
Modelos de procesos puntuales para la identificación espacial de los sismos ocurridos en Colombia

Spatial point processes for the identification of earthquakes in Colombia

Laura Daniela Ramírez Sánchez^a
laura.ramirezs@usantotomas.edu.co

Wilmer Pineda Rios^b
wilmerpineda@usantotomas.edu.co

Resumen

Se propone una aplicación para el modelamiento de procesos puntuales espaciales con el fin de identificar la distribución de los sismos registrados en Colombia y su relación con la localización de fallas geológicas y pozos de extracción petrolera en el país. El conjunto de datos utilizado para el procesamiento contiene las localizaciones de los sismos de magnitud superior a 3 en la escala de Richter para el año 2015. A través del análisis exploratorio de los datos se identificaron las zonas con mayor ocurrencia de sismos principalmente el departamento de Santander y alrededores. También, se encontró que los eventos sísmicos no se distribuyen de forma homogénea, es decir, existen aglomeraciones o agregaciones en el patrón de ocurrencia. Posteriormente, se calcularon modelos por máxima verosimilitud para patrones agrupados basados en las estimaciones de Neyman-Scott de los cuales se seleccionó el de mejor ajuste.

Palabras clave: procesos puntuales, intensidad, distribución espacial, sismos.

Abstract

An application is proposed for the spatial point processes mode in order to identify the distribution of earthquakes registered in Colombia and their relationship with the location of geological faults and oil extraction wells in the country. The data set for processing contains the locations of earthquakes of magnitude greater than 3 on the Richter scale for the year 2015. Through exploratory analysis of the data, the zones with the highest occurrence of earthquakes are identified, mainly the Department of Santander and nearby. It has also been found that seismic events are not distributed homogeneously, that is, there are agglomerations or aggregations in the pattern of occurrence. Subsequently, maximum likelihood models can be calculated for clustered patterns based on the Neyman-Scott results from which the best fit was selected.

Keywords: Point processes, intensity, spatial distribution, earthquakes.

^aEstudiante de Estadística Universidad Santo Tomás, Bogotá

^bProfesor Asociado, Facultad de Estadística Universidad Santo Tomás, Bogotá

1. Introducción

El análisis de la ocurrencia de eventos en forma de puntos localizados en el plano (coordenadas geográficas) se realiza a través de herramientas de procesos puntuales espaciales que buscan determinar el tipo de distribución espacial de dichos eventos en determinada ventana de observación. La aplicación de este análisis se exhibe en diferentes áreas de investigación como astronomía, donde se busca analizar la distribución de las estrellas en la Vía Láctea; la distribución de galaxias en dos y tres dimensiones; la ubicación de grupos de fotones de débiles fuentes astronómicas en detectores; entre otros (Jogesh & Feigelson 1996). En sismología se han utilizado modelos probabilísticos para la estimación del riesgo sísmico, definido como la probabilidad de que las consecuencias sociales o económicas producidas por un terremoto igualen o excedan valores predeterminados, para una localización o área geográfica dada. (Oliveira et al. 2005). En Macelwane (1951) se explica la escala de medición de la magnitud de un terremoto propuesta por Richter en 1930, como función del tiempo transcurrido y la amplitud en la aparición de las ondas P y S. Cabe resaltar, que esta escala sigue siendo utilizada a nivel mundial como el único mecanismo de medición.

En Ogata (1988) se realiza la descripción y comparación entre modelos estacionarios de Poisson para patrones espacio temporales aplicados a un conjunto de datos de sismos ocurridos en Japón para los años 1885 a 1980. Esta aplicación da cuenta de la relevancia en la utilización de estos modelos para la posterior evaluación y predicción de sismos de grande magnitud con el fin de implementar herramientas de gestión de riesgo adecuadas.

El Servicio Geológico Colombiano (SGC) cuenta con información relacionada al monitoreo de la actividad sísmica en Colombia, esta información contiene el punto de localización del epicentro (longitud y latitud), profundidad, fecha, hora, entre otras. De la misma manera, se cuenta con información de las fallas geológicas activas ubicadas a lo largo del territorio colombiano que constituyen una de las principales causas que provocan movimientos fuertes en la corteza terrestre.

La presencia de fallas geológicas en las principales ciudades del país son caracterizadas en el trabajo realizado por Suárez & Alfaro (2014) por medio de analogía, la cual consiste en la referenciación con fallas documentadas en diferentes países ya que existe relación matemática entre la tipología y longitud de la falla con la magnitud de un sismo.

Por otro lado, el estudio realizado por Goebel & Brodsky (2018) afirma que la inyección de fluidos para la facilitación de la extracción petrolera en pozos puede fracturar las capas de la tierra y generar actividad sísmica en la zona y sus alrededores. Además, las técnicas de uso de explosivos para la extracción generan vibraciones que acompañadas con la presencia de fallas geológicas puede generar vibraciones de alta magnitud e intensidad en un radio cercano al pozo.

En la actualidad no se cuenta con un modelo que de cuenta de la actividad sísmica para sismos o terremotos en Colombia o en el mundo, tampoco se cuenta con modelos estándar que permitan conocer el comportamiento de la actividad sísmica. A pesar de los grandes esfuerzos de las entidades encargadas de la gestión del riesgo en el País existen zonas con alto riesgo sísmico que no están preparadas para hacer frente a este problema.

En este documento los atributos anteriores son analizados como un patrón espacial, es decir, no se tiene en cuenta el factor temporal asociado a la ocurrencia del evento. De lo anterior, realiza un análisis exploratorio de los datos para determinar la estructura espacial y dependencia con las covariables utilizadas.

En la segunda sección de este documento, se realiza una breve descripción de las principales características de los sismos entre las cuales se encuentran las causas, tipos de terremotos y escalas de medición e intensidad; en la tercera sección se describe la metodología de patrones puntuales, es decir, las estadísticas de resumen de primer y segundo orden y los modelos aplicados a los patrones dependiendo la distribución de estos; en la cuarta sección, se muestran los resultados de las etapas en la sección 3. Por último, en la sección 5 se describen las conclusiones encontradas.

2. Sismos

Se denomina sismo o terremoto a la vibración de la tierra causada por la liberación de energía desde un punto de foco o hipocentro y se emite en todas las direcciones. (Lutgens 2005)

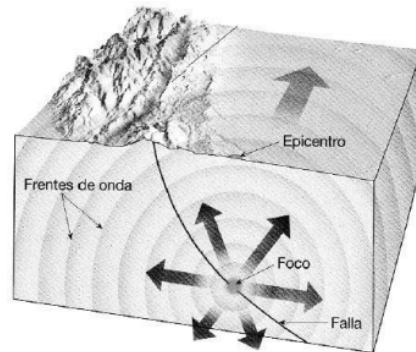


Figura 1: Foco y epicentro de un terremoto

Fuente: Lutgens (2005)

En la figura 1 se muestra la estructura del movimiento, iniciando con el punto de foco o hipocentro donde se genera el desplazamiento inicial de la corteza interior terrestre, desplazándose a través de ondas sísmicas que se desvanecen rápidamente. El epicentro es la proyección del hipocentro en la superficie terrestre.

2.1. Tipos de terremotos

Sánchez (1994) resume las causas naturales y antrópicas que generan vibraciones en la tierra

Causas naturales

- Terremotos tectónicos: originados a partir del choque o unión entre placas tectónicas que acumulan energía liberada en este movimiento.
- Terremotos volcánicos: los sismos o vibraciones en un terreno puede ser causado por la presión provocada por los gases, explosiones o acumulación de energía situados en las cercanías de una erupción volcánica.
- Terremotos de colapso: el deslizamiento o hundimiento de una terreno pueden colapsar la superficie terrestre, teniendo como resultado vibraciones o sismos.
- Terremotos por impacto de meteoritos: movimientos generados por la colisión de meteoritos con la superficie terrestre.

Causas antrópicas

- Terremotos inducidos por embalses: generados por la sobrecarga de agua en embalses que requiere de mayor esfuerzo del terreno para el sostenimiento.
- Terremotos por explosiones nucleares: se generan por la inyección de materia nuclear en el terreno.
- Terremotos debidos a explosiones de minas y canteras: se presentan por la interacción de carga explosiva a menudo utilizada para la adecuación del terreno de explotación.

- Terremotos por impacto de meteoritos: movimientos generados por la colisión de meteoritos con la superficie terrestre.

2.2. Escalas de magnitud e intensidad sísmica

Intensidad

La intensidad se mide con respecto a los daños generados por el movimiento, por lo cual un sismo puede tener medidas de intensidad diferentes dependiendo de la zona de estudio. La intensidad se clasifica con la escala de Mercalli-Cancani.

Tabla 1: Escala de medición para la intensidad Mercalli

Grado	Descripción
I	No percibido
II	Apenas percibido
III	Débil, percibido parcialmente
IV	Ampliamente percibido
V	Se despiertan los que duermen
VI	Miedo
VII	Daño en las construcciones
VIII	Destrucción de edificios
IX	Daños generalizados en las construcciones
X	Destrucción general de las construcciones
XI	Catástrofe
XII	Cambio de paisaje

Fuente: Wood y Neumann, 1931

Magnitud

En 1930 Charles Richter, del Instituto de Tecnología de California, desarrolló la primera escala de magnitud utilizando los registros sísmicos para calcular las dimensiones relativas de los terremotos. Lutgens (2005). La magnitud de un sismo se mide en la escala logarítmica continua y depende de la energía del hipocentro. Es utilizada para comparar la intensidad de los sismos.

Tabla 2: Escala logarítmica

Valor en la escala de Richter	Amplitud máxima de las ondas (en milésimas de milímetros)
3	1000 (1 milímetro)
4	10000 (1 centímetro)
5	100000 (10 centímetros)
8	100000000 (100 metros)

Fuente: Lutgens (2005)

La actividad sísmica se registra a través del sismógrafo, que detecta y graba las ondas generadas por los sismos.

3. Procesos puntuales espaciales

Diggle (2015) define un proceso puntual como los datos que forman un conjunto de puntos y que se distribuyen irregularmente dentro de una región del espacio. Las coordenadas espaciales (longitud, latitud) son denominadas eventos.

El objetivo general es comprobar si los puntos exhiben algún tipo de patrón

- Patrón aleatorio: los puntos se distribuyen aleatoriamente en el espacio
- Patrón regular: existe una distancia media entre los puntos que tiende a ser constante.
- Patrón agregado: existen aglomeraciones de puntos en el espacio.



Figura 2: Clasificación de los patrones

Fuente: Diggle (2015)

En la figura 2 se muestran los tipos de patrones, en el panel derecho los puntos se encuentran distribuidos de forma aleatoria, el panel de la mitad muestra un patrón de puntos agrupados y el izquierdo muestra puntos distribuidos de forma regular.

3.1. Estadísticas de resumen de primer orden

3.1.1. Intensidad

El primer paso para el análisis exploratorio es la intensidad del patrón, esta medida describe número esperado de eventos por unidad de área. La densidad empírica de los puntos está dada por la siguiente expresión:

$$\bar{\lambda} = \frac{n(x)}{|W|} \quad (1)$$

donde $n(x)$ corresponde al número de puntos en la región de análisis y $|W|$ su respectiva área.

Estimación de la función de intensidad por suavizamiento de kernel

La estimación no paramétrica de la función de intensidad se realiza a través del estimador de kernel propuesto por Diggle y dado por la siguiente expresión:

$$\tilde{\lambda}(u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{e(x_i)} k(u - x_i) \quad (2)$$

donde u localización dentro de la ventana de observación; W representa la Ventana de observación; $k(u)$ representa la función kernel que debe ser una densidad de probabilidad $k(u) \geq 0$ para todas las localizaciones u , para el desarrollo de este trabajo se utilizará el kernel gaussiano y $e(u) = \int_W k(u - v) dv$ es la corrección por sesgo debido a efectos de borde.

Método de conteo por cuadrantes para Aleatoriedad espacial completa (CSR)

Este método consiste en dividir la ventana de observación W en subregiones $B_1, \dots, B_m$ llamadas cuadrantes que, en principio, se consideran de igual área. A partir de esto, se realiza el conteo de los puntos que caen en cada subregión $n_j = n(X \cap B_j)$ para $j = 1, \dots, m$. Al tratarse de intensidad homogénea, los conteos deberían ser iguales o cercanos en cada subregión, por el contrario, los cambios fuertes en los conteos pueden sugerir tendencias espaciales.

Con el objetivo de contrastar la hipótesis de homogeneidad

$$H_0 : \text{La intensidad es homogénea (CSR)}$$

$$H_1 : \text{La intensidad no es homogénea}$$

Se aplica la prueba χ^2 (Chi-cuadrado), dado el número total de puntos $n = \sum_j n_j$, el área total de la ventana de observación $a = \sum_j a_j$, la intensidad estimada $\bar{\lambda} = n/a$ y el número esperado de conteos en el cuadrante B_j es $e_j = \bar{\lambda}a_j = na_j/a$. El estadístico está dado por:

$$\chi_{calculado}^2 = \sum_j \frac{(\text{observados} - \text{esperados})^2}{\text{esperados}} = \sum_j \frac{(n_j - e_j)^2}{e_j} = \sum_j \frac{(n_j - \bar{\lambda}a_j)^2}{(\bar{\lambda}a_j)^2} \quad (3)$$

El contraste se realiza a través del valor crítico donde se rechaza la hipótesis nula si

$$\chi_{calculado}^2 > \chi_{crítico, gl}^2$$

donde gl representa los grados de libertad dados por el número de cuadrantes de igual área resultado de la partición menos uno ($n - 1$).

3.2. Estadísticas de resumen de segundo orden

Por medio de las funciones K , g , G y L se determina el comportamiento del patrón, si presenta agregaciones o dispersión en una distancia determinada.

Función K - Distancia entre puntos

La función K propuesta por Ripley (1976), permite clasificar un patrón de puntos como aleatorio, agrupado o regular, de esta manera, la función es cero si el patrón de puntos es completamente aleatorio.

La figura 3 presenta la geometría de la función que busca encontrar posibles agrupaciones de un patrón de puntos dentro de una circunferencia de radio r .

$$K_{inhom}(r) = \pi r^2 \quad (4)$$

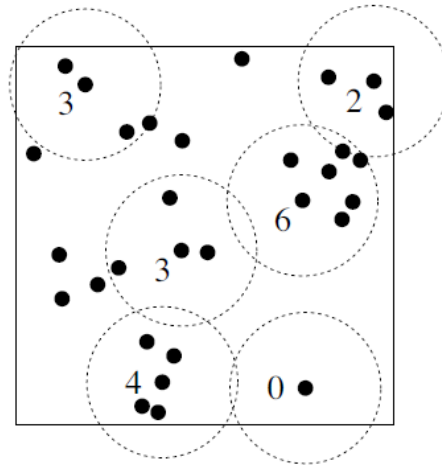


Figura 3: Geometría de la función K - Ripley

Fuente: Baddeley et al. (2015)

Función g - Correlación por pares

La función de correlación por pares contiene contribuciones solo de distancias entre puntos iguales a r . Se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$g(r) = \frac{K'(r)}{2\pi r} \quad (5)$$

donde, $K'(r)$ se calcula a través de la derivada de la función K con respecto a r

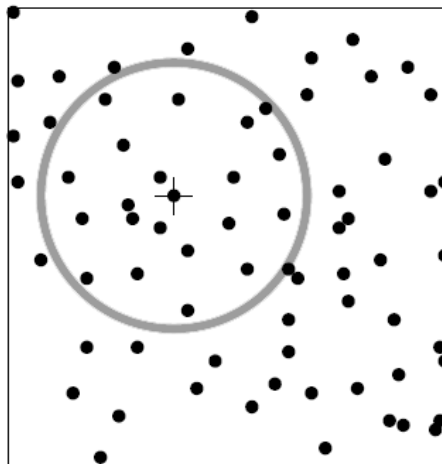


Figura 4: Geometría de la función g de correlación por pares

Fuente: Baddeley et al. (2015)

Esta función consiste en dibujar un círculo de radio r centrado en un punto del proceso y contar el número de otros puntos que caen en el círculo figura 4.

Función G - Distancia al vecino más cercano

La función mide la distribución de distancias desde un evento arbitrario hasta su evento más cercano, es decir, utiliza las distancias del vecino más cercano. La estimación de esta función esta dada por la siguiente expresión:

$$G_{inhom}(r) = 1 - E \left[\prod_{x_i \in X \cap b(u, r)} \left(1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda(x_i)} \right) \mid X \right] \quad (6)$$

Función L

La función L surge como la transformación de la función K, esta dada por la siguiente expresión:

$$L(r) = \sqrt{K(r)/\pi} \quad (7)$$

3.3. Estimación de modelos

Modelos de Neyman-Scott para patrones agrupados

Un proceso de agrupación se forma mediante un procedimiento de dos pasos. En el primer paso, se genera un proceso de puntos "padres", en el segundo paso, cada punto "padre" y_i da lugar a un patrón aleatorio de puntos de "descendencia" x_{ij} . Solo se observan los puntos de descendencia; También podemos suponer que el punto padre fue reemplazado por su descendencia. El conjunto que consta de todos los puntos de descendencia, independientemente de su origen, forma el proceso de punto de agrupación X .

El conjunto formado por todos los puntos de descendencia, independientemente de su origen, forma el proceso de punto de agrupación X .

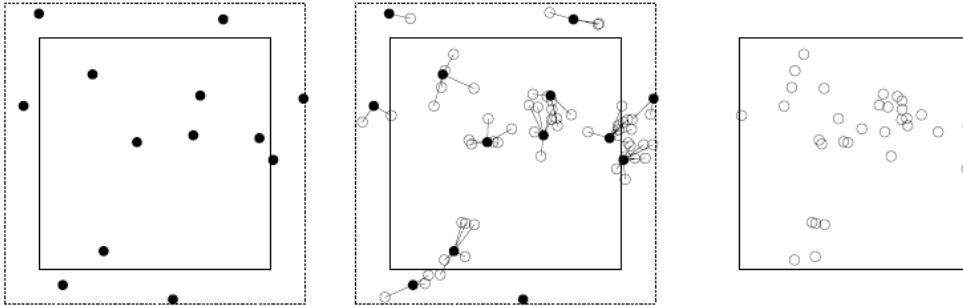


Figura 5: Generación de un proceso de cluster Neyman-Scott

Fuente: Baddeley et al. (2015)

4. Resultados

Para el caso especial del patrón de sismos ocurridos en Colombia se tiene en cuenta la distribución espacial representado en la figura 6.

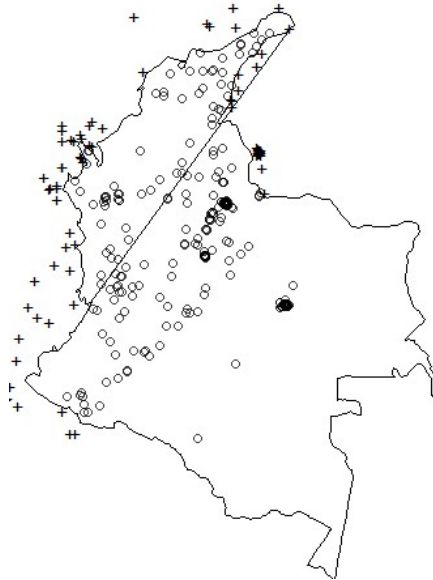


Figura 6: Sismos ocurridos en Colombia durante el año 2015

Fuente: Elaboración propia

4.1. Estimación de la intensidad

Asumiendo que el proceso puntual espacial es completamente aleatorio u homogéneo, el resultado de la estimación de la intensidad en el patrón siguiendo la ecuación 1 es:

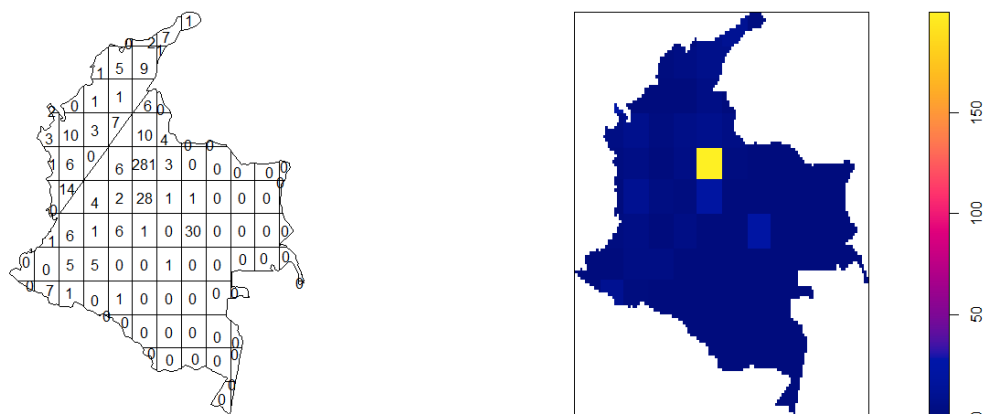
$$\bar{\lambda} = \frac{485}{92.523} = 5.242$$

De lo anterior se tiene que la intensidad es de 5.242 sismos por km^2

4.2. Método de conteo por cuadrantes

Se divide el área de trabajo en 12 subregiones (cuadrantes) tanto para el eje X como para Y , luego se realizó un conteo de los sismos que caen en cada cuadrante.

En la figura 7 se muestra 7a el número de sismos registrados en cada cuadrante, donde la mayor cantidad de eventos tuvieron lugar en la región andina principalmente en el departamento de Santander y alrededores. Por otro lado, en la región de la amazonía y Orinoquía no se registraron sismos de magnitud superior a 3 en la escala de Richter. De la misma manera, se muestra 7b la intensidad de sismos registrados en cada cuadrante.



(a) Conteo de sismos por cuadrante

(b) Intensidad sísmica por cuadrante

Figura 7: Conteo e intensidad sísmica basado en el método de cuadrantes

4.3. Estimación de la función de intensidad por suavizamiento de kernel

Se realizó una estimación de la función de intensidad de forma no paramétrica utilizando la corrección de sesgo por efectos de borde propuesta por Diggle (2015) en la ecuación 2.

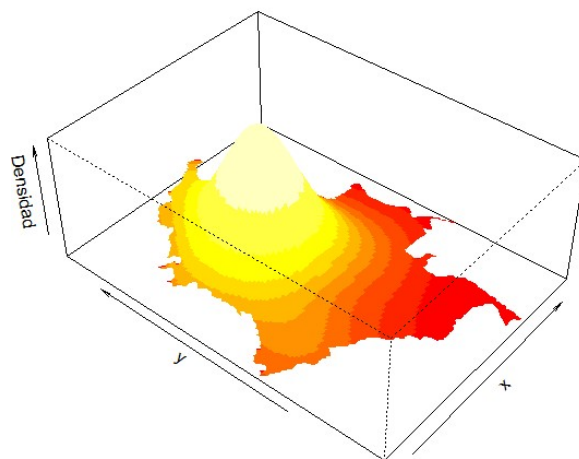


Figura 8: Estimación de la función de intensidad por suavizamiento de kernel

Fuente: Elaboración propia

4.4. Pruebas de aleatoriedad espacial completa (CSR)

Dada la intensidad y el conteo de cuadrantes pareciera tratarse de un patrón no homogéneo, para confirmar lo anterior se aplicó una prueba de aleatoriedad completa con el fin de contrastar el juego de hipótesis se establece un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

H_0 : La intensidad es homogénea (CSR)

H_1 : La intensidad no es homogénea

Tabla 3: Prueba de aleatoriedad espacial completa basada en cuadrantes ecuación 3

χ^2	10613
df	91
p valor	<2.2e-16

Fuente: Elaboración propia

Como se muestra en la tabla 3 el $p - valor$ es menor al valor de α ($p - valor < 0.05$), por lo cual se rechaza la hipótesis nula de aleatoriedad espacial que afirma lo dicho con respecto a la exploración gráfica de los conteos.

4.5. Estadísticas de resumen de segundo orden

Teniendo en cuenta el resultado de la exploración anterior se encontró que el patrón no es homogéneo por lo cual se estiman las funciones mencionadas en la sección 3, para evaluar la dependencia espacial en el patrón.

Función K - Distancia entre puntos

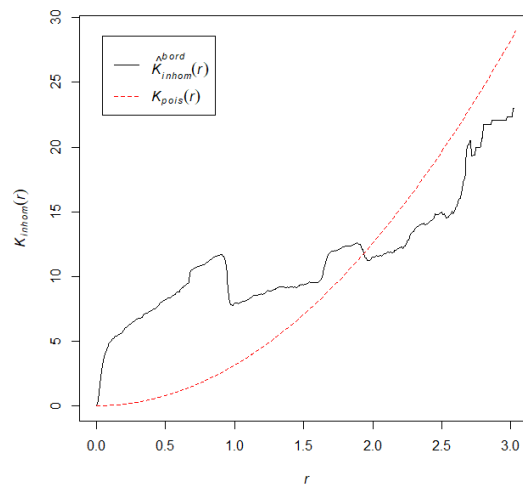


Figura 9: Función K

Fuente: Elaboración propia

Esta función muestra que para valores menores de $r \simeq 2$ los valores empíricos son mayores que los teóricos esto quiere decir que el número esperado de puntos dentro de esta distancia es más alto, sugerencia de un patrón agrupado.

Función g: Correlación por pares

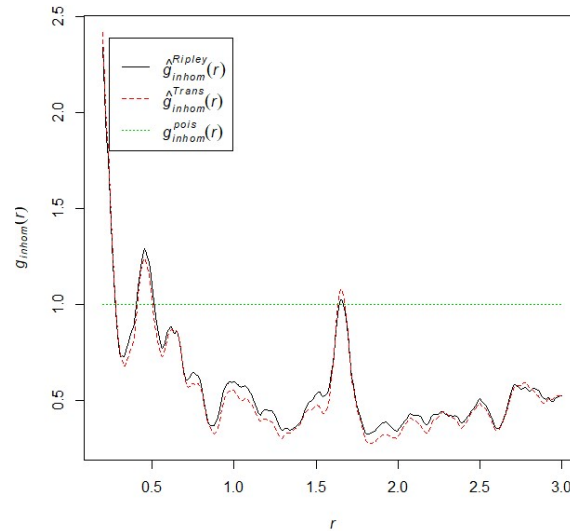


Figura 10: Función g - Correlación por pares

Fuente: Elaboración propia

En la función de correlación por pares no homogénea estimada (figura 10) se observa que para valores menores a aproximadamente 0.3 km , es decir 300 metros (punto de corte con la función teórica), la función $\hat{g}(r \simeq 0.3) > 1$ lo cual indica que esta distancia es más frecuente de lo que se espera entre puntos, clara sugerencia de un patrón agrupado.

Función G: Distancia al vecino más cercano

En la figura 11 se muestra que para todos los valores de r (distancias entre puntos) la función empírica es mayor que la teórica. Por lo cual, las distancias del vecino más cercano en el patrón son más cortas a comparación de un proceso de Poisson no homogéneo. De lo anterior, se confirma la información obtenida con la función de correlación por pares la distribución del patrón es agrupada.

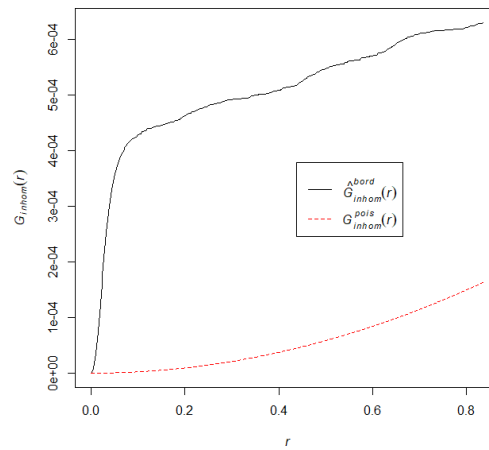


Figura 11: Función G - Distancia al vecino más cercano

Fuente: Elaboración propia

Función F: Distancia desde un punto al evento más cercano (Espacio vacío)

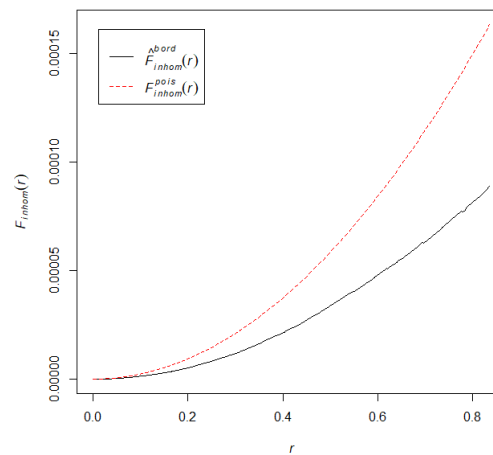


Figura 12: Función F - Espacio vacío

Fuente: Elaboración propia

La función F (figura 12) Contrario a la función G muestra que los valores empíricos de la función son menores a los teóricos $\hat{F}(r) < F_{inhom}(r)$, esto quiere decir que las distancias de espacio vacío son mayores que las esperadas. De acuerdo, a las funciones estimadas anteriormente el patrón presenta agrupamientos.

4.6. Estimación de modelos

Partiendo de la existencia de agrupaciones en el patrón se ajustaron dos modelos para procesos puntuales que permitan comparar las estimaciones con respecto a los modelos de Neyman-Scott. La variable dependiente P representa la intensidad de los sismos ocurridos en el año, es decir, el número de sismos por Km^2 ocurridos en cualquier punto dentro de la ventana de observación los cuales basados en la teoría de sismos se ven influenciados las covariables como las fallas geológicas formadas (natural) y los pozos de extracción petrolera (antrópica) representadas en la figura 13.

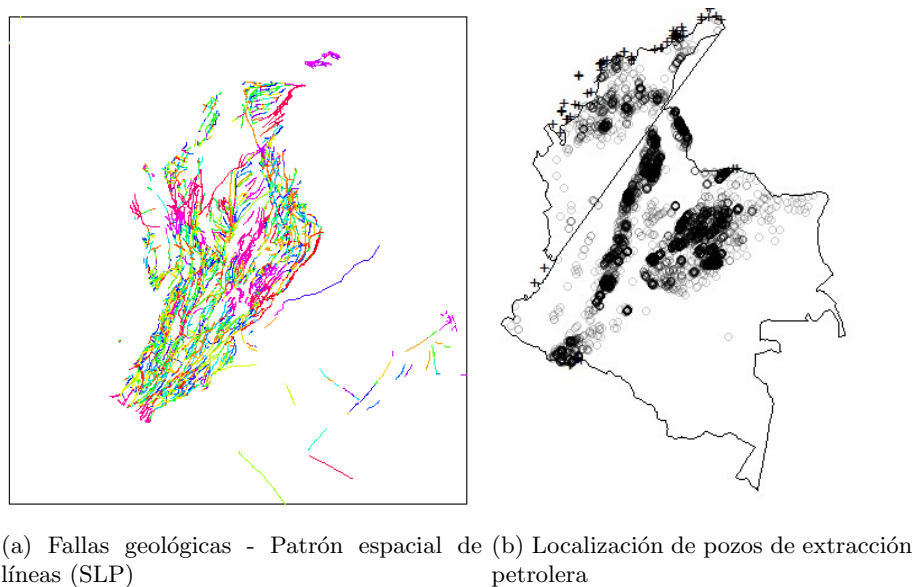


Figura 13: Covariables utilizadas para la estimación de modelos

Al comparar la figura 13 con la ocurrencia de sismos en la figura 6 se encuentra relación entre las localizaciones de las causas teóricas de aparición de sismos, lo cual sugiere dependencia de estas covariables con el patrón analizado.

Tabla 4: Modelo 1 Proceso de poisson homogéneo

	$\log(\lambda)$
Estimado	1.656688
SE	0.04540766
CI95.lo	1.56769
CI95.hi	1.745685
Ztest	***
Zval	36.48476

En la tabla 4 se presentan las estimaciones del modelo ajustado para el patrón bajo aleatoriedad espacial completa (CSR), la intensidad $\tilde{\lambda} = e^{1.656688} = 5.241921$ representa el número de sismos esperados para la región que bajo el supuesto de homogeneidad que no depende de la localización espacial.

Con respecto al modelo en la tabla 5 se presentan los coeficientes para el modelo no homogéneo de Poisson se presentan las estimaciones

Tabla 5: Modelo 2. Proceso log-lineal múltiple de poisson no homogéneo

	Intercepto	Fallas	Pozos
Estimado	1.4916	2.6896	0.0018
SE	0.0592	0.2559	0.0003
CI95.lo	1.3732	2.18804	0.0011
CI95.hi	1.6100	3.1911	0.0024
Ztest	***	***	***
Zval	24.7021	10.5100	5.5987

A partir de las estimaciones anteriores se obtiene la expresión del modelo dadas la covariables utilizadas.

$$\log(\tilde{\lambda}(x, y)) = 1.4916 + 2.6896 \text{ Fallas}(x, y) + 0.0018 \text{ Pozos}(x, y)$$

Las covariables utilizadas resultaron significativas en la estimación del modelo, sin embargo, la presencia de fallas geológicas en las diferentes zonas aumenta en aproximadamente 14 veces la intensidad en la ocurrencia de sismos para este periodo.

Ajuste de modelos para procesos agrupados de Neyman-Scott

A continuación se muestran las estimaciones del modelo clúster de Neyman – Scott (tabla 6), de aquí la forma de la intensidad es la misma que en el modelo 2 (tabla 5). La diferencia consiste en dos nuevos parámetros de clúster *kappa* y *scale* que presentan la intensidad entre los agrupamientos y la distancia, estimados a partir de la función – K paramétrica y a través del método de Mínimo Contraste.

Tabla 6: Modelo 3. Proceso de poisson no homogéneo para datos agrupados Neyman-Scott

	Intercepto	Fallas	Pozos	Kappa	Scale
Estimado	1.4916	2.6896	0.0018	0.0927	0.0201
SE	0.0592	0.2559	0.0003		
CI95.lo	1.3732	2.1880	0.0011		
CI95.hi	1.6100	3.1911	0.0024		
Ztest	***	***	***		
Zval	24.7021	10.5100	5.5987		

5. Conclusiones

Según lo observado en el análisis de aleatoriedad del patrón se encontró que este se encuentra distribuido de forma no homogénea, siguiendo con las estadísticas de resumen de segundo orden se clasificó el patrón como agrupado, es decir, los sismos se presentan con mayor frecuencia en determinadas localizaciones. También, se encontraron las zonas con mayor intensidad en la ocurrencia de sismos principalmente localizadas en el departamento de Santander, que coincide con zonas de alta extracción petrolera y una serie de fallas geológicas registradas en el lugar.

El análisis de patrones puntuales espaciales puede establecerse como una metodología importante en la gestión y evaluación del riesgo en estas zonas de alta densidad sísmica, ya que además de identificar los lugares de ocurrencia también logran comparar las zonas de mayor incidencia en los sismos con respecto a las covariables espaciales relacionadas a este problema.

6. Recomendaciones

Para futuros trabajos se recomienda evaluar la dependencia espacio - temporal del patrón a través del análisis de patrones puntuales espacio - temporales. De la misma manera, se deben analizar los atributos que presenta cada evento como la magnitud y la profundidad para establecer las interacciones entre ellos.

Referencias

- Baddeley, A., Rubak, E. & Turner, R. (2015), *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*, Vol. 11.
[*https://books.google.com/books?id=rGbmCgAAQBAJ&pgis=1](https://books.google.com/books?id=rGbmCgAAQBAJ&pgis=1)
- Diggle, P. J. (2015), *Statistical analysis of spatial and spatio-temporal point patterns*, Vol. 1.
- Goebel, T. H. W. & Brodsky, E. E. (2018), ‘The spatial footprint of injection wells in a global compilation of induced earthquake sequences’, *American Association for the Advancement of Science* pp. 899–904.
- Jogesh, G. & Feigelson, E. D. (1996), ‘Spatial point processes in astronomy 1’, **50**, 311–326.
- Lutgens, F. K. (2005), *Ciencias de la Tierra*.
- Macelwane, J. B. (1951), ‘Seismicity of the earth and associated phenomena. b. gutenbergs, c. f. richter’, *The Journal of Geology* **59**(1), 94–94.
[*https://doi.org/10.1086/625826](https://doi.org/10.1086/625826)
- Ogata, Y. (1988), ‘Statistical Models for Earthquake Occurrences and Residual Analysis for Point Processes’, **83**, 9–27.
- Oliveira, C., Roca, A. & Goula, X. (2005), ‘Assessing and Managing Earthquake Risk: Geo-scientific and Engineering Knowledge for Earthquake Risk Mitigation: developments, tools, techniques’, p. 189.
- Ripley, B. D. (1976), ‘The second-order analysis of stationary point processes’, *Journal of Applied Probability* **13**(2), 255–266.
- Suárez, H. & Alfaro, A. (2014), ‘Caracterización sísmica de fallas colombianas por analogía con fallas conocidas geológica y sismológicamente’, *Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería* 0121-5132 pp. 37–46.
- Sánchez, F. V. (1994), ‘Los terremotos y sus causas’, **59**(1), 17–38.