

IDENTIFICACIÓN DEL MODELO TAR CUANDO EL PROCESO DE RUIDO SIGUE UNA DISTRIBUCIÓN GENERALIZADA DEL ERROR Y VERIFICACIÓN EMPÍRICA DE LA ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS

IDENTIFICATION OF THE TAR MODEL WHEN THE WHITE NOISE PROCESS FOLLOWS A GENERALIZED ERROR DISTRIBUTION AND EMPIRICAL VERIFICATION OF THE ESTIMATION OF THE PARAMETERS

Deysi Yurany Castro Toloza.^a
deysi.castro@usantotomas.edu.co

Hanwen Zhang PH.D.^b
hanwenzhang@usantotomas.edu.co

Resumen

En este trabajo de grado se identifican los órdenes autorregresivos del modelo TAR (Threshold Autoregressive) asumiendo los demás parámetros estructurales conocidos tomando como referencia paquete TAR de Zhang and Nieto (2017), adecuándolo a modelos TAR con ruido GED (distribución generalizada del error). Se realiza la continuación del trabajo realizado en Castro (2016) empleando simulaciones de Monte Carlo con el fin de garantizar los resultados teóricos realizados.

Palabras clave: Modelos TAR, ruido GED, estimación bayesiana, muestreador de Gibbs, Monte Carlo.

Introducción

Los modelos TAR fueron propuestos por primera vez por Tong (1978) y discutido en detalle por Tong y Lim (1980). El concepto básico de un modelo de umbral es la linealización por partes a través de la introducción de la serie de tiempo basándose en una variable exógena denominada variable de umbrales. En la literatura, se pueden encontrar extensiones del modelo TAR como el modelo autorregresivo promedio móvil (TARMA) y la extensión para incluir algunas series temporales exógenas (TARMAX), ver Tong (2011). Igualmente, la discusión sobre la utilización de los modelos suavizados STAR cuya elección entre un modelo STAR y un modelo TAR suele ser una cuestión de conveniencia, ver Tong (2015). En los modelos TAR la variable de entrada es la variable de umbral y dependiendo de la localización de sus valores en su espacio muestral, uno tiene diferentes tipos de respuestas de la variable de salida. Por ejemplo, Nieto (2005) midió componentes hidrológicos en presencia de datos faltantes, utilizó un modelo TAR para su estimación usando el enfoque Bayesiano para la identificación y estimación de parámetros. Moreno y Nieto (2014), buscaron evaluar el desempeño del modelo TAR en datos financieros, encontrando mejor desempeño en los modelos GARCH. En este concepto coincide Zhang y Nieto (2015) afirmando que los modelos GARCH tienen mejor desempeño frente a los modelos TAR con ruido Gausiano. En Castro (2016) se estiman los modelos TAR con ruido GED tomando como referencia la metodología empleada en Zhang (2011) para estimar un modelo TAR con ruido t , siguiendo los pasos para la identificación y estimación de modelos TAR propuestos por Nieto (2005) y Zhang y Nieto (2015).

^aEstudiante

^bDirector

Este documento tiene como objetivos realizar la continuación de la metodología empleada en Castro (2016) utilizando simulaciones de Monte Carlo en los modelos propuestos y utilizar el paquete TAR de Zhang and Nieto (2017) del software estadístico R, editando las funciones correspondientes para la identificación de los órdenes autorregresivos para modelos TAR adaptándolos al ruido GED. El orden del documento es el siguiente: primero se definen algunos conceptos teóricos, en la segunda sección se describe el procedimiento para las estimaciones del modelo TAR y se muestran los resultados de la adaptación del paquete TAR a ruido GED para la estimación de los órdenes autorregresivos, en la tercera sección se muestran los resultados de las simulaciones iniciadas en Castro (2016) ejecutadas vía Monte Carlo y finalmente conclusiones, referencias y anexos.

1. Definiciones teóricas

1.1. Modelos TAR

Los modelos TAR (Threshold Auto-Regressive) están definidos como un proceso estocástico con un proceso de entrada $\{Z_t\}$ y uno de salida $\{X_t\}$, el modelo autorregresivo de umbrales con ruido GED está dado de la forma:

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + h^{(j)} e_t \quad (1)$$

si $Z_t \in R_j = (r_{j-1}, r_j]$ para algún $j = 1, \dots, l$, con $r_0 = -\infty$ y $r_l = \infty$ y $\{e_t\} \sim_{iid} \text{GED}$. Los valores $r_1 < \dots < r_{l-1}$ denominan los umbrales y definen l regímenes para el modelo. Zhang y Nieto (2015) propone una modificación a los modelos TAR bivariados para modelar valores positivos de las series de tiempo:

$$\ln X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} \ln X_{t-i} + h^{(j)} e_t \quad (2)$$

Los parámetros del modelo TAR están divididos por dos grupos:

- (a) *los parámetros estructurales* en los que se encuentran el número de regímenes l , los umbrales $r_1 < \dots < r_{l-1}$ que definen los l regímenes del proceso $\{Z_t\}$ y los órdenes autorregresivos en los regímenes $k_1, \dots, k_l$, que son números enteros no negativos.
- (b) *Los parámetros no estructurales* que son los coeficientes autorregresivos $a_i^{(j)}$ con $i = 0, \dots, k_j$ y $j = 1, \dots, l$ las ponderaciones de la varianza $h^{(j)}$ con $(j = 1, \dots, l)$ y los parámetros propios de la distribución GED.

1.2. Distribución GED

La distribución generalizada del error (GED) es usada en el modelamiento estadístico, cuando los errores no son necesariamente de distribución normal. Nelson (1991) introdujo este tipo de distribuciones para modelos GARCH. GED incluye la distribución normal como caso especial, junto con otras distribuciones, algunas con colas más pesadas que la distribución normal, por ejemplo, la doble exponencial, algunas con colas delgadas como la uniforme.

La función de densidad de probabilidad de la GED está dada por:

$$f_v(x) = \frac{v \exp\left\{-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\lambda}\right|^v\right\}}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}, v > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Donde $\lambda = \left[2^{-\frac{2}{v}} \frac{\Gamma(\frac{1}{v})}{\Gamma(\frac{3}{v})}\right]^{\frac{1}{2}}$ y $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma. Es bien sabido que si x sigue una distribución GED, $E(x) = 0$, $E(x^2) = 1$, $E(x^k) < \infty$ para todo $k > 0$. Cuando $v = 2$ GED se reduce a una distribución normal estándar y cuando $v = 1$, esta se reduce a una distribución doble exponencial, ver R. Vasudeva (2013).

2. Procedimiento de estimaciones del modelo TAR

Siguiendo la metodología para la identificación y estimación de modelos TAR propuestos por Nieto (2005) y Zhang y Nieto (2015), se llevarán a cabo las siguientes tres etapas:

1. La cantidad de regímenes y umbrales se identifican usando el muestreador de Gibbs basado en las densidades condicionales.
2. La cantidad de regímenes y umbrales se fija, y los órdenes autorregresivos se identifican usando el muestreador de Gibbs.
3. Condicionados a los parámetros estructurales estimados, se estiman los parámetros no estructurales usando el muestreador de Gibbs.

Para encontrar las densidades condicionales se necesita la función de verosimilitud que se puede hallar de la siguiente manera:

Condicionando en los parámetros estructurales y los valores iniciales $\mathbf{x}_k = (x_1, \dots, x_k)'$, donde $k = \max\{k_1, \dots, k_l\}$ y la variable observada del proceso de umbrales $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_T)'$ se tiene que:

$$f(x|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x) = f(x_{k+1}|x_k, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x) \cdots f(x_T|x_{T-1}, \dots, x_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x)$$

Donde $\boldsymbol{\theta}_x$ contiene todos los parámetros estructurales y no estructurales. Ahora, la función de densidad de probabilidad de GED está dada por (3), donde $e_t \sim_{iid} \text{GED}$, entonces para cada $t = k+1, \dots, T$, la variable $x_t|x_{t-1}, \dots, x_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x$ se distribuye como una variable GED multiplicando por $h^{(j_t)}$ y sumando por $a_0^{(j_t)} + \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}$, que por simplificar la notación, la denotaremos x_t y de esta forma, la función de densidad es:

$$f(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = \frac{v \exp\left\{-\frac{1}{2}\left|\frac{x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}}{\lambda h^{(j_t)}}\right|^v\right\}}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)} \cdot \frac{1}{h^{(j_t)}}$$

donde $\{j_t\}$ es la realización del proceso de indicadores $\{J_t\}$ definido como $J_j = j$ si $Z_t \in R_j$, para algún $j = 1, \dots, l$. Por consiguiente se tiene que:

$$f(x|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x) = \left(\frac{v}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}\right)^{T-k} \prod_{t=k+1}^T [h^{(j_t)}]^{-1} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{-\frac{1}{2}\left|\frac{e_t}{\lambda}\right|^v\right\} \quad (4)$$

Con $e_t = \frac{1}{h^{(j_t)}} \left(x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}\right)$

De esta forma, en el desarrollo bayesiano la función de verosimilitud se reducirá a $f(x|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x)$.

2.1. Estimación de los parámetros no estructurales

Para la estimación de los parámetros no estructurales vía Monte Carlo se asumen los parámetros estructurales conocidos y se mencionan las estimaciones de los parámetros no estructurales descrito por Nieto (2005), ya demostrados en Castro (2016):

2.1.1. Estimación del parámetro θ_j

Sea $\theta_j = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)})'$, para $j = 1, \dots, l$, y $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_l')'$, la distribución *a priori* para θ_j es una distribución normal multivariante, es decir, $\theta_j \sim N(\theta_{0,j}, \mathbf{V}_{0,j}^{-1})$. Utilizando esta distribución *a priori* y la función de verosimilitud anterior, hallamos la distribución condicional de θ_j para cada $j = 1, \dots, l$, dados los demás parámetros no estructurales $\theta_i, i \neq j, h, \theta_z$ y v esta dada por:

$$p(\theta_j | \theta_i, i \neq j, h, x, z, v) \propto \exp \sum_{\{t: j_t = j\}} \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j)}} \right|^v \right\} \quad (5)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\theta_j - \theta_{0,j})' V_{0,j} (\theta_j - \theta_{0,j}) \right\}$$

2.1.2. Estimación del parámetro $h^{(j)}$

Sean los parámetros $h^{(1)}, \dots, h^{(l)}$, la distribución *a priori* para $(h^{(j)})^2$ es una distribución *Inverse - Gamma* (α, β) , entonces, para cada $j = 1, \dots, l$, la distribución condicional a posteriori para $(h^{(j)})^2$ dados los parámetros estructurales $\theta_j, j = 1, \dots, l, h$, y θ_z está dada por:

$$p((h^{(j)})^2 | \theta_1, \dots, \theta_l, x, z, v) \propto$$

$$(h^{(j)})^{-2\alpha-2-n_j} \exp \left\{ \frac{-\beta}{(h^{(j)})^2} + \sum_{\{t: j_t = j\}} \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j)}} \right|^v \right\} \right\} \quad (6)$$

Donde $n_j = \# \{t : j_t = j\}$.

2.1.3. Estimación del parámetro v

Para la distribución condicional *a posteriori* del parámetro v , utilizamos para la *a priori* una distribución *Gamma* (α', β') , cuya forma esta dada por:

$$p(v | \theta_1, \dots, \theta_l, h, x, z) \propto p(x | \theta, z, h, v) p(v)$$

$$\propto \left(\frac{1}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(\frac{1}{v})} \right)^{(T-k)} \exp \left\{ -\frac{v}{\beta'} + \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j_t)}} \right|^v \right\} \right\} \times v^{(T-k)+\alpha'-1} \quad (7)$$

2.2. Estimación de órdenes autorregresivos

En la identificación de los parámetros no estructurales del modelo TAR desarrollada en la sección 2.1. para modelos TAR con ruido GED, no se menciona la identificación de los parámetros estructurales y es que en la literatura estos parámetros se asumen conocidos, sin embargo, en el contexto de la estimación de los parámetros estructurales que son el número de regímenes y los órdenes autorregresivos en cada régimen, Nieto (2005) propone usar MCMC (Markov Chain Monte Carlo) y enfoques bayesianos para la estimación. En este numeral se procede a estimar los órdenes autorregresivos siguiendo la metodología de Nieto (2005) donde el número de regímenes y los umbrales se asumen conocidos, mediante el paquete TAR de Zhang and Nieto (2017) teniendo en cuenta las condicionales desarrolladas en Castro (2016).

2.2.1. Descripción teórica:

De acuerdo a P. Carlin y Chib (1995) y Nieto (2005), $k_{m\acute{a}x}$ denota el orden autorregresivo máximo común en los l regímenes, y que M es una variable aleatoria discreta que indexa los $(k_{m\acute{a}x} + 1)^l$ posibles modelos, para cada posible modelo $M = m$, se define el vector de parámetros $\Theta_m = (\theta'_1, \dots, \theta'_l, \mathbf{h}')'$ con $m = 1, \dots, (k_{m\acute{a}x} + 1)^l$. P. Carlin y Chib (1995) encontró que:

$$p(M = m | \Theta, \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | \Theta_m, M = m)p(M = m)}{\sum_{m'} p(\mathbf{y} | \Theta_{m'}, M = m')p(M = m')} \quad (8)$$

y

$$p(\Theta_m | \Theta_{m' \neq m}, M, \mathbf{y}) \propto \begin{cases} p(\mathbf{y} | \Theta_m, M = m)p(\Theta_m | M = m) & \text{si } M = m \\ p(\Theta_m | M = m) & \text{si } M \neq m \end{cases} \quad (9)$$

donde $\Theta = (\Theta'_1, \dots, \Theta'_{(k_{m\acute{a}x} + 1)^l})'$, $\mathbf{y}$ contiene ambos procesos $\{x_t\}$ y $\{z_t\}$, y la función $p(\Theta_m | M = m)$ puede tomar como la distribución previa de Θ_m .

En el contexto de identificar los órdenes autorregresivos, el indicador M del modelo, está determinado por estos órdenes autorregresivos, y la densidad (8) es equivalente a:

$$p(k_j | \Theta, k_{i, i \neq j}, l, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{x} | \Theta, \mathbf{k}, l, \mathbf{z})p(k_j)}{\sum_{k'_j=0}^{k_{m\acute{a}x}} p(\mathbf{x} | \Theta, \mathbf{k}', l, \mathbf{z})p(k'_j)} \quad (10)$$

con $j = 1, \dots, l$, donde $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)'$ y $\mathbf{k}'$ se obtienen reemplazando el componente k_j del vector $\mathbf{k}$ por k'_j . $p(k_j)$ denota la distribución a priori del orden autorregresivo en el régimen j , que podría ser una distribución de Poisson truncada o una distribución uniforme discreta en los enteros $0, 1, \dots, k_{m\acute{a}x}$.

Empleando el paquete TAR

El paquete TAR de Zhang and Nieto (2017) contiene funciones para la estimación de modelos TAR con ruido distribuido Gaussiano para los modelos (1) y (2). Para la ejecución de este ejercicio se emplea el modelo (1). En este documento se utilizan dos funciones para la estimación de los órdenes autorregresivos del modelo TAR con ruido GED que son: (a) `simu.tar.norm` y (b) `ARorder.norm`.

La primera función que se utiliza es `simu.tar.norm` que se emplea para simular series de modelos TAR con $\{e_t\} \sim GWN(0, 1)$, $\{Z_t\} \sim AR(1)$ con $\phi = 0.5$. El primer cambio llevado a cabo es el error Gaussiano por *GED* cambiando $\{e_t\}$ dentro de la función del paquete para generar valores distribuidos *GED* en el software estadístico R mediante el comando `rged`, los parámetros de la función son media 0, desviación 1 y el parámetro $v = 3$, manteniendo los valores de los parámetros $\{Z_t\} \sim AR(1)$ y $\phi = 0.5$ iguales.

La segunda función es `ARorder.norm` que consiste en estimar los órdenes autorregresivos condicionados por el número de regímenes y umbrales. La función original se utiliza con cuatro argumentos: la serie

de umbral $\{Z_t\}$, la serie de interés $\{X_t\}$, el número de regímenes y los umbrales. Sin embargo, la programación de la función cambia debido al parámetro de forma v de la GED tomada como parámetro adicional, que en efecto, la función del paquete no contiene, ya que es bajo distribución Gaussiana, por ejemplo, si se realiza el ejercicio con la distribución t habría que encontrar la distribución condicional a posteriori del grado de libertad del proceso de ruido n e incluirla en el paquete como parámetro adicional.

La función de verosimilitud es una de las principales herramientas del modelo TAR y bajo la metodología propuesta por Nieto (2005), cambia la expresión de la verosimilitud a la forma (4) dependiendo directamente de la distribución de los errores GED y por lo tanto las expresiones de las distribuciones condicionales a posteriori de los parámetros no estructurales cambian a las expresiones del numeral 2.1 (ver demostraciones en Castro (2016)), con el fin de implementar el muestreador de Gibbs. El muestreador de Gibbs funciona condicionado al número de regímenes l definidos previamente y tomando valores iniciales para los coeficientes, las varianzas y el parámetro de forma de la GED , se incluyen las condicionales de los parámetros coincidiendo con el modelo TAR con error GED . Finalmente utilizando las densidades en las ecuaciones (8) y (9), se recurre al muestreador de Gibbs para obtener las estimaciones de las probabilidades de todos los valores posibles para los órdenes autorregresivos, y se elige el orden con la probabilidad estimada más alta de acuerdo a metodología ejecutada en Zhang and Nieto (2017).

A continuación se ilustra un ejemplo del uso del paquete TAR:

$$X_t = \begin{cases} 1 + 0.6X_{t-1} - 0.5X_{t-2} + 1.5e_t & \text{si } Z_t \leq -0.6 \\ 0.5 + 0.2X_{t-1} + 0.5X_{t-2} + 0.1X_{t-3} + 2e_t & \text{si } -0.6 < Z_t \leq 0.6 \\ -0.5 - 0.3X_{t-1} + 0.1X_{t-2} + 2e_t & \text{si } Z_t > 0.6 \end{cases} \quad (11)$$

con $\{e_t\} \sim GED$, $v = 3$, $\{Z_t\} \sim AR(1)$ y $\phi = 0.5$. Se puede identificar los órdenes autorregresivos estimados en todos los regímenes, así como las probabilidades posteriores para todos los valores posibles en cada régimen. Teniendo en cuenta que los valores predeterminados de los valores mínimo y máximo para los órdenes autorregresivos son 0 y 3 y el número de simulaciones es de 1000, se generan así los siguientes resultados:

- Resultados para $v = 3$, para una serie de longitud 500:

```
The identified AR order in the 1st regime is: 2
The identified AR order in the 2nd regime is: 3
The identified AR order in the 3rd regime is: 2
```

A posteriori probability of the autoregressive orders are:

	0	1	2	3
Regime1	0.000000	0.000000	0.599526	0.400473
Regime2	0.000036	0.075732	0.125076	0.799526
Regime3	0.000000	0.000000	0.568057	0.431942

Las probabilidades a posteriori indican que el modelo es de orden 2,3,2 es decir, en el régimen 1 la probabilidad mayor es 0.59 que corresponde al orden 2, para el régimen 2 la mayor probabilidad es 0.799 que corresponde al orden 3 y para el régimen 3 la mayor probabilidad es 0.568 que corresponde al orden 2.

3. Simulaciones con Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es una metodología que permite ejecutar desarrollos teóricos de gran dificultad, una de sus características es que se pueden ejecutar modelos bivariados lineales o no lineales,

resolviendo la dificultad de comparar modelos de diferente dimensionalidad e independientes entre sí; por ejemplo: en Nieto (2005) el análisis del modelo TAR se lleva a cabo por medio de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) y enfoques bayesianos debido a que la estructura de las condicionales requiere métodos numéricos para su estimación, en Nieto, Zhang, y Li (2013) utilizan RJMCMC (Reversible Jump Markov Chain) para estimar modelos TAR considerando tres tipos de transiciones en la cadena subyacente de Markov (que está diseñada de tal manera que puede saltar entre modelos con espacios de parámetros de diferentes dimensiones) en el cambio de número de regímenes l , en el cambio de algún orden autoregresivo kj y en el cambio del vector de parámetro no estructural total θ_l .

En las estimaciones llevadas a cabo en Castro (2016) se dejó abierta la posibilidad de aplicar la metodología de Monte Carlo, ya que debido a las limitaciones de tiempo las simulaciones se restringieron para una serie simulada, $l = 2$, 100 iteraciones, para una serie de tamaño $T = 300$, con $\{Z_t\} \sim AR(1)$, aplicando el método de la grilla. En esta sección, se realiza la comprobación de la eficiencia del método de estimación con el fin de garantizar los desarrollos teóricos aplicando la metodología de Monte Carlo, aumentando la cantidad de series y el número de simulaciones teniendo en cuenta los mismos parámetros *a priori* aplicados en Castro (2016). Para la comprobación se llevaron a cabo en 16 diferentes modelos variando el tamaño de las series entre $T = 300$ y $T = 1000$, con el parámetro v variando entre 1 y 3 y con 1.000 simulaciones de Monte Carlo para cada uno de los modelos, con un total de 45 modelos simulados (ver anexo).

Para muestrear las condicionales se recurren a métodos de simulación, en este trabajo se aplica el método de la grilla. A continuación se presenta la variación porcentual entendido como la diferencia entre el parámetro estimado (resultado de las simulaciones) y el parámetro real del modelo, el resultado se divide entre el parámetro real del modelo con el fin de obtener un estadístico que sirva de comparación entre los diferentes resultados. Se realizaron 32 modelos en Castro (2016) y en este documento se muestran los resultados de los 45 modelos aplicando Monte Carlo que se nombran como ejercicio 2. Estos modelos son los mismos, sin embargo, la cantidad de simulaciones aplicando Monte Carlo aumentan debido a que se realiza con series de tamaño $T = 300$ y $T = 1000$, a continuación los resultados:

- Variación porcentual promedio general de los parámetros de los modelos de Castro (2016) y del ejercicio 2:

	Castro (2016)	Ej. 2
V.P.	-1.925 %	1.542 %

- Variación porcentual promedio para los modelos del ejercicio 2 con $T = 300$ y $T = 1000$:

T	300	1000
V.P.	-5.603 %	13.147 %

- Variación porcentual promedio para los parámetros θ , h y v :

- Castro (2016):

Param	θ	h	v
V.P.	-7.239 %	6.815 %	7.168 %

- Ejercicio 2:

Param	θ	h	v
V.P.	-5.662 %	17.102 %	4.687 %

- Variación porcentual promedio para v :

- Castro (2016):

v	1	3
V.P.	20.341 %	- 7.76 %

- Ejercicio 2:

v	1	3
V.P.	3.995 %	- 0.558 %

- Variación porcentual promedio para los órdenes de los coeficientes autorregresivos del ejercicio 2:

Orden	0	1	2	3
V.P.	0.1911 %	0.1077 %	1.8061 %	2.0120 %

Las estimaciones realizadas con respecto al parámetro real no tienen mayor variación porcentual promedio según el tamaño de la serie, en cambio presentan mayor variación porcentual promedio los ponderadores de varianza h ; según el parámetro v de la GED las variaciones porcentual promedio son mayores cuando es igual a 1 que cuando es igual a 3, así mismo, la variación porcentual promedio de los órdenes de los coeficientes autorregresivos aumenta a medida que aumenta el orden de los coeficientes.

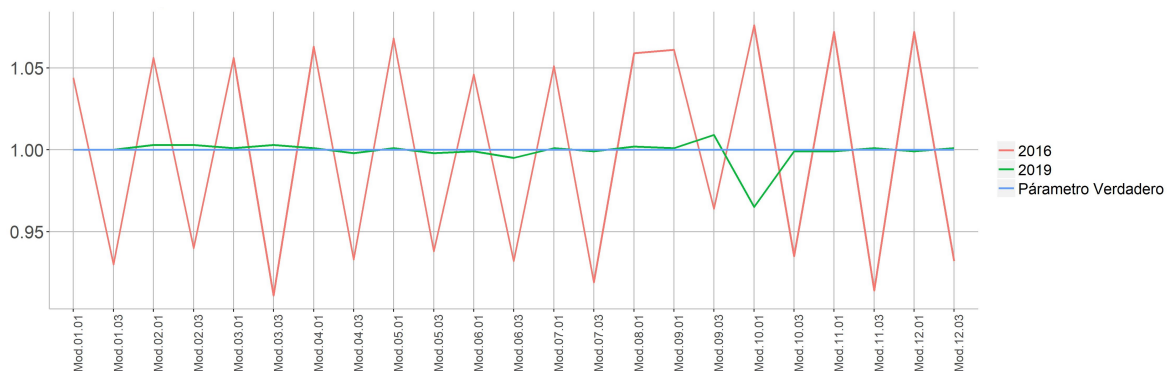


Figura 1: Comparación entre resultados de θ Castro 2016/2019 y parámetro verdadero

En la figura 1 se comparan los resultados de 23 modelo donde el parámetro verdadero de θ es 1, el resultado en Castro (2016) evidencia estimaciones más alejadas al parámetro verdadero, comparado al ejercicio con Monte Carlo cuyos resultados mejoran considerablemente.

A continuación dos ejemplos simulados con sus respectivos intervalos de credibilidad:

3.1. Ejemplo simulado 1

El ejemplo 1 es una serie de tiempo $\{X_t\}$ de longitud 1000 y el modelo tiene la siguiente forma, (A.24.Modelo 8.3.1000 del anexo):

$$X_t = \begin{cases} 1 - 0.4X_{t-1} + e_t & \text{si } Z_t \leq 0 \\ -0.5 - 0.6X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + 2e_t & \text{si } Z_t > 0 \end{cases} \quad (12)$$

con $e_t \sim_{iid} GED$ con $v = 3$ y $\{Z_t\} \sim AR(1)$. La serie simulada se muestra en la figura 2.

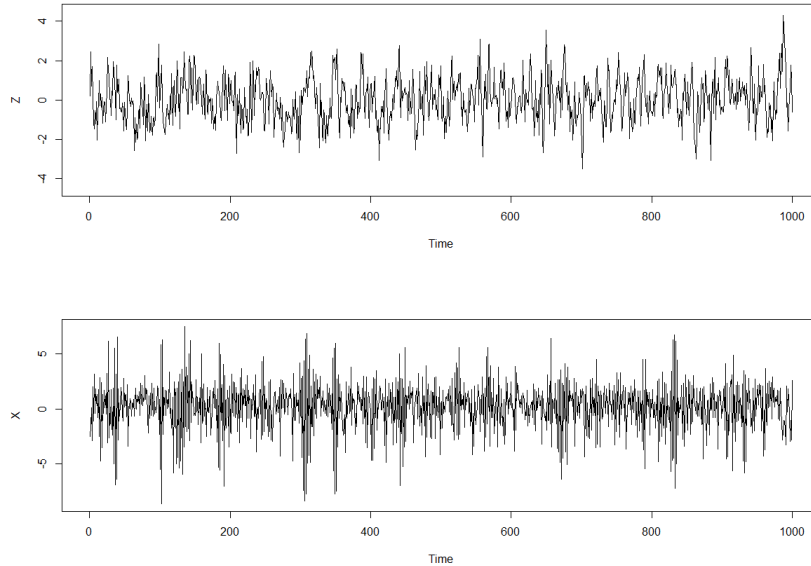


Figura 2: Serie simulada $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$ para modelo 1.

Tabla 1: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados cuando $v = 3$ y $T = 1000$.

Coeficientes Autorregresivos				Ponderaciones h		v
	0	1	2	0.998 (0.945, 1.051)	1.996 (1.889, 2.101)	3.05 (2.625, 3.535)
Régimen 1	1 (0.915, 1.080)	-0.399 (-0.443, -0.355)	N/A			
Régimen 2	-0.499 (-0.658, -0.329)	-0.599 (-0.684, -0.516)	0.296 (0.204, 0.384)			

Ya que los parámetros estructurales se asumen conocidos, se calcula la mitad de la cadena de 100 iteraciones del muestreador de Gibbs. Las estimaciones de los parámetros no estructurales arrojan buenos resultados bajo intervalos de credibilidad del 95 %, ya que las estimaciones puntuales se encuentran en el intervalo. La estimación del parámetro del error GED es $v = 3.05$, cuyo valor se encuentra en el intervalo de credibilidad del 95 % de (2.62, 3.53).

En la sección 2.2.1. se aplica el paquete TAR con error distribuido GED, en esta sección se evalúa la metodología aplicandola a la ecuación (12):

The identified AR order in the 1st regime is: 1
The identified AR order in the 2nd regime is: 2

A posteriori probability of the autoregressive orders are:

	0	1	2
Regime1	0.000000	0.6958118972	0.3041881
Regime2	0.000000	0.0008819664	0.9991180

Las probabilidades a posteriori indican que el modelo es de orden 1,2 es decir, en el régimen 1 la probabilidad mayor es 0.69 que corresponde al orden 1, para el régimen 2 la mayor probabilidad es 0.99 que corresponde al orden 2.

3.2. Ejemplo simulado 2

Se simuló una serie de tiempo $\{X_t\}$ de longitud 300 siguiendo el modelo (A.45.Modelo15.1.300 del anexo):

$$X_t = \begin{cases} 1 - 0.6X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + 0.4X_{t-3} + e_t & \text{si } Z_t \leq 0 \\ -0.5 - 0.6X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + 2e_t & \text{si } Z_t > 0 \end{cases} \quad (13)$$

con $e_t \sim_{iid} GED$, $v = 1$ y $\{Z_t\} \sim AR(1)$. La serie simulada se muestra en la figura 3.

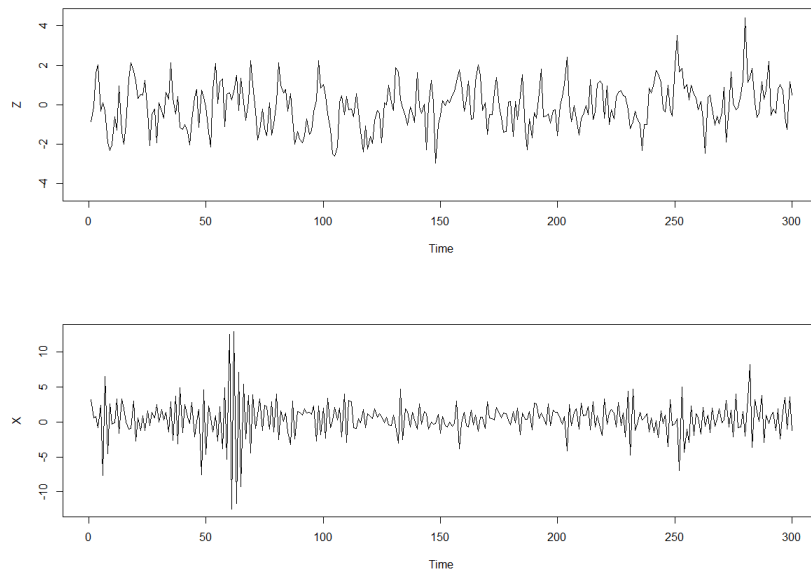


Figura 3: Serie simulada $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$ para modelo 2.

Tabla 2: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados cuando $v = 1$ y $N = 300$.

	Coeficientes regresivos				Ponderaciones h		v
	0	1	2	3	2.857 (0.996, 2.97)	2.329 (1.744, 2.746)	0.671 (0.516, 1.172)
Régimen 1	0.693 (-0.158, 1.502)	-0.186 (-0.609, 0.003)	0.153 (-0.002, 0.477)	0.116 (-0.037, 0.436)			
Régimen 2	-0.489 (-0.764, -0.221)	-0.602 (-0.763, -0.475)	0.29 (0.164, 0.412)	N/A			

Las estimaciones de los parámetros no estructurales arrojan buenos resultados bajo intervalos de credibilidad del 95 % ya que las estimaciones puntuales se encuentran en el intervalo. La estimación del

parámetro del error GED es $v = 0.671$, cuyo valor se encuentra en el intervalo de credibilidad del 95 % de $(0.52, 1.72)$. Aplicando el paquete TAR con error distribuido GED:

```
The identified AR order in the 1st regime is: 3
The identified AR order in the 2nd regime is: 2
```

A posteriori probability of the autoregressive orders are:

	0	1	2	3
Regime1	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
Regime2	0.000000	0.000016	0.813958	0.186024

Las probabilidades a posteriori indican que el modelo es de orden 3, 2, es decir, en el régimen 1 la probabilidad mayor es 1 que corresponde al orden 1, para el régimen 2 la mayor probabilidad es 0.813 que corresponde al orden 2.

4. Conclusiones

- Se aplicó el paquete TAR para la estimación de los órdenes autorregresivos adecuando las funciones `ARorder.norm` y `simu.tar.norm` para ruido GED. Se aplica la metodología en ejercicios de la investigación iniciada en Castro (2016) generando buenos resultados en las estimaciones.
- En este trabajo se comprobó que la metodología empleada en Castro (2016) estimando 45 modelos de tamaño 300 y 1000 vía Monte Carlo presenta una (de 45) estimación alejada del valor real y por fuera de los intervalos de credibilidad para series con orden autorregresivo 3. Se presentaron variaciones porcentuales promedio mayores para los ponderadores de varianza, sin embargo, el método de estimación empleado a nivel general da indicio de eficiencia en el método de estimación. Estas ejecuciones demandaron bastante tiempo debido a la exigencia computacional y a nivel teórico este documento se basa en los ejercicios realizados en Castro (2016).
- En conclusión el trabajo realizado en Castro (2016) y este trabajo tienen buenos resultados que dan indicio de que la metodología funciona y es aplicable.
- Para futuros trabajos se pretende adecuar todas las funciones para ruido GED del paquete TAR y la introducción de la modificación del modelo TAR para modelar valores positivos de las series de tiempo, ver ecuación (2) para ruido distribuido GED. Se aplicó el método de la grilla, sin embargo, los métodos como Metropolis Hasting, Aceptación y Rechazo también podrían ser utilizados.

Este trabajo se realiza en el desarrollo de la autora bajo la dirección de la profesora Hanwen Zhang PH.D. para optar por el título de maestría en estadística aplicada de la Universidad Santo Tomás.

Referencias

- Castro, D. (2016). *Estimación del modelo autorregresivo de umbrales cuando el proceso de ruido sigue una distribución de error generalizada*. Descargado de <https://hdl.handle.net/11634/3829>
- Moreno, E., y Nieto, F. H. (2014). Modelos tar en series de tiempo financieras. *Comunicaciones en estadística*, 7(2), 203-222.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrika*, 59, 347-370.

- Nieto, F. H. (2005). Modeling bivariate threshold autoregressive processes in the presence of missing data. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 34, 905930.
- Nieto, F. H., Zhang, H., y Li, W. (2013). Using the reversible jump mcmc procedure for identifying and estimating univariate tar models. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 42(4), 814-840. Descargado de <https://doi.org/10.1080/03610918.2012.655827>
- P. Carlin, B., y Chib, S. (1995, 01). Bayesian model choice via markov chain monte carlo methods. , 57, 142-170.
- R. Vasudeva, J. V. K. (2013, 10). On general error distributions. *ProbStat Forum*, 06, 8995. Descargado de www.probstat.org.in
- Tong, H. (1978). *On a threshold model in pattern recognition and signal processing* (C. H. Chen ed.). Sijhoff & Noordhoff: Amsterdam.
- Tong, H. (2011). Threshold models in time series analysis - 30 years on. *Statistics and its Interface*, 4, 107-118.
- Tong, H. (2015). Threshold models in time series analysis - some reflections. *Journal of Econometrics*, 189(2), 485 - 491. Descargado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407615001177> (Frontiers in Time Series and Financial Econometrics) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2015.03.039>
- Tong, H., y Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 42(3), 245-292. Descargado de <http://www.jstor.org/stable/2985164>
- Zhang, H. (2011). Estimación de los modelos tar cuando el proceso del ruido sigue una distribución t. *Comunicaciones en estadística*, 4(2), 109-119.
- Zhang, H., y Nieto, F. H. (2015). TAR Modeling with Missing Data when the White Noise Process Follows a Student's t-Distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, 38(1), 239-266.
- Zhang and Nieto. (2017). R: Bayesian modeling of autoregressive threshold time series models [Manual de software informático]. Bogotá, Colombia. Descargado de <http://www.R-project.org/>

A. Anexo: Modelos ejecutados vía simulación.

A.1. Modelo 1.1.300

Tabla 3: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 1, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.978 (1) (0.819, 1.144)	1.929 (2) (1.639, 2.27)	1.069 (1) (0.863, 1.321)
Régimen 1	1.00 (1) (0.881, 1.12)	NA			
Régimen 2	-0.502 (-0.5) (-0.74, -0.271)	NA			

A.2. Modelo1.3.300

Tabla 4: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 1, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.994 (1) (0.896, 1.082)	1.986 (2) (1.809, 2.17)	3.044 (1) (2.373, 3.587)
Régimen 1	1.00 (1) (0.849, 1.162)	NA			
Régimen 2	-0.496 (-0.5) (-0.796, -0.193)	NA			

A.3. Modelo1.3.1000

Tabla 5: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 1, cuando $v = 3$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.998 (1) (0.0.948, 1.053)	1.993 (2) (1.891, 2.103)	3.033 (1) (2.611, 3.501)
Régimen 1	0.999 (1) (0.914, 1.078)	NA			
Régimen 2	-0.501 (-0.5) (-0.676,-0.334)	NA			

A.4. Modelo2.1.300

Tabla 6: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 2, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.973 (1) (0.825, 1.135)	1.927 (2) (1.605, 2.286)	1.07 (1) (0.865, 1.331)
Régimen 1	1.003 (1) (0.881, 1.138)	0.496 (0.5) (0.428, 0.565)			
Régimen 2	-0.503 (-0.5) (-0.75, -0.243)	NA			

A.5. Modelo2.1.1000

Tabla 7: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 2, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.993 (1) (0.902, 1.083)	1.978 (2) (1.8, 2.16)	1.02 (1) (0.909, 1.15)
Régimen 1	0.999 (1) (0.929, 1.069)	0.499 (0.5) (0.458, 0.545)			
Régimen 2	-0.502 (-0.5) (-0.625, -0.386)	NA			

A.6. Modelo2.3.300

Tabla 8: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 2, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.993 (1) (0.902, 1.093)	1.977 (2) (1.786, 2.166)	3.039 (1) (2.363, 3.586)
Régimen 1	1.003 (1) (0.842, 1.18)	0.499 (0.5) (0.411, 0.583)			
Régimen 2	-0.499 (-0.5) (-0.808, -0.183)	NA			

A.7. Modelo3.1.300

Tabla 9: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 3, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.972 (1) (0.824, 1.126)	1.929 (2) (1.599, 2.275)	1.068 (1) (0.86, 1.322)
Régimen 1	1.001 (1) (0.89, 1.115)	NA			
Régimen 2	-0.504 (-0.5) (-0.743, -0.236)	-0.696 (-0.7) (-0.803, -0.577)			

A.8. Modelo3.3.300

Tabla 10: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 3, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.992 (1) (0.9, 1.086)	1.977 (2) (1.791, 2.177)	3.044 (1) (2.394, 3.584)
Régimen 1	1.003 (1) (0.857, 1.148)	NA			
Régimen 2	-0.499 (-0.5) (-0.806, -0.189)	-0.696 (-0.7) (-0.815, -0.541)			

A.9. Modelo4.1.300

Tabla 11: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 4, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.978 (1) (0.836, 1.152)	1.917 (2) (1.617, 2.25)	1.066 (1) (0.869, 1.323)
Régimen 1	1.001 (1) (0.857, 1.132)	0.497 (0.5) (0.438, 0.55)			
Régimen 2	-0.499 (-0.5) (-0.747, -0.229)	-0.7 (-0.7) (-0.804, -0.595)			

A.10. Modelo4.1.1000

Tabla 12: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 4, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.993 (1) (0.91, 1.082)	1.981 (2) (1.8, 2.17)	1.017 (1) (0.908, 1.145)
Régimen 1	0.999 (1) (0.931, 1.069)	0.499 (0.5) (0.46, 0.532)			
Régimen 2	-0.499 (-0.5) (-0.634, -0.358)	-0.699 (-0.7) (-0.751, -0.641)			

A.11. Modelo4.3.300

Tabla 13: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 4, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.994 (1) (0.906, 1.086)	1.976 (2) (1.805, 2.163)	3.053 (3) (2.369, 3.605)
Régimen 1	0.998 (1) (0.839, 1.169)	0.495 (0.5) (0.423, 0.566)			
Régimen 2	-0.486 (-0.5) (-0.786, -0.158)	-0.698 (-0.7) (-0.812, -0.564)			

A.12. Modelo4.3.1000

Tabla 14: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 4, cuando $v = 3$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	0.999 (1) (0.943, 1.0540)	1.993 (2) (1.881, 2.091)	3.047 (3) (2.574, 3.544)
Régimen 1	0.999 (1) (0.906, 1.088)	0.499 (0.5) (0.457, 0.541)			
Régimen 2	-0.5 (-0.5) (-0.668, -0.318)	-0.698 (-0.7) (-0.763, -0.636)			

A.13. Modelo5.1.300

Tabla 15: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 5, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	0.992 (1) (0.841, 1.199)	1.906(2) (1.608, 2.207)	1.094(1) (0.876, 1.39)
Régimen 1	1.001(1) (0.858, 1.15)	0.497(0.5) (0.411, 0.568)	-0.303(-0.3) (-0.375, -0.223)			
Régimen 2	-0.5(-0.5) (-0.746, -0.244)	NA	NA			

A.14. Modelo5.3.300

Tabla 16: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 5, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.001 (1) (0.909, 1.102)	1.973(2) (1.789, 2.157)	3.032(3) (2.374, 3.591)
Régimen 1	0.998(1) (0.830, 1.168)	0.492(0.5) (0.406, 0.581)	-0.297(-0.3) (-0.386, -0.21)			
Régimen 2	-0.486(-0.5) (-0.793, -0.166)	NA	NA			

A.15. Modelo6.1.300

Tabla 17: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 6, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	0.973 (1) (0.835, 1.143)	1.914(2) (1.606, 2.248)	1.068(1) (0.868, 1.332)
Régimen 1	0.999(1) (0.869, 1.115)	NA	NA			
Régimen 2	-0.498(-0.5) (-0.752, -0.22)	-0.6(-0.6) (-0.737, -0.47)	0.294(0.3) (0.161, 0.431)			

A.16. Modelo6.1.1000

Tabla 18: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 6, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	0.991 (1) (0.91, 1.079)	1.98(2) (1.798, 2.168)	1.020(1) (0.908, 1.15)
Régimen 1	0.998(1) (0.935, 1.066)	NA	NA			
Régimen 2	-0.498(-0.5) (-0.638, -0.361)	-0.599(-0.6) (-0.66, -0.534)	0.298(0.3) (0.237, 0.362)			

A.17. Modelo6.3.300

Tabla 19: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 6, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	0.992 (1) (0.903, 1.083)	1.978(2) (1.797, 2.167)	3.042(3) (2.368, 3.595)
Régimen 1	0.995(1) (0.846, 1.15)	NA	NA			
Régimen 2	-0.482(-0.5) (-0.795, -0.134)	-0.603(-0.6) (-0.746, -0.447)	0.286(0.3) (0.131, 0.434)			

A.18. Modelo7.1.300

Tabla 20: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 7, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.97 (1) (0.803, 1.162)	2.023(2) (1.622, 2.969)	1.075(1) (0.699, 1.37)
Régimen 1	1.001(1) (0.885, 1.125)	NA	NA	NA			
Régimen 2	-0.466(-0.5) (-0.752, -0.004)	0.478(0.5) (0.29, 0.604)	-0.287(-0.3) (-0.43, -0.024)	0.663(0.7) (0.268, 0.811)			

A.19. Modelo7.1.1000

Tabla 21: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 7, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.992 (1) (0.903, 1.087)	1.982(2) (1.798, 2.171)	1.025(1) (0.914, 1.15)
Régimen 1	1(1) (0.935, 1.057)	NA	NA	NA			
Régimen 2	-0.495(-0.5) (-0.636, -0.349)	0.497(0.5) (0.431, 0.561)	-0.300(-0.3) (-0.371, -0.228)	0.693(0.7) (0.622, 0.762)			

A.20. Modelo7.3.300

Tabla 22: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 7, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.007 (1) (0.9, 1.279)	2.066(2) (1.801, 2.969)	2.886(3) (0.778, 3.564)
Régimen 1	0.999(1) (0.835, 1.168)	NA	NA	NA			
Régimen 2	-0.475(-0.5) (-0.816, -0.001)	0.482(0.5) (0.292, 0.631)	-0.294(-0.3) (-0.457, -0.026)	0.666(0.7) (0.305, 0.84)			

A.21. Modelo7.3.1000

Tabla 23: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 7, cuando $v = 3$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.998 (1) (0.945, 1.05)	1.998(2) (1.894, 2.108)	3.042(3) (2.606, 3.538)
Régimen 1	1 ⁽¹⁾ (0.918, 1.083)	NA	NA	NA			
Régimen 2	-0.496(-0.5) (-0.658, -0.323)	0.497(0.5) (0.42, 0.571)	-0.302(-0.3) (-0.388, -0.214)	0.694(0.7) (0.609, 0.771)			

A.22. Modelo8.1.300

Tabla 24: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 8, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.966 (1) (0.805, 1.123)	1.924(2) (1.628, 2.231)	1.081(1) (0.881, 1.347)
Régimen 1	1.002(1) (0.873, 1.129)	-0.4(-0.4) (-0.468, -0.333)	NA	NA			
Régimen 2	-0.499(-0.5) (-0.773, -0.231)	-0.604(-0.6) (-0.733, -0.466)	0.29(0.3) (0.129, 0.421)	NA			

A.23. Modelo8.1.1000

Tabla 25: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 8, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.993 (1) (0.906, 1.085)	1.978(2) (1.796, 2.163)	1.023(1) (0.917, 1.142)
Régimen 1	1 ⁽¹⁾ (0.932, 1.061)	-0.399(-0.4) (-0.437, -0.36)	NA	NA			
Régimen 2	-0.498(-0.5) (-0.635, -0.364)	-0.6(-0.6) (-0.672, -0.525)	0.296(0.3) (0.228, 0.368)	NA			

A.24. Modelo8.3.1000

Tabla 26: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 8, cuando $v = 3$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.998 (1) (0.945, 1.051)	1.996(2) (1.889, 2.101)	3.05(3) (2.625, 3.535)
Régimen 1	1 ⁽¹⁾ (0.915, 1.080)	-0.399(-0.4) (-0.443, -0.355)	NA	NA			
Régimen 2	-0.499(-0.5) (-0.658, -0.329)	-0.599(-0.6) (-0.684, -0.516)	0.296(0.3) (0.204, 0.384)	NA			

A.25. Modelo9.1.300

Tabla 27: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 9, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.222 (1) (0.865, 1.564)	2.808(2) (1.84, 2.97)	0.684(1) (0.475, 1.315)
Régimen 1	1.001(1) (0.853, 1.156)	0.496(0.5) (0.43, 0.554)	NA	NA			
Régimen 2	-0.14(-0.5) (-0.783, 0.035)	0.153(0.5) (-0.015, 0.541)	-0.064(-0.3) (-0.384, 0.037)	0.215(0.7) (-0.003, 0.774)			

A.26. Modelo9.3.300

Tabla 28: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 9, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.407 (1) (0.926, 1.9)	2.762(2) (1.901, 2.97)	1.179(3) (0.491, 3.318)
Régimen 1	1.009(1) (0.709, 1.316)	0.495(0.5) (0.367, 0.62)	NA	NA			
Régimen 2	-0.178(-0.5) (-0.794, 0.033)	0.199(0.5) (-0.007, 0.561)	-0.088(-0.3) (-0.431, 0.046)	0.265(0.7) (-0.001, 0.783)			

A.27. Modelo9.3.1000

Tabla 29: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 9, cuando $v = 3$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.567 (1) (0.969, 1.877)	2.876(2) (2.002, 2.97)	0.891(3) (0.517, 3.081)
Régimen 1	1.002(1) (0.803, 1.206)	0.5(0.5) (0.431, 0.577)	NA	NA			
Régimen 2	-0.087(-0.5) (-0.627, 0.005)	0.146(0.5) (0, 0.506)	-0.047(-0.3) (-0.345, 0.004)	0.173(0.7) (0, 0.735)			

A.28. Modelo10.1.300

Tabla 30: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 10, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.143 (1) (0.897, 1.671)	1.908(2) (1.612, 2.198)	1.143(1) (0.897, 1.671)
Régimen 1	0.965(1) (0.224, 1.136)	0.494(0.5) (0.391, 0.581)	-0.285(-0.3) (-0.376, -0.024)	NA			
Régimen 2	-0.496(-0.5) (-0.752, -0.213)	0.689(0.7) (0.568, 0.794)	NA	NA			

A.29. Modelo10.1.1000

Tabla 31: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 10, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.008 (1) (0.911, 1.109)	1.971(2) (1.783, 2.152)	1.036(1) (0.919, 1.176)
Régimen 1	1(1) (0.932, 1.068)	0.5(0.5) (0.456, 0.543)	-0.3(-0.3) (-0.343, -0.259)	NA			
Régimen 2	-0.498(-0.5) (-0.635, -0.359)	0.697(0.7) (0.641, 0.751)	NA	NA			

A.30. Modelo10.3.300

Tabla 32: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 10, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.024 (1) (0.91, 1.232)	1.976(2) (1.785, 2.177)	3.016(3) (2.285, 3.557)
Régimen 1	0.999(1) (0.826, 1.168)	0.497(0.5) (0.396, 0.591)	-0.299(-0.3) (-0.391, -0.207)	NA			
Régimen 2	-0.496(-0.5) (-0.826, -0.155)	0.691(0.7) (0.546, 0.806)	NA	NA			

A.31. Modelo10.3.1000

Tabla 33: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 10, cuando $v = 3$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.002 (1) (0.949, 1.054)	1.993(2) (1.889, 2.097)	3.042(3) (2.621, 3.51)
Régimen 1	1.001(1) (0.913, 1.09)	0.499(0.5) (0.449, 0.551)	-0.3(-0.3) (-0.347, -0.253)	NA			
Régimen 2	-0.499(-0.5) (-0.659, -0.336)	0.697(0.7) (0.625, 0.763)	NA	NA			

A.32. Modelo11.1.300

Tabla 34: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 11, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.966 (1) (0.819, 1.125)	1.925(2) (1.629, 2.262)	1.086(1) (0.886, 1.379)
Régimen 1	0.999(1) (0.863, 1.145)	0.496(0.5) (0.432, 0.555)	-0.3(-0.3) (-0.356, -0.247)	NA			
Régimen 2	-0.496(-0.5) (-0.758, -0.212)	-0.598(-0.6) (-0.698, -0.48)	0.292(0.3) (0.178, 0.411)	NA			

A.33. Modelo11.3.300

Tabla 35: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 11, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.992 ⁽¹⁾ (0.899, 1.090)	1.977 ⁽²⁾ (1.782, 2.176)	3.036 ⁽³⁾ (2.324, 3.585)
Régimen 1	1.001 ⁽¹⁾ (0.841, 1.171)	0.497 ^(0.5) (0.429, 0.573)	-0.301 ^(-0.3) (-0.368, -0.232)	NA			
Régimen 2	-0.502 ^(-0.5) (-0.804, -0.189)	-0.596 ^(-0.6) (-0.728, -0.465)	0.299 ^(0.3) (0.159, 0.426)	NA			

A.34. Modelo11.1.1000

Tabla 36: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 11, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.991 ⁽¹⁾ (0.899, 1.083)	1.977 ⁽²⁾ (1.803, 2.146)	1.022 ⁽¹⁾ (0.911, 1.151)
Régimen 1	1 ⁽¹⁾ (0.929, 1.073)	0.499 ^(0.5) (0.461, 0.534)	-0.3 ^(-0.3) (-0.335, -0.269)	NA			
Régimen 2	-0.501 ^(-0.5) (-0.63, -0.368)	-0.598 ^(-0.6) (-0.654, -0.542)	0.299 ^(0.3) (0.238, 0.353)	NA			

A.35. Modelo11.3.1000

Tabla 37: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 11, cuando $v = 3$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.996 ⁽¹⁾ (0.944, 1.049)	1.997 ⁽²⁾ (1.899, 2.1)	3.051 ⁽³⁾ (2.621, 3.556)
Régimen 1	1 ⁽¹⁾ (0.915, 1.091)	0.499 ^(0.5) (0.456, 0.543)	-0.3 ^(-0.3) (-0.343, -0.256)	NA			
Régimen 2	-0.5 ^(-0.5) (-0.666, -0.338)	-0.6 ^(-0.6) (-0.668, -0.531)	0.295 ^(0.3) (0.231, 0.364)	NA			

A.36. Modelo12.1.300

Tabla 38: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 12, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.971 ⁽¹⁾ (0.817, 1.13)	1.917 ⁽²⁾ (1.161, 2.244)	1.093 ⁽¹⁾ (0.887, 1.35)
Régimen 1	0.999 ⁽¹⁾ (0.863, 1.131)	0.499 ^(0.5) (0.433, 0.562)	-0.298 ^(-0.3) (-0.353, -0.238)	NA			
Régimen 2	-0.493 ^(-0.5) (-0.747, -0.213)	-0.596 ^(-0.6) (-0.7, -0.474)	0.292 ^(0.3) (0.177, 0.404)	0.393 ^(0.4) (0.271, 0.502)			

A.37. Modelo12.3.300

Tabla 39: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 12, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.994 (1) (0.9, 1.087)	1.982(2) (1.783, 2.171)	3.031(3) (2.344, 3.582)
Régimen 1	1.001(1) (0.837, 1.167)	0.499(0.5) (0.426, 0.573)	-0.3(-0.3) (-0.37, -0.231)	NA			
Régimen 2	-0.491(-0.5) (-0.798, -0.144)	-0.597(-0.6) (-0.722, -0.457)	0.29(0.3) (0.148, 0.436)	0.389(0.4) (0.253, 0.528)			

A.38. Modelo12.1.1000

Tabla 40: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 12, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	0.99 (1) (0.9, 1.082)	1.971(2) (1.794, 2.17)	1.025(1) (0.908, 1.158)
Régimen 1	1(1) (0.933, 1.073)	0.499(0.5) (0.464, 0.536)	-0.299(-0.3) (-0.336, -0.268)	NA			
Régimen 2	-0.501(-0.5) (-0.628, -0.358)	-0.599(-0.6) (-0.652, -0.543)	0.298(0.3) (0.24, 0.353)	0.398(0.4) (0.341, 0.455)			

A.39. Modelo13.1.300

Tabla 41: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 13, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	2.682 (1) (0.92, 2.97)	2.185(2) (1.743, 2.686)	0.775(1) (0.519, 1.398)
Régimen 1	-0.086(-0.5) (-0.558, 0.009)	0.298(0.5) (0.01, 0.615)	-0.072(-0.3) (-0.352, 0.062)	0.405(0.7) (0.014, 0.79)			
Régimen 2	-0.493(-0.5) (-0.778, -0.243)	NA	NA	NA			

A.40. Modelo13.1.1000

Tabla 42: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 13, cuando $v = 1$ y $N = 1000$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	2.941 (1) (2.97, 2.97)	2.379(2) (1.994, 2.743)	0.674(1) (0.554, 0.976)
Régimen 1	-0.01(-0.5) (-0.052, 0.001)	0.266(0.5) (0.018, 0.581)	-0.023(-0.3) (-0.266, 0.032)	0.371(0.7) (0.03, 0.772)			
Régimen 2	-0.496(-0.5) (-0.64, -0.348)	NA	NA	NA			

A.41. Modelo13.3.300

Tabla 43: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 13, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	2.512 (1) (0.965, 2.97)	2.405(2) (1.858, 2.824)	1.360(3) (0.557, 3.416)
Régimen 1	-0.141(-0.5) (-0.611, 0.01)	0.342(0.5) (0.010, 0.625)	-0.112(-0.3) (-0.368, 0.07)	0.46(0.7) (0.018, 0.81)			
Régimen 2	-0.516(-0.5) (-1.081, -0.03)	NA	NA	NA			

A.42. Modelo13.3.1000

Tabla 44: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 13, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	2.838 (1) (1.079, 2.97)	2.651(2) (1.964, 2.906)	0.972(3) (0.598, 3.173)
Régimen 1	-0.056(-0.5) (-0.513, 0.001)	0.331(0.5) (0.035, 0.587)	-0.058(-0.3) (-0.328, 0.045)	0.443(0.7) (0.105, 0.758)			
Régimen 2	-0.502(-0.5) (-0.842, -0.209)	NA	NA	NA			

A.43. Modelo14.1.300

Tabla 45: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 14, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	2.969 (1) (2.968, 2.97)	2.843(2) (2.695, 2.914)	0.374(1) (0.319, 0.443)
Régimen 1	0.006(-0.5) (-0.016, 0.032)	0.0005(0.5) (-0.001, 0.004)	-0.001(-0.3) (-0.0003, 0)	0.0004(0.7) (-0.001, 0.005)			
Régimen 2	-0.579(-0.5) (-1.121, -0.059)	0.782(0.8) (0.65, 0.895)	NA	NA			

A.44. Modelo14.3.300

Tabla 46: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 14, cuando $v = 3$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	2.969 (1) (2.968, 2.97)	2.90(2) (2.843, 2.933)	0.387(3) (0.329, 0.461)
Régimen 1	0.006(-0.5) (-0.019, 0.043)	0.0005(0.5) (-0.001, 0.007)	-0.001(-0.3) (-0.001, 0.0006)	0.002(0.7) (-0.001, 0.0204)			
Régimen 2	-0.649(-0.5) (-1.794, 0.261)	0.767(0.8) (0.529, 0.991)	NA	NA			

A.45. Modelo 15.1.300

Tabla 47: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 15, cuando $v = 1$ y $N = 300$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	2.857 (1) (0.996, 2.97)	2.329(2) (1.744, 2.746)	0.671(1) (0.516, 1.172)
Régimen 1	0.693(1) (-0.158, 1.502)	-0.186(-0.6) (-0.609, 0.003)	0.153(0.3) (-0.002, 0.477)	0.116(0.4) (-0.037, 0.436)			
Régimen 2	-0.489(-0.5) (-0.764, -0.221)	-0.602(-0.6) (-0.763, -0.475)	0.29(0.3) (0.164, 0.412)	NA			