



Estimación del modelo autorregresivo de umbrales cuando el proceso de ruido sigue una distribución de error generalizada

Deysi Yurany Castro Toloza

Universidad Santo Tomás
Facultad de Estadística
Bogotá, Colombia
2016

Estimación del modelo autorregresivo de umbrales cuando el proceso de ruido sigue una distribución de error generalizada

Deysi Yurany Castro Toloza

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de:
Profesional en Estadística

Directora:
Hanwen Zhang

Universidad Santo Tomás
Facultad de Estadística
Bogotá, Colombia
2016

A mis padres y Alex, por su amor y dedicación.

Objetivos

Objetivos Generales

- Desarrollar el procedimiento estadístico para la estimación de los modelos TAR cuando el proceso de ruido sigue una distribución GED.
- Verificar la efectividad de la estimación de los modelos TAR vía simulación.

Objetivos Específicos

- Hallar función de verosimilitud del modelo.
- Desarrollar la estimación bayesiana de los parámetros del modelo.
 - Encontrar distribución *a posteriori* de los parámetros.
 - Describir las formas de muestrear *a posterioris* mediante el muestreador de Gibbs.
- Verificar la efectividad de la estimación de los modelos TAR vía simulación.

Resumen

En este trabajo se consideran los modelos TAR cuando el proceso de ruido sigue una distribución de error generalizada. Se identifica la función de verosimilitud de forma recursiva y se desarrolla un procedimiento bayesiano para la estimación de estos modelos cuando se conocen los parámetros estructurales. La metodología se basa en encontrar las densidades condicionales *a posteriori* de los parámetros y aplicar el muestreador de Gibbs.

Palabras clave: Modelos TAR, ruido GED, estimación bayesiana, muestreador de Gibbs.

Abstract

In this paper, TAR models with GED noise is considered. The likelihood function recursively is identified and a Bayesian method for estimation of these models is developed when the structural parameters are known. The methodology is based on finding the conditional posterior densities and apply the Gibbs sampler.

Keywords: TAR models, GED noise, Bayesian estimation, Gibbs sampler

Contenido

Objetivos	VII
Resumen	IX
1. Introducción	2
2. Modelo TAR con distribución de error generalizada (GED)	4
2.1. Distribución de error generalizada (GED)	4
2.2. TAR con ruido GED	6
2.3. Función de Verosimilitud	6
3. Estimación del modelo	8
3.1. Distribución <i>a posteriori</i> de los parámetros no estructurales	8
3.1.1. Estimación del parámetro θ_j	8
3.1.2. Estimación del parámetro $h^{(j)}$	9
3.1.3. Estimación del parámetro v	10
3.2. Muestreador de Gibbs para estimar parámetros	11
4. Simulaciones realizadas	12
5. Conclusiones	29
A. Anexo: código r de simulaciones de modelos	30
Bibliografía	37

1. Introducción

En nuestros intentos por entender los fenómenos que ocurren en el mundo, las observaciones de un tipo u otro se hacen con frecuencia de forma secuencial en el tiempo, un claro ejemplo es la tasa representativa del mercado (TRM) cuyos valores más altos del dólar se registraron a lo largo del último semestre del 2015. Es así como el objetivo más importante en nuestro estudio de una serie temporal es ayudar a descubrir la dinámica que rige su comportamiento.

En términos más formales, una serie de tiempo es un conjunto de observaciones x_t , donde cada uno de ellos se registró en un momento t específico. Las teorías de la serie de tiempo lineal incluyen la estacionalidad, la dependencia dinámica, función de autocorrelación, modelado y predicción; entre los modelos en los que se aplican estas teorías encontramos los modelos autoregresivos (AR), modelos de medias móviles (MA), modelo autorregresivo de media móvil (ARMA). Así mismo, encontramos modelos que nos permiten evaluar heterocedasticidad condicional como los modelos autoregresivos de heterocedasticidad condicional (ARCH) de Engle (1982), la generalización del modelo ARCH (GARCH) de Bollerslev (1986), el modelo de exponencial GARCH (EGARCH) de Nelson (1991), el modelo de umbrales GARCH (TGARCH) de Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) and Zakoian (1994) y el modelo autorregresivo de heterocedasticidad condicional de medias móviles (CHARMA) de Tsay (1987), entre otros[6].

Ahora, la idea bajo los modelos de no linealidad es dejar una media condicional μ_t evolucionando en el tiempo de acuerdo la función no lineal. Estos modelos se han propuesto haciendo uso de herramientas computacionales avanzadas para su desarrollo. Entre estos modelos encontramos los modelos autorregresivos de umbrales (TAR) de Tong (1978), Modelos Autorregresivos de transición suave (STAR) de Teräsvirta y Anderson (1992), modelos Self-exciting TAR (SETAR) introducido por Tong (1978).

Para el desarrollo de este trabajo nos enfocaremos en los modelos autoregresivos de umbrales (TAR) que tienen aplicabilidad en muchos fenómenos de la naturaleza y por ende su estudio a dado de que hablar. Los modelos TAR fueron propuestos por primera vez por Tong (1978) y discutido en detalle por Tong y Lim (1980) y Tong (1983). Estos modelos se basan en una variable exógena denominada variable de umbrales, sin embargo, han presentado dificultades debido a: (a) la falta de un procedimiento de modelado adecuado y (b) la incapacidad de identificar la variable de umbral y estimar los valores del umbral. Sin embargo, los modelos

TAR permiten una variable de umbrales diferente a la variable objetivo y un número de regímenes mayor, permitiendo una mayor generalidad.

La variable de entrada en los modelos TAR es la variable de umbral y dependiendo de la localización de sus valores en su espacio muestral, uno tiene diferentes tipos de respuestas de la variable de salida. Por ejemplo, Nieto (2005), midió componentes hidrológicos de la Laguna San Rafael del Departamento del Huila, en presencia de datos faltantes, utilizó un modelo TAR para su estimación usando el enfoque Bayesiano para la identificación y estimación de parámetros, y se escogieron las precipitaciones como variable de entrada y el caudal del río como una salida[4]. Moreno (2010), buscó evaluar el desempeño del modelo TAR propuesto por Nieto (2005), en el análisis de los hechos estilizados del mercado accionario y comparó los resultados de los modelos TAR y GARCH, y encontró dificultades de los modelos TAR para capturar heterocedasticidad marginal de la serie y aunque este modelo es adecuado para describir la dependencia lineal de los retornos, los modelos GARCH presentaron mejor desempeño[2]. En este concepto coincide Zhang (2014) afirmando que los modelos GARCH tienen mejor desempeño frente a los modelos TAR con ruido Gausiano, donde los residuos al cuadrado muestran grandes correlaciones, lo cual es una desventaja en comparación con la familia de modelos GARCH donde los residuos muestran una fuerte evidencia de independencia[7]. En Zhang (2014), se analizó tipos de familias de modelos TAR con ruido no Gausiano, en los cuales se encuentran modelos TAR con proceso de ruido distribuido t y modelos TAR con proceso de ruido distribuido Gamma estandarizada, sin embargo, el desarrollo llevado a cabo presentó restricciones para conjunto de datos grandes.

Entre las distribuciones no Gaussianas encontramos la distribución generalizada del error (GED) que es usada cuando los errores no son necesariamente de distribución normal con media cero. La distribución generalizada del error (GED) incluye un caso especial de la normal, junto con otras distribuciones, con colas un poco más pesadas que la normal (por ejemplo, la doble exponencial), con colas más delgadas (por ejemplo, la uniforme). Nelson (1991) desarrolló un modelos de regresión lineal y modelos de series de tiempo con colas pesadas, asumiendo distribución del error (GED)[3].

De esta manera, el presente trabajo pretende estimar modelos TAR con ruido distribuido generalizado del error (GED) asumiendo que el modelo está previamente identificado, y mediante estimaciones bayesianas buscamos la forma de estimar el modelo.

2. Modelo TAR con distribución de error generalizada (GED)

2.1. Distribución de error generalizada (GED)

La distribución de error generalizada (GED) es usada en el modelamiento estadístico, cuando los errores no son necesariamente de distribución normal. Nelson (1991) introdujo este tipo de distribuciones para modelos GARCH. GED se ha extendido exponencialmente en las colas de las distribuciones e incluye la distribución normal como un caso especial, junto con muchas otras distribuciones. Algunos con colas más pesadas que la distribución normal, por ejemplo, la doble exponencial.

La función de densidad de probabilidad de la GED está dada por:

$$f_v(x) = \frac{v \exp\left\{-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\lambda}\right|^v\right\}}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}, v > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R} \quad (2-1)$$

Donde $\lambda = \left[2^{-\frac{2}{v}} \frac{\Gamma(\frac{1}{v})}{\Gamma(\frac{3}{v})}\right]^{\frac{1}{2}}$ y $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma. Es bien sabido si x es GED, $E(x) = 0$, $E(x^2) = 1$ y $E(x^k) < \infty$ para todo $k > 0$ y $Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = 1$. Cuando $v = 2$ GED se reduce a una distribución normal estándar y cuando $v = 1$, esta se reduce a una distribución doble exponencial [5].

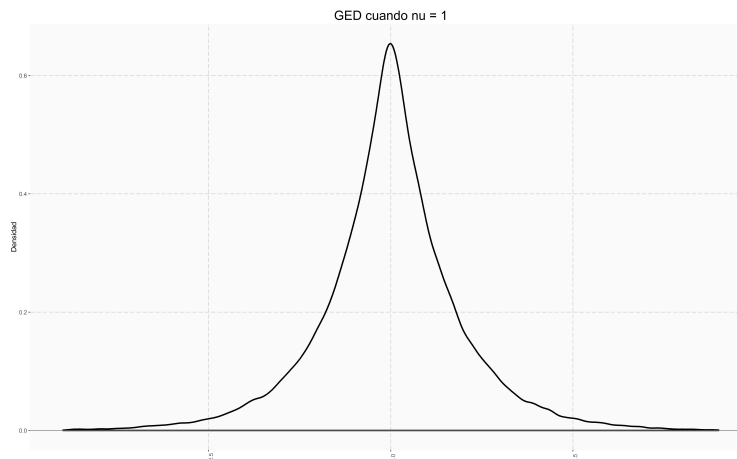


Figura 2-1.: GED cuando $v = 1$, Distribución doble exponencial.

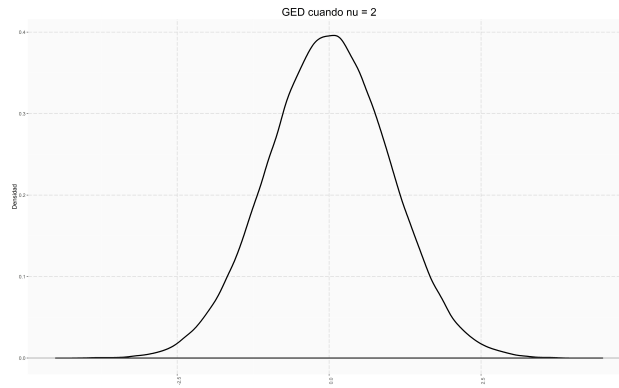


Figura 2-2.: GED cuando $v = 2$, Distribución normal estándar.

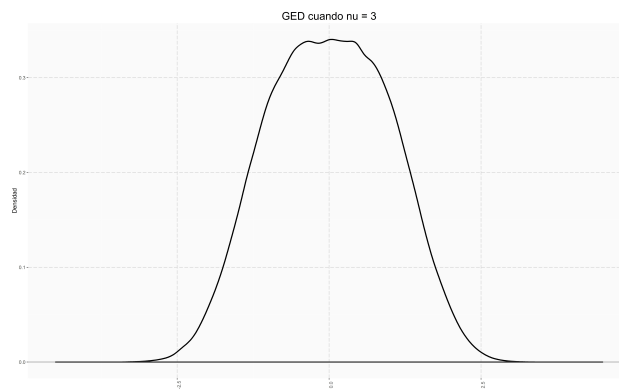


Figura 2-3.: GED cuando $v = 3$

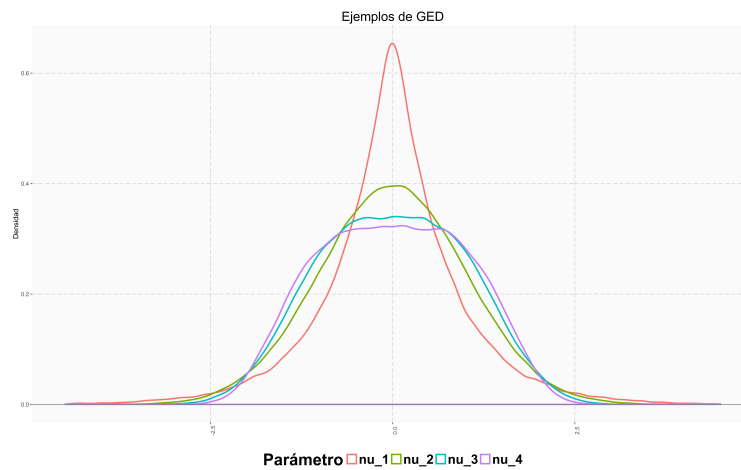


Figura 2-4.: GED comparativa

2.2. TAR con ruido GED

Sea un proceso estocástico con un proceso de entrada $\{Z_t\}$ y uno de salida $\{X_t\}$, el modelo autoregresivo de umbrales, por sus siglas en inglés TAR (Threshold Autoregressive Model) con ruido GED está dado de la forma:

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_0^{(j)} X_{t-i} + h^{(j)} e_t \quad (2-2)$$

si $Z_t \in R_j = (r_{j-1}, r_j]$ para algún $j = 1, \dots, l$, con $r_0 = -\infty$ y $r_l = \infty$ y $e_t \sim_{iid} \text{GED}$. Los parámetros del modelo TAR están divididos por dos grupos; (a) los parámetros estructurales en los que se encuentran los l regímenes, los números $r_1 < \dots < r_{l-1}$ que definen los l regímenes del proceso Z_j y los ordenes autoregresivos en los l regímenes k_1, \dots, k_l , que son números enteros positivos. (b) los parámetros no estructurales que son los coeficientes autoregresivos $a_i^{(j)}$, las ponderaciones de la varianza $h^{(j)}$ con $(j = 1, \dots, l; i = 0, 1, \dots, k_j)$ y el parámetro v del proceso de ruido *GED*.

El presente artículo asume los parámetros estructurales conocidos.

2.3. Función de Verosimilitud

Una de las herramientas del modelo TAR es su función de verosimilitud que en el desarrollo de este ejercicio se sigue la metodología de Zhang (2014), adoptandola a la distribución GED. Condicionando en los parámetros estructurales $l, r_1, \dots, r_{l-1}, k_1, \dots, k_l$ y los valores iniciales $x_k = (x_1, \dots, x_k)$, y denotando $k = \max\{k_1, \dots, k_l\}$, la función de verosimilitud de la serie observada $\{X_t\}$ está dada por

$$p(x|\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = p(x|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) \quad (2-3)$$

donde:

$$p(x|\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x) = p(x_{k+1}|x_k, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x) \cdots p(x_T|x_{T-1}, \dots, x_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x)$$

Ahora, la función de densidad de probabilidad de GED está dada por:

$$f_v(x) = \frac{v \exp\left\{-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\lambda}\right|^v\right\}}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}, v > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Con } \lambda = \left[2^{-\frac{2}{v}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{v}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ya que $e_t \sim_{iid} \text{GED}$, entonces para cada $t = k + 1, \dots, T$, $x_t | x_{t-1}, \dots, x_1$, se distribuye como una variable GED multiplicando por $h^{(j_t)}$ y sumando por $a_0^{(j_t)} + \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}$, que por simplificar la notación, la denotaremos x_t y de esta forma por el teorema de transformación [1] encuentro que la función de densidad es:

$$p(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = \frac{v \exp\left\{-\frac{1}{2} \left| \frac{x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}}{\lambda h^{(j_t)}} \right|^v\right\}}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)} \cdot \frac{1}{h^{(j_t)}}$$

donde $\{j_t\}$ es la realización del proceso de indicadores $\{J_t\}$ definido como $J_j = j$ si $Z_t \in R_j$, para algún $j = 1, \dots, l$. Por consiguiente se tiene que:

$$p(x | z, \boldsymbol{\theta}_x) = \left(\frac{v}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)} \right)^{T-k} \prod_{t=k+1}^T [h^{(j_t)}]^{-1} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{e_t}{\lambda} \right|^v \right\} \quad (2-4)$$

Con $e_t = \frac{1}{h^{(j_t)}} \left(x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i} \right)$

De esta forma, en el desarrollo bayesiano del siguiente capítulo, la función de verosimilitud se reducirá a $f(x | \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_x)$.

3. Estimación del modelo

La función verosimilitud es una función no lineal en los parámetros $a_i^{(j)}$, $h^{(j)}$, y v . Entonces hay que implemetar métodos numéricos, pero dado la cantidad de parámetros utilizamos bayesiana. Más aún, como son muchos parámetros que hay que estimar el método bayesiano por excelencia es el muestreador de Gibbs. En este capítulo, utilizando las distribuciones *a priori* y la función de verosimilitud encontramos las distribuciones condicionales *a posteriori* de los parámetros no estructurales, y se implementa el muestreador de Gibbs para obtener la estimación bayesiana de estos parámetros.

3.1. Distribución *a posteriori* de los parámetros no estructurales

Para encontrar la distribución *a posteriori* de los parámetros no estructurales, se necesita la función de verosimilitud del modelo encontrada anteriormente y la distribución *a priori* de los parámetros.

3.1.1. Estimación del parámetro θ_j

Sea $\theta_j = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)})'$, para $j = 1, \dots, l$, y $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_l')'$, la distribución *a priori* para θ_j es una distribución normal multivariante, es decir, $\theta_j \sim N(\theta_{0,j}, \mathbf{V}_{0,j}^{-1})$. Utilizando esta distribución *a priori* y la función de verosimilitud anterior, hallamos la distribución condicional de θ_j para cada $j = 1, \dots, l$, dados los demás parámetros no estructurales $\theta_i, i \neq j, h, \theta_z$ y v esta dada por:

$$p(\theta_j | \theta_i, i \neq j, \mathbf{h}, \mathbf{x}, \mathbf{z}, v) \propto p(x | \theta, \mathbf{z}, \mathbf{h}, v) p(\theta_j)$$

Eliminando las cantidades constantes θ_i con $i \neq j$ de la función de verosimilitud, teniendo en cuenta que $e_t = \frac{1}{h^{(jt)}} \left(x_t - a_0^{(jt)} - \sum_{i=1}^{k_{jt}} a_i^{(jt)} x_{t-i} \right)$:

Demostración:

$$p(x | \theta, \mathbf{z}, \mathbf{h}, v) = \left(\frac{v}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(\frac{1}{v})} \right)^{T-k} \prod_{t=k+1}^T [h^{(jt)}]^{-1} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{e_t}{\lambda} \right|^v \right\}$$

$$\propto \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{\left(x_t - a_0^{(jt)} - \sum_{i=1}^{k_{jt}} a_i^{(jt)} x_{t-i} \right)}{\lambda h^{(jt)}} \right|^v \right\}$$

$$\propto \exp \sum_{\{t:j_t=j\}} \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j)}} \right|^v \right\}$$

De esta forma considerando la distribución *a priori* para $\boldsymbol{\theta}_j$ es una distribución normal multivariante:

Resultado 3.1. Para cada $j = 1, \dots, l$, la distribución de $\boldsymbol{\theta}_j$ dados los demás parámetros no estructurales $\boldsymbol{\theta}_i, i \neq j, h, \boldsymbol{\theta}_z$ y v está dada por:

$$p(\boldsymbol{\theta}_j | \boldsymbol{\theta}_i, i \neq j, \mathbf{h}, \mathbf{x}, \mathbf{z}, v) \propto \exp \sum_{\{t:j_t=j\}} \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j)}} \right|^v \right\} \quad (3-1)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_{0,j})' V_{0,j} (\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_{0,j}) \right\}$$

3.1.2. Estimación del parámetro $h^{(j)}$

Sean los parámetros $h^{(1)}, \dots, h^{(l)}$, la distribución *a priori* para $(h^{(j)})^2$ es una distribución inversa Gamma (*Inverse - Gamma* (α, β)), es decir,

$$p((h^{(j)})^2) \propto (h^{(j)})^{-2\alpha-2} \exp\{-\beta/(h^{(j)})^2\} I_{(0,\infty)}(h^{(j)})^2$$

Eliminando las cantidades constantes de la función de verosimilitud, teniendo en cuenta que $e_t = \frac{1}{h^{(j_t)}} (x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i})$:

$$p(x | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}, \mathbf{h}, v) = \left(\frac{v}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(\frac{1}{v})} \right)^{T-k} \prod_{t=k+1}^T [h^{(j_t)}]^{-1} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{e_t}{\lambda} \right|^v \right\}$$

$$\propto \prod_{t=k+1}^T [h^{(j_t)}]^{-1} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j_t)}} \right|^v \right\}$$

$$\propto \prod_{t:j_t=j} [h^{(j)}]^{-1} \exp \sum_{\{t:j_t=j\}} \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j)}} \right|^v \right\}$$

Entonces, para cada $j = 1, \dots, l$, la distribución condicional *a posteriori* para $(h^{(j)})^2$ dados los parámetros estructurales $\boldsymbol{\theta}_j, j = 1, \dots, l, h, \mathbf{y} \boldsymbol{\theta}_z$ está dada por:

$$p((h^{(j)})^2 | \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{x}, \mathbf{z}, v) \propto p(x | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}, \mathbf{h}, v) p((h^{(j)})^2)$$

Demostración:

$$p((h^{(j)})^2 | \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{x}, \mathbf{z}, v)$$

$$\propto \prod_{t:j_t=j} [h^{(j)}]^{-1} \exp \sum_{\{t:j_t=j\}} \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i})}{\lambda h^{(j)}} \right|^v \right\} \times (h^{(j)})^{-2\alpha-2} \exp\{-\beta/(h^{(j)})^2\}$$

Resultado 3.2.

$$p((h^{(j)})^2 | \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{x}, \mathbf{z}, v) \propto (h^{(j)})^{-2\alpha-2-n_j} \exp \left\{ \frac{-\beta}{(h^{(j)})^2} + \sum_{\{t: j_t=j\}} \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j)}) - \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} x_{t-i}}{\lambda h^{(j)}} \right|^v \right\} \right\} \quad (3-2)$$

Donde $n_j = \# \{t : j_t = j\}$.

3.1.3. Estimación del parámetro v

Para la distribución condicional *a posteriori* del parámetro v , utilizamos para la *a priori* una distribución Gamma (α', β') , cuya forma esta dada por:

$$p(v) \propto v^{\alpha'-1} \exp\{-v/\beta'\}$$

Eliminando las cantidades constantes de la función de verosimilitud, teniendo en cuenta que

$$e_t = \frac{1}{h^{(j_t)}} \left(x_t - a_0^{(j_t)} - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i} \right):$$

$$p(x | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}, \mathbf{h}, v) = \left(\frac{v}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(\frac{1}{v})} \right)^{T-k} \prod_{t=k+1}^T [h^{(j_t)}]^{-1} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{e_t}{\lambda} \right|^v \right\}$$

$$\propto \left(\frac{v}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(\frac{1}{v})} \right)^{T-k} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j_t)}) - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}}{\lambda h^{(j_t)}} \right|^v \right\}$$

Entonces, distribución condicional *a posteriori* del parámetro v condicionado a los demás parámetros no estructurales está dado por:

$$p(v | \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{h}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \propto p(x | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}, \mathbf{h}, v) \pi(v)$$

Demostración:

$$p(v | \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{h}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \propto \left(\frac{v}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(\frac{1}{v})} \right)^{T-k} \exp \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j_t)}) - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}}{\lambda h^{(j_t)}} \right|^v \right\} \times v^{\alpha'-1} \exp\{-v/\beta'\}$$

Resultado 3.3.

$$p(v | \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{h}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \propto p(x | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}, \mathbf{h}, v) p(v)$$

$$\propto \left(\frac{1}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(\frac{1}{v})} \right)^{(T-k)} \exp \left\{ -\frac{v}{\beta'} + \sum_{t=k+1}^T \left\{ -\frac{1}{2} \left| \frac{(x_t - a_0^{(j_t)}) - \sum_{i=1}^{k_{j_t}} a_i^{(j_t)} x_{t-i}}{\lambda h^{(j_t)}} \right|^v \right\} \right\} \times v^{(T-k)+\alpha'-1} \quad (3-3)$$

3.2. Muestreador de Gibbs para estimar parámetros

El muestreador de Gibbs es una cadena de Markov simulada de X_1, X_2, X_3, \dots que se construye para distribuciones multivariadas y se logra mediante las distribuciones condicionales. El muestreador de Gibbs es una técnica introducida por Geman & Geman (1984) y desarrollada posteriormente por Gelfand & Smith (1990) que mediante la observación de suficientes valores simulados de X_n después de que la simulación se ha estabilizado, esperamos que la distribución de la muestra X_n se aproxime a su distribución a largo plazo. Empleando la metodología de Zhang (2014) los pasos del muestreador de Gibbs para estimar los parámetros no estructurales del régimen $j : \boldsymbol{\theta}_j, h^{(j)}$ para $j = 1, \dots, l$ y v son:

1. Fijar valores iniciales para $\boldsymbol{\theta}_j$, se denota por $\boldsymbol{\theta}_{j,0}$,
2. Fijar un valor inicial para $h^{(j)}$ y se denota por $h_0^{(j)}$,
3. Fijar un valor inicial para v denotada por v_0 ,
4. Para la iteración g , con $g = 1, \dots, G$, donde G es la longitud de la cadena, se simula un valor para el vector $\boldsymbol{\theta}_j$ a partir de la densidad condicional $p(\boldsymbol{\theta}_j | \boldsymbol{\theta}_{i,g-1}, i \neq j, h_{g-1}^j, \alpha, x, z, v_{g-1})$, el valor obtenido se denota por $\boldsymbol{\theta}_{j,g}$,
5. Se simula un valor para $h^{(j)}$ a partir de la densidad condicional $p((h^{(j)})^2 | \boldsymbol{\theta}_{j,g}, z, x, v_{g-1})$, el valor obtenido se denota por $h_g^{(j)}$,
6. Se simula un valor para v de la densidad condicional $p(v | \boldsymbol{\theta}_{1,g}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{l,g}, h_g, x, z)$.

¿Qué hacer cuando termine el muestreador?

- Seleccionar sólo los últimos, es decir, se toman la mitad de los datos ya que las primeras simulaciones se ven afectadas por el valor inicial.
- Eliminar posibles correlaciones seleccionando secuencialmente los valores muestreados.
- Cálculo del valor medio y los percentiles de cada parámetro.

4. Simulaciones realizadas

Las simulaciones realizadas en el software R se realizaron con una serie de tamaño $T = 300$, los parámetros $z_t \sim AR(1)$, por limitaciones de tiempo los cálculos se restringieron para $l = 2$ y la cantidad de iteraciones realizadas fueron 100 debido a que la metodología empleada demanda más tiempo. Los valores de x_t se simularon de acuerdo a la distribución GED (ver ecuación 2-1). Los parámetros *a priori* para el muestreador de Gibbs, fueron para los $a_i^{(j)} \sim N(0, 100)$, la media es 0 ya que son coeficientes autoregresivos que pueden ser positivos y $V(x) = 100$; para $h^{(j)^2} \sim IG(2,02, 1,02)$, con esos valores la esperanza de la variable es $E(x) = 1$ y $V(x) = 50$; y para $v \sim G(0,83, 6)$, se obtiene $E(x) = 5$, $V(x) = 30$. Estos valores se tuvieron en cuenta ya que conducen a una varianza grande para las *a priori*, es decir, para a prioris no informativas.

De acuerdo a las densidades condicionales vistas en el capítulo anterior, es de reconocer que las densidades no tienen forma conocida, entonces para muestrear de esas condicionales se recurren a métodos de simulación como el de la grilla, MH (Metropolis-Hastings) y AR (aceptación y rechazo), en este trabajo se aplica el método de la grilla.

Se presentan a continuación los siguientes modelos con sus respectivos parámetros iniciales y sus estimaciones intervalos de credibilidad del 95%, ya que los parámetros estructurales se asumen conocidos, se calcula la mitad de la cadena de 100 iteraciones del muestreador de Gibbs para calcular las estimaciones que bajo la función de pérdida cuadrática corresponden a la esperanza de las distribuciones a posteriori.

Tabla 4-1.: Parámetros iniciales del Modelo 1

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h	
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	1	2
0	0	Régimen 1	1	NA		
		Régimen 2	-0.5	NA		

Tabla 4-2.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 1, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.201 (1.05, 1.35)	2.090 (1.74, 2.53)	1.047 (0.87, 1.26)
Régimen 1	1.044 (0.95, 1.15)	NA			
Régimen 2	-0.578 (-0.80, -0.37)	NA			

Tabla 4-3.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 1, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.011 (0.90, 1.13)	1.944 (1.77, 2.13)	2.784 (2.13, 3.64)
Régimen 1	0.930 (0.80, 1.05)	NA			
Régimen 2	-0.273 (-0.55, 0.02)	NA			

Tabla 4-4.: Parámetros iniciales del Modelo 2

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h	
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	1	2
1	0	Régimen 1	1	0,5		
		Régimen 2	-0,5	NA		

Tabla 4-5.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 2, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.199 (1.05, 1.41)	2.091 (1.81, 2.45)	1.065 (0.830, 1.352)
Régimen 1	1.056 (0.92, 1.2)	0.493 (0.4, 0.55)			
Régimen 2	-0.575 (-0.85, -0.322)	NA			

Tabla 4-6.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 2, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.017 (0.93, 1.11)	1.928 (1.77, 2.11)	2.802 (2.12, 3.73)
Régimen 1	0.940 (0.8, 1.1)	0.490 (0.40, 0.55)			
Régimen 2	-0.283 (-0.655, 0.05)	NA			

Tabla 4-7.: Parámetros iniciales del Modelo 3

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h	
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	1	2
0	1	Régimen 1	1	NA		
		Régimen 2	-0,5	-0.7		

Tabla 4-8.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 3, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.199 (1.05, 1.37)	2.098 (1.76, 2.45)	1.072 (0.91, 1.29)
Régimen 1	1.056 (0.95, 1.15)	NA			
Régimen 2	-0.577 (-0.85, -0.30)	-0.719 (-0.8, -0.62)			

Tabla 4-9.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 3, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.011 (0.93, 1.11)	1.940 (1.81, 2.15)	2.896 (2.20, 3.73)
Régimen 1	0.911 (0.80, 1.05)	NA			
Régimen 2	-0.267 (-0.6, 0.0)	-0.651 (-0.8, -0.5)			

Tabla 4-10.: Parámetros iniciales del Modelo 4

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h	
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	1	2
1	1	Régimen 1	1	0.5		
		Régimen 2	-0.5	-0.7		

Tabla 4-11.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 4, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.188 (1.01, 1.33)	2.067 (1.77, 2.41)	1.079 (0.87, 1,28)
Régimen 1	1.063 (0.95, 1.20)	0.475 (0.42, 0.50)			
Régimen 2	-0.558 (-0.82, -0.25)	-0.690 (-0.75, -0.60)			

Tabla 4-12.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 4, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	1.010 (0.93, 1.09)	1.944 (1.77, 2.19)	2.807 (2.18, 3.43)
Régimen 1	0.933 (0.80, 1.07)	0.484 (0.40, 0.55)			
Régimen 2	-0.273 (-0.52, 0)	-0.667 (-0.80, -0.55)			

Tabla 4-13.: Parámetros iniciales del Modelo 5

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	1	2
2	0	Régimen 1	1	0.5	-0.3		
		Régimen 2	-0.5	NA	NA		

Tabla 4-14.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 5, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.203 (1.05, 1.41)	2.056 (1.74, 2.41)	1.087 (0.89, 1.35)
Régimen 1	1.068 (0.92, 1.25)	0.472 (0.40, 0.55)	-0.314 (-0.40, -0.22)			
Régimen 2	-0.594 (-0.80, -0.35)	NA	NA			

Tabla 4-15.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 5, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.014 (0.93, 1.09)	1.943 (1.74, 2.15)	2.792 (2.15, 3.60)
Régimen 1	0.938 (0.8, 1.1)	0.478 (0.37, 0.55)	-0.292 (-0.35, -0.20)			
Régimen 2	-0.262 (-0.60, 0.05)	NA	NA			

Tabla 4-16.: Parámetros iniciales del Modelo 6

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		
			Orden 0	Orden 1			Orden 2
Régimen 1	Régimen 2	Régimen 1	1	NA	NA	1	2
0	2	Régimen 2	-0,5	-0,6	0,3		

Tabla 4-17.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 6, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.180 (1.02, 1.35)	2.092 (1.74, 2.45)	1.073 (0.89, 1.28)
Régimen 1	1.046 (0.9, 1.2)	NA	NA			
Régimen 2	-0.579 (-0.85, -0.30)	-0.670 (-0.80, -0.55)	0.241 (0.10, 0.35)			

Tabla 4-18.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 6, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.007 (0.93, 1.09)	1.929 (1.74, 2.13)	2.866 (2.27, 3.58)
Régimen 1	0.932 (0.80, 1.05)	NA	NA			
Régimen 2	-0.190 (-0.47, 0.10)	-0.621 (-0.75, -0.47)	0.158 (-0.02, 0.35)			

Tabla 4-19.: Parámetros iniciales del Modelo 7

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h	
Régimen 1	Régimen 2	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1	2
0	3	Régimen 1	1	NA	NA	NA	
		Régimen 2	-0,5	0,5	-0,3	0,7	

Tabla 4-20.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 7, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.209 (1.05, 1.33)	2.070 (1.77, 2.43)	1.090 (0.92, 1.31)
Régimen 1	1.051 (0.95, 1.20)	NA	NA	NA			
Régimen 2	-0.622 (-0.92, -0.30)	0.409 (0.27, 0.55)	-0.327 (-0.45, -0.20)	0.596 (0.40, 0.72)			

Tabla 4-21.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 7, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.013 (0.93, 1.09)	1.970 (1.85, 2.17)	2.920 (2.22, 3.76)
Régimen 1	0.919 (0.80, 1.05)	NA	NA	NA			
Régimen 2	-0.240 (-0.57, 0.07)	0.5181 (0.35, 0.65)	-0.371 (-0.55, -0.20)	0.707 (0.55, 0.85)			

Tabla 4-22.: Parámetros iniciales del Modelo 8

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	1	2
1	2	Régimen 1	1	-0,4	NA		
		Régimen 2	-0,5	-0,6	0,3		

Tabla 4-23.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 8, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2			
Régimen 1	1.059 (0.90, 1.15)	-0.397 (-0.45, -0.35)	NA	1.199 (1.02, 1.33)	2.111 (1.81, 2.53)	1.073 (0.89, 1.33)
Régimen 2	-0.539 (-1.82, -0.22)	-0.705 (-0.85, -0.57)	0.221 (0.05, 0.37)			

Tabla 4-24.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 8, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2			
Régimen 1	0.910 (0.80, 1.05)	-0.397 (-0.45, -0.32)	NA	1.019 (0.93, 1.09)	1.952 (1.77, 2.13)	2.894 (2.20, 3.81)
Régimen 2	-0.256 (-0.55, -0.05)	-0.611 (-0.80, -0.35)	0.202 (0.05, 0.47)			

Tabla 4-25.: Parámetros iniciales del Modelo 9

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1	2
1	3	Régimen 1	1	0,5	NA	NA		
		Régimen 2	-0,5	0,5	-0,3	0,7		

Tabla 4-26.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 9, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.195	2.069	1.108
Régimen 1	1.061 (0.92, 1.22)	0.505 (0.45, 0.55)	NA	NA	(1.01, 1.35)	(1.81, 2.49)	(0.87, 1.31)
Régimen 2	-0.555 (-0.9, -0.2)	0.438 (0.30, 0.55)	-0.312 (-0.45, -0.10)	0.602 (0.45, 0.75)			

Tabla 4-27.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 9, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.080	2.818	2.068
Régimen 1	0.964 (0.75, 1.17)	0.494 (0.4, 0.6)	NA	NA	(0.97, 1.39)	(2.22, 2.97)	(0.78, 3.33)
Régimen 2	-0.175 (-2.0, 1.9)	0.457 (-1.37, 1.82)	-0.317 (-1.85, 1.78)	0.670 (-0.97, 1.90)			

Tabla 4-28.: Parámetros iniciales del Modelo 10

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	1	2
2	1	Régimen 1	1	0,5	-0,3		
		Régimen 2	-0,5	0,7	NA		

Tabla 4-29.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 10, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.217 (1.02, 1.45)	2.010 (1.70, 2.35)	1.124 (0.91, 1.38)
Régimen 1	1.076 (0.9, 1.3)	0.489 (0.4, 0.6)	-0.319 (-0.40, -0.25)			
Régimen 2	-0.608 (-0.90, -0.35)	0.575 (0.45, 0.67)	NA			

Tabla 4-30.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 10, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.057 (0.93, 1.29)	1.923 (1.77, 2.17)	2.636 (1.90, 3.38)
Régimen 1	0.935 (0.67, 1.22)	0.513 (0.37, 0.70)	-0.314 (-0.52, -0.20)			
Régimen 2	-0.236 (-0.52, 0.07)	0.672 (0.50, 0.82)	NA			

Tabla 4-31.: Parámetros iniciales del Modelo 11

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos			Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	1	2
2	2	Régimen 1	1	0,5	-0,3		
		Régimen 2	-0,5	-0,6	0,3		

Tabla 4-32.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 11, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.204 (1.05, 1.37)	2.13 (1.85, 2.43)	1.074 (0.86, 1.29)
Régimen 1	1.072 (0.95, 1.25)	0.458 (0.4, 0.5)	-0.309 (-0.35, -0.25)			
Régimen 2	-0.582 (-0.85, -0.27)	-0.619 (-0.72, -0.52)	0.245 (0.12, 0.35)			

Tabla 4-33.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 11, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	1.014 (0.94, 1.09)	1.932 (1.77, 2.17)	2.925 (2.34, 3.65)
Régimen 1	0.914 (0.77, 1.07)	0.471 (0.40, 0.55)	-0.266 (-0.35, -0.20)			
Régimen 2	-0.2 (-0.50, 0.12)	-0.64 (-0.75, -0.50)	0.142 (0, 0.3)			

Tabla 4-34.: Parámetros iniciales del Modelo 12

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h	
Régimen 1	Régimen 2	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1	2
2	3	Régimen 1	1	0,5	-0,3	NA	
		Régimen 2	-0,5	-0,6	0,3	0,4	

Tabla 4-35.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 12, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v	
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3			
Régimen 1	1.072 (0.95, 1.20)	0.461 (0.4, 0.5)	-0.302 (-0.35, -0.25)	NA	1.172 (1.02, 1.31)	2.055 (1.68, 2.45)	1.102 (0.87, 1.29)
Régimen 2	-0.548 (-0.9, -0.2)	-0.57 (-0.7 -0.45)	0.273 (0.15, 0.40)	0.247 (0.12, 0.37)			

Tabla 4-36.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 12, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		v	
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3			
Régimen 1	0.932 (0.80, 1.1)	0.470 (0.4, 0.55)	-0.271 (-0.35, -0.17)	NA	1.033 (0.93, 1.15)	1.951 (1.77, 2.15)	3.070 (2.27, 4.09)
Régimen 2	-0.243 (-0.55, 0.07)	-0.649 (-0.75, -0.52)	0.148 (0, 0.3)	0.447 (0.3, 0.6)			

Tabla 4-37.: Parámetros iniciales del Modelo 13

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1	2
3	0	Régimen 1	-0,5	0,5	-0,3	-0,7		
		Régimen 2	-0,5	NA	NA	NA		

Tabla 4-38.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 13, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.202	2.039	1.080
Régimen 1	-0.434 (-0.55, -0.27)	0.491 (0.42, 0.55)	-0.286 (-0.35, -0.25)	-0.672 (-0.70, -0.65)	(1.05, 1.37)	(1.77, 2.45)	(0.87, 1.34)
Régimen 2	-0.593 (-0.85, -0.32)	NA	NA	-NA			

Tabla 4-39.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 13, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.021	1.922	2.702
Régimen 1	-0.612 (-0.75, -0.45)	0.419 (0.35, 0.50)	0.254 (-0.32, -0.15)	-0.737 (-0.80, -0.65)	(0.93, 1.17)	(1.77, 2.13)	(2.12, 3.46)
Régimen 2	-0.292 (-0.60, 0.02)	NA	NA	-NA			

Tabla 4-40.: Parámetros iniciales del Modelo 14

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1	2
3	1	Régimen 1	-0,5	0,5	-0,3	-0,7		
		Régimen 2	-0,5	0,8	NA	NA		

Tabla 4-41.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 14, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.218 (1.01, 1.87)	2.064 (1.70, 2.41)	1.080 (0.90, 1.31)
Régimen 1	-0.438 (-0.57, -0.30)	0.501 (0.50, 0.52)	-0.301 (-0.32, -0.27)	-0.702 (-0.72, -0.70)			
Régimen 2	-0.609 (-0.90, -0.24)	0.793 (0.75, 0.80)	NA	NA			

Tabla 4-42.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 14, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.073 (0.94, 1.44)	1.917 (1.73, 2.11)	2.724 (2.00, 3.53)
Régimen 1	-0.564 (-0.70, -0.37)	0.505 (0.45, 0.55)	-0.279 (-0.3, -0.2)	-0.708 (-0.75, -0.70)			
Régimen 2	-0.272 (-0.55, 0.05)	0.748 (0.7, 0.8)	NA	NA			

Tabla 4-43.: Parámetros iniciales del Modelo 15

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h		
Régimen 1	Régimen 2		Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1	2
3	2	Régimen 1	1	-0,6	0,3	0,4		
		Régimen 2	-0,5	0,8	-0,3	NA		

Tabla 4-44.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 15, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.197 (1.05, 1.37)	2.026 (1.66, 2.39)	1.111 (0.91, 1.38)
Régimen 1	1.071 (0.9, 1.2)	-0.593 (-0.65, -0.55)	0.294 (0.25, 0.35)	0.363 (0.3, 0.4)			
Régimen 2	-0.642 (-0.9, -0.37)	0.688 (0.6, 0.8)	-0.273 (-0.35, -0.15)	NA			

Tabla 4-45.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 15, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.027 (0.93, 1.15)	1.963 (1.77, 2.17)	2.802 (2.14, 3.66)
Régimen 1	0.895 (0.75, 1.05)	-0.576 (-0.65, -0.50)	0.311 (0.22, 0.40)	0.422 (0.35, 0.50)			
Régimen 2	-0.233 (-0.5, 0.1)	0.770 (0.65, 0.90)	-0.332 (-0.45, -0.20)	NA			

Tabla 4-46.: Parámetros iniciales del Modelo 16

Orden Autoregresivo		Coeficientes Autoregresivos				Ponderaciones h	
Régimen 1	Régimen 2	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1	2
3	3	Régimen 1	1	-0,6	0,3	0,4	
		Régimen 2	-0,5	0,5	-0,3	0,7	

Tabla 4-47.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 16, cuando $v = 1$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.191 (1.05, 1.37)	2.058 (1.74, 2.39)	1.123 (0.90, 1.36)
Régimen 1	1.071 (0.95, 1.20)	-0.608 (-0.65, -0.60)	0.298 (0.25, 0.35)	0.394 (0.35, 0.45)			
Régimen 2	-0.661 (-0.95, -0.40)	0.464 (0.35, 0.55)	-0.270 (-0.35, -0.20)	0.665 (0.60, 0.75)			

Tabla 4-48.: Estimación e intervalos de credibilidad del 95 % para los parámetros no estructurales estimados del Modelo 16, cuando $v = 3$

Coeficientes Autoregresivos					Ponderaciones h		v
	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3	1.016 (0.93, 1.09)	1.926 (1.77, 2.13)	2.917 (2.15, 3.81)
Régimen 1	0.923 (0.75, 1.05)	-0.568 (-0.6 -0.5)	0.270 (0.25, 0.30)	0.404 (0.35, 0.47)			
Régimen 2	-0.263 (-0.52, 0.10)	0.543 (0.45, 0.65)	-0.306 (-0.40, -0.22)	0.640 (0.55, 0.75)			

5. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló la estimación de los modelos TAR con ruido distribuido generalizado del error (GED) asumiendo que el modelo está previamente identificado, y mediante estimaciones bayesianas buscamos la forma de estimar el modelo.

Se simularon 32 modelos a nivel general estimaron bien; sin embargo, por las limitaciones de tiempo las simulaciones se restringieron para 1 serie simulada, $l = 2$ y 100 iteraciones. Lo ideal es realizar una simulación montecarlo de tal forma que para cada uno de los 32 modelos simulemos 100 o 1000 series, y obtengamos las estimaciones de estas series simuladas y evaluemos su comportamiento.

Se aplicó el método de la grilla, sin embargo, los métodos como Metropolis Hasting, Aceptación y Rechazo también podrían ser utilizados. Este trabajo de grado se realiza en el desarrollo de la autora bajo la dirección de la profesora Hanwen Zhang de la facultad de Estadística, Universidad Santo Tomás de Aquino.

A. Anexo: código r de simulaciones de modelos

```
rm(list = ls(all = TRUE))
set.seed(16012016)
#####
N.sim <- 100
#####
#### Simular un proceso TAR con GED
#####
library(fGarch)
library(timeDate)
library(timeSeries)
library(fBasics)

N<-300
sigma_a<-1
phi<-0.5
Z<-arima.sim(n=5*N,list(ar=c(phi)),sd=sqrt(sigma_a))
e<-rged(5*N, mean = 0, sd = 1, nu = 1)###e<-rt(5*N,n)/(sqrt(n/(n-2)))
X<-rep(NA,5*N)
X[1:3]<-0
####Modelo 2####
for(ti in 4:(5*N)){
  if(Z[ti]<=0)      {X[ti] <- 1+0.5*X[ti-1]+e[ti]}
  if(Z[ti]>0)      {X[ti] <- -0.5+2*e[ti]      }
}
X<-ts(X[(4*N+1):(5*N)])
Z<-ts(Z[(4*N+1):(5*N)])
plot(X)
#####
## Especificar demas parametros
#####
l <- 2
```

```

r<-0
#####
K <- c(1,0)
#####
k <- max(K)
#####
## A prioris para theta_j
#####
theta_0j <- matrix(NA,l,k+1)
for(i in 1:l){
  theta_0j[i,1:(K[i]+1)] <- 0
}
# # V_0j es la precision de la a priori,
# # cuanto más pequeña, más grande es la varianza
if(k==0){
  V_0j<-as.matrix(0.01)
}
if(k>0){V_0j <- diag(rep(0.01,k+1)) }
#####
## A prioris para h_j
#####
esp <- 1
vari<-50
alpha <- 2+esp^2/vari # k
beta <- esp*(alpha-1) # theta
#####
## A prioris para v
#####
m <- 5
va <- 30
alfa <- m^2/va
lambda <- va/m
#####
## Indicadores J_t para 2 regimenos
#####
J <- -as.double(Z<=r)+2
n1 <- sum(as.double(Z<=r))
nj <- c(n1, N-n1)

#####

```

```

### Crear espacio para almacenar resultados de Gibbs
#####
res_theta_j <- array(NA,c(1,N.sim,k+1))
for(jj in 1:l){
  res_theta_j[jj,1,1:(K[jj]+1)]<-0 }

res_h_j <- matrix(NA,l,N.sim)
res_h_j[,1] <- 1 ### valores iniciales para iniciar Gibbs

res_v <- rep(NA,N.sim)
res_v[1] <- 1 ### valores iniciales para iniciar Gibbs ###5

#####
### calcula la densidad condicional de theta_j
#####
#calcular densidad condicional del i-esimo coeficiente autoregresivo en
#el j-ésimo régimen
aux_theta <- function(j,i,a_i){ # j es el régimen, i es el orden del coeficiente a_i
  theta_j <- matrix(res_theta_j[,rr-1,1:(k+1)],nrow=1)
  theta_j[j,i] <- a_i
  res.the <- rep(NA,N-k)
  lambda2 <- (2~-(2/res_v[rr-1])*(gamma(1/res_v[rr-1])/gamma(3/res_v[rr-1])))^(1/2)
  ### poner la definicion de lambda, usando res_v[rr-1]
  for(i in (k+1):N){
    if(K[J[i]]>0){res.the[i-k] <- (X[i]-theta_j[J[i],1]-sum(theta_j[J[i],2:
      (K[J[i]]+1)]*X[(i-1):(i-K[J[i]])]))/res_h_j[J[i],rr-1]}
    if(K[J[i]]==0){res.the[i-k] <- (X[i]-theta_j[J[i],1])/res_h_j[J[i],rr-1]}
  }
  AA <- exp(sum((-1/2*abs((res.the[which(J[(k+1):N]==j)]/lambda2)^(res_v[rr-1]))))*
    (exp(-0.5*t(theta_j[j,1:(K[j]+1)]-theta_0j[j,1:(K[j]+1)]))%*%V_0j[1:(K[j]+1),1:
      (K[j]+1)]%*%(theta_j[j,1:(K[j]+1)]-theta_0j[j,1:(K[j]+1)])))^(-2/(res_v[rr-1]+1))
  AA.log <- sum((-1/2*abs((res.the[which(J[(k+1):N]==j)]/lambda2)^(res_v[rr-
    1])))-0.5*t(theta_j[j,1:(K[j]+1)]-theta_0j[j,1:(K[j]+1)]))%*%V_0j[1:(K[j]+1),1:
      (K[j]+1)]%*%(theta_j[j,1:(K[j]+1)]-theta_0j[j,1:(K[j]+1)]))
  lista<-list(AA=AA,AA.log=AA.log,e=res.the)
  return(lista)
}
#####
### calcula la densidad condicional de h_j
#####

```

```

aux_h <- function(j,h_j2){
  res.h <- rep(NA,N-k)
  for(i in (k+1):N){
    if(J[i]==j){
      if(K[J[i]]>0){res.h[i-k] <- (X[i]-res_theta_j[J[i],rr,1]-
        sum(res_theta_j[J[i],rr,2:(K[J[i]]+1)]*X[(i-1):(i-K[J[i]])]))/sqrt(h_j2)}
      if(K[J[i]]==0){res.h[i-k] <- (X[i]-res_theta_j[J[i],rr,1])/sqrt(h_j2)}  }
    if(J[i]!=j){
      if(K[J[i]]>0){res.h[i-k] <- (X[i]-res_theta_j[J[i],rr,1]-
        sum(res_theta_j[J[i],rr,2:(K[J[i]]+1)]*X[(i-1):(i-K[J[i]])]))/
        res_h_j[J[i],rr-1]}
      if(K[J[i]]==0){res.h[i-k] <- (X[i]-res_theta_j[J[i],rr,1])/
        res_h_j[J[i],rr-1]}  }
    }
  lambda2 <- (2^-(2/res_v[rr-1])*(gamma(1/res_v[rr-1]) /
    gamma(3/res_v[rr-1]))^(1/2) ### poner la definicion de lambda,
    #usando res_v[rr-1]
  hh <- (h_j2)^{-alpha-1-0.5-nj[j]/2}*exp((-beta/h_j2) +
    sum(-1/2*abs(res.h[which(J[(k+1):N]==j)]/lambda2)^res_v[rr-1]))
  H1 <- sum(-1/2*abs(res.h[which(J[(k+1):N]==j)]/lambda2)^(res_v[rr-1]))
  hh.log <- (-alpha-1-0.5-nj[j]/2)*log(h_j2)+(-beta/h_j2) + H1
  lista <- list(hh=hh,hh.log=hh.log)
  return(lista)
}

#####
### calcula la densidad condicional de v
#####

aux_v <- function(v) {
  res <- rep(NA,N-k)
  for(i in (k+1):N){
    for(j in 1:l){
      if(J[i]==j){
        if(K[J[i]]>0){res[i-k] <- (X[i]-res_theta_j[j,rr,1]
          -sum(res_theta_j[j,rr,2:(K[J[i]]+1)]*X[(i-1):(i-K[J[i]])]))/res_h_j[j,rr]}
        if(K[J[i]]==0){res[i-k] <- (X[i]-res_theta_j[j,rr,1])/res_h_j[j,rr]}
      }
    }
  }
}

```

```

    }
  }
  lambda2<- (2^(-2/v)*gamma(1/v)/(gamma(3/v)))^(1/2)
  vv <- (1/(lambda2*2^(1+(1/v))*gamma(1/v)))^(N-k) * exp(-v/lambda+sum(-0.5 *
    abs(res/lambda2)^v)) * v^((N-k)+alfa-1)
  vv.log <- (-v/lambda)+sum(-0.5 * (abs(res/lambda2)^v)) +
    (N-k)*log( 1/(lambda2*2^(1+(1/v))*gamma(1/v))) + (N-k+alpha-1)*log(v)
  lista<-list(vv=vv,vv.log=vv.log)
  return(lista)
}
#####
## rango de posibles valores para cada coeficiente  $a_i^{\{j\}}$ ,  $(h^j)^2$  y  $v$ 
#####
#grilla
rang.a_i <- seq(-2,2,0.05)
rang.h1<-seq(0.01,3,by=0.04)
rang.h<-rang.h1^2
v.max <- 4
rang.v <- seq(0.02,v.max,by=0.01)####
#####
## Correr gibbs en el régimen j
#####
for(rr in 2:N.sim){

  ## calcula la densidad condicional de  $a_i$  en un rango de valores para  $a_i$ 
  for(j in 1:l){
    cond.a_i <- matrix(NA,K[j]+1,length(rang.a_i))

    for(ri in 1:(K[j]+1)){
      for(s in 1:(length(rang.a_i))){
        cond.a_i[ri,s] <- aux_theta(j,ri,rang.a_i[s])$AA.log      }
        aux.thethe <- exp(cond.a_i[ri,])
        if(max(cond.a_i[ri,])>700){ aux.thethe<-exp(cond.a_i[ri,]-max(cond.a_i[ri,]))}
        if(sum(aux.thethe)==0){ aux.thethe<-exp(cond.a_i[ri,]-max(cond.a_i[ri,]))}

        res_theta_j[j,rr,ri] <- sample(rang.a_i,1,prob=aux.thethe
          /(sum(aux.thethe))) }      }
#####
# Estimar los h
for(j in 1:l){

```

```
cond.h <- rep(NA,length(rang.h))
for(s in 1:(length(rang.h))){
  cond.h[s] <- aux_h(j,rang.h[s])$hh.log      }
cond.hh<-exp(cond.h)
if(min(cond.h)<= -744){cond.hh<-exp(cond.h-max(cond.h))}
if(max(cond.h)>700){cond.hh<-exp(cond.h-max(cond.h))}
res_h_j[j,rr] <- sqrt(sample(rang.h,1,prob=cond.hh/(sum(cond.hh))))
}

cond.v <- rep(NA,length(rang.v))

for(s in 1:(length(rang.v))){
  cond.v[s] <- aux_v(rang.v[s])$vv.log      }
cond.vv<-exp(cond.v)
if(min(cond.v)<= -740){cond.vv<-exp(cond.v-max(cond.v))}
if(max(cond.v)>700){cond.vv<-exp(cond.v-max(cond.v))}

res_v[rr] <- sample(rang.v,1,prob=cond.vv/(sum(cond.vv)))

print(rr)
print(res_theta_j[,rr,])
print(res_h_j[,rr])
print(res_v[rr])

}

#####
#### Calcular estimaciones e intervalos de credibilidad
#####
#
alf <- 0.05

Afinal <- matrix(NA,l,k+1)

Afinal[1,1] <- mean(res_theta_j[1,2:rr,1])
Afinal[1,2] <- mean(res_theta_j[1,2:rr,2])
Afinal[1,3] <- mean(res_theta_j[1,2:rr,3])
Afinal[1,4] <- mean(res_theta_j[1,2:rr,4])
```

```
Afinal[2,1] <- mean(res_theta_j[2,2:rr,1])
Afinal[2,2] <- mean(res_theta_j[2,2:rr,2])
Afinal[2,3] <- mean(res_theta_j[2,2:rr,3])
Afinal[2,4] <- mean(res_theta_j[2,2:rr,4])

Hfinal <- rep(NA,1)

Hfinal[1] <- mean(res_h_j[1,2:rr])
Hfinal[2] <- mean(res_h_j[2,2:rr])

vfinal <- mean(res_v[2:rr])

###quantile theta###
c(quantile(res_theta_j[1,2:rr,1],c(alf/2,1-alf/2)))
c(quantile(res_theta_j[1,2:rr,2],c(alf/2,1-alf/2)))
c(quantile(res_theta_j[1,2:rr,3],c(alf/2,1-alf/2)))
c(quantile(res_theta_j[1,2:rr,4],c(alf/2,1-alf/2)))

c(quantile(res_theta_j[2,2:rr,1],c(alf/2,1-alf/2)))
c(quantile(res_theta_j[2,2:rr,2],c(alf/2,1-alf/2)))
c(quantile(res_theta_j[2,2:rr,3],c(alf/2,1-alf/2)))
c(quantile(res_theta_j[2,2:rr,4],c(alf/2,1-alf/2)))

###quantile h###
c(quantile(res_h_j[1,2:rr],c(alf/2,1-alf/2)))
c(quantile(res_h_j[2,2:rr],c(alf/2,1-alf/2)))

###quantile v###
c(quantile(res_v[2:rr],c(alf/2,1-alf/2)))
```

Bibliografía

- [1] BLANCO, Liliana: *Probabilidad*. Primera Edición. Universidad Nacional de Colombia, 2004
- [2] MORENO, Edna: *Modelos TAR en series de tiempo financieras*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Grado, 2010
- [3] NELSON, Daniel B.: Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. En: *Econométrica* 59 (1991), p. 347–370
- [4] NIETO, Fabio H.: Modeling Bivariate Threshold Autoregressive Processes in the Presence of Missing Data. En: *Communications in Statistics—Theory and Methods* 34 (2005), p. 905–930
- [5] R. VASUDEVA, J. Vasantha K.: On general error distributions. En: *ProbStat Forum* 06 (2013), p. 89–95
- [6] TSAY, Ruey S.: *Analysis of Financial Time Series*. Third Edition. John Wiley & Sons, 2010 (Wiley series in probability and statistics)
- [7] ZHANG, Hanwen: *TAR modeling with missing data when the white noise process is not Gaussian*. Bogotá, Colombia, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Doctorado, 2014