempo  $T_4$  (4-179) se define como una variable auxiliar para definir el fin de la simulación del modelo de sumatoria de aplicaciones.

#### 4.2.4.2.1 *Simulaciones para el segundo pulso de aplicación (j = 2)*

Para simular la segunda aplicación se requieren la condición inicial de las poblaciones, que se obtienen evaluando las funciones  $X_1(t)$  (4-124) y  $X_2(t)$  (4-125) después de la segunda aplicación en el tiempo  $T_2$ .

$$X_1(T_2) = 540.1063 \quad (4-180)$$

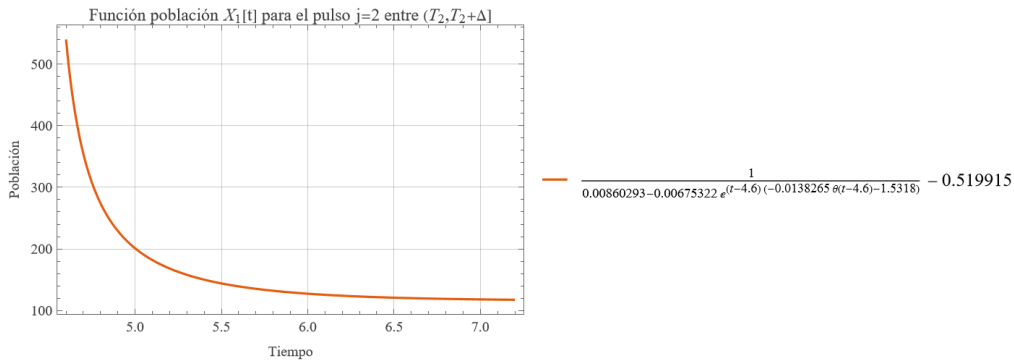
$$X_2(T_2) = 118.5643 \quad (4-181)$$

Ahora bien, para simular la función  $X_1(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_1(T_2)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-180) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_1(t)$  (4-166), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_1(t)$  en (4-182):

$$X_1(t) = -0.51991 + \frac{1}{0.0086 - 0.0068e^{(-4.6+t)(-1.5318-0.0138\theta[-4.6+t])}} \quad (4-182)$$

La función  $X_1(t)$  de la ecuación (4-182) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_2, T_2 + \Delta] = (4.6, 7.2]$  y se obtiene la Figura 14:

**Figura 14.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_1$  durante el pulso de aplicación  $(T_2, T_2 + \Delta]$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

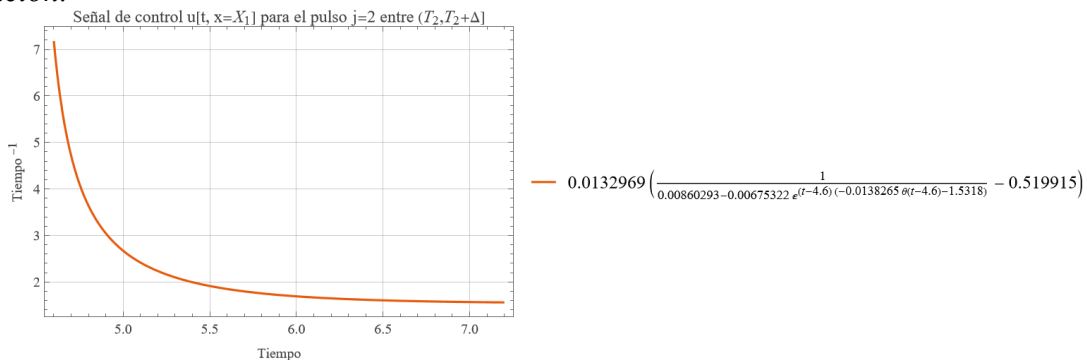
Así mismo, también se simuló la función de la señal de control de realimentación de estado para la función  $X_1(t)$ . La función de la señal de control se obtiene al reemplazar la función  $X_1(t)$  (4-182) en la ecuación de la realimentación de estado propuesta (4-35), obteniendo (4-183):

$$u(t) = k x(t) \tag{4-35}$$

$$u(t, x = X_1) = 0.0133 \left( -0.5199 + \frac{1}{0.0086 - 0.0068e^{(-4.6+t)(-1.5318-0.0138\theta[-4.6+t])}} \right) \tag{4-183}$$

La función  $u(t, x = X_1)$  de la ecuación (4-183) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_2, T_2 + \Delta]$  y obtiene la Figura 15:

**Figura 15.** Simulación de señal de control a partir de  $X_1$  durante el segundo pulso de aplicación.



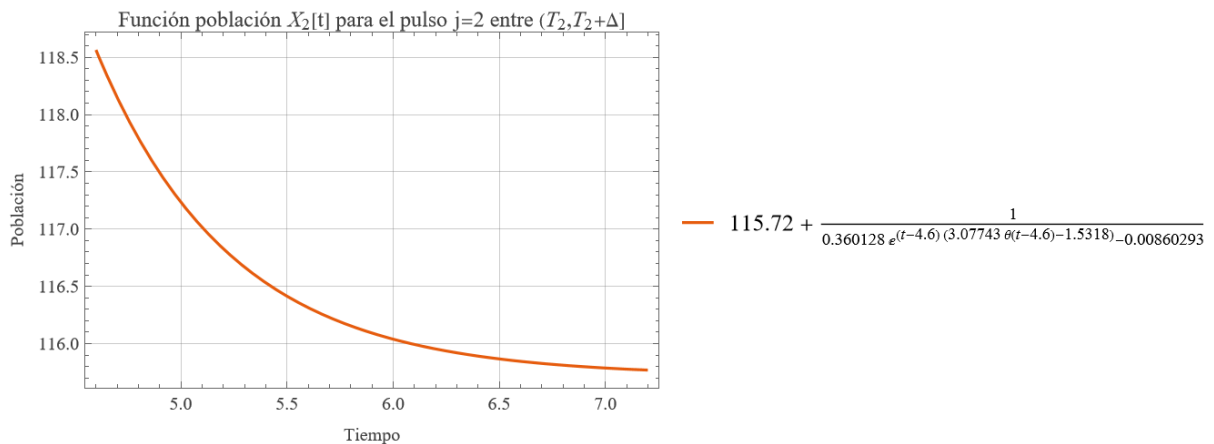
*Nota:* Gráfica de la señal de control durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Para la simulación de la función  $X_2(t)$  se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_2(T_2)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-181) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_2(t)$  (4-167), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_2(t)$  en (4-184):

$$X_2(t) = 115.7195 + \frac{1}{-0.0086 + 0.3601e^{(-4.6+t)(-1.5318+3.0774\theta[-4.6+t])}} \quad (4-184)$$

La función  $X_2(t)$  de la ecuación (4-184) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_2, T_2 + \Delta] = (4.6, 7.2]$  y se obtiene la Figura 16:

**Figura 16.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_2$  durante el pulso de aplicación  $(T_2, T_2 + \Delta]$ .



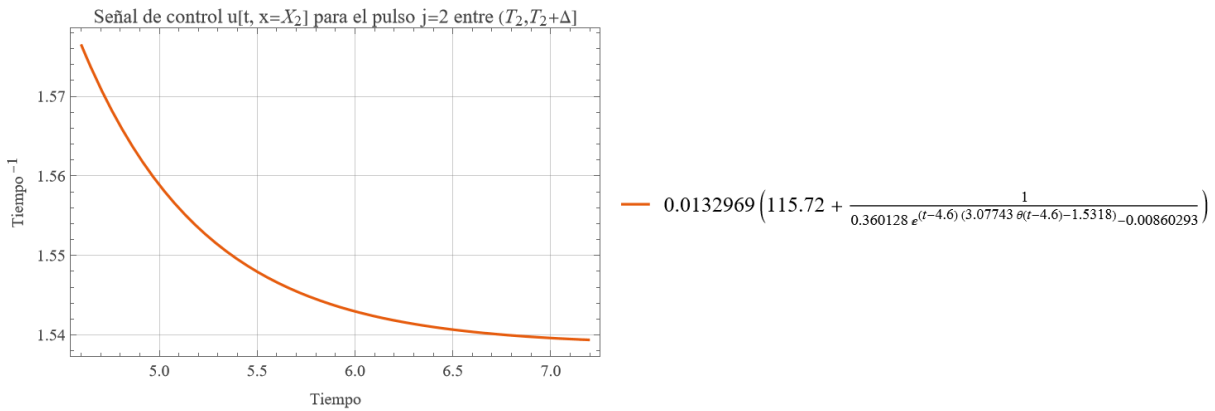
*Nota:* Gráfica de población de plaga durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Junto a la función  $X_2$  se simuló la función de la señal de control de realimentación de estado para la función  $X_2(t)$ . La función de la señal de control se obtiene al reemplazar la función  $X_2(t)$  (4-184) en la ecuación de la realimentación de estado propuesta (4-35), obteniendo (4-185):

$$u(t, x = X_2) = 115.7195 + \frac{1}{-0.0086 + 0.3601e^{(-4.6+t)(-1.5318+3.0774\theta[-4.6+t])}} \quad (4-185)$$

La función  $u(t, x = X_2)$  de la ecuación (4-185) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_2, T_2 + \Delta]$  y obtiene la Figura 17:

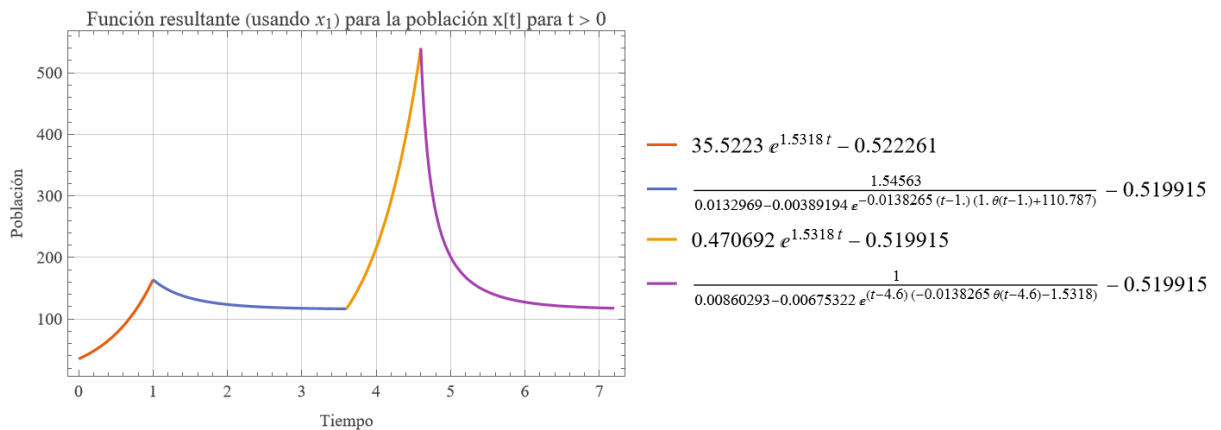
**Figura 17.** Simulación de señal de control a partir de  $X_2$  durante el segundo pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de la señal de control durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

A continuación se presentan las funciones por partes de población de plaga hasta la finalización del segundo pulso de aplicación. La Figura 18 presenta la función por partes hasta la finalización del segundo pulso, usando la solución particular  $x_1$ :

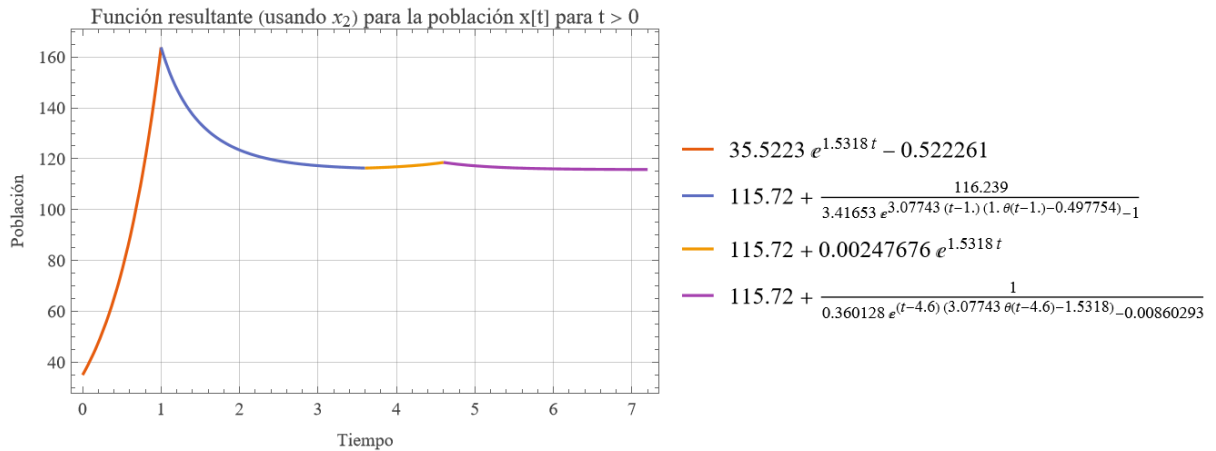
**Figura 18.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_1$  desde cero hasta la finalización del segundo pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población, simulado en Wolfram Mathematica.

La Figura 19 presenta la función por partes hasta la finalización del segundo pulso, usando la solución particular  $x_2$ :

**Figura 19.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_2$  desde cero hasta la finalización del segundo pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

A partir de las magnitudes de la población en las funciones  $X_1$  y  $X_2$  al finalizar el segundo pulso de aplicación que se presentan en (4-186) y (4-187), se puede obtener el error porcentual en estado estable.

$$X_1(T_2 + \Delta) = 117.3834 \tag{4-186}$$

$$X_2(T_2 + \Delta) = 115.7695 \tag{4-187}$$

El error porcentual en estado estable para  $X_1$  se obtiene al sustituir (4-186) y la población de referencia (4-99) en (4-111), como se presenta en (4-188). El error en estado estable para  $X_1$  equivale a 2.4% aproximadamente, representando 3 individuos de población más de la población deseada para la plaga.

$$Error_{ss}(\%) = 100 \cdot \frac{|114.675 - 117.3834|}{114.675} = 2.3618\% \tag{4-188}$$

El error porcentual en estado estable para  $X_2$  se obtiene al sustituir (4-187) y la población de referencia (4-99) en (4-111), como se presenta en (4-189). El error en estado estable para  $X_2$  equivale a 0.95% aproximadamente, representando 1 individuo de población más de la población deseada para la plaga.

$$Error_{ss}(\%) = 100 \cdot \frac{|114.675 - 115.7695|}{114.675} = 0.9544\% \quad (4-189)$$

#### 4.2.4.2.2 *Simulaciones después del segundo pulso ( $j = 2$ ) y antes del tercer pulso de aplicación ( $j = 3$ )*

Para simular las funciones  $X_1$  y  $X_2$  después del segundo y antes del tercer pulso de aplicación, se utilizan las ecuaciones (4-174) y (4-175) respectivamente.

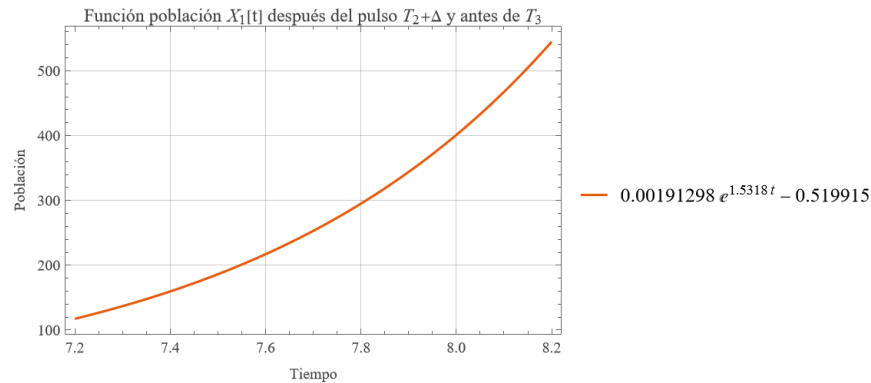
Las condiciones iniciales para estas funciones corresponden a la magnitud de población de las funciones  $X_1$  y  $X_2$  durante el segundo pulso, lo que implica evaluar las ecuaciones (4-182) y (4-184) en  $T_2 + \Delta$ , como fue presentado en las ecuaciones (4-186) y (4-187).

Para simular la función  $X_1(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_1(T_2 + \Delta)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-186) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_1(t)$  (4-174), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_1(t)$  en (4-190):

$$X_1(t) = -0.5199 + 0.0019e^{1.5318t} \quad (4-190)$$

La función  $X_1(t)$  de la ecuación (4-190) se simula en el rango  $(T_2 + \Delta, T_3] = (7.2, 8.2]$  y se obtiene la Figura 20:

**Figura 20.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_1$  después del segundo pulso de aplicación y antes del tercer pulso de aplicación ( $T_2 + \Delta, T_3$ ].



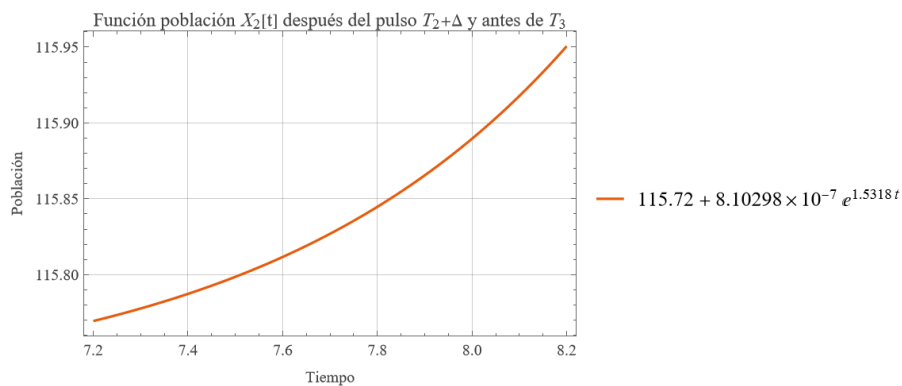
*Nota:* Gráfica de población de plaga después la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Para simular la función  $X_2(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_2(T_2 + \Delta)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-187) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_2(t)$  (4-175), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_2(t)$  en (4-191):

$$X_2(t) = 115.7195 + 8.103 \times 10^{-7} e^{1.5318t} \quad (4-191)$$

La función  $X_2(t)$  de la ecuación (4-191) se simula en el rango  $(T_2 + \Delta, T_3] = (7.2, 8.2]$  y se obtiene la Figura 21:

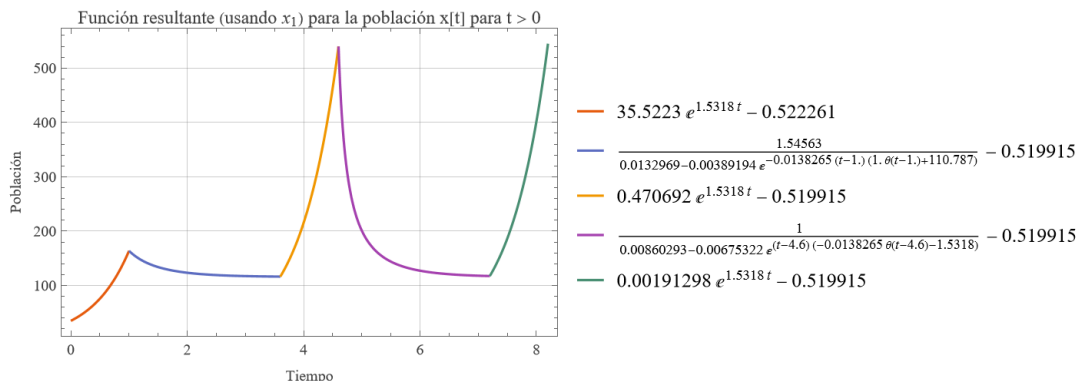
**Figura 21.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_2$  después del segundo pulso de aplicación y antes del tercer pulso de aplicación ( $T_2 + \Delta, T_3$ ].



*Nota:* Gráfica de población de plaga después de la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

A continuación se presentan las funciones por partes de población de plaga hasta el inicio del tercer pulso de aplicación. La Figura 22 presenta la función por partes desde cero hasta el tiempo de inicio de la tercera aplicación ( $T_3$ ), usando la solución particular  $x_1$ :

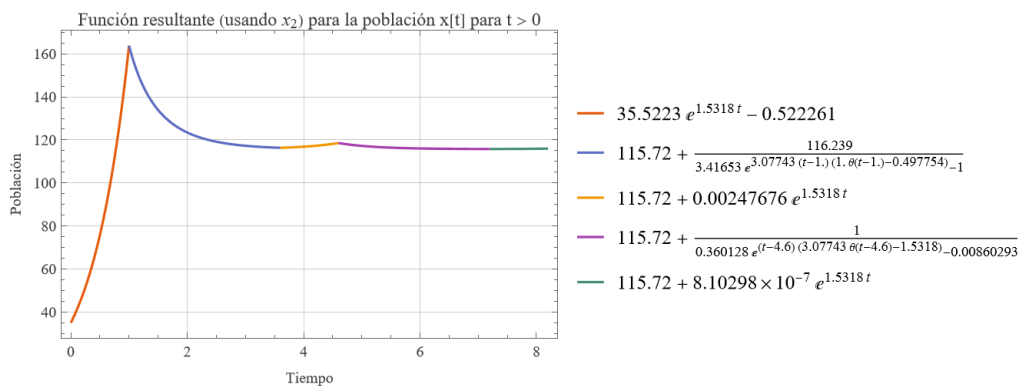
**Figura 22.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_1$  desde cero hasta el inicio del tercer pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

La Figura 23 presenta la función por partes desde cero hasta el tiempo de inicio de la tercera aplicación ( $T_3$ ), usando la solución particular  $x_2$ :

**Figura 23.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_2$  desde cero hasta el inicio del tercer pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

4.2.4.2.3 *Simulaciones para el tercer pulso de aplicación (j = 3)*

Para simular la segunda aplicación se requieren la condición inicial de las poblaciones, que se obtienen evaluando las funciones  $X_1(t)$  (4-190) y  $X_2(t)$  (4-191) después de la tercera aplicación en el tiempo  $T_3$ .

$$X_1(T_3) = 544.9595 \tag{4-192}$$

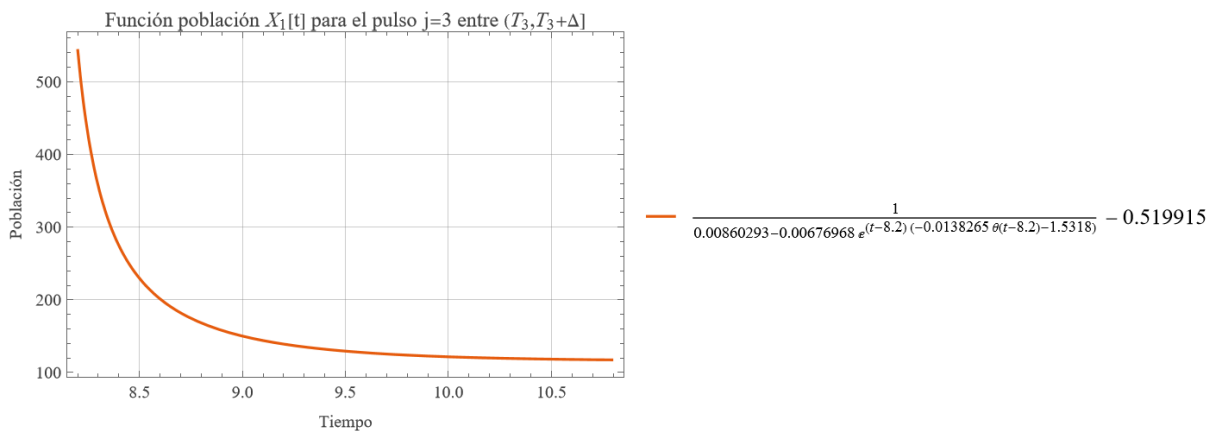
$$X_2(T_3) = 115.9506 \tag{4-193}$$

Para simular la función  $X_1(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_1(T_3)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-192) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_1(t)$  (4-166), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_1(t)$  en (4-194):

$$X_1(t) = -0.5199 + \frac{1}{0.0086 - 0.0068e^{(-8.2+t)(-1.5318-0.0138\theta[-8.2+t])}} \tag{4-194}$$

La función  $X_1(t)$  de la ecuación (4-194) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_3, T_3 + \Delta] = (8.2, 10.8]$  y se obtiene la Figura 24:

**Figura 24.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_1$  durante el pulso de aplicación  $(T_3, T_3 + \Delta]$ .



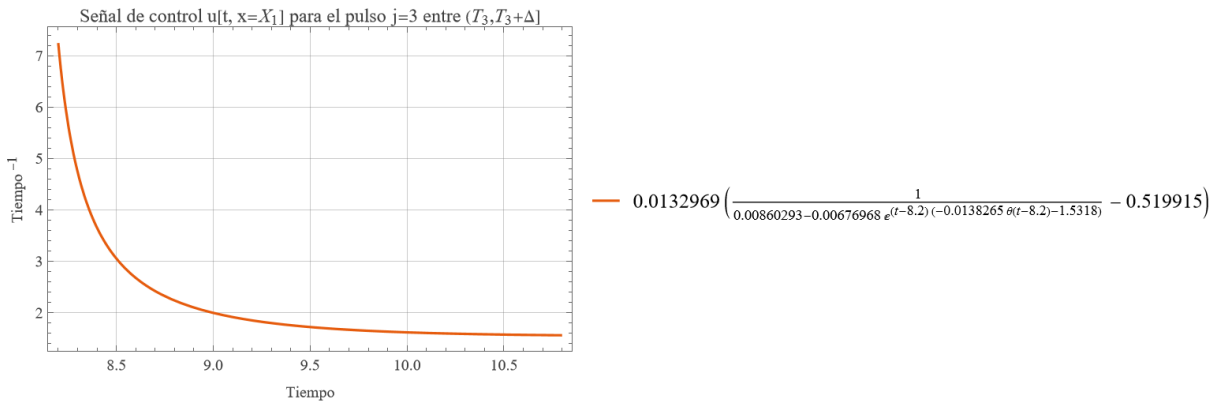
*Nota:* Gráfica de población de plaga durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

La función de la señal de control se obtiene al reemplazar la función  $X_1(t)$  (4-194) en la ecuación de la realimentación de estado propuesta (4-35), obteniendo (4-195):

$$u(t, x = X_1) = 0.0133 \left( -0.5199 + \frac{1}{0.0086 - 0.0068e^{(-8.2+t)(-1.5318-0.0138\theta[-8.2+t])}} \right) \quad (4-195)$$

La función  $u(t, x = X_1)$  de la ecuación (4-195) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_3, T_3 + \Delta]$  y obtiene la Figura 25:

**Figura 25.** Simulación de señal de control a partir de  $X_1$  durante el tercer pulso de aplicación.



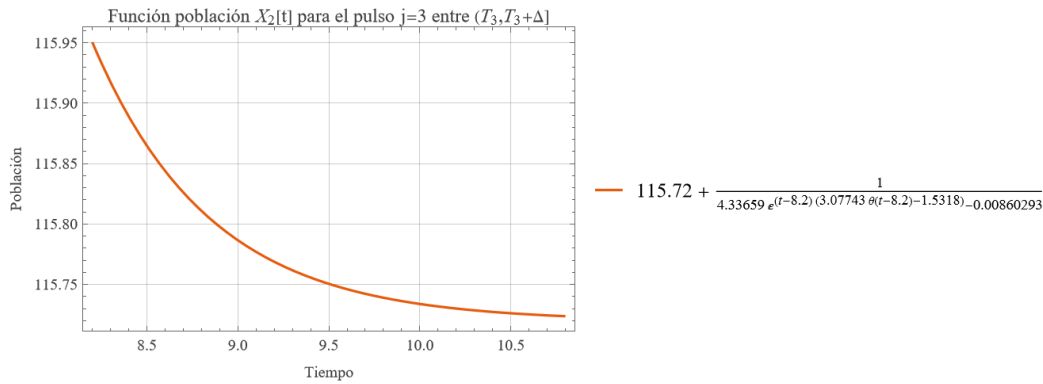
*Nota:* Gráfica de señal de control durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Para simular la función  $X_2(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_2(T_3)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-193) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_2(t)$  (4-167), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_2(t)$  en (4-196):

$$X_2(t) = 115.7195 + \frac{1}{-0.0086 + 4.3366e^{(-8.2+t)(-1.5318+3.0774\theta[-8.2+t])}} \quad (4-196)$$

La función  $X_2(t)$  de la ecuación (4-196) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_3, T_3 + \Delta] = (8.2, 10.8]$  y se obtiene la Figura 26:

**Figura 26.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_2$  durante el pulso de aplicación  $(T_3, T_3 + \Delta]$ .



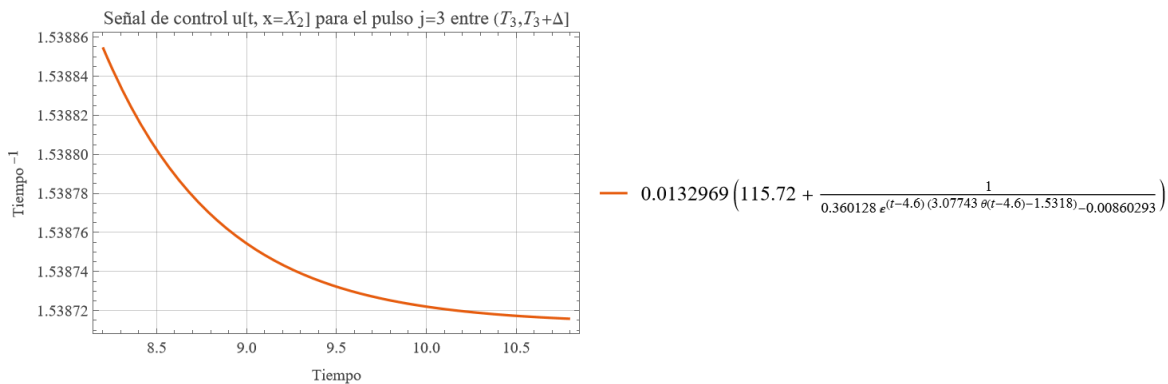
*Nota:* Gráfica de población de plaga durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

La función de la señal de control se obtiene al reemplazar la función  $X_2(t)$  (4-196) en la ecuación de la realimentación de estado propuesta (4-35), obteniendo (4-197):

$$u(t, x = X_2) = 0.0133 \left( 115.7195 + \frac{1}{-0.0086 + 4.3366e^{(-8.2+t)(-1.5318+3.0774\theta[-8.2+t])}} \right) \tag{4-197}$$

La función  $u(t, x = X_2)$  de la ecuación (4-197) se simula en el rango del pulso de aplicación  $(T_3, T_3 + \Delta]$  y obtiene la Figura 27:

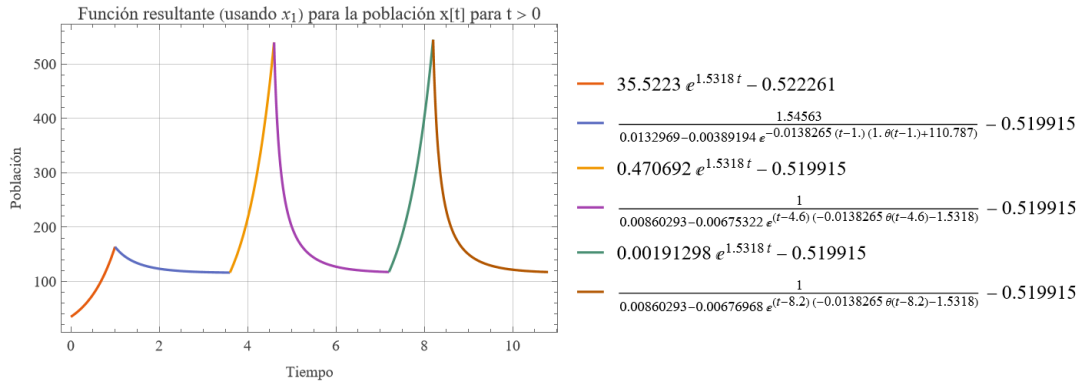
**Figura 27.** Simulación de señal de control a partir de  $X_2$  durante el tercer pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de señal de control durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

A continuación se presentan las funciones por partes de población de plaga hasta la finalización del tercer pulso de aplicación. La Figura 28 presenta la función por partes desde cero hasta la finalización de la tercera aplicación ( $T_3 + \Delta$ ), usando la solución particular  $x_1$ :

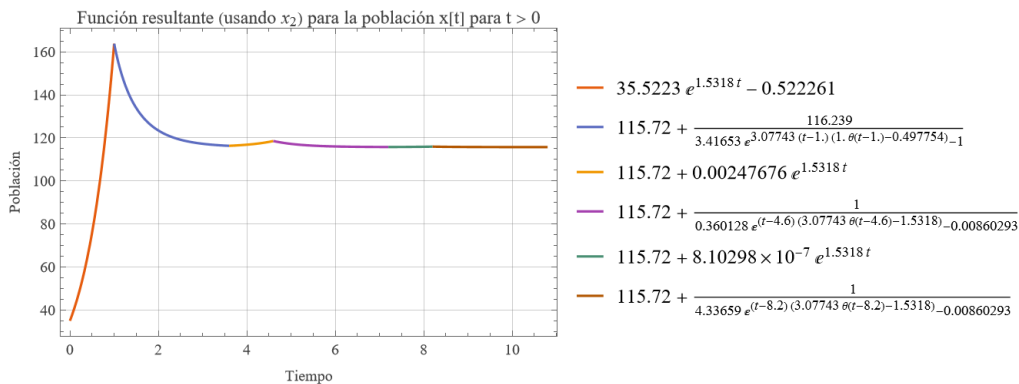
**Figura 28.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_1$  desde cero hasta la finalización del tercer pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

La Figura 29 presenta la función por partes desde cero hasta la finalización de la tercera aplicación ( $T_3 + \Delta$ ), usando la solución particular  $x_2$ :

**Figura 29.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_2$  desde cero hasta la finalización del tercer pulso de aplicación.



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

Las magnitudes de la población en las funciones  $X_1$  y  $X_2$  al finalizar el tercer pulso de aplicación se presentan en (4-198) y (4-199), para posteriormente calcular el error en estado estable:

$$X_1(T_3 + \Delta) = 117.3875 \quad (4-198)$$

$$X_2(T_3 + \Delta) = 115.7237 \quad (4-199)$$

El error porcentual en estado estable para  $X_1$  se obtiene al sustituir (4-198) y la población de referencia (4-99) en (4-111), como se presenta en (4-200). El error en estado estable para  $X_1$  equivale a 2.4% aproximadamente, representando 3 individuos de población más de la población deseada para la plaga.

$$Error_{ss}(\%) = 100 \cdot \frac{|114.675 - 117.3875|}{114.675} = 2.3654\% \quad (4-200)$$

El error porcentual en estado estable para  $X_2$  se obtiene al sustituir (4-199) y la población de referencia (4-99) en (4-111), como se presenta en (4-201). El error en estado estable para  $X_2$  equivale a 0.92% aproximadamente, representando 1 individuo de población más de la población deseada para la plaga.

$$Error_{ss}(\%) = 100 \cdot \frac{|114.675 - 115.7237|}{114.675} = 0.9145\% \quad (4-201)$$

#### 4.2.4.2.4 *Simulaciones después del tercer pulso de aplicación (j = 3)*

Para simular las funciones  $X_1$  y  $X_2$  después del segundo y antes del tercer pulso de aplicación, se utilizan las ecuaciones (4-174) y (4-175) respectivamente.

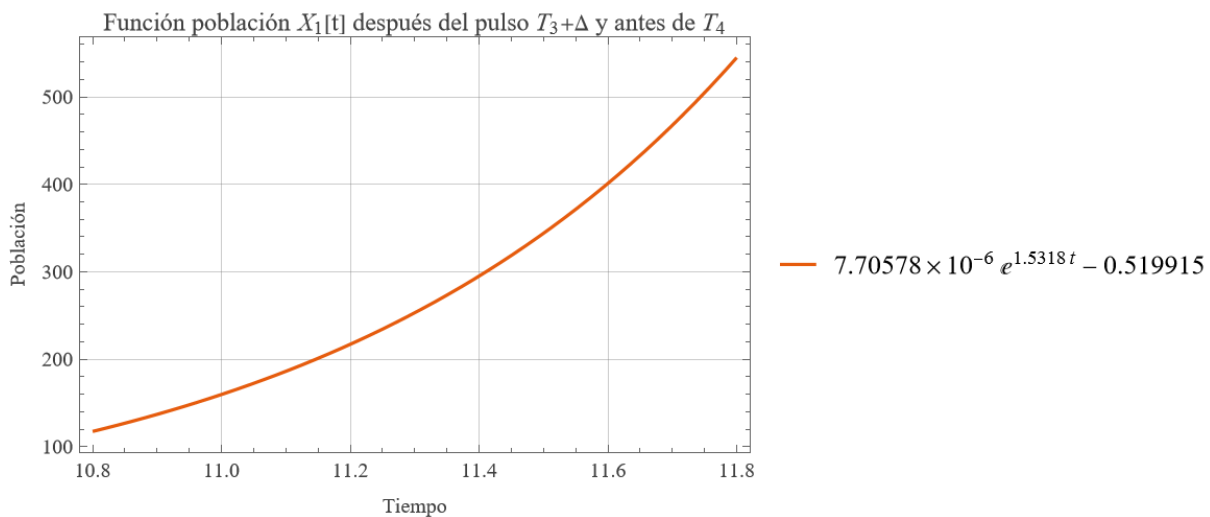
Las condiciones iniciales para estas funciones corresponden a la magnitud de población de las funciones  $X_1$  y  $X_2$  durante el tercer pulso, lo que implica evaluar las ecuaciones (4-194) y (4-196) en  $T_3 + \Delta$ , como fue presentado en las ecuaciones (4-198) y (4-199).

Para simular la función  $X_1(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_1(T_3 + \Delta)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-198) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_1(t)$  (4-174), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_1(t)$  en (4-202):

$$X_1(t) = -0.5199 + 7.70578 \times 10^{-6} e^{1.5318t} \quad (4-202)$$

La función  $X_1(t)$  de la ecuación (4-202) se simula en el rango  $(T_3 + \Delta, T_4] = (10.8, 11.8]$  y, recordando que  $T_4$  es una variable auxiliar y no indica una cuarta aplicación, se obtiene la Figura 30:

**Figura 30.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_1$  después del tercer pulso de aplicación  $(T_3 + \Delta, T_4]$ .



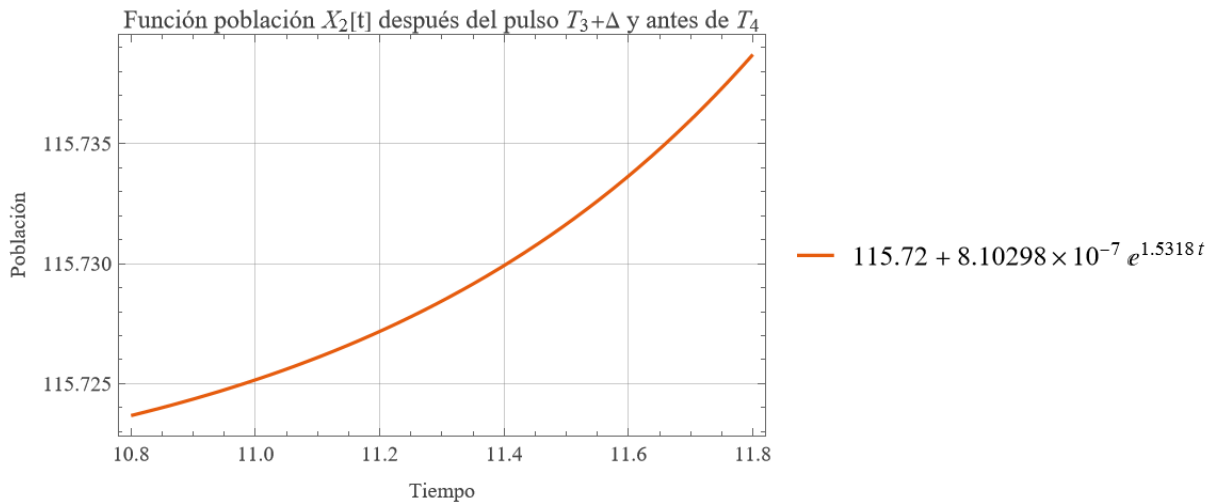
*Nota:* Gráfica de población de plaga después de la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Para simular la función  $X_2(t)$ , se reemplazan las magnitudes de  $a$ ,  $b$ ,  $X_2(T_3 + \Delta)$  y  $k$  de (4-49), (4-48), (4-199) y (4-102) respectivamente en la definición de  $X_2(t)$  (4-175), se obtiene la función con valores numéricos de  $X_2(t)$  en (4-203):

$$X_2(t) = 115.7196 + 2.7094 \times 10^{-10} e^{1.5318t} \quad (4-203)$$

La función  $X_2(t)$  de la ecuación (4-203) se simula en el rango  $(T_3 + \Delta, T_4] = (10.8, 11.8]$  y se obtiene la Figura 31:

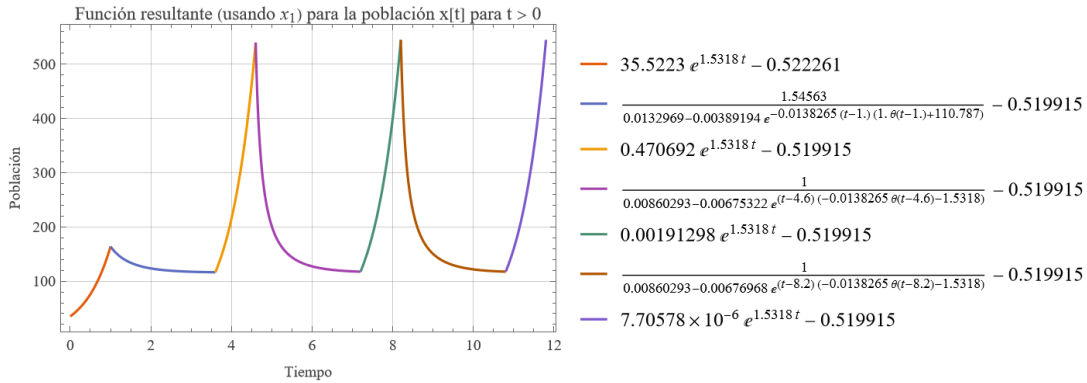
**Figura 31.** Simulación de la solución de la función población a partir de  $X_2$  después del tercer pulso de aplicación  $(T_3 + \Delta, T_4]$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga después de la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

A continuación se presentan las funciones por partes de población de plaga hasta el tiempo  $T_4$ . La Figura 32 presenta la función por partes para todo tiempo (simulado hasta  $T_4$ ), usando la solución particular  $x_1$ :

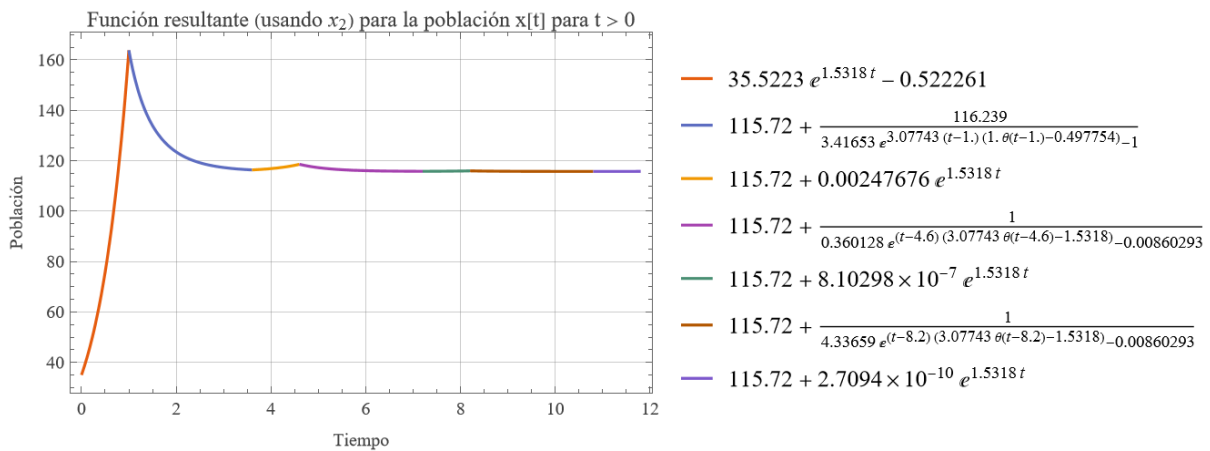
**Figura 32.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_1$  desde cero hasta  $T_4$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

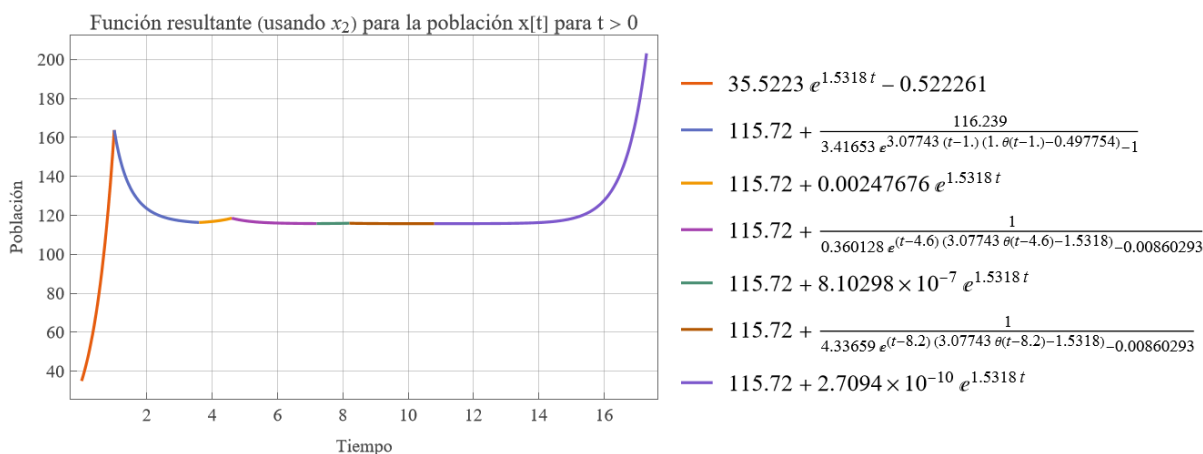
La Figura 23 presenta la función por partes para todo tiempo (simulado hasta  $T_4$ ), usando la solución particular  $x_2$ :

**Figura 33.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_2$  desde cero hasta  $T_4$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

**Figura 34.** Simulación de función por partes (población de plaga) a partir de  $x_2$  en el rango  $[0,17.3]$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga, simulado en Wolfram Mathematica.

La Figura 34 corresponde a una simulación en un rango de tiempo más extenso de la función población usando la solución particular  $X_2$  (4-203), de la misma manera que se simuló un rango más extenso en la función de población a partir de  $X_2$  (4-125) en el modelo de única aplicación, como fue presentado en la sección 4.1.5.7. *Simulación de la función población para población para la realimentación de estados – después del pulso de aplicación  $T + \Delta$ .*

En la Figura 34 se puede observar como la solución particular  $X_2$  (4-203) después de la tercera aplicación exhibe el mismo comportamiento de la función  $X_2$  (4-125) después de la primera y antes de la segunda aplicación, donde la población de plaga no crece significativamente por aproximadamente 4 unidades de tiempo y posteriormente presenta crecimiento acelerado al igual que en las soluciones particulares  $X_1$ . Esto indica que al usar la solución particular  $X_2$  (4-203) se presentan efectos indirectos en el crecimiento de la población después de la tercera aplicación del pesticida; sin embargo, no se presenta una desaceleración del crecimiento por la acumulación de las aplicaciones del pesticida, que era representada con el término  $\Delta(j - 1)$  en la generalización

de la integral de  $P_1$  (la sumatoria de pulsos  $j$ ) en la ecuación (4-157). Esto coincide con lo descrito en el análisis de las funciones de población durante y después de los pulsos  $j$  realizado en la sección 4.2.4.1. *Solución analítica de la función población – durante los pulsos de aplicación entre  $(T_j, T_j + \Delta]$  y después de  $T_j + \Delta$ .*

### 4.3 Modelo Lotka-Volterra (LV) ante aplicación de pesticida

#### 4.3.1 Etapa 1: Análisis del modelo LV ante aplicación de pesticida

El modelo o sistema de ecuaciones Lotka-Volterra (LV) se basa en la depredación como un intercambio de biomasa que permite el crecimiento de la población de depredador a partir de la caza de la presa. Un sistema de ecuaciones LV tienen la estructura de las ecuaciones (2-13) y (2-14):

$$\frac{dU(t)}{dt} = \alpha \cdot U(t) - \gamma \cdot U(t) \cdot V(t) \quad (2-13)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \varepsilon \cdot \gamma \cdot U(t) \cdot V(t) - \beta \cdot V(t) \quad (2-14)$$

La ecuación (2-13) describe la derivada con respecto al tiempo de la población de presa  $U(t)$  en función del tiempo, donde el coeficiente  $\alpha$  representa el promedio per cápita de la tasa de nacimiento de la presa por unidad de tiempo, y el coeficiente  $\gamma$  representa la fracción de presas atrapadas por depredador por unidad de tiempo.

La ecuación (2-14) describe la derivada con respecto al tiempo de la población de depredador  $V(t)$  en función del tiempo, donde el coeficiente  $\beta$  representa el promedio per cápita de la tasa de decesos del depredador por unidad de tiempo, y el parámetro  $\varepsilon$  representa la conversión de presas consumidas a cría de depredadores, usando la analogía de una conversión de

biomasa [31]. El término que contiene el producto  $\varepsilon\gamma$  representa entonces la cantidad de crías de depredador que nacen dada la cantidad presas consumidas por los depredadores adultos. Es necesario mencionar que, en este modelo, no se consideran diferencias entre las etapas de crecimiento de ambas poblaciones.

Para la selección de la variable de control, en la literatura se propone el uso de una variable de extracción o recolección de individuos de la población objetivo como variable de control para modelos LV [38][39]. Sin embargo, al igual que en los modelos de Chacón, en el caso de poblaciones de plaga resulta poco práctico extraer manualmente individuos de la especie de plaga que afecta al cultivo. En base a esto, y considerando que la aplicación de pesticidas es el método tradicional de plagas, para el modelo LV se define la aplicación de pesticida como variable de control que afecta tanto a la población de plaga como a la población del depredador.

El análisis de un modelo LV ante la aplicación de pesticida permite modelar como *organismos no objetivo*, como enemigos naturales o agentes de control biológico que se encontraban presentes en el cultivo o que fueron liberados con el propósito de regular las poblaciones de plaga, se ven afectados por la aplicación de pesticidas. En este caso, la población del depredador se considera un *organismo no objetivo* que se ve afectado por la aplicación del pesticida.

Para considerar el impacto del pesticida en ambas poblaciones, es necesario incluir un término que afecte negativamente la derivada de las poblaciones de depredador y presa (plaga en este caso) en función de la cantidad de población actual de cada especie y una tasa de individuos muertos por interacción con el pesticida que puede cambiar según la especie, como se presenta en las ecuaciones (4-204) y (4-205):

$$\frac{dU(t)}{dt} = \alpha \cdot U(t) - \gamma \cdot U(t) \cdot V(t) - n \cdot U(t) \cdot W(t) \cdot p(t) \quad (4-204)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \varepsilon \cdot \gamma \cdot U(t) \cdot V(t) - \beta \cdot V(t) - m \cdot V(t) \cdot W(t) \cdot p(t) \quad (4-205)$$

$$p(t) = \theta(t - T) - \theta(t - T - \Delta) \quad (4-3)$$

Donde  $W(t)$  representa la función de efectividad del pesticida, que se utilizara como la variable de control, y la función  $p(t)$  indica el pulso de aplicación, cuya definición se conserva del modelo de Chacón de única aplicación de pesticida (4-3). Los coeficientes  $n$  y  $m$  son los coeficientes que indican como la efectividad del pesticida afecta a cada población, que en este caso se considera que el impacto del pesticida es mayor en la población de plaga que en la población de depredador.

Para realizar la representación en espacio de estado del modelo LV, se hace un cambio de variable a las ecuaciones (4-204) y (4-205) para manejar las variables comúnmente usadas en la representación de espacio de estado. Aplicando los cambios de variable de (4-206), (4-207) y (4-208) a las ecuaciones (4-204) y (4-205), se obtienen (4-209) y (4-210):

$$x_1(t) = U(t) \quad (4-206)$$

$$x_2(t) = V(t) \quad (4-207)$$

$$u(t) = W(t) \quad (4-208)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \alpha \cdot x_1(t) - \gamma \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - n \cdot x_1(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \quad (4-209)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \varepsilon \cdot \gamma \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - \beta \cdot x_2(t) - m \cdot x_2(t) \cdot u(t) \cdot p(t) \quad (4-210)$$

La representación en espacio de estado se utilizará para obtener la ganancia  $K$  del control por realimentación de estados; sin embargo, la respuesta del sistema se analizará a partir del modelo no lineal de las ecuaciones (4-209) y (4-210). Es necesario aclarar que los sistemas LV no

tienen una solución analítica sencilla, dada su no-linealidad, y que usualmente se aplican métodos numéricos para simular este tipo de sistemas [45].

Es valido recordar también que la función  $p(t)$ , que define el inicio del pulso de aplicación de pesticida en el tiempo  $T$ , implica que el sistema se debe analizar antes, durante y después de la aplicación del pesticida. El sistema antes y después de la aplicación del pesticida corresponde al sistema LV original de las ecuaciones (2-13) y (2-14), y el sistema durante el pulso de aplicación corresponde al descrito en las ecuaciones (4-204) y (4-205).

#### **4.3.2 Etapa 2.1: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo LV ante aplicación del pesticida – antes del tiempo de aplicación $T$ y después de $T + \Delta$**

Para analizar sistema LV original, se aplican los cambios de variables (4-206) y (4-207) a las ecuaciones (2-13) y (2-14), obteniendo el sistema en las variables comúnmente utilizadas para la representación en espacio de estado, como se observa en (4-211) y (4-212):

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \alpha \cdot x_1(t) - \gamma \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (4-211)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \varepsilon \cdot \gamma \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - \beta \cdot x_2(t) \quad (4-212)$$

Dada la no-linealidad del sistema, se requiere linealizar para obtener las matrices de la representación en espacio de estados.

##### **4.3.2.1 Linealización – antes del tiempo de aplicación $T$ y después de $T + \Delta$**

Para linealizar, se retoman las ecuaciones (2-1), (4-16) y (4-17) de las matrices jacobianas presentadas en la sección 4.1.3.1. Linealización – durante el pulso de aplicación entre  $(T, T+\Delta]$ .

$$J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e} \quad (2-1)$$

$$A = J^* \quad (4-16)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x_e, u_e} \quad (4-17)$$

Las condiciones de equilibrio del modelo LV ante aplicación de pesticida se hallan al igualar a cero las ecuaciones (4-211) y (4-212), como se presenta en (4-213), ya que se desea linealizar cuando las poblaciones dejar de crecer o decrecer. A partir de ello se despeja la población de plaga en equilibrio  $x_{1e}$  (4-214) y la población de depredador  $x_{2e}$  (4-215):

$$\text{Si } \dot{x}_1 = \frac{dx_1(t)}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2(t)}{dt}$$

Entonces

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad (4-213)$$

$$x_{1e} = \frac{\beta}{\gamma\epsilon} \quad (4-214)$$

$$x_{2e} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad (4-215)$$

Como se observa en las ecuaciones (4-214) y (4-215), las poblaciones en equilibrio de la presa y el depredador (antes del tiempo de aplicación  $T$  y después de  $T + \Delta$ ) están definidas por las constantes de la dinámica interna del sistema LV original.

Ahora bien, para obtener la matriz  $\mathbf{A}$  de coeficientes de las variables de estado, se aplica la ecuación (2-1) al sistema ecuaciones (4-211) y (4-212), y evaluando los puntos de equilibrio (4-214) y (4-215), se obtiene la matriz jacobiana (4-216):

$$J^* = \left[ \begin{array}{cc} \alpha - \gamma \cdot x_2(t) & -\gamma \cdot x_1(t) \\ \gamma \epsilon \cdot x_2(t) & -\beta + \gamma \epsilon \cdot x_1(t) \end{array} \right] \Big|_{x_e, u_e}$$

$$J^* = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -\frac{\beta}{\epsilon} \\ \alpha \epsilon & 0 \end{array} \right] \quad (4-216)$$

Aplicando la igualdad de (4-16) en (4-216), se obtiene la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema LV original en (4-217):

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -\frac{\beta}{\epsilon} \\ \alpha \epsilon & 0 \end{array} \right] \quad (4-217)$$

Dado que antes del tiempo de aplicación  $T$  y después de  $T + \Delta$  el sistema LV no interactúa con la variable de control, la matriz  $\mathbf{B}$  es igual a cero (4-218):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-218)$$

#### 4.3.2.2 Representación en espacio de estado – antes del tiempo de aplicación $T$ y después de $T + \Delta$

Para la representación en espacio de estado del sistema LV, antes del tiempo de aplicación  $T$  y después de  $T + \Delta$ , se deben definir también las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  de coeficientes de las variables de estado y de la variable de control respectivamente. En este caso, para la matriz  $\mathbf{C}$  se definió la ecuación (4-219) para que la variable de salida fuera la población de plaga:

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad (4-219)$$

Considerando que el sistema LV original, antes del tiempo de aplicación  $T$  y después de  $T + \Delta$ , no tiene dependencia de la variable de control, su matriz de coeficientes  $D$  en la ecuación de salida también es cero, como se presenta en (4-220):

$$D = 0 \quad (4-220)$$

Con las definiciones de las matrices  $A$  (4-217),  $B$  (4-218),  $C$  (4-219) y  $D$  (4-220) se construye la representación en espacio de estado del sistema LV en las ecuaciones (4-221) y (4-222):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta}{\epsilon} \\ \alpha\epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-221)$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-222)$$

Donde  $\dot{\mathbf{x}}$  representa al vector de derivadas de las variables de estado con respecto al tiempo, y  $\mathbf{y}$  representa el vector de variables de salida, que en este caso corresponde solamente a  $x_1$ .

#### 4.3.2.3 Análisis de estabilidad – antes del tiempo de aplicación $T$ y después de $T +$

$\Delta$

Para el análisis de estabilidad se retoma el resultado de la ecuación (4-217) se pueden determinar los autovalores del sistema linealizado al reemplazar en la ecuación (4-10):

Si

$$\det|\lambda I - A^*| = 0$$

$$A^* = A$$

Entonces

$$\det \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\beta}{\epsilon} \\ \alpha\epsilon & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \lambda_1 & -\frac{\beta}{\epsilon} \\ \alpha\epsilon & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} + \beta\alpha = 0$$

$$\lambda_{1,2} = i|\sqrt{\beta\alpha}| \quad (4-223)$$

Recordando que  $\mathbf{A}^*$  es la matriz de coeficientes que multiplica al vector de variables de estado  $\mathbf{x}(t)$ , que corresponde a la matriz  $\mathbf{A}$  obtenida en la ecuación (4-217). Los autovalores del modelo linealizado de aplicación única del pesticida durante el pulso de aplicación obtenidos en la ecuación (4-223) indican que el modelo es marginalmente estable, pues los autovalores son netamente imaginarios ( $i$  representa la unidad imaginaria en (4-223)), por lo que el sistema deberá exhibir un comportamiento oscilatorio. Además de presentar un comportamiento oscilatorio, en la literatura también se indica que el sistema LV puede desencadenar fácilmente en equilibrios triviales (ambas poblaciones se extinguen) o directamente en inestabilidad [36][45].

#### 4.3.2.4 Análisis de observabilidad – antes del tiempo de aplicación $T$ y después de $T + \Delta$

Para el análisis de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $\mathbf{V}$  presentada en la ecuación (2-4) y se comprueba que el rango de  $\mathbf{V}$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-5).

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$\text{Rank}(\mathbf{V}) = n \quad (2-5)$$

La matriz de observabilidad del sistema LV original se construye a partir de la definición de la matriz  $\mathbf{A}$  en (4-217) y de la matriz  $\mathbf{C}$  en (4-219), obteniendo (4-224):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (4-224)$$

$$\text{Rank}(\mathbf{V}) = 2 = n \quad (4-225)$$

Con la matriz  $V$  (4-224) se verifica que su rango sea igual a dos, ya que el sistema LV se compone de dos ecuaciones de primer orden, lo que implica que es de segundo orden. Con el resultado de (4-225) se confirma que el sistema LV es completamente observable.

#### 4.3.2.5 Análisis de controlabilidad – antes del tiempo de aplicación $T$ y después de $T + \Delta$

Para el análisis de controlabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $S$  presentada en la ecuación (2-6) y se comprueba que el rango de  $S$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-7):

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2-6)$$

$$\text{Rank}(S) = n \quad (2-7)$$

Dado que la matriz  $B$  es igual a cero para el sistema LV original (4-218), la matriz de controlabilidad  $S$  es igual a cero (4-226) y por ende el sistema no es controlable (4-227).

$$S = [0] \quad (4-226)$$

$$\text{Rank}(S) = 0 \neq n = 2 \quad (4-227)$$

El resultado de (4-227) es coherente con la definición del sistema LV antes del tiempo de aplicación  $T$  y después de  $T + \Delta$ , pues no se presenta dependencia de la variable de control.

#### 4.3.3 Etapa 2.2: Representación en espacio de estado, análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad del modelo LV ante aplicación del pesticida – durante el pulso de aplicación entre $(T, T+\Delta]$

Para desarrollar la representación en espacio de estado del modelo LV ante aplicación de pesticida se deben analizar las ecuaciones (4-209) y (4-210) donde se considera la variable de control en ambas poblaciones.

### 4.3.3.1 Linealización – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ]

Las condiciones de equilibrio del modelo LV ante aplicación de pesticida se hallan al igualar a cero las ecuaciones (4-209) y (4-210), para linealizar cuando las poblaciones dejan de crecer o decrecer. Para este sistema, la población en equilibrio del depredador  $x_{2e}$  y la efectividad en equilibrio  $u_e$  se establecen a partir de la población en equilibrio de la plaga  $x_{1e}$ , que será la población de plaga que se desea tener en el cultivo tras la aplicación del pesticida. La población en equilibrio del depredador  $x_{2e}$  y la efectividad en equilibrio  $u_e$  en función de la población en equilibrio de la plaga  $x_{1e}$  se presentan en las ecuaciones (4-228) y (4-229) respectivamente:

$$x_{2e} = \frac{m\alpha + n\beta - n\gamma\epsilon \cdot x_{1e}}{m\gamma} \quad (4-228)$$

$$u_e = \frac{-\beta + \gamma\epsilon \cdot x_{1e}}{m} \quad (4-229)$$

Para obtener la matriz  $A$  de coeficientes de las variables de estado, se aplica la ecuación (2-1) al sistema ecuaciones (4-209) y (4-210), y evaluando los puntos de equilibrio (4-228) y (4-229) se obtiene la matriz jacobiana (4-230):

$$J^* = \left[ \begin{array}{cc} -n \cdot u(t) + \alpha - \gamma \cdot x_2(t) & -\gamma \cdot x_1(t) \\ \gamma\epsilon \cdot x_2(t) & -m \cdot u(t) - \beta + \gamma\epsilon \cdot x_1(t) \end{array} \right] \Bigg|_{x_e, u_e}$$

$$J^* = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -\gamma \cdot x_{1e} \\ \epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + \gamma\epsilon \cdot x_{1e})}{m} \right) & 0 \end{array} \right] \quad (4-230)$$

Aplicando la igualdad de (4-16) en (4-230), se obtiene la matriz  $A$  del sistema LV durante el pulso de aplicación en (4-231):

$$A = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -\gamma \cdot x_{1e} \\ \epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + \gamma\epsilon \cdot x_{1e})}{m} \right) & 0 \end{array} \right] \quad (4-231)$$

Para obtener la matriz  $\mathbf{B}$  se deriva parcialmente el sistema LV durante el pulso de aplicación con respecto a la variable de control. Aplicando (4-17) al sistema de ecuaciones (4-209) y (4-210) se obtiene la matriz  $\mathbf{B}$  en (4-232):

$$\mathbf{B} = \left. \begin{bmatrix} -n \cdot x_1(t) \\ -m \cdot x_2(t) \end{bmatrix} \right|_{x_e, u_e}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -n \cdot x_{1e} \\ -\frac{m\alpha + n\beta - n\gamma\epsilon \cdot x_{1e}}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (4-232)$$

#### 4.3.3.2 Representación en espacio de estado – durante el pulso de aplicación entre $(T, T+\Delta]$

Para la representación en espacio de estado del sistema LV, durante el pulso aplicación  $(T, T + \Delta]$ , se conserva la definición de la matriz  $\mathbf{C}$  en (4-219), ya que se desea que la variable de salida sea la población de plaga. Así mismo, se conserva la definición de la matriz  $\mathbf{D}$  en (4-220) pues la variable de salida no depende directamente de la variable de control. Entonces, a partir de las matrices  $\mathbf{A}$  (4-231),  $\mathbf{B}$  (4-232),  $\mathbf{C}$  (4-219) y  $\mathbf{D}$  (4-220) se construye la representación en espacio de estado del sistema LV en las ecuaciones (4-233) y (4-234):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \cdot x_{1e} \\ \epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + \gamma\epsilon \cdot x_{1e})}{m} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -n \cdot x_{1e} \\ -\frac{m\alpha + n\beta - n\gamma\epsilon \cdot x_{1e}}{\gamma} \end{bmatrix} [u] \quad (4-233)$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-234)$$

#### 4.3.3.3 Análisis de estabilidad – durante el pulso de aplicación entre $(T, T+\Delta]$

Para el análisis de estabilidad se retoma el resultado de la ecuación (4-231) se pueden determinar los autovalores del sistema linealizado al reemplazar en la ecuación (4-10):

Si

$$\det|\lambda I - A^*| = 0$$

$$A^* = A$$

Entonces

$$\det \left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \cdot x_{1e} \\ \epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + \gamma \epsilon \cdot x_{1e})}{m} \right) & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda_{1,2} = i \left| \frac{\sqrt{\gamma} \sqrt{\epsilon} \sqrt{x_{1e}} \sqrt{m\alpha + n\beta - n\gamma \epsilon \cdot x_{1e}}}{\sqrt{m}} \right| \quad (4-235)$$

Recordando que  $A^*$  es la matriz de coeficientes que multiplica al vector de variables de estado  $\mathbf{x}(t)$ , que corresponde a la matriz  $A$  obtenida en la ecuación (4-231), y que  $i$  representa la unidad imaginaria. Dado que los autovalores de (4-235) son netamente imaginarios, el sistema LV durante la aplicación del pesticida debería ser marginalmente estable y exhibir un comportamiento oscilatorio al igual que el sistema LV original. Sin embargo, este comportamiento busca ser modificado a través del control por realimentación de estados para obtener una estabilidad asintótica.

#### 4.3.3.4 Análisis de observabilidad – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ]

Para el análisis de observabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $V$  presentada en la ecuación (2-4) y se comprueba que el rango de  $V$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-5).

La matriz de observabilidad del sistema LV durante el pulso de aplicación se construye a partir de las matrices  $A$  (4-231) y  $C$  (4-219), obteniendo (4-236):

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \cdot x_{1e} \end{bmatrix} \quad (4-236)$$

$$\text{Rank}(V) = 2 = n \quad (4-237)$$

En la ecuación (4-237) se confirma que el rango de la matriz de observabilidad (4-236) coincide con el orden del sistema, por lo que se confirma que el sistema LV durante el pulso de aplicación es completamente observable.

#### 4.3.3.5 Análisis de controlabilidad – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ]

Para el análisis de controlabilidad se utiliza la matriz de observabilidad  $\mathbf{S}$  presentada en la ecuación (2-6) y se comprueba que el rango de  $\mathbf{S}$  sea igual a  $n$ , el orden del sistema, como fue presentado en la ecuación (2-7).

La matriz de observabilidad del sistema LV durante el pulso de aplicación se construye a partir de las matrices  $\mathbf{A}$  (4-231) y  $\mathbf{B}$  (4-232), obteniendo (4-238):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -n \cdot x_{1e} & (m\alpha + n(\beta - \gamma\epsilon \cdot x_{1e})) \cdot x_{1e} \\ -\frac{m\alpha + n\beta - n\gamma\epsilon \cdot x_{1e}}{\gamma} & -\frac{n\epsilon \cdot x_{1e}(m\alpha + n(\beta - \gamma\epsilon \cdot x_{1e}))}{m} \end{bmatrix} \quad (4-238)$$

$$\text{Rank}(\mathbf{S}) = 2 = n \quad (4-239)$$

En la ecuación (4-239) se confirma que el rango de la matriz de controlabilidad (4-238) coincide con el orden del sistema, por lo que se confirma que el sistema LV durante el pulso de aplicación es completamente controlable.

#### 4.3.4 Etapa 3: Diseño del controlador por realimentación de estados para el modelo LV ante aplicación del pesticida

Para el diseño del control por realimentación de estados presentado en (4-35). Sin embargo, es necesario aclarar que, para el sistema LV y en general para sistemas de orden superior, la ganancia  $k$  es una matriz que contiene las constantes para realimentar los estados. Es por ello que

en adelante, para describir la matriz de ganancias del control por realimentación de estados, se hará referencia a la matriz  $K$ .

$$\mathbf{u}(t) = k \mathbf{x}(t) \quad (4-35)$$

La matriz  $K$  se puede obtener a partir de la fórmula de Ackermann [46], que se describe en (4-240), recordando que (4-240) y (4-241) son equivalentes si se aplica la definición de la matriz de controlabilidad  $S$  (2-6) a (4-240).

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][B|AB| \dots |A^{n-1}B]^{-1}\phi(A) \quad (4-240)$$

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]S^{-1}\phi(A) \quad (4-241)$$

La función  $\phi(A)$  (4-242) representa el polinomio característico deseado (4-243) evaluado en  $A$ , donde  $I$  representa la matriz identidad:

$$\phi(A) = A^n + \psi_1 A^{n-1} + \psi_2 A^{n-2} + \dots + \psi_{n-1} A + \psi_n I \quad (4-242)$$

$$s^n + \psi_1 s^{n-1} + \psi_2 s^{n-2} + \dots + \psi_{n-1} s + \psi_n = (s - \Lambda_1)(s - \Lambda_2)(\dots)(s - \Lambda_n) = 0 \quad (4-243)$$

Las constantes  $\psi$  representan los coeficientes del polinomio característico deseado, que surge a partir del producto de los autovalores o polos  $\Lambda$  que se desean obtener al implementar el controlador.

Los autovalores deseados se obtienen a partir de las siguientes condiciones dinámicas deseadas en la respuesta del controlador: que la respuesta tenga un overshoot menor al 10% (4-244) y el tiempo de asentamiento (la misma duración del pulso de aplicación) sea el mismo definido para los modelos de Chacón (4-245):

$$OV < 10\% \quad (4-244)$$

$$t_s = \Delta = 2.6 \quad (4-245)$$

Ahora bien, para hallar la ubicación de los polos a partir de (4-244) y (4-245) se debe obtener el factor de amortiguamiento  $\zeta$  y la frecuencia natural del sistema  $w_n$ . La ecuación (4-246) relaciona el overshoot y el factor de amortiguamiento.

$$\zeta = \frac{-\ln|OV|}{\sqrt{\pi^2 + \ln|OV|^2}} \quad (4-246)$$

$$\zeta_{OV=10\%} = 0.5912 \quad (4-247)$$

Reemplazando (4-244) en (4-246) se obtuvo (4-247). Para hallar la frecuencia natural del sistema  $w_n$  se retoma la ecuación (4-103) del tiempo de asentamiento, y sustituyendo en ella el tiempo de asentamiento deseado (4-245) y el factor de amortiguamiento hallado (4-247), se obtiene la magnitud de  $w_n$  en (4-248):

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n} \quad (4-103)$$

Si

$$\zeta_{OV=10\%} = 0.5912$$

Y

$$t_s = 2.6$$

Entonces

$$w_n = 2.6025 \quad (4-248)$$

La ubicación de los autovalores en el plano complejo a partir del factor de amortiguamiento y la frecuencia natural esta descrita por (4-249):

$$s = -\zeta w_n \pm i \cdot w_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4-249)$$

Reemplazando en (4-249) el factor de amortiguamiento (4-247) y la frecuencia natural (4-248) se obtiene la posición de los autovalores deseados (4-250). Al sustituir (4-250) en (4-243) se obtiene el polinomio característico deseado, obteniendo los coeficientes  $\psi_1$  (4-252) y  $\psi_2$  (4-253).

$$\Lambda_{1,2} = -1.5385 \pm 2.099i \quad (4-250)$$

$$(s - \Lambda_1)(s - \Lambda_2) = 6.7728 + 3.0769s + s^2 \quad (4-251)$$

$$\psi_1 = 3.0769 \quad (4-252)$$

$$\psi_2 = 6.7728 \quad (4-253)$$

Reemplazando en (4-242) los coeficientes  $\psi_1$  (4-252) y  $\psi_2$  (4-253), junto a la definición de la matriz  $\mathbf{A}$ , se obtiene la función  $\phi(\mathbf{A})$  (4-254):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{A}) &= \\ & \left[ \begin{array}{cc} 0 & -\gamma \cdot x_{1e} \\ \epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + \gamma \epsilon \cdot x_{1e})}{m} \right) & 0 \end{array} \right]^2 + \left[ \begin{array}{cc} 0 & -3.0769\gamma \cdot x_{1e} \\ 3.0769\epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + \gamma \epsilon \cdot x_{1e})}{m} \right) & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} 6.7728 & 0 \\ 0 & 6.7728 \end{array} \right] \\ & \phi(\mathbf{A}) \\ & = \left[ \begin{array}{cc} 6.7728 - x_{1e}\gamma\epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + x_{1e}\gamma\epsilon)}{m} \right) & -3.0769x_{1e}\gamma \\ 3.0769\epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + x_{1e}\gamma\epsilon)}{m} \right) & 6.7728 - x_{1e}\gamma\epsilon \left( \alpha - \frac{n(-\beta + x_{1e}\gamma\epsilon)}{m} \right) \end{array} \right] \quad (4-254) \end{aligned}$$

Para hallar la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$ , se reemplaza en (4-241) la función  $\phi(\mathbf{A})$  (4-254) y la matriz de controlabilidad  $\mathbf{S}$  (4-238). Esta operación se realizó en *Wolfram Mathematica* y su resultado se presenta en (4-255). Para facilitar la visualización de la solución de la matriz  $\mathbf{K}$  se presenta la solución como la suma de dos matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \\ & \left[ \frac{6.7728m + (-m\alpha - n\beta)\gamma\epsilon x_{1e} + n\gamma^2\epsilon^2 x_{1e}^2}{x_{1e}(m(m\alpha + n\beta) + n(-m + n)\gamma\epsilon x_{1e})} - \frac{3.0769n\gamma\epsilon(m\alpha + n\beta - n\gamma\epsilon x_{1e})}{m(m\alpha + n\beta)^2 - (2m - n)n(m\alpha + n\beta)\gamma\epsilon x_{1e} + (m - n)n^2\gamma^2\epsilon^2 x_{1e}^2} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-255) \\ & + \left[ -\frac{3.0769m\gamma(m\alpha + n\beta - n\gamma\epsilon x_{1e})}{m(m\alpha + n\beta)^2 - (2m - n)n(m\alpha + n\beta)\gamma\epsilon x_{1e} + (m - n)n^2\gamma^2\epsilon^2 x_{1e}^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{n\gamma(6.7728m + (-m\alpha - n\beta)\gamma\epsilon x_{1e} + n\gamma^2\epsilon^2 x_{1e}^2)}{m(-m^2\alpha^2 - 2mn\alpha\beta - n^2\beta^2) + n(2m^2\alpha - m\alpha + 2mn\beta - n^2\beta)\gamma\epsilon x_{1e} + n^2(-m + n)\gamma^2\epsilon^2 x_{1e}^2} \right] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En *Wolfram Mathematica*, la matriz  $\mathbf{K}$  también se puede obtener a partir de la representación en espacio de estado del sistema y aplicando la función *StateFeedbackGains*, estableciendo los autovalores deseados. Una de las ventajas que presenta *Mathematica* es que la

representación en espacio de estado se puede definir con variables simbólicas lo que, en este caso, permite también obtener una definición simbólica de la matriz  $K$ .

#### ***4.3.5 Etapa 4: Comprobación de viabilidad del controlador en entorno de simulación para el modelo LV ante aplicación del pesticida***

Para la simulación de los sistemas LV, se conservará la definición del coeficiente  $a$  para el coeficiente  $\alpha$ , ya que ambas constantes indican la tasa per cápita de nacimientos de la presa (en este caso la plaga). Para los coeficientes  $\beta, \gamma, \epsilon$  se asignan los valores numéricos de (4-257), (4-258) y (4-259) respectivamente:

$$\alpha = a(T[^\circ C]) = 1.5318 \quad (4-256)$$

$$\beta = 0.1 \quad (4-257)$$

$$\gamma = 0.3 \quad (4-258)$$

$$\epsilon = 0.3 \quad (4-259)$$

Con respecto a las poblaciones iniciales, para la población de presas se mantiene la misma cantidad de presas establecida para los modelos de Chacón (4-260), y la población inicial de depredador se define en , ya que la población de depredador suele ser mucho menor a la población de presa (4-261).

$$x_1(0) = 35 \quad (4-260)$$

$$x_2(0) = 5 \quad (4-261)$$

$$x_{1e} = 0.7 \cdot x_1(T) \quad (4-262)$$

$$T = 6 \quad (4-263)$$

Al igual que en los modelos de Chacón, se estableció que la población de plaga que se desea al finalizar la aplicación del pesticida es el 70% de la población que había al inicio de la

aplicación del pesticida (4-262), es decir en el tiempo  $T$ . En este caso se estableció el tiempo de aplicación  $T$  en 6 unidades de tiempo (4-263) para observar la oscilación de las poblaciones antes de la aplicación.

Para simular el sistema LV se encuentra la solución del modelo original (para antes de  $T$  y después de  $T+\Delta$ ) y del modelo durante la aplicación del pesticida (entre  $T$  y  $T+\Delta$ ) por medio de métodos numéricos, como fue mencionado en la sección 4.3.1. *Etapa 1: Análisis del modelo LV ante aplicación de pesticida.*

#### 4.3.5.1 Simulación del sistema LV – antes del tiempo de aplicación T

Para simular el sistema LV original, se debe obtener una solución por métodos numéricos. Para ello usa *Mathematica* y su función *NDSolve* que permite hallar una solución numérica a un sistema de ecuaciones diferenciales especificando las condiciones iniciales del sistema, las magnitudes de las constantes y el rango del tiempo para el cual la solución será válida. En el Anexo 2 se encuentra el algoritmo en *Mathematica* con el cual se obtuvo las soluciones de los sistemas LV. Tanto para el sistema LV original como para el sistema durante la aplicación de pesticida, se utilizó el método numérico por defecto de la función *NDSolve*, que es el método de interpolación *Hermite*. Este método habilita la posibilidad de obtener las funciones resultantes de *NDSolve*, a partir del cambio del tipo de variable en el algoritmo. Dado que existe la posibilidad de que al ejecutar el método numérico el algoritmo encuentre una singularidad (por ejemplo, que una población se extinga), obtener las funciones por partes permite analizar el sistema una vez el algoritmo encuentra una solución válida. Si bien las funciones obtenidas no se presentan en el presente trabajo por su extensión, en el Anexo 2 se incluye el comando por el cual se obtienen las funciones resultantes de *NDSolve*.

Dicho esto, en la Figura 35 se presenta la solución numérica obtenida para el sistema LV hasta el tiempo de aplicación  $T=6$ . Las magnitudes de las poblaciones en el tiempo de aplicación se presentan en (4-264) y (4-265):

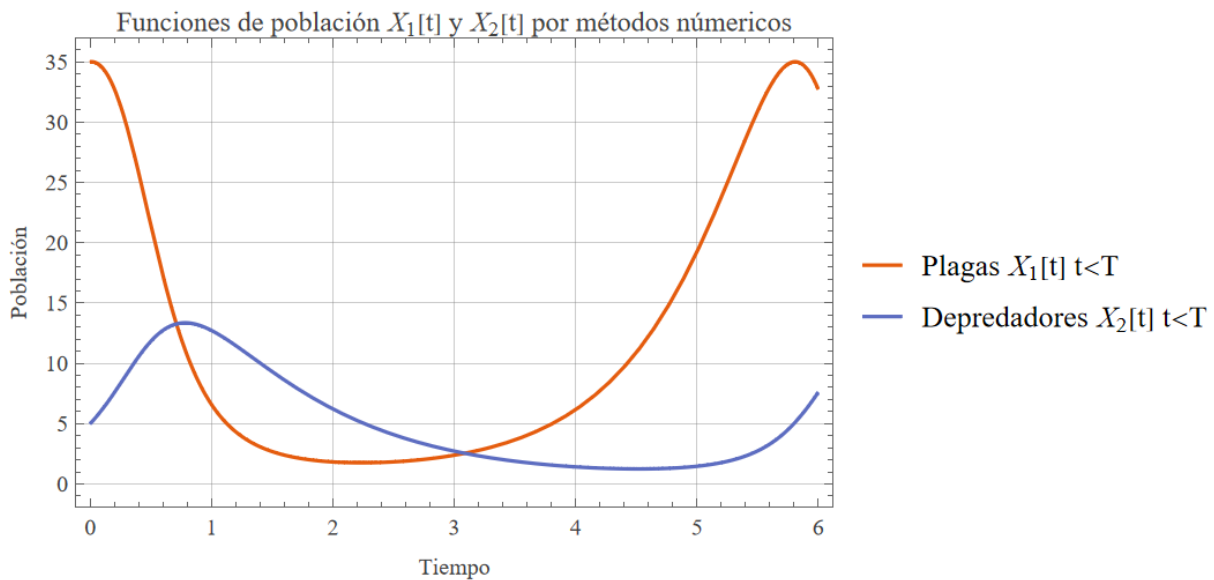
$$x_1(6) = 32.7116 \quad (4-264)$$

$$x_2(6) = 7.5971 \quad (4-265)$$

$$x_{1e} = 0.7 \cdot x_1(T) = 22.8982 \quad (4-266)$$

Reemplazando (4-264) en (4-262) se obtiene el valor de población de plaga en equilibrio (4-266).

**Figura 35.** Simulación del sistema LV antes del tiempo de aplicación  $T=6$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga y depredador, simulado en Wolfram Mathematica.

#### 4.3.5.2 Simulación del sistema LV – durante el pulso de aplicación entre (T, T+Δ]

Para simular el sistema LV durante el pulso de aplicación, se reemplaza la solución de la matriz  $\mathbf{K}$  en el sistema de ecuaciones (4-209) y (4-210), donde el elemento (1,1) de la matriz  $\mathbf{K}$  es la ganancia de realimentación de la variable de estado  $x_1$  y el elemento (1,2) de la matriz  $\mathbf{K}$  es la ganancia de realimentación de la variable de estado  $x_2$ . Así se obtiene el sistema de ecuaciones (4-267) y (4-268) para simular durante el pulso de aplicación:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \alpha \cdot x_1(t) - \gamma \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - n \cdot \mathbf{K}_{[1,1]} \cdot p(t) \cdot x_1(t)^2 \quad (4-267)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \varepsilon \cdot \gamma \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) - \beta \cdot x_2(t) - m \cdot \mathbf{K}_{[1,2]} \cdot p(t) \cdot x_2(t)^2 \quad (4-268)$$

Así mismo, se establecen las magnitudes de los coeficientes  $n$  y  $m$ , que indican que tanto afecta el pesticida a las poblaciones del sistema. Para esta simulación, se considera que el pesticida tiene mayor efecto en la población de plaga que en la del depredador y se definen las ecuaciones (4-269) y (4-270). Tras definir las constantes  $\alpha$  (4-256),  $\beta$  (4-257),  $\gamma$  (4-258),  $\varepsilon$  (4-259),  $n$  (4-269),  $m$  (4-270) y población en equilibrio de presa (4-266), se sustituyen estos valores en la definición simbólica de la matriz  $\mathbf{K}$  (4-255) para obtener su valor numérico en (4-272):

$$n = 1 \quad (4-269)$$

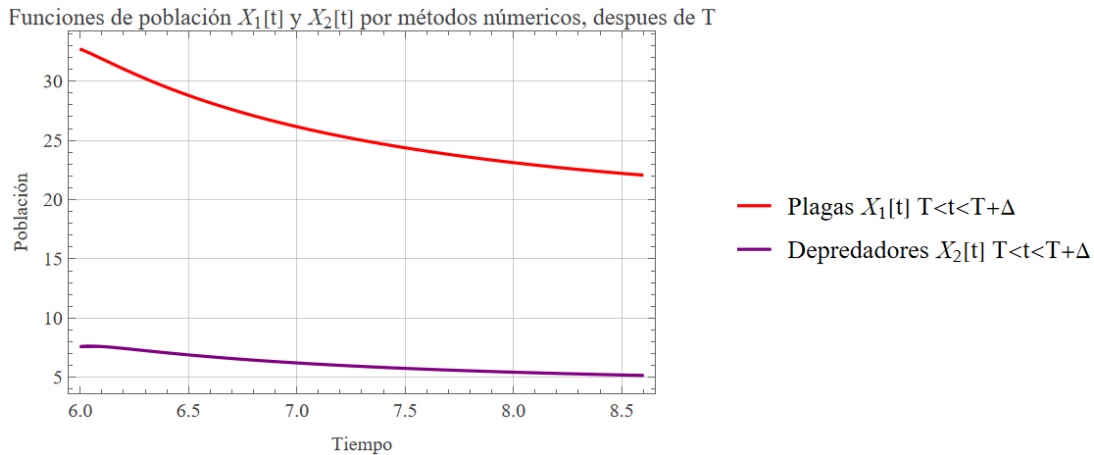
$$m = 0.5 \quad (4-270)$$

$$\mathbf{K} = [-0.0536 \quad 1.8822] \quad (4-271)$$

La Figura 36 presenta la solución numérica del sistema LV durante el pulso de aplicación, usando la definición de las constantes  $\alpha$  (4-256),  $\beta$  (4-257),  $\gamma$  (4-258),  $\varepsilon$  (4-259),  $n$  (4-269),  $m$

(4-270), condiciones iniciales (en  $T=6$ ) (4-264) y (4-265), población en equilibrio de presa (4-266), y la ganancia de realimentación  $K$  (4-272). Esta simulación se realiza entre  $(T, T + \Delta] = (6, 8.6]$ .

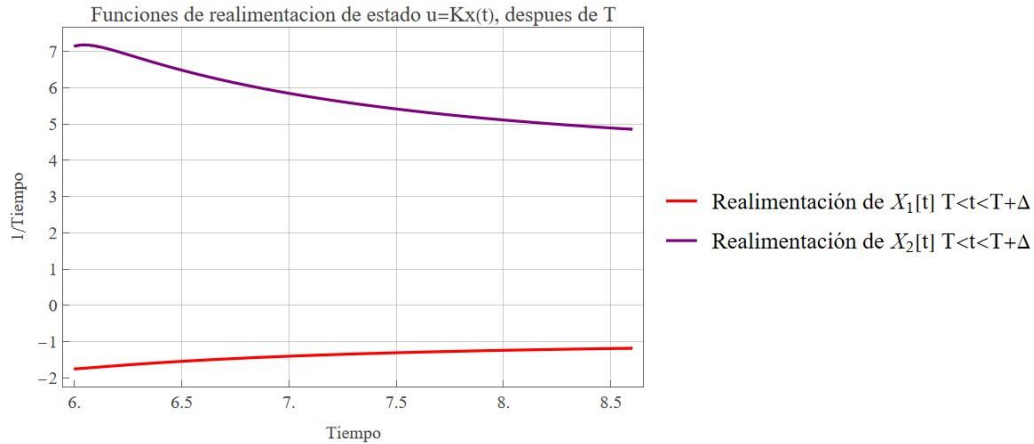
**Figura 36.** Simulación del sistema LV durante el pulso de aplicación  $(T, T+\Delta]$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga y depredador durante la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

Así mismo, se simuló la señal de control para la realimentación de estado, que consistió en graficar el producto de la ganancia  $K$  (4-272) con las funciones graficadas en la Figura 36. Para el caso de la población de depredador, se incluyó el producto con el factor  $m$ . La señal de control por realimentación de estados del sistema LV durante el pulso de aplicación se presenta en la Figura 37.

**Figura 37.** Simulación de la señal de control por realimentación de estados del sistema LV durante el pulso de aplicación.



*Nota:* Realimentación de estado para la plaga y depredador, simulado en Wolfram Mathematica.

En la Figura 37 se puede observar que, en esta simulación, el pesticida promovió ligeramente el crecimiento de la población de plaga y tuvo efectos negativos en la población del depredador. Este comportamiento puede indicar que el pesticida regula la población del depredador para que esta reduzca a la población de plaga hasta cierta magnitud, que en este caso es cercana a la población de presa deseada. Para estimar la eficacia de la estrategia de control simulada, se calcula el error a partir de las magnitudes de las poblaciones al finalizar el pulso de aplicación que se presentan en (4-272) y (4-273):

$$x_1(8.6) = 22.0667 \quad (4-272)$$

$$x_2(8.6) = 5.1608 \quad (4-273)$$

$$Error_{ss}(\%) = 100 \cdot \frac{|x_{1e} - x_1(T + \Delta)|}{x_{1e}} \quad (4-274)$$

$$Error_{ss}(\%) = 100 \cdot \frac{|22.8982 - 22.0667|}{22.8982} = 3.6313\% \quad (4-275)$$

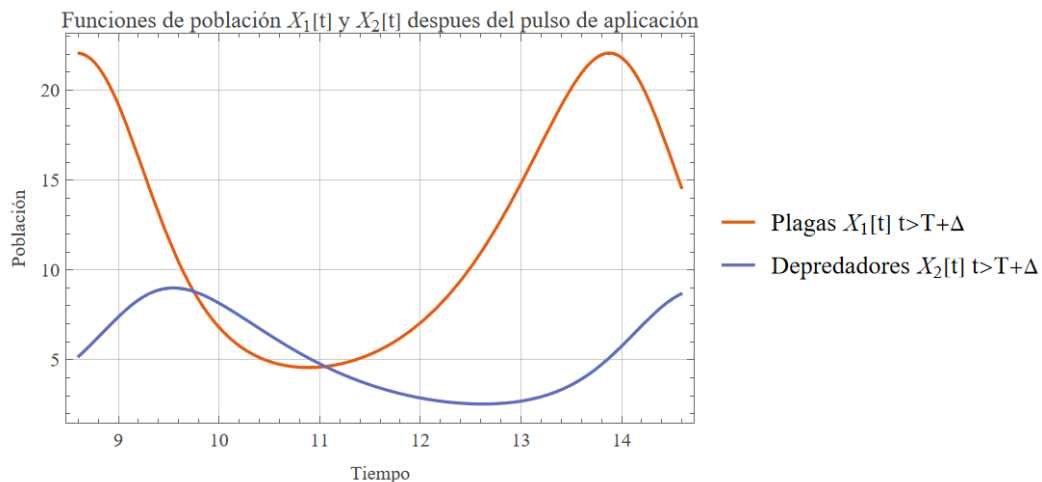
La ecuación (4-274) permite estimar el error porcentual en estado estable del sistema LV durante el pulso de aplicación, que compara el valor de población deseado  $x_{1e}$  con la población obtenida al finalizar el pulso  $x_1(T + \Delta)$ . Sustituyendo  $x_{1e}$  (4-266) y  $x_1(T + \Delta)$  (4-272) en (4-274) se obtuvo (4-275), donde se evidencia un error del 3.6% aproximadamente, que a su vez equivale

a un error de un individuo menos del deseado en la población de plaga. En este caso, que la población de plaga baje de la población deseada no es necesariamente ocasiona un impacto negativo en el sistema mientras la población de depredador no se extinga, pues de lo contrario la reducción de la población de plaga recae completamente en la aplicación de pesticida.

#### 4.3.5.3 Simulación del sistema LV – después del pulso de aplicación $T + \Delta$

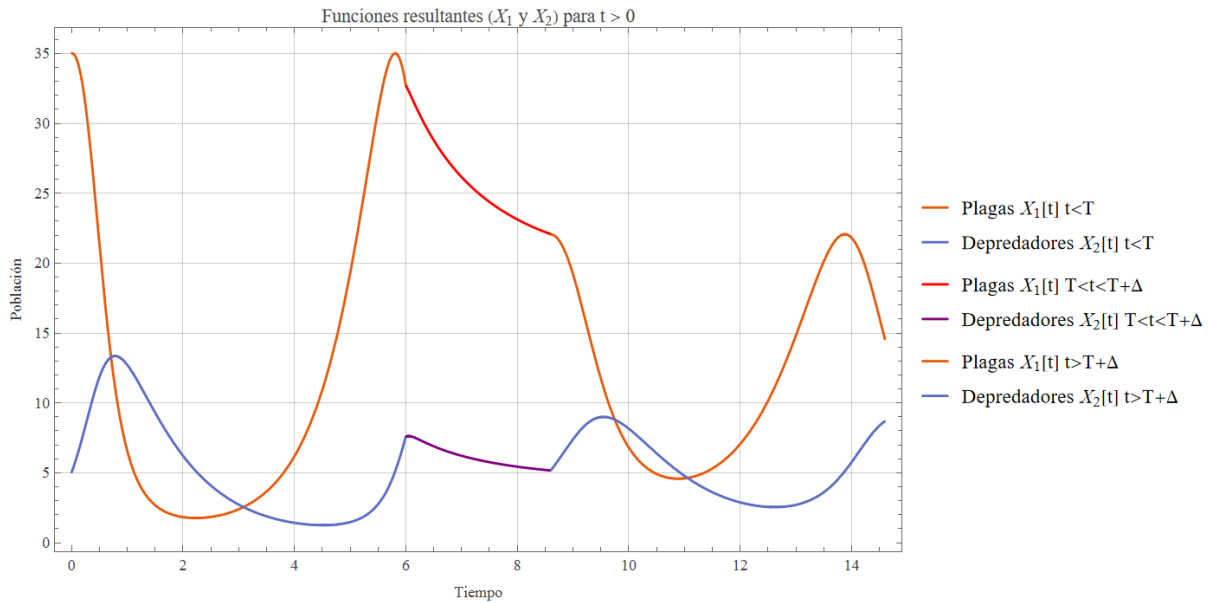
Por último, se realizó la simulación de las ecuaciones (4-211) y (4-212) (sistema LV original) después del pulso de aplicación  $T + \Delta$  donde el sistema retoma el comportamiento oscilatorio. La Figura 38 presenta la solución numérica del sistema LV después del pulso de aplicación, usando la definición de las constantes  $\alpha$  (4-256),  $\beta$  (4-257),  $\gamma$  (4-258),  $\epsilon$  (4-259), condiciones iniciales (en  $T=8.6$ ) (4-272) y (4-273), y población en equilibrio de presa (4-266). Esta simulación se realiza entre  $(T + \Delta, 2T + \Delta] = (8.6, 14.6]$ . En la figura Figura 39 se presenta entonces la simulación del sistema LV propuesto antes, durante y después del pulso de aplicación de pesticida.

**Figura 38.** Simulación del sistema LV después del pulso de aplicación  $t > T + \Delta$ .



*Nota:* Gráfica de población de plaga y depredador después de la aplicación, simulado en Wolfram Mathematica.

**Figura 39.** Simulación del sistema LV antes, durante y después del pulso de aplicación de pesticida.



*Nota:* Gráfica de población de plaga y depredador, simulado en Wolfram Mathematica.

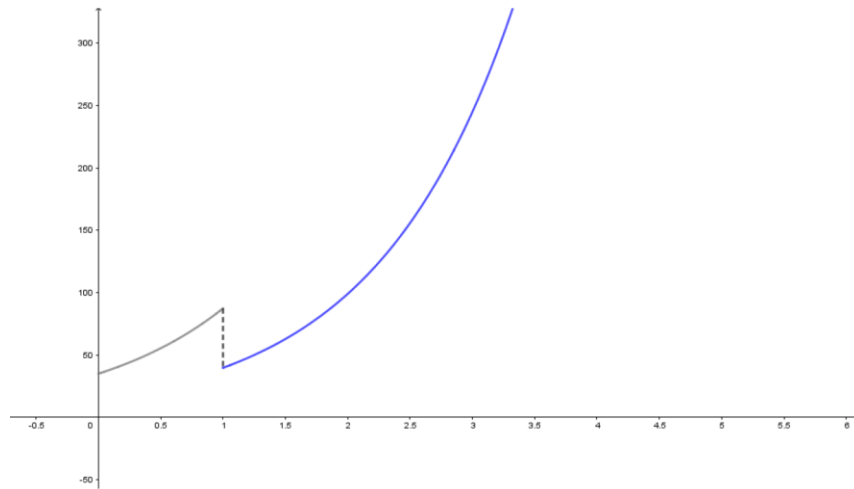
## 4.4 Discusión de resultados

### 4.4.1 Modelo de única aplicación de pesticida

Para analizar el desempeño del modelo de única aplicación de pesticida donde la efectividad del pesticida se determina a partir de un sistema de control por realimentación de estados, resulta útil comparar los resultados de la Figura 12, Figura 13.a y Figura 13.b con el comportamiento de la función población obtenida por Chacón en su modelo única aplicación con impulsos unitarios [19], cómo se presenta en la función por partes de la ecuación (4-276):

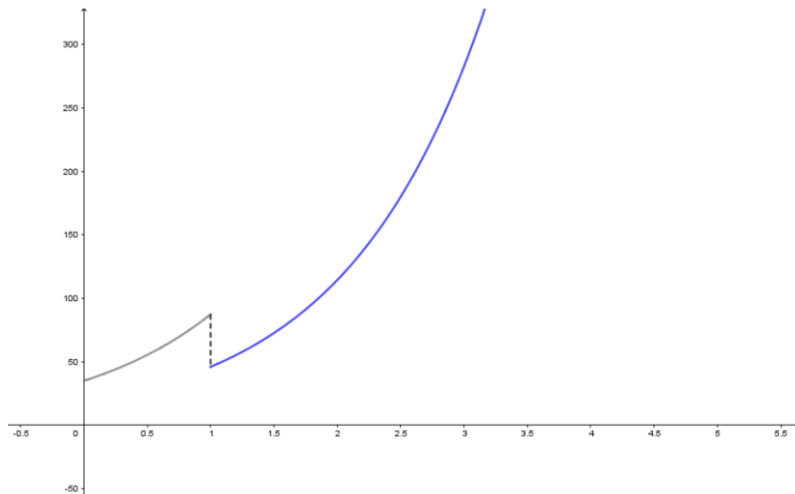
$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1), & \text{si } t < T, \\ x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1) - \frac{c}{1+c} \left( x_0 e^{aT} + \frac{b}{a}(e^{aT} - 1) \right) e^{a(t-T)} & \text{si } t \geq T. \end{cases} \quad (4-276)$$

**Figura 40.** Gráfica de (4-276) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 1.2$ ,  $T = 1$ .



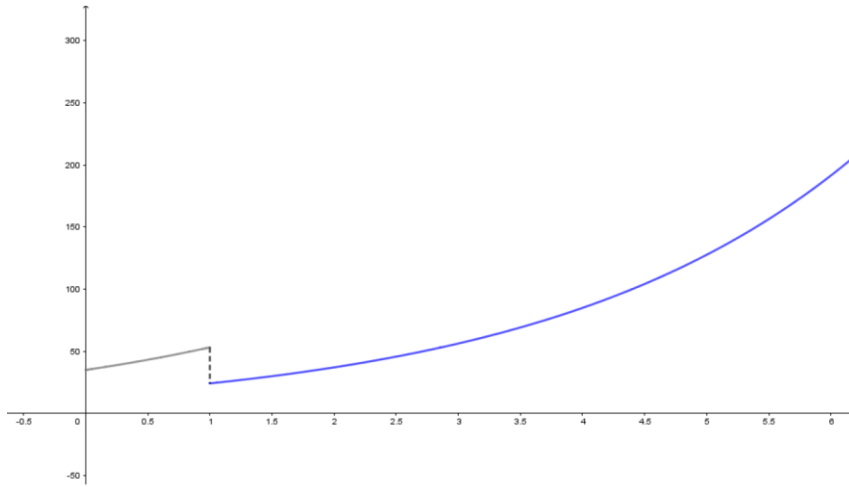
*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

**Figura 41.** Gráfica de (4-276) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.9$ ,  $T = 1$ .



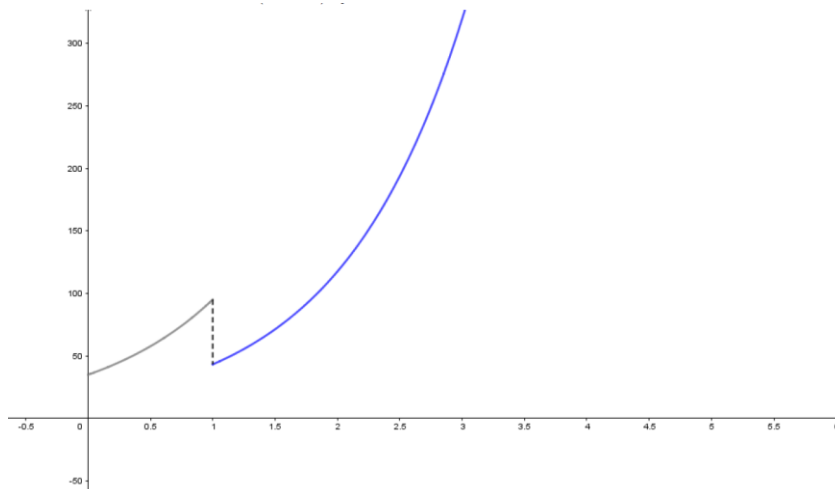
*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

**Figura 42.** Gráfica de (4-276) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 0.4$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 1.2$ ,  $T = 1$ .



*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

**Figura 43.** Gráfica de (4-276) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1.2$ ,  $T = 1$ .



*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

Es válido recordar que en la solución obtenida por Chacón (4-276) el término constante  $c$  representa la efectividad del pesticida, lo que en el presente trabajo de grado se expandió a la señal de control  $u(t)$  de la efectividad del pesticida. En la función por partes que obtiene Chacón (4-276) se puede observar cómo después del impulso de aplicación en  $T$  el pesticida sigue teniendo efectos en la función de población ya que la constante de efectividad  $c$  se mantiene después del tiempo  $T$ . Esto implica que el análisis realizado al conservar la función del pulso de aplicación y la simulación de la Figura 13.b son coherentes con los resultados de Chacón (Figura 40, Figura 41, Figura 42 y Figura 43) pese a las diferencias con respecto al modelamiento de la aplicación del pesticida.

Así mismo, a partir del cálculo de error obtenido en (4-112) para  $X_1$  y  $X_2$ , indica que este modelo presenta un bajo error (1.447%) por encima de la magnitud de población deseada. Por otro lado, y recordando que los autovalores se establecieron en la misma magnitud  $a$  para conservar la misma magnitud (diferente signo) que en el sistema inestable (antes de  $T$ ), es válido recalcar que para alcanzar la magnitud objetivo (70% de la población antes empezar el pulso de aplicación) el controlador requirió de 2.6 unidades de tiempo y la señal de control inició con una efectividad capaz de eliminar cerca de 2.2 veces la magnitud de población en el instante de aplicación  $T$ , como se observó en la Figura 5 y la Figura 7. Esto implica que, si el controlador se diseñara para obtener un tiempo de asentamiento menor, la efectividad necesaria para alcanzar la población deseada sería mayor, y dependerá de cada pesticida y las condiciones particulares de cada cultivo si dicha efectividad es muy alta.

Es necesario recalcar que, dado que la efectividad del pesticida esta intrínsecamente relacionada con la concentración de los componentes químicos de la solución aplicada al cultivo, el límite de efectividad de pesticida que se puede aplicar está directamente relacionado con los

límites de residuos (LMR) establecidos en la normativa legal vigente, como se describió en la sección 2.3. *Marco Legal*. Es por ello por lo que se debe verificar que la concentración química de los componentes del pesticida, obtenida a partir de la efectividad determinada por el controlador, no supere los LMR de la normativa legal vigente. En caso de requerir efectividades superiores se deben abordar otras estrategias, por ejemplo cambios en la frecuencia y duración de la aplicación de pesticida, que permitan reducir la población de plaga a la magnitud deseada sin comprometer riesgos a la salud humana y el ecosistema acorde a los LMR.

#### ***4.4.2 Modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida***

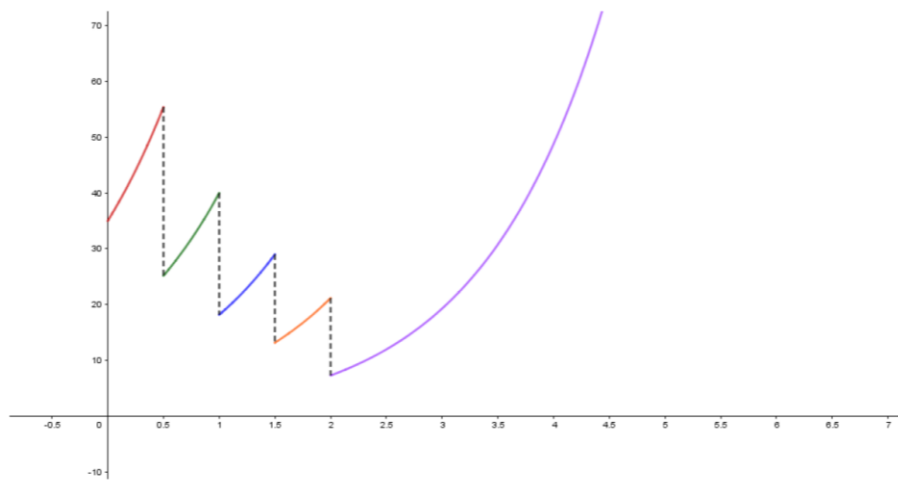
Con respecto al modelo de sumatoria de aplicaciones periódicas, se compara con respecto al modelo de sumatorias de impulsos periódicos propuesto por Chacón, modelo que se presenta en (4-277). Las simulaciones que Chacón realiza de (4-277) se presentan en la

**Figura 44**, Figura 45, Figura 46 y Figura 47.

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1), & \text{si } t < T_1, \\ x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1) - c \cdot x(T_1) e^{a(t-T_1)}, & \text{si } T_1 \leq t < T_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1) - c \sum_{i=1}^p x(T_i) e^{a(t-T_i)}, & \text{si } T_p \leq t < T_p + 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1) - c \sum_{i=1}^m x(T_i) e^{a(t-T_i)}, & \text{si } T_m \leq t \end{cases} \quad (4-277)$$

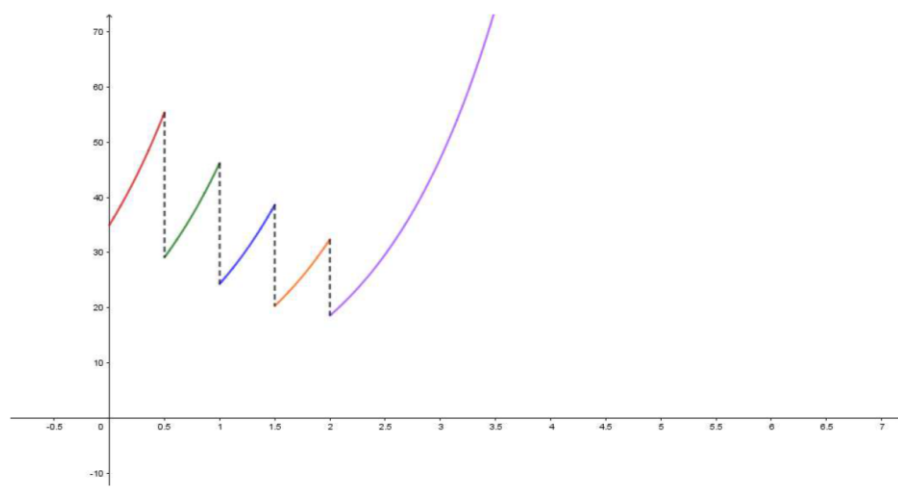
$$x(T_i) = \frac{c}{1+c} \left( x_0 e^{aT_i} + \frac{b}{a}(e^{aT_i} - 1) - c \sum_{r=1}^{i-1} x(T_r) e^{a(T_i-T_r)} \right) \quad (4-278)$$

**Figura 44.** Gráfica de (4-277) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 1.2$ ,  $T_1 = 0.5$ ,  $T_2 = 1$ ,  $T_3 = 1.5$ ,  $T_4 = 2$ .



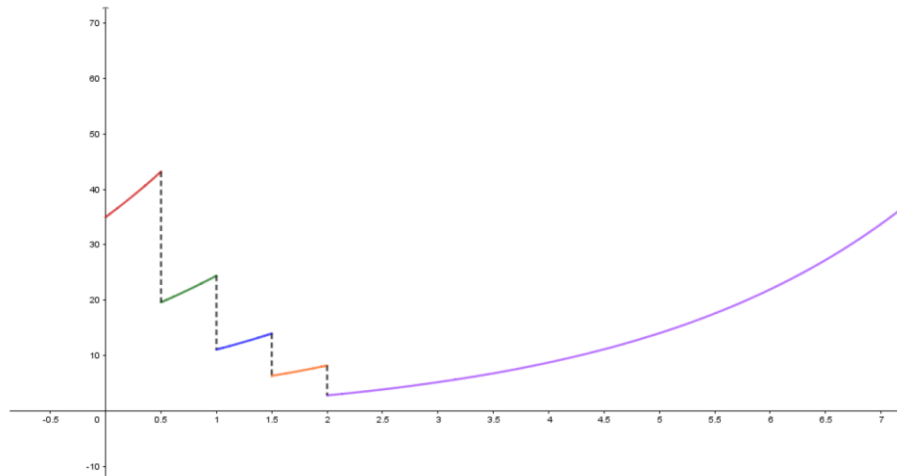
*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

**Figura 45.** Gráfica de (4-277) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 0.9$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.9$ ,  $T_1 = 0.5$ ,  $T_2 = 1$ ,  $T_3 = 1.5$ ,  $T_4 = 2$ .



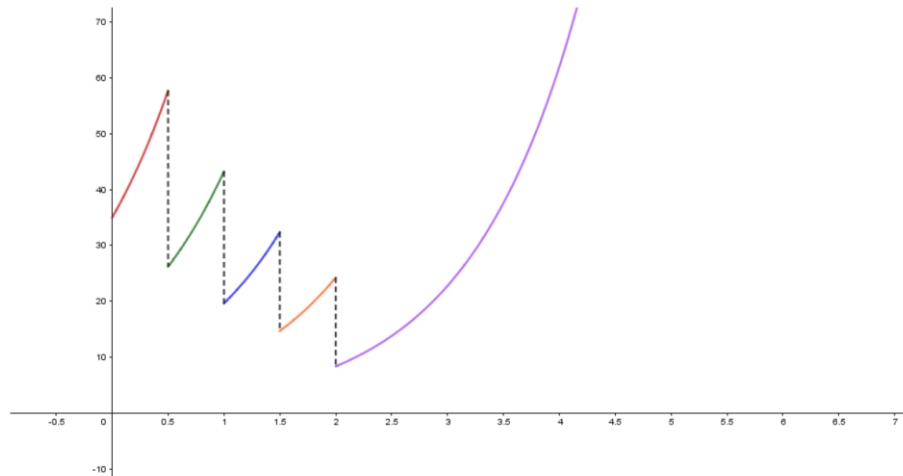
*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

**Figura 46.** Gráfica de (4-277) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 0.4$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 1.2$ ,  $T_1 = 0.5$ ,  $T_2 = 1$ ,  $T_3 = 1.5$ ,  $T_4 = 2$ .



*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

**Figura 47.** Gráfica de (4-277) para  $x_0 = 35$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1.2$ ,  $T_1 = 0.5$ ,  $T_2 = 1$ ,  $T_3 = 1.5$ ,  $T_4 = 2$ .



*Nota.* Tomado de Chacón (2020) [19].

Es válido recordar que en la solución obtenida por Chacón en (4-277) y (4-278) el término constante  $c$  representa la efectividad del pesticida, lo que en el presente trabajo de grado se

expandió a la señal de control  $u(t)$  de la efectividad del pesticida. En la función por partes que obtiene Chacón (4-277) se puede observar cómo después de cada impulso de aplicación en  $T_i$  el pesticida sigue teniendo efectos en la función de población ya que la constante de efectividad  $c$  se mantiene después de cada tiempo  $T_i$ .

Así mismo, el modelo de (4-277) relacionada cada aplicación en  $T_i$  con la magnitud de población en dicho tiempo  $x(T_i)$ , resultado de integrar el producto  $x(t) \cdot \delta(t - T_i)$ . Esta propiedad permite que en el modelo de (4-277) el efecto de las aplicaciones periódicas de pesticida se acumule, como se puede observar en la

**Figura 44** y en la Figura 46. Aquí se presenta una diferencia fundamental con respecto al modelo analizado en el presente trabajo de grado, basado en pulsos de aplicación que resultan de la diferencia de escalones unitarios en  $T_i$  y  $T_i + \Delta$ , pues al usar escalones unitarios se pierde la propiedad que conserva la magnitud de la población en cada instante  $T_i$ . Por otro lado, tanto en el modelo de sumatoria durante los pulsos  $j$  (4-161) como en el modelo de sumatoria después del pulso  $j$  y antes del pulso  $j - 1$  (4-169) se observó que la función población depende del producto  $\Delta \cdot (j - 1)$  de la duración del pulso  $\Delta$  y de la cantidad de pulsos finalizados  $j - 1$ , o del producto de  $j\Delta$  de los pulsos finalizados  $j$  antes de  $j + 1$ . Sin embargo, esta dependencia no se encuentra en las funciones (4-166) y (4-167) (durante el pulso  $j$ ) o (4-174) y (4-175) (después del pulso  $j$  y antes de  $j + 1$ ) tras hallar el valor de la constante de integración, aunque si se conserva la diferencia entre las funciones  $X_1$  y  $X_2$ , donde  $X_1$  tiene un crecimiento exponencial acelerado después de la aplicación de pesticida y  $X_2$  presenta una etapa de crecimiento lento antes de retomar un crecimiento acelerado. Esto implica que si bien en las simulaciones presentadas en la Figura 32 y la Figura 34 no se conserva el efecto de acumulación de las aplicaciones periódicas de pesticida (observado en la

**Figura 44** y en la Figura 46), si se conserva el efecto de la aplicación inmediatamente anterior  $j$  en la función antes de la siguiente aplicación  $j + 1$ , como se observa en la Figura 34.

Por último, el error presentado por el controlador durante la segunda aplicación fue de 2.36% para  $X_1$  (4-188) y 0.95% para  $X_2$  (4-189), y durante la tercera aplicación fue de 2.36% para  $X_1$  (4-200) y 0.91% para  $X_2$  (4-201). Esto implica que el controlador tuvo un error bajo, considerando que la población deseada durante cada aplicación del pesticida  $x_{r,j}$  fue la misma para cada aplicación  $j$ , y que el tiempo de asentamiento fue el mismo para todas las aplicaciones.

En las simulaciones de la señal de control para  $X_1$  (Figura 15 y Figura 25) se pudo observar como el controlador calculo una efectividad con la capacidad de reducir más 7 veces la población actual, para lograr la población deseada en el tiempo de asentamiento establecido. Esto se debe al crecimiento acelerado que presentaban las funciones  $X_1$  y, según el tipo de pesticida y el cultivo en particular, dicha efectividad de pesticida podrá ser alta o moderada, por lo que se debe analizar en cada caso si la efectividad calculada es excesiva. Es necesario reiterar que el límite de efectividad de pesticida que se puede aplicar está directamente relacionado con los límites de residuos (LMR) establecidos en la normativa legal vigente, como se describió en la sección 2.3. *Marco Legal*. Es por ello que se debe verificar que la concentración química de los componentes del pesticida, obtenida a partir de la efectividad determinada por el controlador, no supere los LMR, y que en caso de requerir efectividades superiores se aborden otras estrategias que permitan reducir la población de plaga a la magnitud deseada.

En cuanto a las simulaciones de la señal de control para  $X_2$  (Figura 17 y Figura 27), el controlador calcula la efectividad inicial en 1.57 y 1.54 veces la población actual, respectivamente. Dado que las funciones  $X_2$  tenían un crecimiento lento, las aplicaciones periódicas del pesticida se presentaron antes del crecimiento acelerado, por lo que la población no creció significativamente

y el controlador se mantuvo en magnitudes de efectividad bajas. En este caso la acción de control es aparentemente preventiva, al no permitir que la población entre en la etapa de crecimiento acelerado; sin embargo, esto puede tener un efecto contraproducente si la efectividad es demasiado baja ya que, como indica la literatura [6][7][13], la población de plaga (localmente, es decir solo para el cultivo analizado en particular) podría generar resistencia al pesticida por exposición a insuficiente concentración de pesticida durante tiempos prolongados.

#### ***4.4.3 Modelo LV ante aplicación de pesticida***

Con respecto al rendimiento del control por realimentación de estados para la aplicación de pesticida en el modelo LV, en la Figura 39 se puede observar que la función del controlador es reducir la magnitud de población con respecto a la cual va a ocurrir el comportamiento del sistema LV después de la aplicación del pesticida. Sin embargo, es fundamental recordar que los sistemas LV son susceptibles a la extinción de las especies [36], por lo que se debe tener especial precaución con la magnitud de la población de depredador ya que, en general, presentara menor magnitud que la población de plaga y en los tiempos de menor magnitud puede presentar poblaciones cercanas a los 2 individuos, como puede observar en la Figura 39. En el caso en el que la población de depredador se extinga, el modelo LV pasará a una forma similar a los modelos de Chacón (sin considerar la migración), donde el crecimiento de la plaga es exponencial y la regulación de dicha población recaerá completamente en la aplicación de pesticida.

Con el fin de evitar la extinción de la población de depredador durante la aplicación de pesticida se puede implementar un controlador con saturación, donde la efectividad máxima no solo cumpla con los LMR sino también con un límite asociado a los efectos negativos del pesticida en la especie de depredador en particular. Así mismo, se puede hacer un análisis del efecto

acumulado de la efectividad del pesticida en la población de depredador, que permita identificar si el periodo de exposición al pesticida también se debe modificar para evitar la extinción de dicha especie. Otra estrategia que se puede implementar es el control biológico a partir de la liberación de depredadores naturales en el cultivo, lo que se vería reflejado en una señal de control que suma la cantidad necesaria de individuos a la población de depredador para que esta se conserve en el cultivo.

Si bien es cierto que también se podrían implementar restricciones en la variable de estado que alerten al controlador de magnitudes muy bajas de depredador, es necesario recalcar que la medición de las poblaciones en este tipo de sistemas es compleja (por la cantidad y tamaño de los individuos con relación al ecosistema en el que se encuentran), por lo que las estrategias de prevención no deben depender únicamente de la medición constante de la población de depredador, cómo indica la literatura [36][39][43]. Minimizar la monitorización de las poblaciones permite simplificar la implementación del controlador [43], y se puede compensar a través de mediciones periódicas [39] o estimaciones precisas de las constantes del sistema en el que se implementa el controlador [36].

## 5. Conclusiones y trabajos Futuros

### 5.1. Conclusiones

El diseño de un controlador por realimentación de estados para modelos de dinámica poblacional de plagas ante aplicación periódica de un pesticida permite analizar el manejo de poblaciones de plagas cómo un problema de optimización a través del desarrollo de sistemas de control que estimen la efectividad necesaria en los pesticidas aplicados para reducir la población a magnitudes deseadas.

El modelamiento de los modelos de Chacón usando pulsos, compuestos por la diferencia de escalones unitarios, en vez de impulsos o deltas de Dirac permite analizar el comportamiento del sistema ante la aplicación prolongada de un pesticida y estimar el comportamiento que el controlador debe tener para cumplir con características dinámicas deseadas en el sistema, como el tiempo de asentamiento. Sin embargo, este cambio en el modelo de sumatoria hace que el efecto de la aplicación periódica de pesticida no se acumule, y solo se presenten los efectos de la aplicación de pesticida inmediatamente anterior.

Por otro lado, solucionar los modelos ampliados de Chacón como una ecuación diferencial de Riccati con las soluciones particulares del sistema permite analizar dos posibles comportamientos del modelo ampliado después de la aplicación del pesticida. Estas soluciones contemplan un crecimiento exponencial igual al esperado sin aplicación de pesticida y un crecimiento exponencial lento que posteriormente retoma acelera como el sistema sin aplicación de pesticida. Esto indica que en el sistema se puede esperar que el pesticida cause un atraso en el crecimiento de la población, que puede ser aprovechado en los modelos de sumatoria de aplicaciones para evitar un crecimiento excesivo de la población de plaga. Así mismo, es

importante aclara que el análisis de la magnitud de la señal de control a lo largo de aplicación de pesticida se debe enmarcar en el contexto particular de cada cultivo y el pesticida aplicado para determinar si dicha magnitud es excesiva o insuficiente para evitar efectos no deseados en el cultivo o resistencia al pesticida.

Para el análisis de los modelos de dinámica poblacional de plagas y el diseño de los controladores es útil desarrollar la representación en espacio de estado ya que estos modelos tienen condiciones iniciales diferentes de cero, por lo que el análisis por funciones de transferencia no se aplica en este caso. Así mismo, la representación en espacio de estado permite representar sistemas no lineales, a pesar de que en este caso se optó por construir una representación simplificada a partir de la linealización de los modelos por medio de la matriz jacobiana. El uso del jacobiano permitió posteriormente analizar la estabilidad y el comportamiento de los sistemas antes y después de la aplicación del pesticida como señal de control. Así mismo, el análisis de observabilidad y controlabilidad permiten garantizar que el sistema es medible y controlable previo al desarrollo y simulación del sistema de control. En el caso del sistema Lotka-Volterra ampliado, el análisis de observabilidad y controlabilidad facilitan la obtención de la ganancia de realimentación al desarrollar las matrices de observabilidad y controlabilidad previamente.

Con respecto al diseño del control por realimentación de estados, este se desarrolló a partir de la representación en espacio de estados del sistema linealizado. Este enfoque permite analizar el comportamiento del sistema en torno a un punto o región de interés, que se establece como los puntos de equilibrio en los cuales se evalúa el sistema linealizado, para posteriormente desarrollar la estrategia de control e implementarla en el sistema no lineal. El objetivo de esta estrategia es que el controlador lleve el sistema no lineal al punto de equilibrio establecido en la linealización. A través de la comprobación de viabilidad en entorno de simulación se pudo comprobar que

efectivamente el controlador lleva el sistema no lineal a los puntos de equilibrio establecidos, dentro de un margen de error menor al 4% en todos los casos.

En el caso del sistema Lotka-Volterra ampliado, la simulación fue fundamental para obtener el comportamiento del sistema antes, durante y después de la aplicación del pesticida, ya que este tipo de sistemas no se pueden resolver analíticamente y requieren métodos numéricos o computacionales para su solución. En el proceso de simulación del sistema Lotka-Volterra durante la aplicación del pesticida se observó que el controlador lleva a la población de plaga a una magnitud menor de población. Si bien la reducción presentada en la simulación no es significativa (1 individuo menos), se debe verificar que la solución por métodos numéricos no presente una reducción mayor que lleve a la población de depredador a la extinción.

Otro elemento que se debe considerar en el sistema Lotka-Volterra ante aplicación de pesticida es que la estrategia de control va a reducir la magnitud de población en torno a la cual las poblaciones de plaga y depredador van a oscilar. Esto implica buscar estabilidad asintótica durante la aplicación del pesticida entendiendo que el sistema posteriormente retoma la estabilidad marginal y el comportamiento oscilatorio después de la aplicación del pesticida.

El análisis de un sistema Lotka-Volterra ante aplicación de pesticidas, donde la presa es la población de plaga, es importante para modelar los efectos de los pesticidas en poblaciones de “*organismos no objetivo*” potencialmente beneficiosos para el cultivo y para la regulación de la población de plaga desde un enfoque de optimización. Preservar las poblaciones de depredador, en tanto sean neutrales o beneficiosas para el cultivo, complementa el uso de pesticidas mientras se conserva la dinámica de depredación preexistente en el cultivo.

## 5.2. Trabajos Futuros

La presente investigación reconoce que diversas problemáticas en diversas áreas del conocimiento. Con respecto al modelamiento de dinámicas poblacionales de plagas, se deben considerar modelos más complejos o que consideren diversas interacciones para entender y predecir mejor el comportamiento de las poblaciones de plagas. Y para correcta predicción del comportamiento de las poblaciones de plagas, las futuras investigaciones también deben abordar estrategias para el muestreo y cuantificación de las poblaciones de plagas y organismos “no objetivo” (como agentes de control biológico). Dicha medición debe estar enfocada en sistemas autónomos como modelos de Inteligencia y Visión Artificial, sistemas IoT (Internet de las cosas, por sus siglas en inglés), o sistemas robóticos que monitoreen de variables ambientales para deducir o aproximar la cantidad de plagas presentes en el cultivo. Así mismo, las futuras investigaciones deberán abordar la estimación de la efectividad del pesticida a partir de su concentración en disoluciones o el impacto de sus componentes en la plaga en un cultivo en particular (considerando la resistencia al pesticida), para que el controlador pueda calcular correctamente la dosis de pesticida en cada aplicación.

En cuanto a los sistemas de control, futuras investigaciones pueden analizar los modelos de dinámica poblacional de plagas por medio de estrategias de control no lineal, ya que la mayoría de estos modelos son no lineales. El desarrollo de observadores de estado puede apoyar a los sistemas de monitoreo en la estimación de la población de plaga y otros organismos en el sistema.

### Referencias

- [1] S. Islam, “Agriculture, food security, and sustainability: a review,” *Exploration of Foods and Foodomics*, Apr. 2025, doi: 10.37349/eff.2025.101082.
- [2] Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO), *World Food and Agriculture - Statistical Yearbook 2020*. FAO, 2020. doi: 10.4060/cb1329en.
- [3] Global Living Wage Coalition and Align Tool, “Colombia - ALIGN.” Accessed: May 16, 2025. [Online]. Available: <https://align-tool.com/source-map/colombia>
- [4] OECD, *Agricultural Policy Monitoring and Evaluation 2023: Adapting Agriculture to Climate Change*. in *Agricultural Policy Monitoring and Evaluation*. Paris: OECD Publishing, 2023. doi: 10.1787/b14de474-en.
- [5] S. Savary, L. Willocquet, S. J. Pethybridge, P. Esker, N. McRoberts, and A. Nelson, “The global burden of pathogens and pests on major food crops,” *Nat. Ecol. Evol.*, vol. 3, no. 3, pp. 430–439, Mar. 2019, doi: 10.1038/s41559-018-0793-y.
- [6] J. C. Simon and J. Peccoud, “Rapid evolution of aphid pests in agricultural environments,” Apr. 01, 2018, *Elsevier Inc.* doi: 10.1016/j.cois.2017.12.009.
- [7] X. Wang, Y. Zhang, H. Yuan, and Y. Lu, “Effects of Seven Plant Essential Oils on the Growth, Development and Feeding Behavior of the Wingless *Aphis gossypii* Glover,” *Plants*, vol. 13, no. 7, p. 916, Mar. 2024, doi: 10.3390/plants13070916.
- [8] W. Zhou, M. Li, and V. Achal, “A comprehensive review on environmental and human health impacts of chemical pesticide usage,” Jan. 01, 2025, *KeAi Communications Co.* doi: 10.1016/j.emcon.2024.100410.
- [9] Z. Jiao *et al.*, “Sorghum aphid/greenbug: current research and control strategies to accelerate the breeding of aphid-resistant sorghum,” *Front. Plant Sci.*, vol. 16, 2025, doi: 10.3389/fpls.2025.1588702.

- [10] K. S. Singh *et al.*, “Global patterns in genomic diversity underpinning the evolution of insecticide resistance in the aphid crop pest *Myzus persicae*,” *Commun. Biol.*, vol. 4, no. 1, Dec. 2021, doi: 10.1038/s42003-021-02373-x.
- [11] W. Aktar, D. Sengupta, and A. Chowdhury, “Impact of pesticides use in agriculture: Their benefits and hazards,” *Interdiscip. Toxicol.*, vol. 2, no. 1, pp. 1–12, 2009, doi: 10.2478/v10102-009-0001-7.
- [12] CABI International, “IPM: Calculating dosage.,” *PlantwisePlus Knowledge Bank*, Apr. 2023, doi: 10.1079/pwkb.20238000023.
- [13] S. O. Duke, “Pesticide Dose-A Parameter with Many Implications,” in *Pesticide Dose: Effects on the Environment and Target and Non-Target Organisms*, vol. 13, S. O. Duke, P. Kudsk, and K. Solomon, Eds., UTC, 2017, ch. 1, p. 24. doi: 10.1021/bk-2017-1249.ch001.
- [14] European Environment Agency, “How pesticides impact human health and ecosystems in Europe,” Apr. 2023. doi: 10.2800/760240.
- [15] N. F. Wan *et al.*, “Pesticides have negative effects on non-target organisms,” *Nature Communications*, vol. 16, no. 1, Dec. 2025, doi: 10.1038/s41467-025-56732-x.
- [16] D. F. Lorenzo, “Manejo integrado de pulgones en cultivos hortícolas al aire libre,” TRABAJO FIN DE MASTER EN SANIDAD Y PRODUCCIÓN VEGETAL, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA, Valencia, España, 2016. Accessed: Mar. 25, 2024. [Online]. Available: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcgleclfindmkaj/https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/74502/FELIPE%20-%20Manejo%20integrado%20de%20pulgones%20en%20cultivos%20hort%C3%A Dcolas%20al%20aire%20libre..pdf?sequence=5

- [17] M. Calvo-Agudo, J. F. Tooker, M. Dicke, and A. Tena, “Insecticide-contaminated honeydew: risks for beneficial insects,” *Biological Reviews*, vol. 97, no. 2, pp. 664–678, Apr. 2022, doi: 10.1111/brv.12817.
- [18] J. Riedo, M. C. Rillig, and F. Walder, “Beyond Dosage: The Need for More Realistic Research Scenarios to Understand Pesticide Impacts on Agricultural Soils,” Apr. 30, 2025, *American Chemical Society*. doi: 10.1021/acs.jafc.4c12818.
- [19] N. L. Chacón, “UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL DIFUSO,” Trabajo de grado para optar al título de Matemático, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 2020.
- [20] A. A. Berryman, “The Origins and Evolution of Predator-Prey Theory,” *Source: Ecology*, vol. 73, no. 5, pp. 1530–1535, 1992.
- [21] R. C. Dorf and R. H. Bishop, “Introduction to Control Systems,” in *Modern Control Systems*, 12th ed., Prentice Hall, 2011, ch. 1, pp. 1–48.
- [22] J. Acedo Sánchez, “Introducción al control automático,” in *CONTROL AVANZADO DE PROCESOS (Teoría y práctica)*, Díaz de Santos, 2003, ch. 9, pp. 153–162.
- [23] F. Golnaraghi and B. C. Kuo, “Introduction to Control Systems,” in *Automatic Control Systems*, Tenth., McGraw-Hill Education, 2017, ch. 1.
- [24] J. Acedo Sánchez, “Algoritmos para compensación dinámica,” in *CONTROL AVANZADO DE PROCESOS (Teoría y práctica)*, Díaz de Santos, 2003, ch. 15, pp. 271–281.
- [25] F. Golnaraghi and B. C. Kuo, “2-4 LINEARIZATION OF NONLINEAR SYSTEMS,” in *Automatic Control Systems*, Tenth., McGraw-Hill Education, 2017, ch. 2.

- [26] F. Golnaraghi and B. C. Kuo, “Solution of Differential Equations of Dynamics Systems,” in *Automatic Control Systems*, Tenth., McGraw-Hill Education, 2017, ch. 3.
- [27] F. Golnaraghi and B. C. Kuo, “State-Space Analysis and Controller Design,” in *Automatic Control Systems*, Tenth., McGraw-Hill Education, 2017, ch. 8.
- [28] R. C. Dorf and R. H. Bishop, “State Variable Models,” in *Modern Control Systems*, 12th ed., Prentice Hall, 2011, ch. 3, pp. 161–233.
- [29] F. Golnaraghi and B. C. Kuo, “Stability of Linear Control Systems,” in *Automatic Control Systems*, Tenth., McGraw-Hill Education, 2017, ch. 5.
- [30] C. Heij, A. C. M. Ran, and F. van Schagen, “4.3 Stabilization by State Feedback,” in *Introduction to Mathematical Systems Theory*, Second., Birkhäuser, Cham, 2021, ch. 4 Stability, pp. 57–59. doi: [https://doi-org.crai-ustadigital.usantotomas.edu.co/10.1007/978-3-030-59654-5\\_4](https://doi-org.crai-ustadigital.usantotomas.edu.co/10.1007/978-3-030-59654-5_4).
- [31] J. R. Chasnov, “The Lotka-Volterra predator-prey model,” in *Mathematical Biology Lecture notes for MATH 4333*, Hong Kong: The Hong Kong University of Science and Technology, 2009, ch. Population Dynamics, pp. 7–13. [Online]. Available: <http://www.math.ust.hk/~machas/mathematical-biology.pdf>
- [32] *Decreto 1843 de 1991: Por el cual se reglamentan parcialmente los Títulos III, V, VI, VII y XI de la Ley 09 de 1979, sobre uso y manejo de plaguicidas*. Colombia, 1991.
- [33] Ministerio de la Protección Social, *RESOLUCION NÚMERO 2906 DE 2007: Por la cual se establecen los Límites Máximos de Residuos de Plaguicidas - LMR en alimentos para consumo humano y en piensos o forrajes*. Colombia, 2007.
- [34] Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural and Ministerio de Salud y Protección Social, *RESOLUCIÓN NÚMERO 5897 de 2018: Por la cual se determina la*

*permanencia del reglamento técnico que regula los Límites Máximos de residuos de Plaguicidas -LMR- en alimentos para consumo humano y en piensos o forrajes.* Colombia, 2018.

- [35] Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible, *RESOLUCIÓN NÚMERO 631 de 2015: Por la cual se establecen los parámetros y los valores máximos permisibles en los vertimientos puntuales a cuerpos de aguas superficiales y a los sistemas de alcantarillado público y se dictan otras disposiciones.* Colombia, 2015.
- [36] S. Massaroli, F. Califano, A. Faragasso, A. Yamashita, and H. Asama, “On the Extinction-Free Stabilization of Predator-Prey Dynamics,” *IEEE Control Syst. Lett.*, vol. 4, no. 4, pp. 964–969, Oct. 2020, doi: 10.1109/LCSYS.2020.2997741.
- [37] X. Gong and X. Xie, “Dynamic behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model incorporating a constant number of prey refuge and feedback controls,” *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, vol. 2017, 2017, doi: 10.23952/jnfa.2017.34.
- [38] M. Lemos-Silva and D. F. M. Torres, “A Note On a Prey-Predator Model with Constant-Effort Harvesting,” in *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, Springer, 2022, pp. 201–209. doi: 10.1007/978-3-031-17558-9\_11.
- [39] R. Cristiano, M. M. Henao, and D. J. Pagano, “Global stability of a Lotka-Volterra piecewise-smooth system with harvesting actions and two predators competing for one prey,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 522, no. 2, Jun. 2023, doi: 10.1016/j.jmaa.2023.126998.
- [40] S. V. Pashko, “Optimal Speed of Response in the Lotka–Volterra Controlled System,” *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 57, no. 2, pp. 289–295, Mar. 2021, doi: 10.1007/s10559-021-00354-w.

- [41] J. D. Davis, D. V. Olivença, S. P. Brown, and E. O. Voit, “Methods of quantifying interactions among populations using Lotka-Volterra models,” 2022, *Frontiers Media SA*. doi: 10.3389/fsysb.2022.1021897.
- [42] N. Biranvand, E. Babolian, and A. Vahidi, “Dynamical analysis, stability and discretization of fractional-order predator-prey model with negative feedback on two species,” *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, vol. 12, no. 2, pp. 729–741, Jun. 2021, doi: 10.22075/ijnaa.2020.19764.2099.
- [43] M. E. Mendoza Meza, A. Bhaya, and E. Kaszkurewicz, “CONTROLLER DESIGN TECHNIQUES FOR THE LOTKA-VOLTERRA NONLINEAR SYSTEM,” *Revista Controle & Automação*, vol. 16, no. 2, 2005, doi: <https://doi.org/10.1590/S0103-17592005000200002>.
- [44] W. E. Boyce, R. C. Diprima, and D. B. Meade, “First-Order Differential Equations,” in *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed., John Wiley & Sons, Inc, 2017, ch. 2, pp. 24–102.
- [45] N. Sapkota and K. B. Khattri, “Numerical Solutions of Non-Linear Systems of ODES: Lotka-Volterra Predator-Prey Model,” 2025.
- [46] K. Ogata, “Diseño de sistemas de control en el espacio de estados,” in *Ingeniería de control moderna*, 5th ed., PEARSON EDUCACIÓN, S.A., 2010, ch. 10, pp. 722–858.

## Apéndices

**Apéndice A.** Algoritmo para el diseño y simulación del control por realimentación de estados para los modelos Chacón de única aplicación y sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida

El algoritmo para el diseño y simulación del control por realimentación de estados para los modelos Chacón de única aplicación y sumatoria de aplicaciones periódicas de pesticida se desarrolló en *Wolfram Mathematica*, en formato *Wolfram Notebook* por la posibilidad de combinar bloques de texto y código, similar a un archivo de *Jupyter*.

Véase el algoritmo “*Sumatoria\_Unica\_Aplicacion.nb*” en el siguiente repositorio de GitHub: <https://github.com/JuanD-Pimiento/Feedback-Control-for-Pest-Population-Systems>

**Apéndice B.** Algoritmo para el diseño y simulación del control por realimentación de estados para el modelo Lotka-Volterra ante aplicación de pesticida

El algoritmo para el diseño y simulación del control por realimentación de estados para el modelo Lotka-Volterra ante aplicación de pesticida se desarrolló en *Wolfram Mathematica*, en formato *Wolfram Notebook*, y considera la solución por métodos numéricos del sistema Lotka-Volterra antes, durante y después del pulso de aplicación de pesticida. Dado que el algoritmo puede encontrar soluciones diferentes, y en algunos casos singularidades, se adjuntan las funciones por partes en archivos de texto que son importados al algoritmo en *Mathematica*.

Véase el algoritmo “*notebook\_LV\_stability.nb*” y los archivos de texto con las funciones por partes se encuentran en el siguiente repositorio de GitHub:  
<https://github.com/JuanD-Pimiento/Feedback-Control-for-Pest-Population-Systems>