

DIFICULTADES COGNITIVAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO PARA RELACIONAR LAS
REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL

EDITH JOHANNA MANCERA BARAHONA

EDNA ROCIO NEIRA TORRES

UNIVERSIDAD SANTO TOMAS
VICERECTORIA DE UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, JUNIO 2018

DIFICULTADES COGNITIVAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO PARA RELACIONAR LAS
REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL

EDITH JOHANNA MANCERA BARAHONA

EDNA ROCIO NEIRA TORRES

ASESOR DE TESIS

JORGE BETANCUR

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
VICERECTORIA DE UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, JUNIO 2018

INDICE

1.	INTRODUCCIÓN	4
2.	TITULO	5
4.	JUSTIFICACIÓN	7
5.1	OBJETIVO GENERAL	10
5.2	OBJETIVOS ESPECIFICOS	10
6.	ANTECEDENTES	11
6.1	MARCO CONTEXTUAL	14
7.	MARCO TEORICO	15
7.1	EVOLUCIÓN HISTORICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN	15
7.2	DIMENSIONES DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO ESCOLAR	17
7.3	REPRESENTACIONES DIVERSAS DE UNA FUNCIÓN	19
7.4	DIFICULTADES COGNITIVAS EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN	20
9.	MARCO PEDAGÓGICO	24
9.1	LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN	24
10.	METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN	25
10.1	TIPO DE INVESTIGACIÓN	25
10.2	ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN	26
11.	RESULTADOS	27
11.1	CUESTIONARIOS	27
11.1.1	OBJETIVOS DE LAS PREGUNTAS	28
11.1.2	RESULTADOS LICEO CHICÓ CAMPESTRE	31
11.1.3	RESULTADOS CENTRO DE FORMACIÓN EDUCATIVA CENFE	32
11.2	OBSERVACIÓN DIRIGIDA DE CLASE	33
12.	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	34
13.	CONCLUSIONES	39
15.	REFERENCIAS	41

16. ANEXOS	44
16.1 CUESTIONARIO	44
16. 2 OBSERVACIÓN DOCENTE	49

1. INTRODUCCIÓN

La presente es una investigación de carácter cualitativo con la cual se busca identificar las dificultades que tienen los estudiantes de grado noveno para relacionar las diversas representaciones de la función lineal con su concepto, para ello se hizo necesario realizar un estudio comparativo entre dos instituciones que presentan situaciones sociales opuestas.

Las perspectivas teóricas que sustentan esta tesis, se fundamentan principalmente en las investigaciones de Rico, Duval, Brosseau, Tall y Vinner entre otros, estas investigaciones permiten realizar un tránsito paulatino por el proceso de construcción y aprendizaje de un concepto matemático para nuestro caso particular el concepto y representaciones de la función lineal de los estudiantes de grado noveno de las instituciones educativas Liceo Chicó Campestre y Centro de Formación Educativa CENFE, las cuales mediante consentimiento verbal y/o escrito han autorizado utilizar sus nombres en el desarrollo de esta investigación.

En relación a lo anterior los aspectos sobre los cuales gira dicho proceso son: La construcción de un concepto matemático, sus representaciones, las dificultades cognitivas que se presentan en su aprendizaje y las que se dan al pasar de una representación a otra.

Luego de hacer una revisión teórica, se describe la metodología de esta investigación que como se mencionó anteriormente, pertenece al enfoque cualitativo y se explican las etapas de desarrollo de la investigación, durante dichas etapas se aplicaron cuestionarios, se realizó observación de clase y a partir de los resultados obtenidos se llega a establecer conclusiones y se realizan algunas recomendaciones a tener en cuenta en el proceso de enseñanza del concepto y representaciones de la función lineal.

2. TITULO

DIFICULTADES COGNITIVAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO PARA RELACIONAR LAS REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL.

3. PROBLEMA

Las múltiples investigaciones que se han realizado alrededor del concepto de función permiten vislumbrar la importancia de su apropiación y aplicación en diversos contextos tanto en la vida escolar como en el entorno cotidiano.

Así por ejemplo en los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional MEN (1998) las funciones tienen un papel muy importante en el desarrollo del pensamiento variacional, de los sistemas algebraicos y analíticos. Ya que las funciones, dentro de ellas la lineal, tienen un amplio campo de acción puesto que “permiten analizar, organizar y modelar

matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas” (MEN, 1998).

Por lo cual se puede decir que el concepto de función lineal a través de situaciones prácticas de la vida real, generan en los estudiantes asociaciones de los principales elementos del concepto con valores, cantidades o magnitudes de situaciones en contexto.

Así mismo las funciones en general y las lineales en particular facultan a los estudiantes para abordar situaciones cotidianas de manera que las modelen e interpreten, por ejemplo: determinar y predecir el movimiento de un objeto en el tiempo, el consumo de gasolina de acuerdo a los kilómetros recorridos, el costo de fabricación dependiendo de las unidades fabricadas, etc.

Hay que mencionar que haciendo la reflexión desde nuestra experiencia como docentes y entrevistas verbales con los estudiantes, hemos detectado dificultades en los estudiantes como: leer e interpretar una gráfica, identificar variable dependiente e independiente, identificar si un punto pertenece o no pertenece a la gráfica, identificar intervalos, ajustar escalas, entre otras.

Además Azcárate (1992,1996), Sierpinska (1985,1988) y Ruiz (1998) mencionan que a través del tiempo se presenta una constante, en la escuela se evidencia el interés de los maestros por mostrar la representación algebraica del concepto dejando de lado el análisis profundo y con detalle de los elementos propios, que permitan abordarlo de manera significativa para que sea aprendido por los estudiantes. Consecuencia de esta situación es que los estudiantes, en muchos casos, terminan teniendo la posibilidad de repetir rutinas sobre objetos algebraicos que poco

sentido tienen para ellos. Lo que nos lleva a vislumbrar que en los estudiantes existen dificultades para relacionar las formas de representación de la función lineal, por algunos factores como la instrucción que tiene el docente a cargo, el desconocimiento de las representaciones de la función lineal y por ende la desconexión para pasar de una representación a otra.

De otro lado y tal como lo expresan Córdoba, Díaz, Haye y Montenegro (2012) “De entre las distintas posibilidades de representación de los conceptos referidos a las funciones lineales y cuadráticas, es tradicional que las algebraicas y las gráficas sean de las más usadas en las clases de matemática” (p. 4) esto se hace evidente en las observaciones de clases (ver anexo 2) a las cuales asistimos ya que se hace especial énfasis en este tipo de representaciones.

Anteriormente se enumeraron algunos de los factores tanto didácticos como cognitivos que influyen para que los estudiantes no reconozcan las diferentes representaciones de función, dentro de los que cabe mencionar: leer e interpretar una gráfica, identificar variable dependiente e independiente, identificar si un punto pertenece o no pertenece a la gráfica, identificar intervalos, entre otras, sin embargo para el desarrollo del presente proyecto nos centraremos en encontrar aquellos en los cuales los estudiantes tienen mayor dificultad y que pueden estar influenciados por el papel que juega el docente durante su enseñanza, de allí que el interrogante de este trabajo es ¿Cuáles son las dificultades de tipo didáctico y epistemológico que presentan los estudiantes de grado noveno para relacionar las representaciones de la función lineal?

4. JUSTIFICACIÓN

El aprendizaje del concepto de función ha sido objeto de variadas investigaciones, que tal como lo manifiesta Cano (2012) se han visto animadas por tres factores importantes, primero “por la

importancia de dicho concepto matemático” segundo “Por la persistencia de serias dificultades en la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes de educación media” y finalmente “por la complejidad del concepto de función”.

De igual forma, las investigaciones que se han realizado no solo apuntan a desarrollar el concepto de función sino también a comprender el concepto desde sus diversas representaciones, pero a pesar de que los resultados de estas investigaciones apoyan el quehacer docente, los estudiantes no logran establecer relaciones entre el concepto de función y sus diversas representaciones y tampoco son capaces de transitar entre ellas, es decir que no pueden pasar de una representación verbal a una algebraica o viceversa, en este sentido Peralta (2003) manifiesta que “las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente del objeto bajo estudio”

En ese mismo sentido nuestra experiencia de aula evidencia lo que los dos autores anteriores han mencionado y es que los estudiantes efectivamente manifiestan dificultades al relacionar las representaciones del concepto de función, es por ello que con la presente investigación se busca identificar en qué radican dichas deficiencias en dos contextos educativos diferentes y realizar algunas recomendaciones al respecto.

Con esto se quiere decir que a partir de los obstáculos epistemológicos presentados por los estudiantes se hace importante ampliar y profundizar en el concepto de función lineal desde distintas perspectivas en las cuales ellos (los estudiantes) tengan la oportunidad de realizar diferentes tareas como graficar, modelar, comunicar, etc. con un mismo objeto de conocimiento,

aunque los estudiantes, como se evidencia en el aula prefieren trabajar con la representación gráfica y les cuesta extrapolarla a la algebraica, verbal y tabular.

Al respecto Duval (1998) dice

“...La mayor dificultad se presenta al pasar del registro gráfico al algebraico “Esta conversión exige que se discriminen las unidades significantes de cada registro”, es decir, es necesario identificar bien en el registro gráfico, las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores y en la escritura algebraica de una relación, las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan significación y no solamente un objeto, a los símbolos utilizados”.

Los estudiantes deben ser capaces de argumentar no solo qué cambia sino también cómo cambia, es decir, procurar tareas de interpretación y de conversión mediante las cuales puedan construir y tener el claro el concepto.

Cabe resaltar que esta investigación se encuentra dentro de la Línea Medular de Investigación LMI de Enrique Lacordaire (2008), la cual se centra en “la formación para la libertad en educación básica y educación Superior; participación y Educación, calidad de la Educación y desarrollo social” teniendo en cuenta que la educación tiene un alto impacto social, además que busca responder a los problemas y necesidades del entorno.

Ahora bien esta investigación está enfocada hacia la Línea Activa de Investigación LAI de comunicación y modelación matemática de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, ya que esta línea “tiene que ver con los procesos de representación utilizados para describir, interpretar, analizar y dotar de significado a problemas y situaciones reconocidos

dentro de la formación matemática” (Méndez, 2016), dicha representación facilita o dificulta el aprendizaje de conceptos e ideas matemáticas y las relaciones que se establecen entre sí.

Simultáneamente se halla enmarcada dentro de una tendencia de investigación en didáctica de la matemática, ya que como mencionan Rico, Sierra y Castro (2000) “la didáctica de la matemática es aquella se ocupa de estudiar e investigar los fenómenos y problemas de la educación matemática y proponer marcos explicativos mediante los cuales abordar su estudio y resolución” y aunque el propósito de este trabajo no sea el de proponer estrategias didácticas en la enseñanza del concepto de función si lo es el identificar las dificultades que se presentan al enseñar el concepto de función lineal y sus respectivas representaciones.

5. OBJETIVOS

5.1 OBJETIVO GENERAL

- ❖ Encontrar las dificultades de tipo didáctico y epistemológico que impiden la relación del concepto de función lineal con sus representaciones.

5.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- ❖ Identificar qué entienden los estudiantes por función lineal a través de las diversas representaciones de este concepto.
- ❖ Establecer con cuál de las representaciones de la función lineal los estudiantes tienen mayor familiaridad.
- ❖ Indagar la forma en que los docentes enseñan el concepto de función lineal en las instituciones educativas Liceo Chicó Campestre y Centro de formación Educativa CENFE.

- ❖ Definir los factores de tipo didáctico que impiden que los estudiantes logren asociar el concepto de función con sus diferentes representaciones.

6. ANTECEDENTES

Las funciones lineales han sido objeto de diversas investigaciones, las cuales giran en torno a temáticas como: su construcción conceptual, sus diversas representaciones y su didáctica, entre otras.

Dentro de las investigaciones que se han realizado en torno al concepto de función lineal y sus representaciones se encuentran las siguientes: El concepto de función: investigaciones y enseñanza; dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas; El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de octavo y noveno grados de educación básica y Función constante, lineal y afín, en las que se profundizará a continuación.

Con respecto a la investigación de tipo documental realizada por Díaz (2008) denominada “el concepto de función: investigaciones y enseñanza” cita algunos trabajos que han tenido como objeto estudiar las dificultades y errores conceptuales que tienen los estudiantes en el aprendizaje del concepto de función, dificultades que van desde la complejidad del concepto, sus representaciones, la forma en que es enseñado y su utilización en campos diferentes a la matemática, lo cual indica que el concepto de función, ha sido abordado desde diversos enfoques en los cuales se han identificado las dificultades por las que atraviesan los estudiantes durante el aprendizaje del concepto de función, este trabajo a porta algunos de los aspectos a tener en cuenta (Si un objeto matemático puede ser considerado función o no, interpretación de gráficas,

aplicación de las funciones en problemas cotidianos, entre otros) durante el análisis de los resultados de la presente investigación.

De igual forma Córdoba, Díaz, Haye y Montenegro (2012) en la investigación “dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas” realizaron un estudio de carácter exploratorio con estudiantes del primer semestre de ingeniería, con el fin de identificar las dificultades de carácter conceptual que impiden relacionar estas dos representaciones (algebraica y gráfica), así por ejemplo se evidencia que aunque se tiene mayor claridad en cuanto al concepto y elementos de la función lineal que de la función cuadrática, la función lineal presenta dificultades como la no relación entre el parámetro a de la expresión $y = ax + b$ con la inclinación de la recta y la gran dificultad con la que se realiza la transición del registro gráfico al algebraico y que son los aspectos a tener en cuenta durante la ejecución de la presente investigación, ya que como mencionan Córdoba & et al. (2008) estas dificultades que se dan en la educación media persisten hasta la educación universitaria puesto que los errores provenientes de los conocimientos previos tienen gran incidencia en la adquisición del nuevo conocimiento. Así mismo abre la posibilidad de que estas formas de representar (la algebraica y la gráfica) no son las únicas que presentan obstáculos de tipo conceptual como los que se mencionaron anteriormente, por lo que se hace interesante observar si estos obstáculos también se dan en las representaciones verbal, tabular y notación de conjuntos.

Por otro lado se encuentra la investigación realizada por Roldan (2013) titulada “El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de octavo y noveno grados de educación básica” en la cual se desarrolla una propuesta didáctica enfocada al aprendizaje del

concepto de función lineal desde diferentes aspectos conceptuales como el de razón de variación, pendiente y proporcionalidad con el fin de que los estudiantes sean capaces de reconocerlas y aplicarlas en situaciones de la vida real; en esta investigación se desarrollan una serie de talleres que buscan ser una alternativa para la enseñanza del concepto de función lineal a partir de situaciones del contexto y así reducir los errores y por ende las dificultades que presentan los estudiantes durante su aprendizaje, estos talleres están organizados en 5 etapas: 1. La comprensión de la situación y las conjeturas, 2. La práctica experimental, 3. Análisis de la práctica, 4. Elaborar un modelo y 5. Verificar el modelo, esta investigación concluye dentro de otros aspectos que

“La enseñanza de la función lineal debe articular de manera equilibrada las formas más importantes de representación, es decir, las formas tabulares, gráficas y algebraicas sin dejar de lado la expresión verbal. Se debe fortalecer el paso de una a otra forma de representación empleando diferentes contextos” (Roldan, 2013 p. 96)

Para la presente investigación es importante debido a que aporta una guía clara que permitirá identificar las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del concepto de función a través de las diversas etapas y representaciones ya mencionadas.

Otra investigación realizada por Barajas, Fulano, Ríos, Salazar y Pinzón (2014) titulada “Función constante, lineal y afín” en la cual realizan una diferenciación conceptual de cada una de estas funciones y de sus sistemas de representación, así como el diseño e implementación de una unidad didáctica en la cual a partir de situaciones del contexto se busca la interpretación y análisis de aspectos relacionados con la parte cognitiva y afectiva en el aprendizaje del concepto de

función lineal, este trabajo es importante para esta investigación en la medida que aporta claridad conceptual para diferenciar estos tres tipos de funciones, los cuales por su similitud tienden a confundirse, por ejemplo para la función lineal aclaran que la recta pasa por el origen mientras que para la función afín la recta no pasa por el origen.

6.1 MARCO CONTEXTUAL

La presente investigación se llevó a cabo en dos instituciones educativas, las cuales mediante consentimiento verbal y/o escrito han autorizado para utilizar sus nombres en el desarrollo de esta investigación, en las dos instituciones se trabajó con la totalidad de los estudiantes de grado noveno.

La primera es el Centro de Formación Educativa CENFE ubicada en la carrera 10ª 5-45 Algarra I, Zipaquirá, este es un colegio privado cuyos estudiantes se encuentran en extra-edad, es decir que son jóvenes que se encuentran con dos o tres años por encima de la edad promedio esperada para cursar un determinado grado, pertenecen a los estratos 2 y 3, tienen edades que oscilan entre 16 y 17 años, allí se trabaja con los 10 estudiantes que conforman grado noveno.

La segunda institución es el Liceo Chicó Campestre LCC ubicado en la calle 221# 53-82 Bogotá, este es un colegio privado, con un enfoque de educación personalizada, en donde se encuentran estudiantes con dificultades de aprendizaje diagnosticados, como lo es el Trastorno por déficit de atención e hiperactividad TDHA y con procesos de ayuda psicológica, los cuales no tienen éxito académico en colegio con población numerosa, pertenecen a los estratos 5 y 6 con edades entre los 14 y 16 años, se trabaja con los 18 estudiantes que conforman el grado noveno.

7. MARCO TEORICO

7.1 EVOLUCIÓN HISTORICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

En aras de la presente investigación se hace necesario realizar una revisión histórica del concepto de función porque como lo menciona Brosseau (1983 citado por Socas, s.f) los obstáculos de origen epistemológico están intrínsecamente relacionados con el concepto y su evolución histórica.

En relación con lo anterior las primeras ideas de función surgieron en el siglo XVII cuando el hombre se comenzó a interesar en la observación de los fenómenos que se daban en la naturaleza y a buscar leyes que los explicaran, así pues Galileo Galilei e Isaac Newton utilizaron en sus trabajos las nociones de ley y dependencia entre los fenómenos que acontecían, ya aquí se comienza a hablar de dependencia entre dos fenómenos.

Más adelante Rene Descartes 1640 (citado por Zúñiga M, 2009) mostró en sus trabajos de geometría que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones que las representan.

Luego Leibnitz 1675 (citado por Zúñiga M. 2009) en su obra Methodus tangentium inversa seu de functionibus utiliza la expresión de función para designar un cierto tipo de fórmula matemática y la concebía como cualquier cantidad asociada a una curva, como las coordenadas de un punto de la curva, así se comienza a determinar la representación gráfica y tabular de una función a partir de una representación algebraica.

Años más tarde Bernoulli 1740 (citado por Zúñiga M. 2009) a partir del criterio algebraico, utilizó la función para designar los valores obtenidos a partir de operaciones entre las variables y constantes, Bernoulli representaba las funciones a través de la notación ϕx , aquí se puede ver como se comienza a dar mayor forma y precisión al concepto de función y a su notación.

Por su parte Euler 1748 (citado por Zúñiga M. 2009) en su obra "Introductio in Analysin Infinitorum" se refirió a las funciones así "Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esa cantidad variable y por números o cantidades constantes".

Sin embargo la definición que más se aproximó y que actualmente aceptamos fue la brindada por Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet quien definiera la función así:

"se dice que Y es una función (univoca) de X, a la que se le asignan libremente valores y se llama variable independiente, mientras que la variable Y, cuyos valores dependen de X, se llama variable dependiente. Los valores permitidos de X constituyen el dominio de la función y los valores que toma Y, constituyen su recorrido" (citado por Díaz J, s.f)

Teniendo en cuenta que la construcción y proceso evolutivo del concepto de función es bastante complejo se adopta para la presente investigación la brindada por Flórez y Zamora (2011) los cuales definen la función lineal como "Una relación de dependencia entre dos cantidades que varían y en las cuales a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente" (p. 10).

7.2 DIMENSIONES DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO ESCOLAR

Anteriormente se hizo un recorrido por la evolución histórica del concepto de función, pero surge la pregunta ¿Cómo se construye un concepto matemático?, Según Rico (2000, citado por Gómez 2007) el significado que se da a un concepto matemático debe ser abordado desde tres dimensiones:

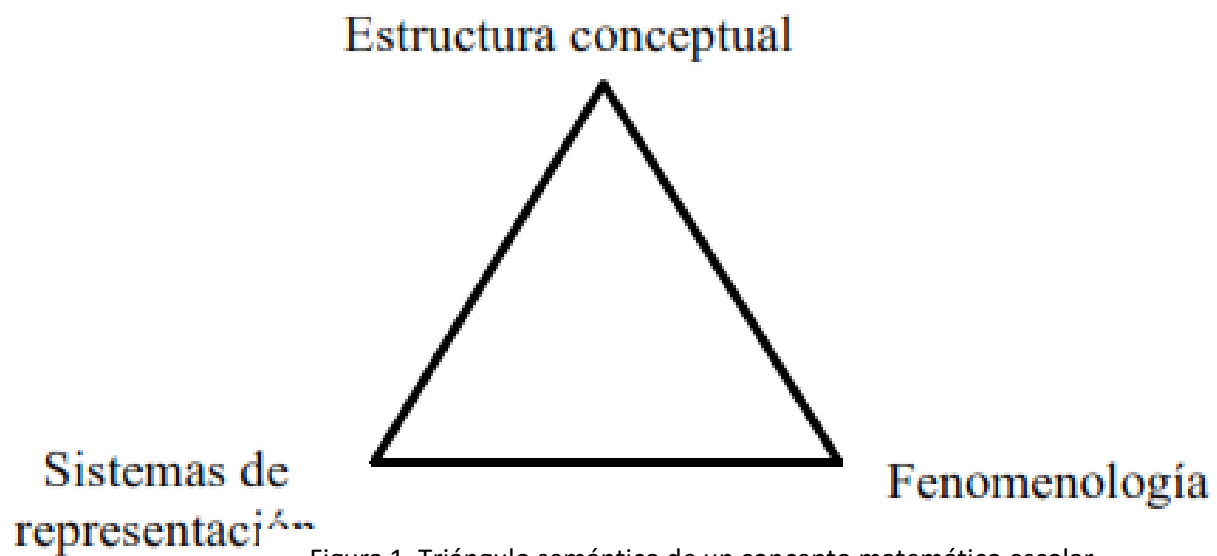


Figura 1. Triángulo semántico de un concepto matemático escolar

1) *La estructura conceptual*, que comprende conceptos, propiedades, razonamientos y demostraciones matemáticas los cuales se derivan en criterios de veracidad. 2) *Los sistemas de representación*, definidos por los signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y la relación con otros. 3) *La fenomenología*, que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido.

Se debe agregar que estas tres dimensiones permiten abordar un concepto matemático incluso el de funciones lineales desde sus elementos característicos como dominio, rango, pendiente, desde sus representaciones gráfica, algebraica, tabular, verbal y notación de conjunto y desde situaciones de la vida real que le permitan al estudiante dotar de sentido el aprendizaje de este concepto.

Así pues, mediante estos tres componentes se delimita, analiza y establece un marco estructural en el que se debe evaluar un concepto como verdadero o falso a partir de sus propiedades, de las representaciones con las que se asocia, comunica y trabaja y finalmente de los usos que se le dan y con los que toman sentido.

Hay que mencionar, además que un solo concepto tiene multiplicidad de elementos a considerar y por ello se hace necesario que en la planificación de una secuencia didáctica se planteen situaciones que permitan transitar por estas tres dimensiones y a su vez hallar las relaciones que se establecen entre estas.

En consonancia con lo anterior “Es necesario contar con el concepto integrado (de función), que se pueda evocar sin contradicciones en sus distintas representaciones, desde su definición, manejo de gráficas, hasta el empleo de las representaciones en la resolución de problemas” (De la Rosa, 2000 p. 2)

Habría que decir que en el desarrollo metodológico se tendrán en cuenta estas tres dimensiones para el diseño de los cuestionarios y la observación docente en el aula de clase.

7.3 REPRESENTACIONES DIVERSAS DE UNA FUNCIÓN

En el apartado anterior se hace referencia a los sistemas de representación en la construcción de un concepto matemático, en vista de su importancia y necesidad se profundizará un poco más en este aspecto.

Para Tall y Vinner (1981) y más adelante (Tall, 1991, p.68) introducen el constructo del esquema conceptual (concept image) como:

“...es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que tenga representaciones visuales o una colección de expresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria,... cuando escuchas la palabra “función”, puedes asociar la expresión $y = f(x)$, puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como $y = x^2$ ó $y = \sin x$. Etc.”.

(Citado por Cuesta 2007, p22).

Según De la Rosa (2000) un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará mayor información específica y por lo tanto el concepto estará más completo, es decir, los estudiantes podrán aplicar con mayor claridad y precisión dicho concepto, evitando, reduciendo y previniendo la aparición de dificultades.

En ese mismo sentido “La diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto” Blázquez y Arteaga (2001) citados por Córdoba et al. (2012).

En efecto y como lo menciona Gracia, Serrano y Espitia (1997) citados por Taveras (2013) “el privilegio de un único sistema de representación crea significaciones restringidas del concepto, y oculta, la riqueza y complejidad de su noción como objeto matemático”

De esta manera al poder representar e interpretar un concepto desde todas sus representaciones y estableciendo las relaciones que entre ellas existen, se tiene mayor capacidad de análisis para resolver situaciones planteadas a partir del contexto.

7.4 DIFICULTADES COGNITIVAS EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN

En este punto de la investigación se hace necesario aclarar la relación entre dificultad, obstáculo y error para evitar ambigüedades en su interpretación. “Las dificultades pueden abordarse desde varias perspectivas... Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores” Socas (s.f)

En otras palabras, las dificultades surgen del arraigamiento de obstáculos que al ser exteriorizados se muestran en forma de errores.

Según Brousseau (1983) citado por Socas (s.f p.6) los obstáculos cognitivos pueden depender de diversas causas por lo que es importante determinar el origen de las mismas. Además hay que mencionar, que de acuerdo a su origen Brousseau los diferencia de la siguiente manera:

- ❖ Obstáculos Ontogénicos: Son aquellos que provienen de las limitaciones del sujeto en un momento dado del desarrollo.
- ❖ Obstáculos didácticos: Son aquellos que parecen depender de las decisiones del docente o del sistema educativo.
- ❖ Obstáculos epistemológicos: Están ligados al conocimiento mismo. Se pueden encontrar en la evolución histórica de los conceptos matemáticos.

Desde esta perspectiva y en función de la presente investigación se profundizará en los obstáculos didácticos y epistemológicos, los cuales permiten responder en cierta medida al interrogante que dio origen a este trabajo.

Por otro lado, desde la didáctica de las matemáticas los obstáculos pueden estar relacionados con los tres campos de reflexión, los cuales Según Rico (2011) son:

“1) el curricular, se centra en la transmisión del conocimiento y en su evaluación, es decir, estudia los problemas derivados de la enseñanza, aprendizaje y valoración de las matemáticas en el medio escolar. 2) el profesional, contempla la formación, preparación, actuación y desarrollo de quienes asumen la responsabilidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje y 3) el científico, considera la actividad de fundamentación, teorización y experimentación que permite interpretar, predecir y actuar sobre los fenómenos derivados de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (p. 16)

Así mismo, en el aspecto curricular no solo se tiene en cuenta la forma de aprendizaje sino la forma de enseñanza, además de la importancia y el tratamiento que tanto docentes como estudiantes dan a los conceptos matemáticos; la forma de entender, los actos mediante los

cuales se busca su comprensión y la forma como se organizan las estructuras matemáticas, en el aspecto profesional se tiene en cuenta la preparación de los docentes y la concepción propia que este (el docente) se ha formado de un concepto matemático.



8. MARCO LEGAL

Al analizar los lineamientos curriculares de matemáticas M.E.N. (1998) se encuentra que las funciones en general y las lineales en particular se basan en el estudio de la variación, por lo que se logra encontrar una estrecha relación de esta temática con los otros tipos de pensamiento matemático ya que “la variación puede ser abordada desde lo numérico, geométrico, métrico y aleatorio” Taveras (2013). Desde lo numérico al identificar las diferentes formas de interpretar y representar un número, desde lo geométrico al realizar medidas o cálculos espaciales para relacionarlos o representarlos en el espacio, desde lo métrico al realizar comparaciones de diferentes magnitudes y finalmente desde lo aleatorio al recoger, representar e interpretar la información.

Habría que decir también que en el aprendizaje de las funciones incluyendo las lineales intervienen los cinco procesos generales que se dan en el pensamiento matemático (la resolución y planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y finalmente la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos) a través de los cuales se busca el desarrollo de las competencias en matemáticas, las cuales “permiten valorar si el estudiante está en capacidad de dar significado, interpretar, comunicar, construir, argumentar, proponer y usar

el conocimiento matemático en contextos diferentes y no simplemente si muestra destreza para operar y repetir procedimientos para hallar un resultado” Tavera (2013)

Resulta oportuno indicar cuales son los aportes propios de cada proceso de pensamiento en el desarrollo de las competencias anteriormente mencionadas.

En primer lugar la resolución y planteamiento de problemas tiene una de las tareas primordiales ya que según el MEN en sus lineamientos curriculares de matemáticas (1998) “la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deberá permearlo en su totalidad” (p. 74) El diseño de los problemas a emplear durante el desarrollo de una clase, deben tener en cuenta el contexto en el que se desenvuelve el estudiante además de proporcionar situaciones que brinden todas las perspectivas posibles para su solución.

En segundo lugar el proceso de razonamiento se entiende según el MEN (1998) como “ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión” (p. 77) debido a esto el estudiante tiene la capacidad de elegir, proponer y usar la representación de la función lineal más pertinente para solucionar una situación en particular.

En tercer lugar el MEN (1998) afirma que la comunicación “ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, graficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas” Y de esta manera tanto docentes como estudiantes puedan comprender que hay diferentes formas de representar una misma situación

o que se pueden representar diversas situaciones de una misma manera, es decir “empiezan a comprender la flexibilidad y utilidad de las matemáticas” (MEN 1998 p. 95)

Finalmente y el más importante es el proceso de modelación ya que como menciona el MEN en sus lineamientos curriculares

“El estudio de las funciones en la educación secundaria tiene más sentido si se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio. Es importante que los estudiantes sean capaces de reconocer patrones que se encuentran a diario en diversas situaciones, a describirlas y a elaborar modelos matemáticos de esos patrones”. (MEN p. 102)

Con relación a lo expuesto anteriormente se puede afirmar que el aprendizaje de las funciones lineales adquiere mayor sentido cuando los estudiantes le ven la utilidad que tienen en su vida cotidiana, siendo esta una forma de potenciar su pensamiento lógico – matemático ya que puede utilizar los números y métodos como medios para comunicar, procesar e interpretar la información que llega del medio.

9. MARCO PEDAGÓGICO

9.1 LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

Desde este enfoque se hace necesaria la motivación de los estudiantes, para que tengan algo de curiosidad por comprender y en ese orden de ideas ¿Qué es comprender? Cuando un estudiante comprende puede organizar la información, argumentar y finalmente aplicar ese conocimiento y relacionarlo con otras áreas del conocimiento. Este proceso supone una vinculación constante del estudiante dentro y fuera del aula de clase. (Perkins 1967)

Otro aspecto importante de la enseñanza para la comprensión es el contexto del estudiante, ya que se trata de potenciar sus fortalezas para que sus debilidades se hagan menores, en este aspecto es muy importante el rol de la institución educativa pues es un ente que propende por el desarrollo integral del estudiante, dando las herramientas suficientes para que el estudiante logre el objetivo de esta propuesta educativa.

El enfoque de la enseñanza para la comprensión está dada por sus precursores Froebel, Herbart y Pestalozzi, y con mucha fuerza por el trabajo de Dewey, siendo este último quien propone una conexión con la cotidianidad del estudiante, más adelante quien continua con su legado es Bruner quien además de seguir esta corriente propone ejercicios de carácter reflexivo que vincule de igual manera aspectos cotidianos.

Con el propósito de tener en nuestras aulas estudiantes más críticos y con el suficiente criterio para resolver problemas fundamentados en lo que conocen, se les pide no sólo que sepan sino que piensen a partir de lo que saben” (Perkins, s.f) citado por Stone (1999)

En otras palabras y como lo menciona Blythe (1998) citado por cano (2012) la enseñanza para la comprensión es una herramienta cuyo propósito es diseñar y dirigir las prácticas de aula que promuevan la comprensión y reflexionar sobre ellas.

10. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

10.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación es de carácter cualitativo, la cual tiende hacia un enfoque narrativo, el cual según Mertens (2005) citado por H. Sampieri (2010) se divide en tres grandes ramas a) de tópicos b) Biográficos y c) Autobiográficos, y que para efectos de la presente investigación nos

centraremos en los primeros, es decir, en aquél enfoque referente a los tópicos, debido a que se pretendió reconocer las dificultades que se dan en el proceso de aprendizaje de las funciones lineales, comprender porque se dan dichas dificultades y determinar cuáles son los factores que asociados a la didáctica tienen mayor incidencia en el proceso de enseñanza del concepto de función lineal y de sus representaciones, así mismo para la presentación de los resultados se empleó la triangulación de datos ya que esta permite realizar un análisis de manera cuantitativa y cualitativa lo cual proporciona un análisis mucho más objetivo de los resultados obtenidos.

10.2 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se desarrolló en tres etapas:

10.2.1 ETAPA DE DIAGNOSTICO:

En esta etapa se implementó un cuestionario con preguntas cerradas enfocadas a identificar la concepción que los estudiantes tienen del concepto de función y a la transición entre las diversas representaciones, luego se diseñaron 5 cuestionarios para verificar si las dificultades presentadas en el primer cuestionario por parte de los estudiantes en el aprendizaje del concepto de función lineal y sus representaciones, eran persistentes o si solo podía tratarse de algo fortuito, de igual manera se realizó una observación de clase dirigida, con el fin de realizar la comparación entre las dos instituciones puesto que se requería observar los mismos parámetros, en aras de que dicha comparación fuera consistente y los resultados verídicos.

10.2.2 ETAPA DE EJECUCIÓN:

En esta fase se realizó la observación dirigida de la clase, con el fin de establecer algunos parámetros que permitieran tener mayor claridad en cuanto a las dificultades presentadas por

los estudiantes asociadas al papel que desempeña el docente dentro del aula, dentro de los parámetros tenidos en cuenta están: La claridad conceptual, la terminología empleada, métodos de enseñanza (tipos de texto), tipos de preguntas tanto del docente como de los estudiantes, proceso matemático que se privilegia.

De igual manera se aplicaron los 5 cuestionarios diseñados con el fin de ratificar o revocar las dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de diagnóstico, durante su implementación se llevó un diario de campo el cual permitió tener en cuenta otros aspectos como la motivación, la atención y disposición para la clase, uso de las tics, entre otros.

10.2.3 ETAPA DE ANÁLISIS DE RESULTADOS:

En esta etapa se realizó la triangulación de la información, para ello se tuvieron en cuenta los resultados de los cuestionarios, la observación dirigida y el diario de campo, para de esta manera no sólo tener resultados de carácter cualitativo sino cuantitativo y así procesar los datos de manera más objetiva, dando cuenta de las dificultades presentadas por los estudiantes en la apropiación del concepto de función lineal desde todas sus representaciones en diversas situaciones del contexto educativo y cotidiano.

11. RESULTADOS

11.1 CUESTIONARIOS

Se implementaron 5 cuestionarios con 5 preguntas cada uno, para un total de 25 interrogantes, los cuales fueron ordenados de manera aleatoria para evitar que los estudiantes estuvieran sesgados hacia un solo objetivo, es decir que las preguntas que apuntaban a un mismo objetivo fueron distribuidas en interrogantes no consecutivos como se podrá observar más adelante.

11.1.1 OBJETIVOS DE LAS PREGUNTAS

Teniendo en cuenta lo mencionado por Tall (1989) los obstáculos cognitivos se pueden dar por la secuencialidad de un tema, por lo cual las preguntas de los 5 cuestionarios están orientadas a

TABLA 1. Objetivos generales de las preguntas del cuestionario

identificar 5 aspectos importantes abordados desde la secuencialidad del concepto de función lineal y sus representaciones, dicha secuencialidad se encuentra representada en las siguientes convenciones:

TABLA 2. Respuestas correctas e incorrectas por objetivo y por institución

	Identificar si la representación corresponde a una función o no
	Identificar las diferencias entre la función lineal y otras funciones
	Reconocer elementos y características propias de la función lineal (dominio, rango, pendiente y relación entre variables)
	Identificar las formas de representación de las funciones lineales.
	Pasar de una forma de representación a otra

Los resultados de las dos instituciones (28 estudiantes en total) en el desarrollo de la prueba fueron los siguientes:

PREGUNTA	RESPUESTAS CORRECTAS LCC (18 EST)	RESPUESTAS INCORRECTAS LCC (18 EST)	RESPUESTAS CORRECTAS CENFE (10 EST)	RESPUESTAS INCORRECTAS CENFE (10 EST)
1	12	6	4	6
2	14	4	6	4
3	4	14	4	6
4	10	8	6	4
5	12	6	6	4
6	10	8	2	8
7	16	2	6	4
8	4	14	4	6
9	16	2	6	4
10	16	2	10	0
11	18	0	10	0
12	12	6	8	2
13	18	0	10	0
14	6	12	4	6
15	6	12	4	6
16	2	16	4	6
17	8	10	6	4
18	18	0	8	2
19	8	10	4	6

20	10	8	6	4
21	10	8	6	4
22	16	2	6	4
23	12	6	10	0
24	2	16	4	6
25	6	12	4	6

Como se puede evidenciar en la tabla las preguntas 2, 9, 15 y 21 están enfocadas a identificar si los estudiantes diferencian situaciones que pueden ser consideradas como función de otras que no lo son, a la par estos ítems son abordados desde dos tipos de representaciones el diagrama sagital (2 y 9) y la gráfica (15 y 21).

Mientras que las preguntas 1, 5, 8, 14, 17, 23 y 24 se encuentran dirigidas a reconocer si los estudiantes diferencian una función lineal de otras funciones (afín, identidad, constante) de las cuales las preguntas 1, 8, 14 y 24 emplean una representación gráfica, mientras que las preguntas 5, 17 y 23 utilizan la representación algebraica o fórmula.

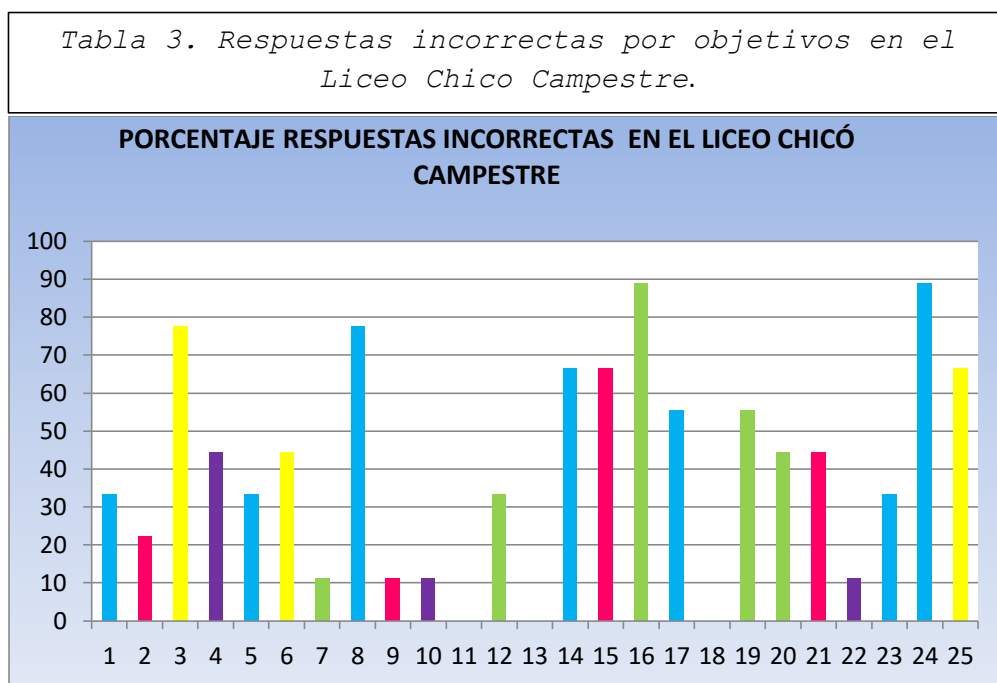
El siguiente aspecto a tener en cuenta son las preguntas 7, 11, 12, 13, 16, 19 y 20 orientadas a examinar los elementos y características propias de la función lineal (dominio, rango, pendiente, relación entre variables) de estas, los ítems 7 y 20 dirigidos a la presentación por pares ordenados o diagramas sagitales, entretanto las literales 11 y 16 dispuestas mediante gráficas, finalmente los numerales 13 y 19 se expresan de manera verbal.

Así mismo con los interrogantes 4, 10, 18 y 22 se intenta abordar la función lineal directamente desde sus representaciones verbal, algebraica, tabla de valores y diagrama sagital respectivamente.

Finalmente en este recorrido se debía indagar por la transformación de una forma de representación a otra por lo que en los cuestionarios se incluyeron tres preguntas de este tipo; la 3, la 6 y la 25, considerando que la 6 y la 25 apuntan a una transformación de presentación verbal a algebraica, entretanto la pregunta 3 apunta a pasar de la representación gráfica a la algebraica.

Para mostrar un poco mejor los resultados obtenidos en cada institución, en el siguiente apartado, nos enfocaremos principalmente en el tipo de representaciones que se emplearon en cada una de las preguntas.

11.1.2 RESULTADOS LICEO CHICÓ CAMPESTRE

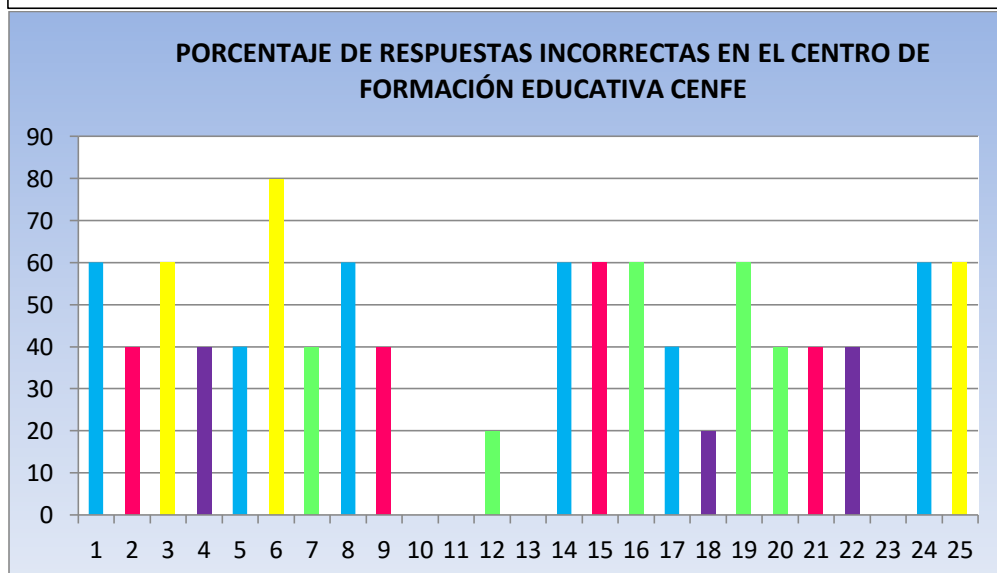


Como se puede observar, en esta institución las preguntas 11, 13 y 18 no tuvieron respuestas incorrectas, de estos interrogantes los dos primeros apuntan a identificar los elementos característicos de una función lineal, los cuales se abordan desde las representaciones gráfica y verbal, mientras que la última solo se enfatiza en el tipo de representación algebraica.

Por otro lado las respuestas con más de un 50% de respuestas incorrectas son las 3, 8, 14, 15, 16, 17, 19, 24 y 25, de estos interrogantes el 8, 14, 15, 16 y 24 aunque apuntan a objetivos diferentes se encuentran representados de manera gráfica, mientras que la pregunta 17 maneja una presentación algebraica y el ítem 19 se enfoca en una representación verbal, finalmente las preguntas 3 y 25 hacen referencia a la transformación de una forma de representación a otra siendo la primera un paso de la representación gráfica a la algebraica y la segunda de la representación verbal a la algebraica.

11.1.3 RESULTADOS CENTRO DE FORMACIÓN EDUCATIVA CENFE

Tabla 4. Respuestas incorrectas por objetivo en el Centro de formación educativa CENFE



En la gráfica se puede observar que, en esta institución las preguntas 10, 11, 13 y 23 no tuvieron respuestas incorrectas, de estos interrogantes el 10 y el 23 se presentan de manera algebraica, mientras que el 11 y el 13 se abordan desde las representaciones gráfica y verbal respectivamente.

Por otro lado las respuestas con más de un 50% de respuestas incorrectas son las 1, 3, 6, 8, 14, 15, 16, 19, 24 y 25, de estos interrogantes el 1, 8, 14, 15, 16 y 24 aunque apuntan a objetivos diferentes se encuentran representados de manera gráfica, mientras que la pregunta 17 maneja una presentación algebraica y el ítem 19 se enfoca en una presentación verbal, finalmente las preguntas 3, 6 y 25 hacen referencia a la transformación de una forma de representación a otra siendo la primera un paso de la representación gráfica a la algebraica, mientras que las ultimas permiten la transición de la representación verbal a la algebraica.

11.2 OBSERVACIÓN DIRIGIDA DE CLASE

Con la observación dirigida de la clase (ver anexo 2) se pretendió contrastar las respuestas de los estudiantes con el ejercicio de la labor docente, la observación se realizó a dos docentes; uno del Liceo Chico Campestre LCC quien de ahora en adelante se denominara docente 1 y otro del Centro de Formación Educativa CENFE quien para efectos del presente análisis se denominará docente 2, para ello se tuvieron en cuenta los siguientes parámetros:

a) La claridad conceptual y el concepto formado por el docente en cuanto a la función y la función lineal, b) la terminología empleada, c) los métodos de enseñanza, d) los tipos de preguntas tanto por parte del docente como por parte de los estudiantes, e) el proceso matemático que se privilegia y f) la representación de la función lineal que predomina durante el desarrollo de la clase.

12. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Las pruebas (ver anexo 1) fueron diseñadas para identificar las dificultades que tienen los estudiantes de grado noveno al relacionar las representaciones de la función lineal (verbal, algebraica, tabular, gráfica e incluso la notación de conjunto), habría que decir también cómo las relacionan, las cuales al ser contrastadas con las observaciones de los docentes nos va a permitir identificar las dificultades de los estudiantes para relacionar las distintas representaciones de la función lineal.

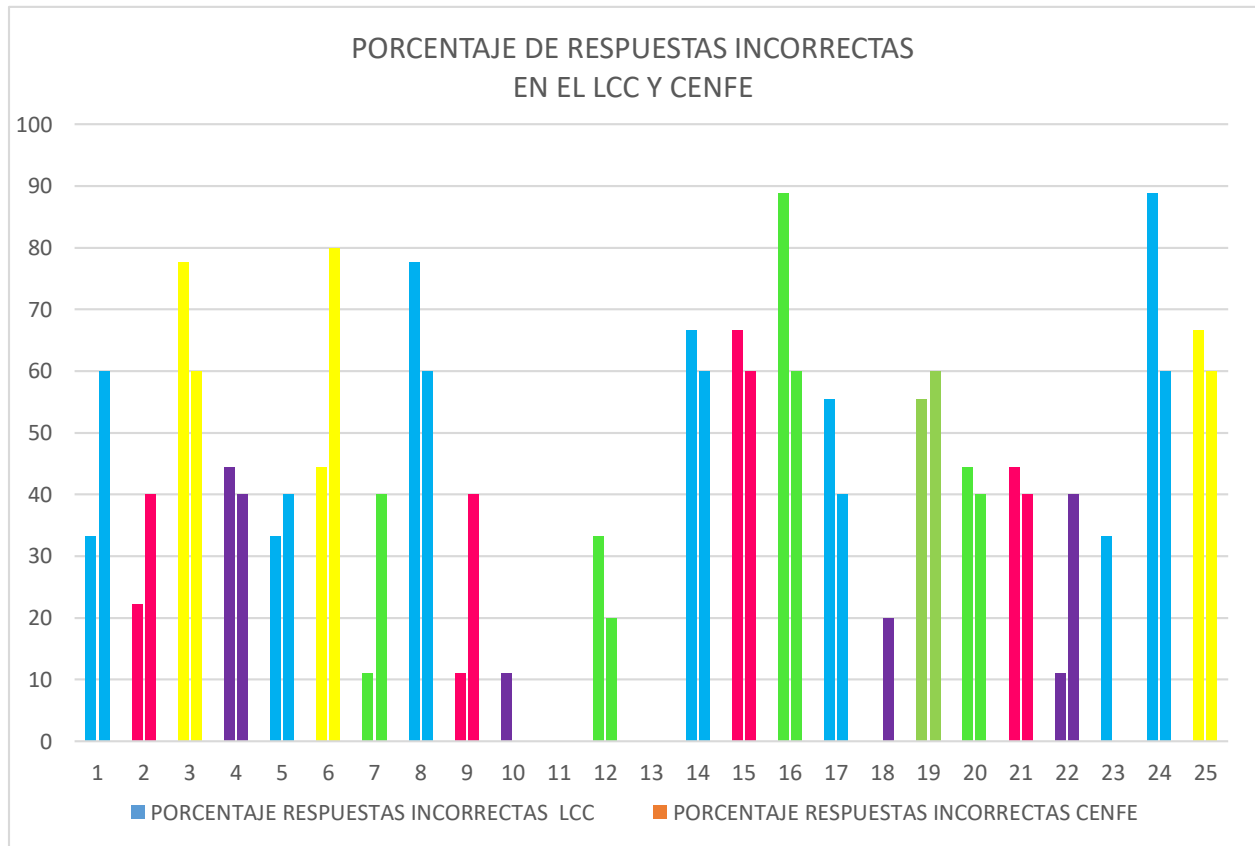
Por esta razón el presente análisis se enfoca principalmente en las preguntas que tienen respuestas incorrectas, ya que según Socas (s.f)

“el error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste” (p. 3)

Basándonos en esta afirmación las respuestas incorrectas o erróneas serán las que nos brinden la posibilidad de identificar las dificultades que tienen los estudiantes para relacionar las distintas representaciones de la función lineal y a su vez observar la manera como estos errores pueden

<i>Tabla 5. Comparación de respuestas incorrectas en el Liceo Chico Campestre LCC y en el Centro de Formación Educativa CENFE</i>
--

ser influenciados por los docentes.



A la luz de los anteriores resultados se realizara el análisis desde dos perspectivas, esto en aras de dar cumplimiento al objetivo general de esta investigación. La primera desde el punto de vista de las representaciones que se emplean en cada uno de los interrogantes y la segunda desde el objetivo al cual apuntaba cada una de las preguntas.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones se muestra en la figura, un paralelo en el cual las preguntas 3, 8, 14, 15, 16, 19, 24 y 25 tienen un mayor porcentaje de respuestas equivocadas en ambas instituciones y las cuales para su análisis serán agrupadas de la siguiente manera 19 y 25 (expresión verbal); 8, 14, 15, 16, 24 y 25 (representación gráfica). Como se puede ver son una

mayoría considerable además de tener un porcentaje de error promedio del 68%, mientras que las primeras solo tienen un 60%, vale la pena profundizar en la razón por la cual se dan estas dificultades en cuanto a la representación gráfica y a la representación verbal, para ello se realizó una observación de clase que permitió profundizar un poco más al respecto.

En dicha observación se pudo evidenciar que aunque se realicen representaciones de tipo gráfico en las dos instituciones, no se deja una claridad en cuanto a la diferencia que existe entre la función lineal y la función afín a partir de la gráfica, esta dificultad se puede presentar porque durante la explicación y desarrollo las clases no se abre el espacio para las preguntas y cuando se abre este espacio las preguntas las realiza el docente y hacen referencia más a resultados de operaciones, que a preguntas de tipo argumentativo o de comprensión, sin embargo las preguntas o interrogantes que surgieron por parte de los estudiantes tienden a la comprensión del comportamiento de la función lineal o afín en diferentes condiciones, ya que ellos realizan preguntas como ¿Qué pasaría si al trazar la gráfica la línea no pasa por el origen?, ¿Seguiría siendo una función lineal? pero la reacción del docente es evadirlas, hacerse el que no las escucha y de ahí en adelante evitar cualquier tipo de preguntas.

Por otra parte, haciendo referencia a la expresión verbal que fue otra de las dificultades percibidas notoriamente (la cual se abordó desde situaciones contextualizadas) en el resultado de los cuestionarios, y de acuerdo a la observación dirigida, se puede deducir que los estudiantes no se encuentran familiarizados con este tipo de representación, debido a que en la primera institución (CENFE) se privilegia la representación algebraica y gráfica, mientras que en la segunda institución (LCC) se aborda la función lineal desde las representaciones algebraica,

gráfica, de pares ordenados o diagrama sagital, dejando de lado en ambas instituciones la expresión verbal y contextualización de la función lineal.

Con respecto a los resultados obtenidos en relación a los objetivos de cada pregunta se puede mencionar que al diferenciar una función lineal de otras funciones, las preguntas que obtuvieron mayor porcentaje de respuestas incorrectas en las dos instituciones fueron las preguntas 8, 14 y 24 las cuales tienen la particularidad que fueron representadas a partir de la gráfica, además se puede señalar que no existe claridad conceptual por parte de los docentes ya que en la primera institución (CENFE), el docente confunde función lineal, función afín y función identidad.

A su vez las preguntas que apuntaban a reconocer elementos y características propias de la función lineal tuvieron mayor porcentaje de preguntas incorrectas fueron la 16 para la cual se empleó la representación gráfica y la 19 en la que se utilizó la representación o expresión verbal.

Algo semejante ocurre con las preguntas 3 y 25 las cuales requerían hacer la transición de una forma de representación de la función lineal a otra, teniendo como punto de partida las formas de representación gráfica y verbal respectivamente, cabe destacar que en la segunda institución (LCC) el docente no establece una relación clara entre la función lineal y cada una de sus representaciones, ya que realiza cada representación por separado, es decir, emplea diferentes ejercicios para desarrollar cada representación, así pues, con un ejercicio de función lineal empleo la representación algebraica, con otro empleo la representación gráfica, con un tercero el diagrama sagital, lo cual es un choque cognitivo para los estudiantes ya que para ellos la función lineal y sus representaciones son cosas totalmente distintas y por ende no pueden hacer la transición de una representación a otra.

Sin embargo cuando las preguntas estaban orientadas a identificar las formas de representación de la función lineal, las respuestas incorrectas estuvieron por debajo del 50%.

Por lo que se refiere a la terminología empleada y los ejemplos brindados por el docente, en la primera institución, es mucho más coloquial, es decir que es un lenguaje común y entendible por los estudiantes, mientras que en la segunda institución la explicación del docente, se basa en tecnicismos y su ejemplo “para hacerse entender” solo sirve para desvirtuar el concepto de función lineal y sus representaciones ya que “las funciones son como una máquina, en la cual entra algo y mediante un proceso mágico se transforma y sale convertida en otra”

Otro aspecto importante a tener en cuenta es la secuencialidad temática ya que el docente de la primera institución enseña este concepto de manera secuencial, siendo la expresión algebraica la manera de introducir el concepto, además de ser condición necesaria para su representación tabular y esta a su vez condición necesaria para la representación gráfica, Mientras que el docente de la segunda institución no lleva una secuencialidad en este proceso de enseñanza sino que lo hace de manera aleatoria y tiende a desviarse del tema.

En este mismo sentido Tall (1989) clasifico los obstáculos cognitivos en dos tipos: a) obstáculos basados en la secuencia de un tema y b) obstáculos basados sobre casos simples, además enfatiza la importancia de la secuencia de un tema debido a que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden.

Ahora bien, en cuanto a los procesos matemáticos desarrollados durante la clase, en ambas instituciones se orientan hacia la ejercitación dejando de lado procesos como el razonamiento (pregunta 3) la modelación (preguntas 6 y 25), la comunicación (pregunta 19) y la resolución de

problemas (pregunta 13), sin embargo el tiempo que se emplea en ello varia, ya que en la primera institución es del 60% por parte de los estudiantes, mientras que en la segunda institución este se reduce al 5%.

13. CONCLUSIONES

En este punto se pueden puntualizar las dificultades que tienen los estudiantes de grado noveno de las dos instituciones para relacionar las representaciones de la función lineal.

En primer lugar se determina que con dificultad los estudiantes identifican que es una función esto se debe a “la falta de aprendizajes de conceptos debido al énfasis que se hace en la enseñanza de procedimientos logarítmicos, y a la carencia de una enseñanza basada en la resolución de problemas” Santos y Alvarado (2000) citados por De la Rosa (2003).

En segundo lugar se determina que con las representaciones de la función lineal con las que mayor se familiarizan los estudiantes son: la algebraica, el diagrama sagital y la tabla de valores ya que son los tipos de representación que se privilegian en el aula de clase, al respecto González, Martin y Camacho (2005) mencionan “Hay una preponderancia del pensamiento algebraico en los alumnos... porque es el que están acostumbrados a trabajar”, sin embargo “El privilegio de un único sistema de representación crea significaciones restringidas del concepto y oculta la riqueza y complejidad de su noción como objeto matemático” García, Serrano y Espitia (1997 p.3)

En tercer lugar y de acuerdo con la observación dirigida de clase, se puede deducir que la preparación y conocimiento del docente es de suma importancia ya que los vacíos que este pueda tener son transmitidos a sus estudiantes, además que tiende a privilegiar el proceso

matemático que más domine o con el que se sienta más cómodo, en ese mismo sentido Ospina (s.f) afirma “las dificultades pueden ser por un lenguaje y la inadecuada enseñanza y transmisión de conocimiento utilizado por el docente, que llevan al niño a no interpretar fácilmente los planteamientos matemáticos” (p.3)

En cuarto lugar los factores de tipo didáctico que mayor influencia tienen al momento de asociar el concepto de función con sus diferentes representaciones son la falta de actividades que permitan la trasposición de una representación a otra en este mismo sentido Cantoral y Montiel (2002) “El tratamiento escolar del concepto de función ha provocado que el alumno no desarrolle la habilidad de transitar por distintas representaciones del concepto” (p. 8)

Finalmente y de acuerdo con la teoría de Duval se hace necesario propiciar la construcción de los conceptos a través de la realización de actividades que permitan y faciliten la conversión de una representación a otra y en ambos sentidos, lo cual nos lleva a reflexionar sobre nuestra responsabilidad como docentes, orientadores y formadores en este aspecto tan importante en el campo de las matemáticas como son las funciones, y evaluarnos en cómo las estamos entendiendo y sobre todo como las estamos enseñando.

14. PROYECCIONES

Luego de realizar esta investigación proponemos tres proyecciones la primera, continuar el proceso de investigación estableciendo estrategias que puedan utilizarse en el aula para que los estudiantes logren relacionar las distintas representaciones de la función lineal.

La segunda hace referencia a nuestra responsabilidad como docentes en ejercicio para desarrollar a través de actividades de contextualización y conversión, los cinco procesos del pensamiento matemático en aras de afianzar y comprender el concepto de función.

Finalmente ampliar la caracterización de las dificultades de los estudiantes a otros tipos de funciones ya que luego de llevar a cabo esta investigación, se hace evidente que si logramos que nuestros estudiantes logren relacionar las distintas representaciones de las funciones habremos ampliado y fortalecido su pensamiento matemático aplicándolo también en otras disciplinas.

15. REFERENCIAS

- ❖ Socas, M (s.f) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria, recuperado por www.google.com en la dirección -----
- ❖ Diaz, J (2013) El concepto de función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones, México, recuperado por www.google.com en la dirección http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf
- ❖ Zúñiga, M (2009) Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización, recuperado por www.google.com en la dirección <http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcww829>
- ❖ Flórez, I & Zamora, H (2011) Portafolio de aprendizaje – Funciones

- ❖ Roldan, E (2013) El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de octavo y noveno grados de educación básica recuperado por www.google.com en la dirección <http://www.bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf>

- ❖ Diaz (2008) El concepto de función: investigaciones y enseñanza recuperado por www.google.com en la dirección https://www.academia.edu/1570765/EL_CONCEPTO_DE_FUNCION_INVESTIGACIONES_Y_ENSEANZA

- ❖ Cantoral, R & Montiel, G (2002) Desarrollo del pensamiento matemático: el caso de la visualización de funciones recuperado por www.google.com en la dirección https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Cantoral/publication/261363726_Funciones_Visualizacion_y_pensamiento_matematico/links/02e7e53934565562d6000000/Funciones-Visualizacion-y-pensamiento-matematico.pdf

- ❖ Peralta, J (2003) Dificultades para articular los registros gráfico y tabular: el caso de la función lineal recuperado por www.google.com en la dirección <http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XII/Peralta%20Garcia.pdf>

- ❖ Díaz, M. Haye, E. Montenegro & Córdoba L (2012) Dificultades de los alumnos para articular las representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas recuperado por www.google.com en la dirección <http://funes.uniandes.edu.co/4072/>

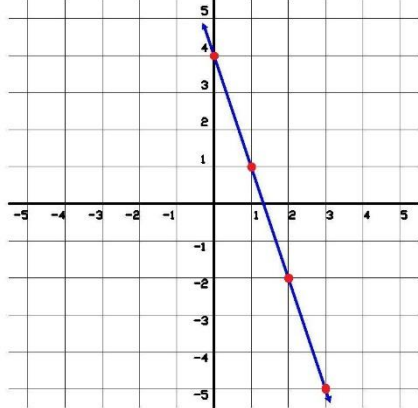
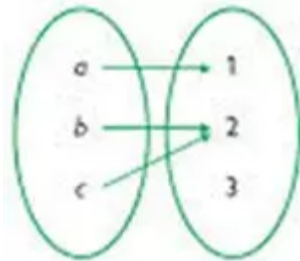
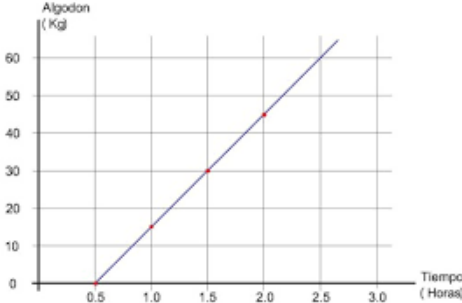
- ❖ Cano, J (2012) La definición del concepto de función bajo el enfoque de la enseñanza para la comprensión en estudiantes de grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín recuperado por www.google.com en la dirección

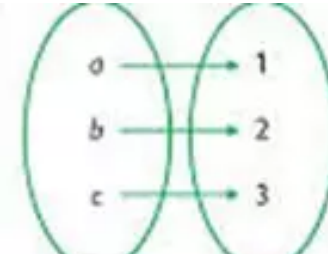
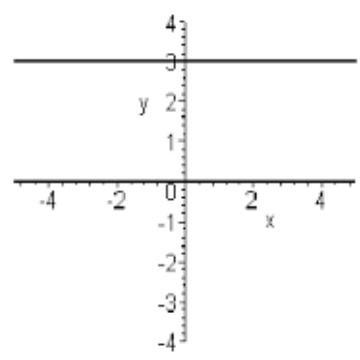
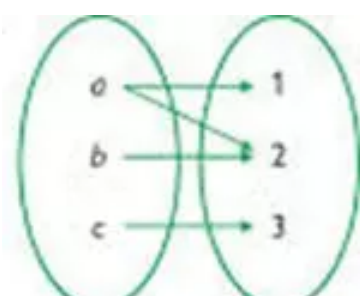
http://tesis.udea.edu.co/dspace/bitstream/10495/7497/1/JhonyCano_2012_conceptofuncion.pdf

- ❖ Rico (2012) Aproximación a la investigación en didáctica de la matemática recuperado por www.google.com en la dirección http://funes.uniandes.edu.co/1986/1/Rico_Avances.pdf
- ❖ Carvajal, Y. Vega, Y & Aponte, M (2015) Introducción del concepto de función: Un análisis epistemológico de algunos textos de la reforma de las matemáticas modernas y algunos textos actuales recuperado por www.google.com en la dirección <http://funes.uniandes.edu.co/8568/1/Aponte2015Introduccion.pdf>
- ❖ Tavera, F (2013) El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas recuperado por www.google.com en la dirección <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/196-449-1-DR-C.pdf>
- ❖ Aguilar, S & Barroso, J. La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa recuperado por www.google.com en la dirección <http://acdc.sav.us.es/ojs/index.php/pixelbit/article/view/268>

16. ANEXOS

16.1 CUESTIONARIO

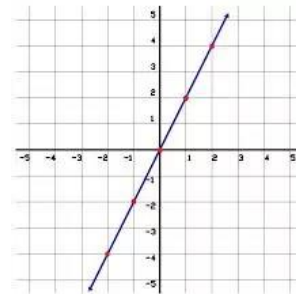
1. En el gráfico se observa una función Lineal Constante Afín Identidad	
2. La relación entre los dos conjuntos de la gráfica Es un plano cartesiano Es un grafo No es función Es una función	
3. De la gráfica podemos deducir que $y = 30x - 15$ $y = 25x - 10$ $y = 10x - 5$ $y = 45x + 5$	
4. Las funciones se pueden representar utilizando tabla de valores, fórmula, gráfica y la forma verbal. La representación en la imagen corresponde a gráfica Tabla de valores Forma verbal Fórmula	

5. Esta fórmula corresponde a una función Afín Constante Lineal Seno	$g(x) = k$
6. La ecuación que corresponde a la siguiente situación es: $y = 1650x$ $y = 3x$ $y = 438x^2$ $y = 875x$	El transporte de 3 personas vale 4950
7. El dominio y el codominio de esta función, respectivamente es 1, 2, 3, 4 y 5, 6, 7. a, b y 1, 2. 1, 2, 3 y a, b, d. a, b, c y 1, 2, 3.	
8. En el gráfico se observa una función Constante Lineal Afín Identidad	
9. La relación entre los dos conjuntos de la gráfica Es un rango Es una función Ninguna de las presentes No es una función	

10. Las funciones se pueden representar utilizando tabla de valores, fórmula, gráfica y la forma verbal.
La representación de la imagen corresponde a una
Fórmula
Gráfica
Forma verbal
Tabla de valores

FUNCION	
X	Y
-3	-1
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9
3	11
4	13

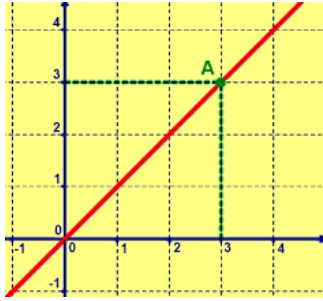
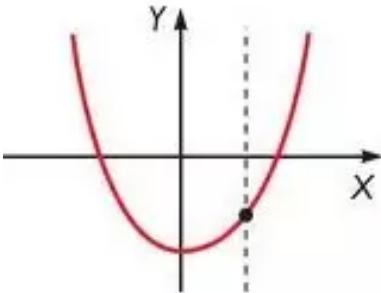
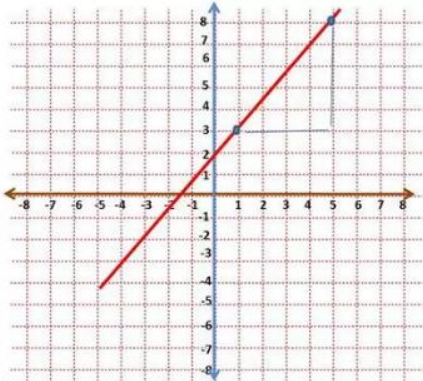
11. Algunos puntos representados en la recta son:
(3,6) (-1,-2) (-2,-4)
(-3,-3) (1,1) (2,5)
(-3,-6) (1,2) (2,4)
(-6,-3) (2,1) (4,2)

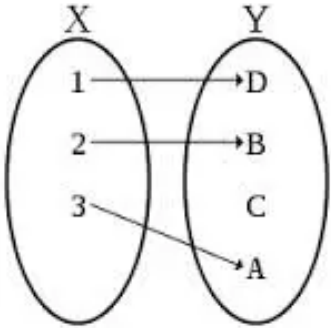
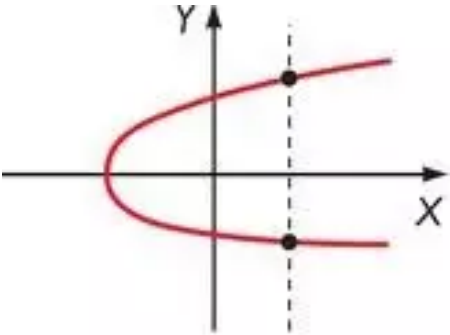
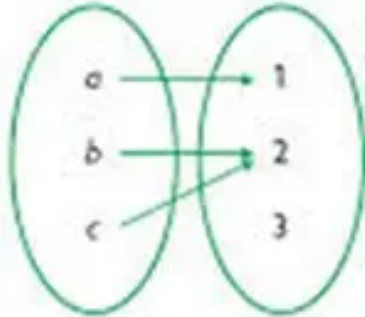


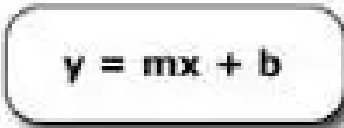
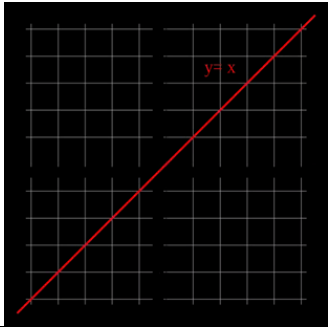
12. Esta fórmula se utiliza para calcular
Una tabla de valores
la pendiente de una recta
El área de un cuadrado
El dominio

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

13. Si en una hora y media se recogen 30 kg de algodón, entonces
En dos horas se recogen 50 kg de algodón
En una hora se recogen 20 kg de algodón
En seis horas se recogen 90 kg de algodón
En media hora se recogen 60 kg de algodón

14. En el gráfico se observa una función Afín Rango Dominio Identidad	
15. En el diagrama cartesiano que se observa en la imagen No existe nada No existe una función Existe una función lineal Existe una función	
16. La pendiente de la recta que se visualiza en el gráfico es $\frac{8}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{8}$	
17. Está fórmula corresponde a una función Afín Cuadrática Lineal Constante	$g(x) = mx$
18. Las funciones se pueden representar utilizando tabla de valores, fórmula, gráfica y la forma verbal. La representación en la imagen corresponde a una Forma verbal Tabla de valores Gráfica Fórmula	$y = mx + b$

19. La variable dependiente e independiente de la siguiente situación es: Variable independiente: distancia Variable dependiente: tiempo Variable independiente: tiempo variable dependiente: distancia Variable independiente: tiempo Variable dependiente: tiempo Variable independiente: distancia variable dependiente: distancia	Un automóvil recorre 30 m cada 2,5 segundos
20. De la gráfica se puede afirmar que los elementos que constituyen el rango de la función son: 1, 2, 3 D, B, C, A D, B, A 1, 2, 3, D, B, C, A	
21. En el diagrama cartesiano que se observa en la imagen Existe una función constante Existe una función No existe una función No existe nada	
22. Las funciones se pueden representar utilizando tabla de valores, fórmula, gráfica y la forma verbal. La representación en la imagen corresponde a una forma verbal Forma verbal Diagrama sagital Gráfica Fórmula	

23. Esta fórmula corresponde a una función Constante Cúbica Afín Lineal	
24. En el gráfico se observa una función Afín Rango Dominio Identidad	
25. La fórmula que mejor representa la situación es $y = 20000x + 25$ $y = 20x + 25$ $y = 20000x + 25000$ $y = 12000x + 2$	Un técnico de reparaciones de electrodomésticos cobra \$25.000 por visita, más \$20.000 por cada hora de trabajo.

16. 2 OBSERVACIÓN DOCENTE

PARAMETRO	DOCENTE 1	DOCENTE 2
Estructura de la clase	Realiza la enunciación y explicación del concepto a partir de su expresión algebraica, desarrolla dos o tres ejercicios y deja otros diez ejercicios para ser desarrollados por los estudiantes, mientras los estudiantes realizan la actividad la docente califica la tarea que había dejado la clase anterior.	El docente propone una ubicación formato universidad en donde los puestos están todos seguidos muy juntos. Da una explicación magistral del concepto y representación de las funciones y las presenta como una máquina en la cual entre algo se transforma y sale convertida en otra. Propone ejemplos que soluciona paso a paso el solo. No hay interacción con los estudiantes y ellos tampoco preguntan.

Terminología empleada	Emplea un lenguaje coloquial, lo cual facilita la comprensión de los estudiantes	El lenguaje es puramente técnico, sin embargo el modelo de la máquina es recordado por los estudiantes según me confirman sus comentarios al salir de clase.
Claridad conceptual	Confunde los conceptos de función lineal y función afín.	No es clara la relación de cada representación con su correspondiente función al parecer para los estudiantes son cosas totalmente distintas.
Tipo de preguntas que realiza el docente	Se limita a preguntar por los resultados de las operaciones, por ejemplo en la expresión $f(x)=mx$ cuanto es 5×4	Poco se pregunta a los estudiantes solo si ha sido claro y si hay alguna pregunta.
Tipo de preguntas de los estudiantes	Las preguntas que realizan los estudiantes son del tipo ¿Qué pasaría si la línea no pasa por el origen? ¿Qué valores se deben emplear para realizar la tabulación?	Los estudiantes no preguntan, al parecer tienen claridad frente a la explicación del profesor, sin embargo cuando ellos se enfrentan a su tarea pocos logran realizarla sin ayuda.
Tipo de actividades desarrolladas durante la clase	Las actividades desarrolladas durante la clase son netamente de ejercitación, no hay problemas de aplicación o de contextualización que den sentido a la actividad.	Durante esta clase pocas actividades se desarrollaron, pues fue de tipo magistral y el protagonista 100% fue el profesor.
Estructura de los libros que emplea en el desarrollo de la clase	El libro lleva una estructura en la que se realiza la explicación del concepto, la representación algebraica y la representación gráfica, desarrolla dos o tres ejercicios y propone actividades de ejercitación con la misma estructura, es decir de la representación algebraica se pasa a la representación gráfica.	Se organiza en su discurso con el modelo del libro de texto de Santillana grado noveno indica que es un poco distraído y tiende a irse por las ramas.

Tiempo que dedica a la ejercitación de procedimientos	De los 60 minutos de la clase, se dedican 40 minutos a la ejercitación.	El 5% de clase se dedicó a la ejercitación por parte de los estudiantes.
---	---	--