

***DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO***

**DANIEL ANDRÉS HERNÁNDEZ GARZÓN**

**Universidad Santo Tomás- CAU Bogotá**

**Asesora:**

**Mg. Maritza Méndez Reina**

**Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas**

**Facultad de Educación**

**Bogotá, 2018**

## **Tabla de contenido**

|       |                                                                                |     |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.    | Introducción .....                                                             | 3   |
| 2.    | Planteamiento del Problema.....                                                | 6   |
| 3.    | Justificación .....                                                            | 8   |
| 4.    | Objetivos .....                                                                | 14  |
| 4.1   | Objetivo General .....                                                         | 14  |
| 4.2   | Objetivos Específicos.....                                                     | 14  |
| 5.    | Presentación del Contexto .....                                                | 16  |
| 5.1   | Aspecto Histórico .....                                                        | 16  |
| 5.2   | Aspecto Educativo .....                                                        | 16  |
| 5.3   | Aspecto poblacional.....                                                       | 16  |
| 5.4   | Perfil Socioeconómico .....                                                    | 17  |
| 6.    | Antecedentes.....                                                              | 18  |
| 7.    | Referentes Teóricos .....                                                      | 24  |
| 8.    | Diseño Metodológico .....                                                      | 43  |
| 8.1   | Enfoque y tipo de Investigación .....                                          | 43  |
| 8.2   | Población y muestra .....                                                      | 48  |
| 8.4   | Fases de la investigación.....                                                 | 48  |
| 9.    | Aplicación de la Propuesta .....                                               | 52  |
| 9.1   | Instrumentos Diagnostico para la recolección de la información .....           | 52  |
| 9.2   | Instrumentos para la recolección de la información virtual ( vía correo) ..... | 59  |
| 9.3   | Instrumentos para la recolección de la información .....                       | 62  |
| 9.3.1 | <i>Instrumento Diario de Campo (ver anexo 2)</i> .....                         | 62  |
| 10.   | Análisis de Resultados .....                                                   | 62  |
| 11.   | Conclusiones .....                                                             | 84  |
| 11.1  | En cuanto a los hallazgos con los estudiantes: .....                           | 86  |
| 11.2  | Hallazgos frente a la labor docente .....                                      | 87  |
| 11.3  | Proyecciones y trabajos a futuro.....                                          | 87  |
| 12.   | Referencias .....                                                              | 89  |
|       | Anexo No 1. Trabajo realizado en aula .....                                    | 91  |
|       | Anexo No 2. Ejemplo Respuesta Estudiantes: vía correo electrónico .....        | 92  |
|       | Anexo No 3. Diario de Campo .....                                              | 107 |

## **1. Introducción**

El propósito de este trabajo es mostrar posibles estrategias didácticas que potencien el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno, como el planteamiento, y desarrollo de sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , los cuales por su sencillez y fácil manejo axiomático<sup>1</sup> determinan su manipulación algebraica utilizando diferentes métodos para la búsqueda de soluciones a dichos sistemas; sistemas de ecuaciones caracterizados por factores de fácil reconocimiento algebraico por parte de los estudiantes, como el número de ecuaciones equivalente a su número de variables; sistemas que permiten plantear y modelar procesos de covariación, aspecto fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes; procesos direccionados a explicar comportamientos de magnitudes (desplazamiento, velocidad, rapidez, tiempo, aceleración, oferta y/o demanda en la producción o venta de artículos); en general observando el cambio y la variación que tiene una variable con respecto a otra, relacionadas de manera directa o inversa según el tipo evento o naturaleza del fenómeno en estudio, en cuyo caso, se optó por estudiar, situaciones en el campo de la física en el contexto de la cinemática y dinámica de partículas.

Para tal propósito se delimita el campo de estudio, en tres pilares del ejercicio didáctico, enunciados a continuación: en un primer plano se maneja el concepto de competencia; en un segundo, conocimientos básicos, sistemas algebraicos y

---

<sup>1</sup>Lineamientos curriculares en el ámbito del saber matemático y transposición didáctica: La presentación axiomática es una presentación clásica de las matemáticas.

analíticos; y finalmente los procesos sobre la modelación matemática; toda la ejecución del proyecto, tiene por objeto promover, y estimular el estudio de situaciones problémicas vinculadas a otras ciencias. Definidos los tres ejes de estudio que permiten jerarquizar algunos procesos para el ejercicio de la búsqueda de una práctica didáctica, se genera una propuesta con estrategias orientadas a desarrollar competencias y habilidades en la modelación de situaciones problémicas en ciencias naturales a través planteamiento y desarrollo de sistemas de ecuaciones que promueven el desarrollo del pensamiento variacional.

La estrategia didáctica diseñada para abordar y mitigar los efectos negativos en los estudiantes en el tema planteado e identificado como obstáculo didáctico en el aprendizaje y desarrollo de competencias en la resolución de problemas, mediado por sistemas de ecuaciones lineales simultaneas  $2 \times 2$  en la institución educativa Gimnasio Moderno el Tintal, se resumen en varios momentos constitutivos: en el primer momento se parte desde la justificación, realizada con base a la importancia valorada por expertos del desarrollo del pensamiento variacional; todo lo anterior soportado teóricamente. Un segundo momento inmerso en investigaciones de estudios recientes en el desarrollo del pensamiento variacional desde los sistemas de ecuaciones lineales, con sus respectivas valoraciones permitieron y ofrecieron evidenciar diferencias, y congruencias en los objetivos y metas a conseguir; importante apoyo además de orientación para poder establecer una nueva estrategia fortalecida. El tercer momento se caracteriza por el accionar didáctico aplicándose tareas o bien talleres para buscar y poder identificar el grado de apropiación que puedan tener los estudiantes en la búsqueda de los objetivos

identificados con antelación, el cuarto momento es dedicado al análisis de resultados, referido al nivel de aceptación de los estudiantes al enfrentar variadas situaciones problema que determinan el cambio y la variabilidad de una variable con respecto a otra, que es el énfasis de la estrategia y como atributo del proceso, son todas las construcciones matemáticas que los estudiantes realizaron en el desempeño de la solución de estos problemas planteados, cerrando la estrategia el último momento contiene una serie de recomendaciones y validaciones en este esfuerzo que permiten evidenciar fortalezas y debilidades que constituyen un aspecto fundamental en la maduración de estrategias y prácticas pedagógicas en aras del mejoramiento de la educación matemática.

## **2. Planteamiento del Problema**

Actualmente se observa en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, el énfasis recae en el desarrollo de algoritmos subestimando el planteamiento y resolución de problemas, en particular los que requieren emplear sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ . De esta manera, los docentes centran su labor en que los estudiantes ganen experticia en la solución de los sistemas de ecuaciones mediante los métodos tradicionales (eliminación, sustitución, igualación, determinantes, entre otros), Hernández, S (2014) por su lado, sugiere que esta dificultad puede deberse a la insuficiente formación académica de los docentes, que les impiden realizar en el aula de clase prácticas adecuadas y significativas en la construcción de esquemas asociados al razonamiento algebraico.

La metodología tradicional empleada para gestionar el currículo de matemáticas; se orienta principalmente en las exposiciones de métodos de resolución algebraica mediada por una mecanización de algoritmos que desvirtúan uno de los estándares básicos en las competencia matemáticas, como lo es, la actividad por parte de los estudiantes en construir matemática, expuesto de otra manera, los estudiantes han sido entrenados en la utilización de los métodos tradicionales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, dejando de lado la comprensión de procesos de cambio y variación entre variables relacionadas en situaciones problema, cuyo contexto puede ser de otras ciencias, lo que impide el uso de la matemática como herramienta fundamental del estudio y aprendizaje de otras disciplinas.

Por otro lado, en la institución educativa Gimnasio Moderno San Francisco,

Localidad de Kennedy en el grado noveno del nivel de educación básica secundaria, sitio donde se desarrolla esta propuesta, se ha evidenciado por parte del autor a través de la observación de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, la gran dificultad de los estudiantes para comprender enunciados de situaciones problemáticas y modelar matemáticamente ciertas situaciones, en particular es de interés de este trabajo la problemática que los estudiantes tienen frente al planteamiento de ecuaciones lineales que permitan resolver las diferentes inquietudes planteadas en una determinada situación problemática.

Con este panorama, la presente propuesta de investigación busca orientar sus acciones a través de la pregunta:

¿Qué tipo de situaciones problemáticas que involucren la relación lineal entre dos magnitudes, fortalecen el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno de la institución educativa Gimnasio Moderno San Francisco?

### **3. Justificación**

Esta propuesta surge del interés por contribuir al reto de mejorar las practicas docentes en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, buscando una metodología adecuada para plantear estrategias didácticas que generen en los estudiantes disposición, voluntad, deseo de responder con esfuerzo, persistencia y dedicación a las diferentes solicitudes o demandas planteadas en el campo del planteamiento y resolución de problemas científicos y cotidianos de los estudiantes, mediados por estos sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 .

Ahora tomando como marco conceptual pedagógico la propuesta didáctica sobre la implementación de los planes de área constituyentes fundamentales del currículo de matemáticas escolar dentro del marco conceptual pedagógico propuesto por el profesor Vasco, C (2008) en su documento pensamiento variacional y modelación matemática, que la enuncia de la siguiente manera:

Proponer que los alumnos y alumnas empiecen desde el preescolar y la primaria por vivenciar y ejercitar los procesos de matematización, por la modelación matemática y el pensamiento variacional.

Tesis que tratare de exponer en la parte que nos compete, esto es: el ¿Para Qué?, y el ¿Cómo? Cuestionamientos no fáciles de responder, pero, dada su importancia que debemos reconocer por su influencia del manejo del pensamiento variacional, en dos procesos generales como el planteamiento y resolución de problemas; y la modelización, permitiendo a los estudiantes adquirir habilidad y destreza en

competencias, que según la tipificación que hace D'Amore (2008) define competencia en matemática como:

La competencia en matemática se centra en la disciplina matemática reconocida como ciencia constituida, como objeto propio, específico, de conocimiento. El estudiante entra en contacto con saberes específicos, saberes que la sociedad ha englobado en los conocimientos reconocidos como base para un digno ingreso a su interno; se apropia de una parte de dichos saberes, tanto formal como informalmente. Se reconoce así la existencia de un dominio conceptual y afectivo que media entre el estudiante mismo y la matemática. La competencia es aquí vista al interno del específico ambiente escolar. (p. 43).

Ahora en la misma línea conceptual la segunda acepción que hace D'Amore (2008) sobre competencia matemática, afirma:

La competencia matemática se reconoce cuando un individuo ve, interpreta y se comporta en el mundo en un sentido matemático. La actitud analítica o sintética, con la cual las personas afrontan situaciones problemáticas, es un ejemplo de este tipo de competencia. Existen buenos resolutores de problemas que pueden reconocer, delimitar y resolver situaciones problemáticas; lo que viceversa, a veces, no es fácil de evidenciar en personas que tratan bien, por ejemplo, los algoritmos. Aspectos como el gusto y la valoración de la matemática, son algunos de los aspectos útiles para orientar el logro de la competencia matemática. (p.44)

Logrando con lo anterior suscribir tres aspectos inherentes a la competencia

cualquiera que ella sea, el cognitivo haciendo referencia a los conocimientos de la disciplina; el afectivo que involucra la actitud o bien la disposición, voluntad o la calidad de esfuerzo impuesto al deseo de responder retos o bien cuestionamientos de una determinada solicitud, y por último el construir matemático, en términos de persistencia, continuidad y dedicación; que son en mi concepto, el objetivo fundamental de la didáctica en la resolución de problemas, las cuales necesariamente se articulan con el manejo del desarrollo de pensamiento variacional.

Es consideración trascendente, el tipo de problemas utilizados en las practicas pedagógicas para iniciar, impulsar y desarrollar el proceso del pensamiento variacional, estos son problemas que deben estimular a los estudiantes en sus actitudes de observación, actitudes de registro y por supuesto en la utilización y práctica del lenguaje matemático, en esta dirección también los lineamientos curriculares determinan los conceptos nucleares que potencian el desarrollo del pensamiento variacional, estos son:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.

- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

Nuestra investigación queda delimitada según lo anterior a estudiar problemas de núcleo matemático, que favorecen el desarrollo del pensamiento variacional, en estudiantes de grado noveno, en el contexto de “función como dependencia y modelos de función”, en términos del cuestionamiento inicial.

Es importante mencionar que en este tipo de estudio donde se fundamenta el concepto de función es primario que los estudiantes observen como cambian los diferentes elementos de uno de los conjuntos asociados uno con respecto al otro conjunto, vinculados por efectos, propios de los sistemas de fenómenos científicos implícitamente relacionados, mostrando o mejor haciendo énfasis, a los estudiantes, su proceso de variación; independiente del lenguaje algebraico que podamos utilizar para definir dicha variación o bien en el intento de explicarla mediante el lenguaje algebraico construido mediante el concepto de función; aquí, queda contestado, nuestro primer cuestionamiento que hace referencia al ¿Para Qué?, quedando como sustrato de aprendizaje o mejor fortaleciendo el pensamiento variacional.

Se ha verificado que gracias a los estudios del pensamiento variacional y la modelación matemática (Vasco, 2006); y Lineamientos Curriculares del MEN (1998), podemos asegurar que el pensamiento variacional es innato o virtual de los sistemas algebraicos y analíticos, esto tiene gran significado para nosotros y quiere

decir, que nos centramos en el estudio de problemas que se resuelven por medio de sistemas de ecuaciones lineales, mostrando, no un método de resolución, no un método de planteamiento; sino haciendo el reconocimiento del ¿Cómo?, son situaciones problema que enriquecen, potencializan y maduran el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno.

Ahora hagamos un acercamiento de que es pensamiento variacional en el contexto de función, como en este caso lo que se desea es conocer un poco más sobre la correlación directa entre magnitudes o bien simplemente la correlación directa entre dos conjuntos de números, por ejemplo reales, la covariación se vislumbra en la comparación de los elementos de los conjuntos en cuestión, observando los diferentes efectos y formas que caracterizan dicho ejercicio; acción que deriva de la experiencia dilatada en el tiempo, es así, como la reflexión del ejercicio evidenciaría un claro propósito del pensamiento variacional, en otras palabras el pensamiento variacional es la habilidad de observar e identificar los cambios en sistemas dependientes de conjuntos, o patrones que pueden presentar explícitamente o implícitamente una relación de covariación entre las cantidades que representan los elementos de dichos conjuntos.

Entonces para nuestro propósito, la labor es identificar problemas que, exijan al estudiante reflexión derivada del pensamiento variacional presenten como herramienta fundamental de planteamiento, y modelaje matemático, observando que esta clase de problemas es variado en sus aplicaciones, por ejemplo en el continuo numérico, en análisis de magnitudes de orden dimensional que representan variaciones, a nivel geométrico, problemas de capacidad, problemas

de movimiento, entre otros, en forma de decrecimiento o bien de crecimiento; involucrando sus características, enfoques y nociones en los sistemas de ecuaciones lineales, de manera tal que en el tratamiento de situaciones problema desarrollen en los estudiantes actitudes de observación, actitudes de registro y utilización del lenguaje matemático, logrando procesos de matematización relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional, con miras de un exitoso, abordaje futuro en el estudio del cálculo diferencial e integral.

## **4. Objetivos**

### **4.1 Objetivo General**

Generar una propuesta didáctica centrada en la solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas con el propósito de desarrollar el pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno de la institución educativa Gimnasio Moderno San Francisco para promover la competencia matemática a través del planteamiento y resolución de problemas.

### **4.2 Objetivos Específicos**

- Construir un marco teórico donde se identifiquen las competencias y habilidades de pensamiento que se desarrollan al resolver sistemas de ecuaciones simultáneas.
- Generar un marco teórico donde se identifiquen las habilidades asociadas al pensamiento variacional, numérico, geométrico y métrico para construir situaciones problémicas para ser propuestas a los estudiantes.
- Gestionar una serie de actividades en las cuales los estudiantes empleen herramientas de orden conceptual como variable, constante, variación directa, función, construidas en el aula, para la comprensión

del estudio y análisis de la función lineal desde el aspecto variacional y analítico adquiriendo mayor dominio en la utilización del lenguaje matemático.

- Desarrollar actividades en las que se vinculen algunas lecturas y situaciones problémicas, para que los estudiantes planteen las ecuaciones, reconociendo las relaciones de equivalencia, cambio y variación, encontrando parámetros y constantes dados en el problema a resolver, como estrategia de primer orden.
- Analizar el impacto de la propuesta en el desarrollo del pensamiento variacional desde los alcances de los estudiantes en el planteamiento y resolución de situaciones problémicas.

## **5. Presentación del Contexto**

### **5.1 Aspecto Histórico**

La institución educativa Colegio Gimnasio Moderno San Francisco El Tintal Ubicado en la localidad octava “Kennedy”, calendario tipo A de naturaleza privada, de población educativa mixta, jornada única de 6:30 a 2:30 p.m. y con niveles de educación Básica primaria, secundaria y media vocacional académica, de modalidad presencial; abrió sus puertas desde el 2005; con una misión de ofrecer a sus estudiantes soluciones integrales en el campo de la educación y formación de sus estudiantes, buscando aportar efectivamente al progreso y al bienestar de quienes conforman la población educativa en general.

### **5.2 Aspecto Educativo**

Proyecto Educativo Institucional: “El amor, proyección educativa de un país.

Formación interactiva de valores, con énfasis en inglés como desarrollo del Bilingüismo”.

Con este lema del proyecto educativo institucional el Gimnasio Moderno San Francisco, muestra su gestión educativa en el campo valores sociales y humanos empoderando a sus estudiantes en un contexto pedagógico de producción intelectual acorde a las necesidades de las juventudes del siglo XXI.

### **5.3 Aspecto poblacional**

El colegio cuenta con una población de 900 estudiantes, al año en curso, distribuidos en grados de Preescolar, básica primaria, secundaria y media

vocacional académica, en jornada única; los niveles de educación secundaria, están conformados por tres sextos, tres séptimos, dos octavos y dos novenos, en la vocacional dos cursos por grado.

#### **5.4 Perfil Socioeconómico**

La comunidad educativa del Gimnasio Moderno san Francisco participa del desarrollo socio cultural y socio económico de como el resto de la población colombiana, pujante, proporcionando a sus queridos hijos principios y valores, tales como el de la solidaridad, puntualidad, honestidad, esfuerzo, entre otros y proporcionando una educación que ofrece el sector privado, viendo, creyendo y aplicando los principios fundamentales sociales que en materia social lidera la institución, su nivel socioeconómico si de alguna pertinencia presenta en este tipo de investigación, se conoce como estrato dos y tres.

## **6. Antecedentes**

Se han rastreado varios tipos de trabajos de investigación dentro del contexto desarrollo del pensamiento variacional, por diferentes objetos matemáticos, además de aplicaciones de tecnología virtual educativa (TAC)<sup>2</sup>; trabajos implementados por estrategias de tipo didáctico y pedagógico, sustentados en fundamentos cognitivos del mismo orden, que buscan mediar el desarrollo del pensamiento variacional a apoyados en la práctica del pensamiento numérico, métrico, geométrico y estocástico, procurando ceñirse, a lo propuesto en los Lineamientos Curriculares (1998) y los estándares de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en lo que respecta al pensamiento variacional, en los siguientes párrafos contienen los aspectos más relevantes de algunos de los trabajos que se revisaron, buscando puntos de concordancia, como de diferencia, para enriquecer en el orden didáctico la presente investigación.

El trabajo de investigación de Guerra, A. (2012) "Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales" propone el estudio de cada uno de los sistemas de resolución de ecuaciones lineales simultaneas y como aplicación de este estudio, el planteamiento y solución de problemas de tipo cotidiano que motive el interés de los estudiantes de grado noveno, con el objeto de desarrollar el pensamiento variacional y sistemas algebraicos según los estándares curriculares de matemáticas propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, MEN.

Mediante la exposición del desarrollo de las matemáticas en la edad antigua, media,

---

<sup>2</sup> TAC. Tecnologías de aprendizaje computarizado.

moderna se formaliza la presentación de los sistemas de ecuaciones lineales para su manejo desde un abordaje de ecuaciones matriciales, resaltando su aplicación con ejemplos de interés actual para los estudiantes, que es el segundo objetivo de la propuesta; y con esta práctica hace énfasis en el primero, generando rutas cognitivas para que el estudiante conozca, y aprecie la herramienta que configura el conocimiento del manejo de sistemas de ecuaciones para la resolución de problemas de carácter lineal.

Son variados los tópicos, aquí abordados y de carácter científico, aplicaciones en las áreas de la física, química, aplicaciones comerciales, de transporte vial, deportivo y financiero, todo relacionado en contextos actuales y de vital importancia en la vida cotidiana de los estudiantes.

Su diseño y aplicación permite hacer y derivar aplicaciones matemáticas que permiten comprender y reflexionar ante los fenómenos sociales de diferente índole, además de explorar y motivar el pensamiento matemático de los estudiantes para el análisis de patrones que se presentan en procesos sistémicos que, al ser reconocidos por los estudiantes, pueden determinar cuál o cuáles son los métodos algebraicos que les permiten obtener mayor y más rápidamente información de las situaciones problema analizadas.

El enfoque del trabajo de Arenas, B. (2013) “Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas” en su desarrollo epistemológico es amplio y rico en la movilización del conocimiento en aras del proceso enseñanza aprendizaje en tópico de las ecuaciones lineales, y que como principal eje transversal estimula el trabajo

didáctico y pedagógico de los estudiantes, en un nuevo ambiente propuesto por la nueva estrategia de aprendizaje.

La investigación se caracteriza por su estructura, separa dos grupos un curso como muestra de control y el curso paralelo, de grados novenos como muestra experimental; como herramientas fundamentales la plataforma virtual y el objeto matemático el desarrollo de situaciones problema por medio de planteamiento de ecuaciones lineales, logrando un replanteamiento de causa efecto desde la aplicación de la estrategia, en forma favorable, mereciendo el reconocimiento por parte de los alumnos del trabajo grupal, solidario y logra una motivación por el trabajo matemático.

Desde otro punto, la estrategia se confunde con el estímulo propio de la (Tac) tecnologías del aprendizaje computarizado y relega el aspecto cognitivo del razonamiento aritmético analítico, en el proceso de desarrollo del pensamiento variacional, con el propósito de adquirir la competencia de planteamiento y resolución de problemas relacionados con situaciones cotidianas.

Desde luego la estrategia es pertinente en todos tópicos abordados, epistemológico, cognitivo, pero no hace énfasis en el aprendizaje de la habilidad de planteamiento de problemas y la búsqueda de su solución, principal objetivo cognitivo del sistema de ecuaciones lineales, utilizando la comprensión como objetivo y no como un medio del aprendizaje.

Su profundidad en la investigación como fundamento de la modelación matemática de situaciones cotidianas no busca trascender en el terreno científico, si en el

terreno de convivencia, el cual también es válido como aprendizaje matemático.

Varios de los objetivos fundamentales del trabajo de investigación por Gómez, O. (2015) “Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno” es el análisis de las producciones escritas y verbales realizadas por los estudiantes de grado noveno, cuando abordan tareas asociadas al desarrollo del pensamiento variacional.

Posee una gran plataforma epistemológica, contemplando variados enfoques conceptuales del concepto del pensamiento variacional, Posada & Obando(2006) y Vasco, C.(2006), entre otros; y tomando como referente constitutivo del pensamiento variacional la clasificación hecha por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003), incluyendo los lineamientos curriculares y los estándares de competencias, emanados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN); partiendo del hecho de que es lo que cambia, como cambia y cuanto cambia, su estrategia queda delimita retomando varias clases de tareas que se relacionan con el cambio y la variación, elementos nucleares del pensamiento variacional; por tanto las tareas que propone la investigación para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno, son pertinentes al estímulo de la competencia matemática asociada a fenómenos de variación y cambio de cantidades y también de valores en las magnitudes que son contempladas en los diferentes problemas propuestos en la actividad y como lo define también hacer el reconocimiento de las características que se evidencian en los estudiantes al verse enfrentados a este tipo de razonamiento.

Desde el enfoque que dan los lineamientos curriculares y los estándares básicos en lo que respecta al desarrollo del pensamiento variacional la investigación se direcciona a buscar estrategias que permitan aplicar, medir y analizar tareas relacionadas con el desarrollo del pensamiento variacional; con objeto de dar facilidad o bien habilidad de la comprensión para el uso de conceptos de la teoría de funciones, para el estudio del cálculo numérico y algebraico, también en la educación media para el estudio del cálculo diferencial e integral en sus diferentes aplicaciones.

En su totalidad el trabajo es congruente con la línea de investigación en cuestión, además promueve y estimula en los estudiantes el ejercicio del planteamiento, reflexión y análisis de situaciones cotidianas y científicas de las diferentes áreas del conocimiento para ser expresadas por modelos matemáticos.

El trabajo de investigación de Tamayo, J. (2016) “Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra” aborda el estudio y aplicación de estrategias para hacer oportuno y provechoso, la transición de la aritmética al estudio del álgebra, desarrollando el pensamiento variacional por medio de la interpretación de las diferentes acepciones dadas a la letra, en la iniciación de la enseñanza del álgebra, en grado octavo, en donde se articulen aspectos cognitivos, sociales de los estudiantes, desde el aprendizaje, observando y respetando la singularidad y mediando el ritmo de aprendizaje de cada uno los estudiante, en igual forma, contemplando el colectivo.

Su núcleo epistemológico es el concepto y manejo del desarrollo del pensamiento

***DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO***

variacional desde los procesos inherentes al desarrollo del estudio del álgebra, inmersos en situaciones problema relacionados con la cotidianidad de los estudiantes, tomando como punto de partida la conceptualización de la letra: la letra evaluada, la letra no usada, la letra como objeto, la letra como incógnita, la letra como número generalizado, y la letra como variable.

## **7. Referentes Teóricos**

### **7.1 Referentes conceptuales**

Desde los lineamientos curriculares del MEN 1994 se orienta la gestión del desarrollo del pensamiento variacional como parte esencial del currículo de matemáticas, en todas sus dimensiones y enfoques epistemológicos; posibles fundamentos que empoderan al estudiante de un pensamiento matemático bien estructurado, permitiéndole una posición cognitiva ventajosa para el estudio de la ciencia aplicada y en sí de la matemática en general.

Ya dentro del contexto teórico de la enseñanza la práctica se remite a la perspectiva de (Chevellard,1991). Para la enseñanza de las matemáticas, particularmente en el álgebra, el docente posee un saber sabio sobre esta disciplina y es así que dicho saber se reconfigura cuando requiere ser transmitida en el aula de clase. Con lo anterior el investigador quiere mostrar en el acto educativo la importancia del reconocimiento por parte del docente actuante, las condiciones de aprendizaje de sus estudiantes desde la reflexión ¿Qué enseña?, ¿cómo enseña?, ¿a quién enseña?, ¿cómo evaluar lo que enseña?; todo lo anterior relacionado con la didáctica de las matemáticas y por supuesto proyectado desde la transposición didáctica, reconocimiento del saber sabio y transmitido en dirección al saber enseñado sin lugar, ni espacio y sin legitimarse por algún tipo de autoridad.

Es desde aquí donde apuntalamos teóricamente nuestra práctica tomando como base el enfoque de los lineamientos curriculares, cuya orientación está determinada

a la conceptualización, a la comprensión y al desarrollo de competencias que van a permitir al estudiante afrontar en forma teórica y práctica los retos en las diferentes actividades sociales que le impone la vida como individuo y como líder, con el propósito de lograr una vida sana; es así como sentimos y compartimos nuestra propuesta didáctica con un trasfondo social y un alto contenido de valor humano.

Otro aspecto de igual importancia que resaltan los lineamientos, y que para nuestro propósito pedagógico y didáctico es relevante, son los siguientes cuestionamientos de los cuales a nuestro parecer debería partir cualquier proceso de enseñanza aprendizaje:

- ¿Qué son las matemáticas?
- ¿En qué consiste la actividad matemática en la escuela?
- ¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas?
- ¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?

Cuestionamientos que invitan siempre a una reflexión y no a una definición, objetivo agregado de nuestra práctica, el cual se vislumbra a lo largo y ancho del trabajo.

Consideramos que la relación que se establece entre las matemáticas y la cultura mencionada desde los lineamientos curriculares es un propósito y a la vez también lo tipificamos como deber del estudiante de educación matemática:

“Como una consecuencia fundamental de esta perspectiva cultural la educación matemática debería conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal contruidos por el

hombre a través de la historia durante los últimos seis mil años”. (MEN,1994)

Es así como nuestra práctica busca y promueve valores de solidaridad, trabajo en equipo, respeto a la diferencia de pensamiento, una mejor autoestima dentro de los estudiantes y deja caminos abiertos para la reflexión matemática, equivalentes al esfuerzo, disciplina, y propósito dispuesto por cada uno de los estudiantes participantes en el desarrollo de la práctica.

Otro aspecto fundamental e intersecto con el expuesto líneas arriba está en el desarrollo del cuestionamiento: ¿En qué consiste la actividad matemática en la escuela?; como lo exponen los lineamientos curriculares es en la escuela en donde se adquiere la mayor parte de la formación matemática, así, el sistema escolar debe convocar y promover oportunidades de gestión donde el educador matemático debe asegurar una excelente construcción de conceptos matemáticos mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos, además de considerar que la educación matemática es hoy una labor social, para y con los niños y jóvenes, por tanto debe brindar oportunidades de intereses propios y desarrollando la afectividad por la gestión académica ofreciendo variedad de respuestas o bien preguntas en el ámbito científico, es en este contexto donde se determina el grado de responsabilidad del docente en el trabajo que realiza, conociendo una de las relevantes premisas en la educación matemática, como lo manifiesta MEN(1994): “ puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventaja intelectuales”.

En nuestra práctica pedagógica las situaciones problemáticas son el contexto donde

se desarrolla el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, como lo sustenta MEN (1998) “no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas”; lo anterior promueve y asegura que el estudiante lea, interprete, plantee y resuelva los sistemas de ecuaciones  $2 \times 2$  y expone verbalmente su trabajo como una habilidad comunicativa, en este proceso el estudiante explora, y desarrolla, descubre y reinventa conceptos y métodos tradicionales para el desarrollo de sistemas de ecuaciones lineales, priorizando en este trabajo su manejo de pensamiento variacional precisamente en los sistemas algebraicos y analíticos que le competen.

En el área del pensamiento variacional nuestra práctica aplica fielmente premisas del MEN (1998), como es la importancia que tienen las situaciones problemáticas cuyos contextos sean el cambio y variación y cuya gestión es la más relevante variable didáctica de nuestra práctica; es importante hacer énfasis que nuestra práctica no pretende otro objetivo pedagógico que el docente de matemáticas promueva en los estudiantes habilidades de reconocimiento de cambio y variación, mediante actividades de resolución de situaciones problemáticas, que lo alejen de estrategias o procesos algorítmicos y mecánicos, Cantoral (2013) lo expresa “De manera que aprender matemáticas no se reduce a recordar fórmulas, teoremas o definiciones para resolver problemas mediante la imitación de las explicaciones del profesor en clase o con apego a los métodos ilustrados en los textos escolares”.

Por su puesto y dadas las pautas expuestas de la investigación del pensamiento matemático, expuestas por Cantoral (2013); se trata de incentivar a los estudiantes

a construir conceptos, herramientas y estrategias que movilicen los objetos matemáticos mediante procesos, que, en nuestro caso particular, sea esta construcción realizada por los estudiantes una opción válida de las posibles soluciones de situaciones problemáticas planteadas, inmersas en un mundo matemático de variación y cambio. Todo lo anterior es gestionar un aprendizaje significativo, donde el estudiante no es un actor pasivo en el proceso, sino un creativo en la actividad matemática, confiriéndole un grado mucho mayor de responsabilidad en la apropiación del concepto, que le exigirá, esfuerzo, persistencia, que seguramente le dará como resultado un estado de aprendizaje duradero, potenciando su nivel cognitivo, haciéndolo competente.

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

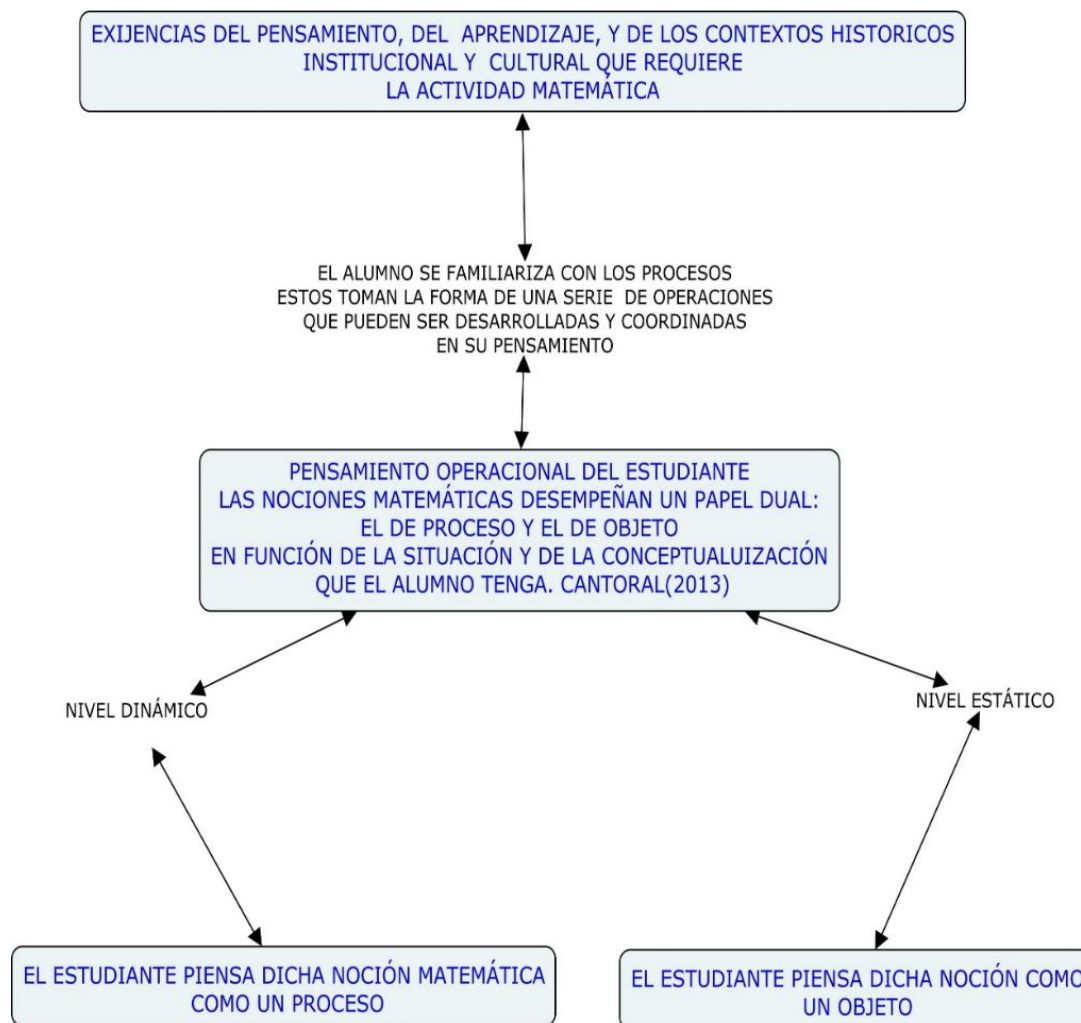


Figura I. Esquema de representación simple que relaciona las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los contextos históricos, institucional y culturales de la actividad matemática según Cantoral (2013).

Diseño Daniel Hernández G.

El pensamiento variacional es la capacidad que tiene o bien desarrolla el estudiante para observar, analizar, y expresar el cambio dinámico o estático del estado de una magnitud con respecto a otra, dadas unas condiciones iniciales y poder cuantificar ese cambio.

El pensamiento numérico es la capacidad que tiene o bien desarrolla el estudiante

para de organizar información mediante la utilización de los sistemas numéricos en condiciones diversas.

Pensamiento espacial y geométrico es la capacidad que posee o bien desarrolla el estudiante para identificar, verificas, comparar, demostrar, y construir condiciones y propiedades de un ente geométrico.

### **7.1.2 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.**

Trabajando desde los estándares de competencias en matemáticas, sustentamos o bien reconocemos la importancia del cómo y por qué de la competencia, enmarcada desde la epistemológica del conocimiento matemático, donde se evidencia la tipología básica del conocimiento, el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, que son sustrato del desarrollo del concepto de competencia matemática.

Nuestro trabajo de investigación se ciñe al uno de los principios fundamentales de los estándares básicos de competencias en matemáticas definido de la siguiente manera: “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos”. (MEN, 2006)

Principio que lo hacemos propio, y lo asumimos como eje motriz de nuestra práctica pedagógica, el planteamiento y la resolución de situaciones problemáticas mediante la herramienta de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en ambientes que permitan observar fenómenos de cambio y variación, es así como lo define Cantoral (2013)”

la expresión de cambio se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo variación lo entendemos como cuantificación de dicho cambio” (p.33).

Otro enfoque que retomamos basados en los estándares, es el carácter social que debe recaer en la educación matemática actual asumiendo los procesos matemáticos como desarrollos de pensamiento dinámicos: “Ello implica incorporar en los procesos de formación de los educandos una visión de las matemáticas como actividad humana culturalmente mediada y de incidencia en la vida social, cultural y política de los ciudadanos. En segundo lugar, se hace necesario también incorporar los fines políticos, sociales y culturales a la educación matemática, lo cual implica prioritariamente tomar en consideración el estado actual de la sociedad, sus tendencias de cambio y los futuros deseados hacia los cuales se orienta el proyecto educativo de las matemáticas”. (MEN, 2006)

Segundo principio adoptado por nuestro ejercicio didáctico; se convocó a los estudiantes desde la disciplina del álgebra básica, al ejercicio o bien el fortalecimiento de valores como la solidaridad, responsabilidad, el respeto a la diferencia, el trabajo colaborativo además del reconocimiento de los deberes y derechos del ciudadano que se desempeña en la sociedad, asumiendo diferentes roles, objetivos pedagógicos propuestos desde el marco social de la educación matemática.

### **7.1.3 Comunicación y Modelación Matemática**

La visión de la matemática como actividad social se fomenta en nuestros

niños y jóvenes planteando retos en los contextos académicos que permitan estimular el desarrollo de pensamiento variacional, mediante situaciones de problemas cotidianos donde se planteen y resuelvan retos aritméticos, geométricos, algebraicos, y demás situaciones de carácter científico que les permita observar el desarrollo de fenómenos naturales cíclicos de carácter determinístico, que puedan modelar mediante lenguaje aritmético o bien algebraico y logren plantear, demostrar, encontrar, reflexionar, volver a preguntar; posibilitando así la dinámica del conocimiento para materializarse en aprendizaje, es por ello que la justificación de esta investigación se fundamenta en las línea de investigación activa, comunicación y modelación matemática.

El fundamento principal de esta investigación es mediar en el proceso de modelación y resolución de problemas que se plantean a los estudiantes de grado noveno, con el objeto particular de poder estimular el desarrollo del pensamiento variacional en las diferentes tareas propuestas por el mismo, y apoyados en la teoría desarrollada por Polya, G (1945) sobre cómo resolver problemas proporcionó el impulso inicial para una gran cantidad de investigaciones que tuvieron lugar en las siguientes décadas, incluyendo cuestiones como la resolución de problemas simulada con ordenadores, la solución experta de problemas, estrategias y heurísticas de resolución de problemas, procesos metacognitivos y planteamiento de problemas.

Más recientemente se ha incrementado la atención hacia la modelización matemática en los grados elemental y medio, así como la resolución de problemas interdisciplinarios (Godino,1991, p.19).

Es así como podemos evidenciar la importancia que posee en el currículo el manejo de la resolución de problemas y la modelación en la educación matemática, y sobre esta relevante necesidad, trabajar con preocupación y optimismo en la velación de estrategias que permitan a los estudiantes visualizar la modelación y resolución de situaciones problemáticas como la esencia de las matemáticas, esto puede ser sustentado por:

“Muchos autores han ayudado a desarrollar este punto de vista como, por ejemplo, Lakatos (1978) con su libro sobre —pruebas y refutaciones. Entre estos autores destaca Polya (1945), para quien la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.” (Godino, 1991, p.19).

En nuestro propósito de mediación retomamos y planteamos nuestra dinámica siguiendo las fases previstas de Polya para la resolución de problemas, de acuerdo con lo anterior y contemplando con alto grado de exactitud que el aprendizaje de las matemáticas se edifica se construye mediante la modelación y la resolución de problemas.

#### **7.1.4 Referentes teóricos de alguna tendencia de investigación en didáctica de las matemáticas.**

En la búsqueda de fijar un marco para la conceptualización, se tiene:

Modelos teóricos locales que argumentan o justifican que los conceptos elegidos para la investigación, y las relaciones entre ellos serán apropiados y útiles para un problema de investigación dado. Como los marcos teóricos, los marcos conceptuales se basan en la investigación previa, pero los marcos conceptuales se construyen a partir de una matriz de fuentes más o menos usuales y diversas. El marco usado puede basarse en diferentes teorías y diversos aspectos del conocimiento práctico, dependiendo de lo que el investigador pueda argumentar acerca de lo que será relevante e importante para el problema de investigación (Godino,1991, p.13).

Los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en matemáticas, constituyen parte de las perspectivas pedagógicas y didácticas de nuestro trabajo investigativo, proporcionando entre otros asuntos, elementos para la conceptualización y desarrollo del pensamiento variacional, entre otros, que forman parte concluyente en nuestro marco conceptual.

Las líneas de investigación en didáctica de la educación matemática, se plantea y propone el modelo pedagógico de hacer más social y humana esta labor “Educación Matemática Crítica” (Skovsmose, 1999), que expresando en forma resumida y con el deseo de imprimir una estructura actual y dinámica en el contexto didáctico fue implementada en nuestro trabajo con el deseo primordial de ver hoy, y hacer del proceso enseñanza aprendizaje de la educación matemática un proceso socio-cultural evolutivo en continuo desarrollo permitiendo al estudiante construir matemáticas desde el desarrollo del pensamiento variacional.

### **7.1.5 Referente Histórico**

Quisimos partir nuestro desarrollo del siguiente cimiento matemático, -a nuestro parecer-, Bell (1949) afirma: “En cierto modo toda la matemática es una búsqueda de la incógnita”.

Desde el estudio de la historia de las matemáticas, se ha clasificado la evolución del álgebra en tres fases: La primera conocida con el nombre de algebra retórica donde toda reflexión y resolución de situaciones problemáticas se manejaba desde el discurso, esto es el planteamiento y resolución de problemas se hacía de una manera verbal; una segunda fase nombrada como álgebra sincopada donde se expresan los conceptos y los objetos matemáticos mediante abreviaturas y una tercera fase que fue la evolución de las dos anteriores, donde todos los procedimientos anteriores son reemplazados, por procedimientos simbólicos y que hoy trabajamos, de ahí su nombre álgebra simbólica, en cuya esencia, se requiere muy poco razonamiento y fuente de procesos mecánicos que permiten sólo resolver ecuaciones, además de su poco valor educativo, es así, con el deseo de ser pertinente con este análisis, y los modelos comentados queremos en nuestro trabajo potenciar el estudiante en un resolutor de problemas.

### **7.2 Referentes Didácticos**

Dentro de la problemática del desempeño de los estudiantes en el proceso de matematización, por modelación matemática de situaciones problemáticas de

carácter cotidiano, académico y científico, es necesario inculcar, fomentar y promover en los estudiantes actividades que potencien el desarrollo del pensamiento variacional, mediante el planteamiento y resolución de problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , mediado por nociones: protomatemáticas, paramatemáticas y nociones matemáticas, favoreciendo y fortaleciendo así el desarrollo de competencia matemática y competencias en matemáticas.

Circunscrito el problema en el ámbito pedagógico, este proyecto busca plantear cuestionamientos que el docente se debería plantear para el diseño y fortalecimiento de una estrategia didáctica que potencie el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno; que creemos, permite una mejor comprensión en el campo problémico; comprensión no buscada como un objetivo pedagógico sino como un medio en el proceso enseñanza aprendizaje, facilitando así el análisis en la modelación matemática, y depurando procesos cognitivos propios del estudiante expresados mediante su gestión en el campo de la matematización definida como:

La matematización es el proceso de construcción de un modelo matemático, (por ejemplo, la idea del eje de simetría). Un modelo matemático se define como la organización sistemática de un conjunto de conceptos matemáticos (eje de simetría: equidistancia, mediatriz, perpendicular) (Penalva y Linares, 2011). Todo lo anterior como fuente de enriquecimiento cognitivo continuo y pudiéndose verificar en los posibles cambios dados en la dirección de la competencia matemática y la competencia en matemáticas del estudiante.

A demás todo lo anterior nos permite dar una valoración sobre qué tan potente puede llegar a ser el uso de este tipo de estrategias didácticas en la práctica pedagógica, mediante el planteamiento y resolución de problemas, que se resuelven mediante sistemas lineales de ecuaciones  $2 \times 2$ , como objeto matemático, para el desarrollo del pensamiento variacional.

La estructura de esta investigación se fija sobre tres ejes paralelos no jerarquizados, por su importancia innata en el proceso de enseñanza aprendizaje, reconocidos desde ahora como: Estrategia didáctica desde la competencia, estrategia didáctica desde el modelo pedagógico y estrategia didáctica desde la evaluación.

### **7.2.1 Estrategia didáctica desde la competencia matemática.**

La estrategia didáctica desde la competencia matemática, la planteamos desde la definición planteada:

Actuaciones integrales para identificar, interpretar, argumentar y resolver problemas del contexto con idoneidad y ética, integrando el saber ser, el saber hacer y el saber conocer. (Tobón, Pimienta y García Fraile, 2010)

Lo anterior nos permite proponer tres objetos de desarrollo, los cuales son congruentes e integrales permitiendo delimitar y hacer fiable la estrategia desde este frente, el primero de los tres lo definimos como la búsqueda de compromiso frente a los fenómenos donde se presentan variaciones de magnitudes correlacionadas en forma directa e inversa que se puedan expresar mediante la modelización de ecuaciones lineales; un segundo objeto, es el trabajo solidario

realizado dentro del proceso enseñanza aprendizaje, en la búsqueda de factores determinantes en la búsqueda de la competencia matemática, factores que identificamos claramente desde un enfoque curricular diseñado con fines de estrategia didáctica que potencien el desarrollo de pensamiento variacional, que según Giménez (2011) lo define como:

La competencia se asocia a un objetivo curricular que se pretende, mediante el trabajo de un contenido, para seguir un fin determinado. La finalidad es valorativa y ética, y está asociada a la transferibilidad de las matemáticas a lo cotidiano de la vida del estudiante.

De esta manera sustentamos todos los esfuerzos didácticos procesados en esta dirección, como, la búsqueda de habilidad que el estudiante desarrolle en la manipulación algebraica exitosa que realice de los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones  $2 \times 2$ .

El tercer objeto hace referencia a las acciones de volición y actitud de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, acciones estructurales en la consecución de la competencia matemática, en cualquiera de sus acepciones, acciones mediadas por el docente, en forma de estímulo, motivación, refuerzo, y sensibilización.

Es así como soportamos cada uno de nuestros objetos de desarrollo, en esta etapa de la estrategia didáctica desde la competencia, basados en la concepción de los aspectos esenciales que se evidencian en la competencia matemática según (D'Amore, 2008), definidos como:

- El cognitivo: conocimiento de la disciplina.
- El afectivo: Disposición, voluntad, deseo de responder a una determinada solicitud (externa o interna)
- La tendencia de acción: persistencia, continuidad, dedicación.

### **7.2.2 Estrategia Didáctica desde el Modelo Pedagógico.**

En este punto la estrategia está guiada por el modelo propuesto por Brousseau (1986,1988); el cual se fundamenta en que la producción matemática se realiza en el ámbito escolar, todo lo que acontece dentro de ella, es lo que permite y avala la comunidad matemática; la producción de conocimiento se determina por la determinación de relaciones emergentes, como también, de establecer relaciones de organización y relaciones de equivalencia; Brousseau (como se citó en Patricia Sadovsky,2014) el modelo de Brousseau describe el proceso de producción de conocimientos matemáticos en una clase a partir de dos tipos de interacción básica, a) la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego, y, b) la interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con la problemática matemática. A partir de ellos postula la necesidad de un “medio” pensando y sostenido con una intencionalidad didáctica.

Desde luego enmarca nuestra práctica asumiendo el modelo de resolución de situaciones problemáticas y la intención didáctica en el contexto del desarrollo variacional; ahora es pertinente insertar el concepto de contrato didáctico eje estructural del modelo en aplicación, definido como la relación establecida por el

docente y el (los) estudiante(s) en dirección de la situación adidáctica, todo ello es y hace parte de lo que el docente quiere comunicar, y empoderar al estudiante como resolutor de situaciones problema; estableciendo así la didáctica diseñada para enfrentar el sistema constituido por un medio y objeto matemático; dentro de la gestión estrategia que aplicamos desde nuestro enfoque, persistimos en el ejercicio de plantear diferentes situaciones problemas o medios, en caminados a desarrollar en el estudiante competencia en los procesos de matematización horizontal y matematización vertical, con lo que le solicitamos directamente al estudiante que enfrente el medio, expuesto inicialmente en forma literal y que lo proponga en términos de sistemas de ecuaciones lineales, donde se estimule procesos de pensamiento de correlación directa, entre magnitudes que presentan fenómenos de covariación lineal, proponiendo, así el manejo de pensamiento matemático en el campo variacional, desde el concepto de función.

Desde los fundamentos de la ingeniería didáctica se promueve el análisis epistemológico, cognitivo, y didáctico en el estudio de las propuestas didácticas que tienden a mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje; en nuestro caso, el punto de partida del análisis epistemológico, lo configura la definición de ecuación lineal, aquella constituida por un polinomio de grado uno y expresada en dos y tres variables, para nuestro caso, cuya representación geométrica son líneas rectas y planos, respectivamente, reconociendo que estas ecuaciones en dos variables, son objeto matemático en nuestra estrategia, quedando así, delimitando aún más nuestra propuesta, por consiguiente siempre nos referiremos a sistemas de ecuaciones de dos variables por dos ecuaciones, un sistema  $2 \times 2$ .

El estudio y posterior desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales se remonta a la época de los Babilonios, quienes fundamentaron el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales simultaneas, en forma literal, por su carencia de notación algebraica como hoy la conocemos hasta su principal auge en cuestión de métodos de resolución, desarrollado por el príncipe de las matemáticas Gauss siglo XVIII, que, junto con Wilhelm Jordán aplicaron, y método, que lleva su nombre de eliminación Gauss-Jordán siglo XIX, posterior a este trabajo, en el año 300 a. C y 200 a. C un importante documento matemático de origen chino “Nueve capítulos sobre el Arte de las Matemáticas” (Jiu Zhang Suan Shu), es evidencia del primer trabajo de solución de sistemas de ecuaciones simultáneas, hecho en el oriente, y documentado por una serie de problemas de agrimensura, capital y contexto geométrico, en donde, plantearon la resolución de sistemas de ecuaciones por cuadrados; en el siglo III d.C la cultura greco-Alejandrina conto con uno de sus máximos exponentes en lo que respecta al desarrollo de las matemáticas, Diofanto logro desarrollar ecuaciones lineales, cuadráticas y hasta cúbicas, además de resolver sistemas de ecuaciones lineales simultaneas iniciando el paso al álgebra sincopada de la muy abstracta algebra literal de la época.

Posteriormente 2000 años después, entre los siglos XVIII y XIX se definió como el desarrollo del álgebra lineal, con los grandes aportes en su momento del príncipe de las matemáticas Gauss, Cramer, Cardano y Leibniz, entre otros, Leibniz en 1639 introduce el concepto de determinante y según Collette en [3] se reconoce como gestor en occidente de métodos en la resolución de sistemas lineales dos por dos a Leibniz.

### **7.2.3 Estrategia Didáctica desde la Evaluación**

Este eje globaliza la transcendencia de la evaluación en el proceso de nuestra práctica pedagógica, no como herramienta tradicional, para ejercer control, autoridad, o simplemente la recolección de información para la exclusión o segregación; principios antagónicos al fundamento del propósito de la educación, más bien entendida esta como una de las rutas de acceso directo a la cultura y a la ciencia, legado histórico de la humanidad (Álvarez, 2011). Evaluación para conocer, donde prima como aprende el estudiante y así poder formular estrategias que fortalezcan el aprendizaje de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y se potencie el desarrollo del pensamiento variacional, objeto fundamental de este trabajo.

La evaluación vista como plataforma del aprendizaje. Álvarez (2011) lo expresa “Para asegurar el aprendizaje reflexivo de contenidos concretos, quienes aprenden necesitan explicar, argumentar, preguntar, deliberar, discriminar, defender sus propias ideas y creencias. Simultáneamente aprender a Evaluar” (p.30). Es el campo gravitatorio del ejercicio de aprendizaje propuesto y ejecutado en este trabajo de grado, donde los estudiantes utilizan la autoevaluación la coevaluación y la heteroevaluación como garante, facilitador, o bien instrumento de mediación de su aprendizaje; objetivo particular y final de esta investigación.

## **8. Diseño Metodológico**

### **8.1 Enfoque y tipo de Investigación**

El método utilizado para la elaboración del siguiente proyecto es mediante un enfoque cualitativo, que consiste en la toma de información basada en la observación de comportamientos naturales, en este caso de comportamientos de aprendizaje relacionados con la resolución de situaciones problema mediante sistemas de ecuaciones lineales simultáneos desarrollando el pensamiento variacional, entre otros.

La propuesta se plantea desde un enfoque que como ya dijimos privilegia, promueve el ejercicio de análisis matemático desde el pensamiento variacional, numérico, geométrico, métrico que accione el estudiante desde los diferentes estímulos didácticos implementados en el aula, y como sustrato los procesos de razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en situaciones problemáticas de las misma matemáticas, de la vida cotidiana de los estudiantes y en la explicación del comportamiento de un fenómeno en el ámbito científico.

Se hace la nivelación respectiva de algunos temas que se consideran pertinentes al desarrollo del tema de resolución de sistemas lineales, fundamentando a los estudiantes en manejo conceptuales de función afín y función lineal desde sus enfoques algebraicos y analíticos, haciendo ver siempre que la covariación existe

sin modelo algebraico, (Vasco, 2003) utilizando herramientas didácticas como aplicativos de geogebra, como elementos de sensibilización y acercamiento de los temas a tratar.

La estrategia de investigación se desarrolla en tres fases, la primera es la mencionada reglones arriba, y consta del reconocimiento y la nivelación de temas aritméticos y geométricos pertinentes a los temas relacionados con ecuación lineal canónica, haciendo énfasis en el manejo del cálculo por ejemplo de la determinación de su pendiente, cálculo de ecuación de una recta mediante un punto y su pendiente, geometría de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas, fenómenos de cambio y variación en forma lineal de la vida práctica, la ecuación lineal desde el concepto de función, todo lo anterior circunscrito en un aprendizaje de carácter significativo, mediado desde la comprensión y el análisis.

La segunda fase se gestiona desde la aplicación de los procesos nucleares para nuestro objetivo didáctico, la resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación cuyo significado<sup>3</sup> es problema planteado matemáticamente y por último la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, todo lo anterior dentro del contexto pedagógico expuesto en los lineamientos curriculares vigentes.

En el desarrollando de la estrategia didáctica propuesta, conociendo las situaciones problémicas que desarrollan el pensamiento variacional objeto de esta esta estrategia, como fenómenos de cambio y variación de la vida práctica, problemas

---

<sup>3</sup> Poder identificar, y modelar mediante sistemas de ecuaciones lineales la covariación de magnitudes.

de aproximación numérica y estimación, funciones y estudio de patrones numéricos, geométricos; además de conocer el punto de partida, significándolo como ¿Qué es un problema?, ¿Cómo se resuelve un problema? Conceptos asistidos por la teoría de Polya, nos damos a la tarea de indagar cuales de los problemas en la gran variedad de textos de grado noveno que cumplen con la mayoría de los parámetros o estándares para inducir un mejor proceso del desarrollo del pensamiento variacional; propuestos los problemas a plantear y resolver, sin que los estudiantes conozca de antemano los procedimientos aritméticos, algebraicos o geométricos necesarios para enfrentar este tipo de situaciones problémicas, en esta fase se inicia trabajo con los estudiantes, con el propósito fundamental de la clase y el claro objetivo de leer entender y comprender, analizar, buscar covariación y posteriormente el planteamiento del sistema de ecuaciones lineales, para luego ver los métodos de solución, como elemento constitutivo secundario en el proceso, esto es, se hace énfasis en el desarrollo de la habilidad de encontrar patrones de variabilidad por parte de los estudiantes y luego como valor agregado en forma secundaria practicar el proceso general de elaboración comparación y ejercitación de procedimientos, esto nos asegura, que el estudiante no llega fatigado o relegar su capacidad del desarrollo del pensamiento variacional en la dinámica del desarrollo curricular tratado.

Por medio de la aplicación de los diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales ( Eliminación, Sustitución, Igualación, Determinantes, Sarrus), donde se observara, se valorara, y se determinara el alcance de plantear y resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones lineales; así los estudiantes

tendrán la oportunidad de establecer mecanismos de referencia, equivalencia y podrán establecer las diferentes formas de relacionar variables para el planteamientos de ecuaciones respectivas, estableciendo la diferencia de planteamientos de ecuaciones según el tipo de problema, condiciones cognitivas que promueven el desarrollo del pensamiento variacional y algebraico.

La tercera fase está constituida por la etapa de análisis y evaluación de resultados, que se realizaron por medio de diferentes recursos, como talleres escritos, virtuales y socializaciones de carácter verbal, con su objetivo fundamental de la lectura, comprensión, parametrización, discusión y puesta en acción de las estrategias para resolver y plantear los problemas, favoreciendo el desarrollo de pensamiento variacional y algebraico y la explicación de los resultados obtenidos en forma verbal en la resolución de problemas, esta etapa se constituyó en forma oral, y escrita, además de virtual; siempre trabajando en grupos no mayores a tres estudiantes, donde plantearon, resolvieron, ejecutaron sus estrategias, obteniendo resultados que en algunos casos fueron satisfactorio, en el este tipo de ejercicios se presentaron dificultades en los procesos generales de modelación, de elaboración, de comparación y aplicación de procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones 2 x 2. Todo lo anterior modulado mediante conceptos mediadores como los expuestos en el siguiente gráfico:

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

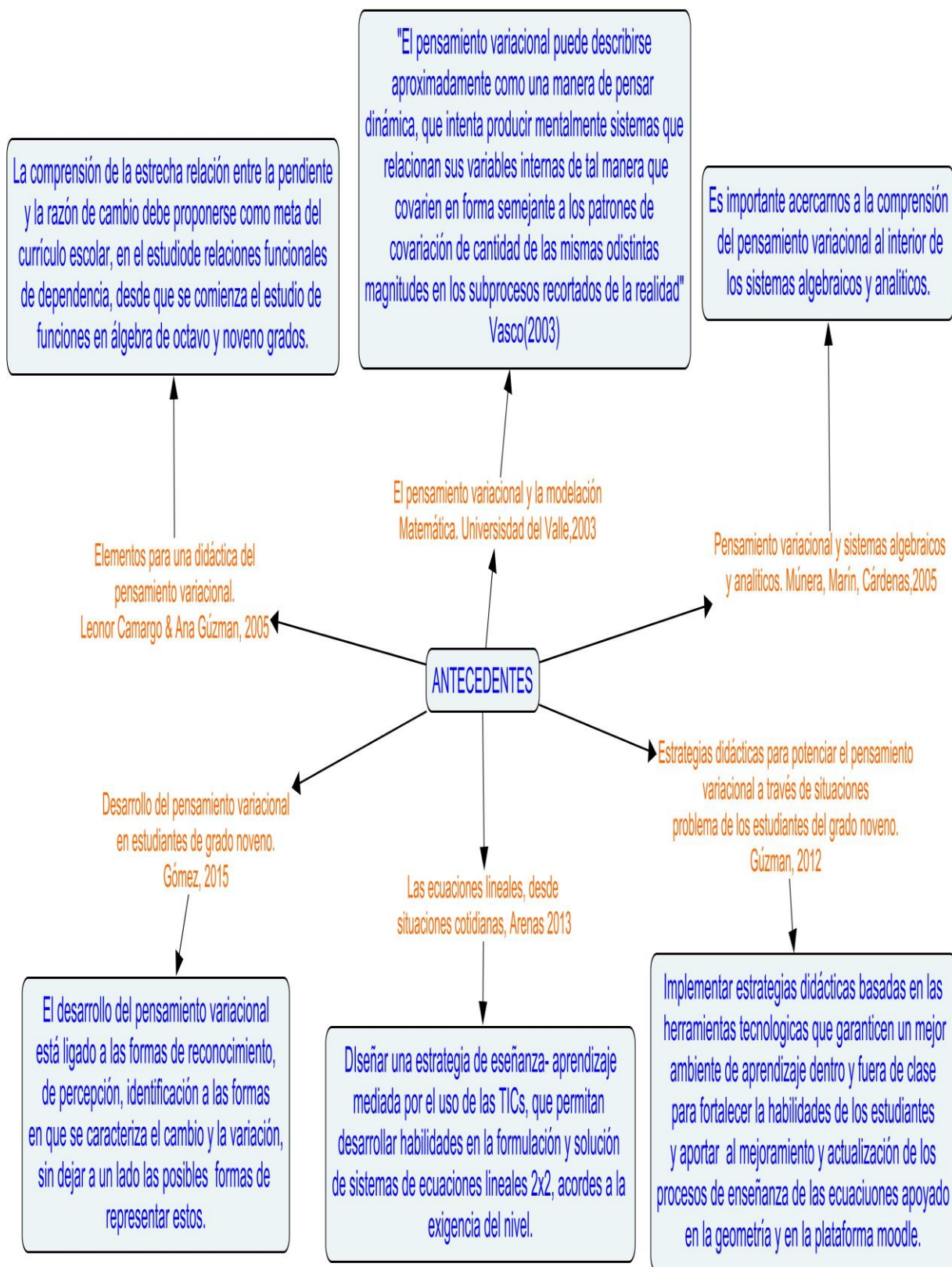


Figura II. Esquema de representación del desarrollo del pensamiento variacional desde una perspectiva de varios autores.  
Diseño Daniel Hernández G.

## **8.2 Población y muestra**

La presente investigación se desarrolla en el Colegio Gimnasio Moderno San Francisco el Tintal, localidad de Kennedy; su población estudiantil está constituida por la sección de preescolar, básica primaria, educación básica, y media vocacional, los niveles de sexto, séptimo, octavos están constituidos por tres grupos cada uno de ellos con un número promedio de 30 estudiantes, dos novenos con 30 estudiantes cada curso, décimos y undécimos con dos grupos en cada nivel, para un gran total de 900 estudiantes aproximadamente y un estrato socioeconómico 2 y 3.

## **8.3 Elección de la muestra.**

La muestra se toma del mismo tamaño de la población al ser manejable desde la toma de información y análisis de la misma, esto es una muestra de 60 estudiantes de grado noveno.

## **8.4 Fases de la investigación**

El desarrollo del pensamiento variacional se potencia aplicando actividades de relación, de equivalencia, en todos los procesos de variación y cambio, en los diferentes fenómenos físicos observables, el concepto de función matemática es fundamental para que los estudiantes posean una herramienta que les permita analizar, reflexionar, organizar y procesar información en forma sistemática.

Las actividades con que se inicia la práctica, son situaciones problema priorizando o haciendo énfasis en el proceso de planteamiento de sistemas de ecuaciones

simultaneas 2 x 2, donde creemos está el proceso, que queremos mejorar y fortalecer; ya en una segunda etapa de la práctica se empodera al estudiante con herramientas básicas de resolución de sistemas de ecuaciones 2 x 2 para la gestión del desarrollo matemático que realizara el estudiante, tanto la primera fase como la segunda fase privilegian los diferentes procesos matemáticos, en directa concordancia con los respectivos pensamientos variacional<sup>4</sup>, numérico, geométrico, aleatorio, métrico; todo con el propósito de lograr una pedagogía de resolutor de problemas en los estudiantes.

La investigación se realiza sobre el desarrollo de los siguientes seis ítems:

- Se presenta la aplicación de la estrategia, iniciando con el manejo de talleres individuales en el manejo del concepto de función lineal.
- Se inicia el trabajo de la lectura e interpretación de situaciones problema en forma grupal, y solicitando como avance la construcción del planteamiento de un sistema de ecuaciones 2x2 pertinente a la situación problema.
- Se presenta a los estudiantes la metodología de resolución de sistemas de ecuaciones 2x2.
- Se socializan recursos de cada uno de los estudiantes en la producción de planteamiento y solución de los problemas expuestos.
- El anterior protocolo se repite desde el segundo nivel de desarrollo de la estrategia, con el objeto de fundamentar cada uno de los métodos de

---

<sup>4</sup> Todo lo anterior con base a los lineamientos curriculares.

desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y fortalecer sistemáticamente la competencia matemática desde el pensamiento y lenguaje variacional.

- El mecanismo de evaluación de una frecuencia procesual que se utilizó, y de mayor impacto fue la coevaluación y la heteroevaluación.

**Tabla No 1 Fases de la Investigación**

| Fases de la Investigación                           |  | Tareas                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Delimitación del problema</b>                    |  | Búsqueda de problemáticas en términos de la enseñanza del pensamiento variacional, algunas dificultades de los estudiantes y algunas problemáticas institucionales que se ven a nivel general en la enseñanza de las matemáticas.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Formulación de objetivos</b>                     |  | Delimitación de acciones que se preveen generar en la propuesta que considere las siguientes prioridades: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Implementación de la estrategia didáctica sobre el planteamiento y resolución de problemas.</li> <li>• Buscar en los estudiantes un proceso volitivo de la dinámica conocimiento aprendizaje.</li> <li>• Hacer de los procesos de aprendizaje una dinámica oscilatoria para reforzar el conocimiento pasado, presente y futuro en la temática de ecuaciones y aritmética en general.</li> </ul> |
| <b>Descripción del contexto</b>                     |  | Describir aspectos contextuales de la institución y los estudiantes con los que se desarrolla la propuesta: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se parte de la base de una excelente aceptación en el manejo de información por parte de los estudiantes, con debilidades normales a la educación matemática tradicional.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Definición y de elaboración de marco teórico</b> |  | Se define y se desarrolla en el marco de la historia de las matemáticas; no como práctica matemática tradicional sino como manejo y producción del desarrollo del pensamiento de la comunidad matemática mundial de los siglos XIII A XVII.                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

|                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Concebir el diseño o abordaje de la investigación</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Se hace el diseño de la investigación basados en algunos parámetros de la investigación cualitativa, según los objetivos buscados entre ellos implementación de estrategia didáctica de aprendizaje, con énfasis el desarrollo del pensamiento variacional</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Definir la muestra</b>                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>Se toma el número de la población como el tamaño de la muestra por ser una población pequeña y fácil de manejar.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Elaboración y validación de Instrumentos</b>          | Los instrumentos se diseñan y se aplican bajo parámetros temporales y esquemas de evaluación estandarizados por la misma institución.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Diseño e implementación: Unidad Didáctica</b>         | La unidad didáctica en la investigación es la sección programada en la malla curricular de la institución: función lineal, sistemas de ecuaciones lineales y triángulos semejantes                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Recolección y análisis de datos</b>                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>La recolección de información se realiza mediante tres formas:</li> <li>Oral</li> <li>Escrita</li> <li>Virtual “ correo electrónico”</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Análisis de resultados</b>                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>Bajo parámetros básicos de estadística</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Hipótesis y proyecciones</b>                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>Promover el estudio de los sistemas de resolución de ecuaciones mediante la estrategia de la comprensión, planteamiento y posterior desarrollo de situaciones problemáticas, potenciando con ellas el pensamiento variacional y en general los demás pensamientos matemáticos.</li> <li>En materia de proyecciones la investigación estimula la continuidad en el proceso enseñanza aprendizaje de la educación matemática enfocado al desarrollo del pensamiento matemático.</li> </ul> |

## **9. Aplicación de la Propuesta**

Se presenta una muestra de las guías didácticas que fueron aplicadas a los estudiantes en el desarrollo de la práctica didáctica, cada una de ellas fue diseñada según las necesidades de la población en estudio, y buscando en forma progresiva avanzar a cada uno de los objetivos propuestos.

### **9.1 Instrumentos Diagnostico para la recolección de la información**

Estos talleres instrumentos de evaluación, está compuesto por nueve y diez ítems, donde el objetivo es analizar la comprensión y análisis desarrollado por el estudiante durante el desarrollo de la estrategia, de validar inicialmente la comprensión y ejercitación del planteamiento de situaciones problema para luego establecer mecanismos de resolución como herramientas estratégicas con las que el estudiante busca una posible solución.

#### **TALLER No 1**

# EVALUATION



**LEONHARD  
EULER**



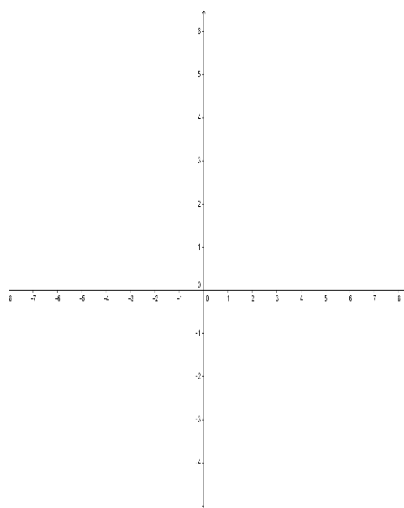
**MATEMÁTICAS**

|                   |                                        |                    |               |
|-------------------|----------------------------------------|--------------------|---------------|
| <b>F THOUGHT:</b> |                                        | <b>MATEMÁTICAS</b> |               |
| <b>SUBJECT:</b>   | <b>SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</b> | <b>GRADE:</b>      | <b>NOVENO</b> |
| <b>TEACHER:</b>   | <b>DANIEL HERNANDEZ</b>                | <b>TERM:</b>       | <b>III</b>    |
| <b>CYCLE:</b>     | <b>IV</b>                              |                    | <b>2019</b>   |

|              |  |                |  |
|--------------|--|----------------|--|
| <b>NAME:</b> |  | <b>COURSE:</b> |  |
| <b>DATE:</b> |  | <b>CODE:</b>   |  |

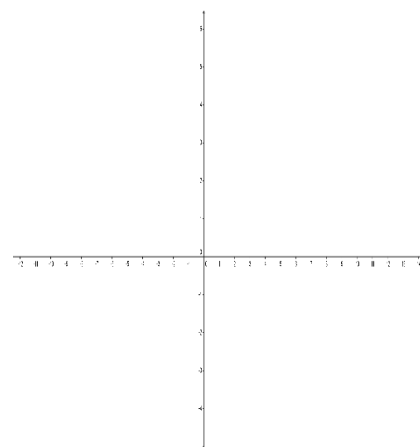
- 1- Grafique la siguiente función lineal:

$$f(x) = 2x + 3$$



- 3- Calcule la ecuación canónica de la recta del punto anterior utilizando la ecuación punto pendiente definida como:  $Y - Y_2 = m(X - X_2)$

- 4- Gráfique la recta

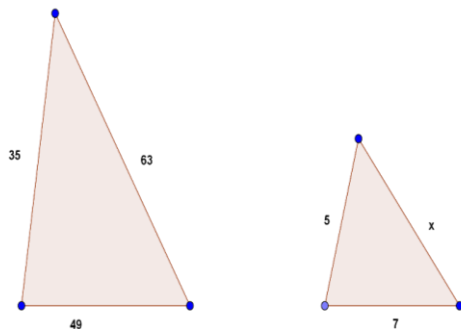


- 2- Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $P_1(6,4)$  y  $P_2(3,2)$ . Sabiendo que la pendiente de una recta se define como:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

## EVALUATION

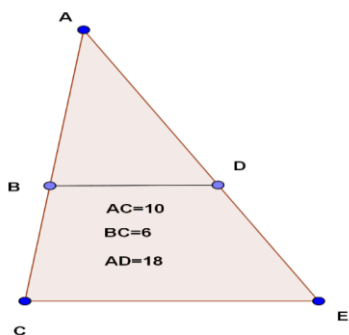


5- Determine si los siguientes triángulos son semejantes:



7- La suma de dos números es de 325 y su diferencia es de 45, halle los números.

6- Determine la longitud del segmento DE de la siguiente gráfica, aplicando el teorema de Thales de Mileto:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$



8- La suma de dos números es de -42 y su diferencia es 52, encuentre los números.

9- Una compañía vende 185 teléfonos de dos tipos, el tipo A lo vende a US \$ 45 y el tipo B a US 60. Si recibe por la venta US \$10.500, ¿Cuántos teléfonos de cada tipo vendió?



GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO "EL TINTAL"

El amor, proyección educativa de un país.

## EVALUATION

|                   |                                                                                   |             |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| LEONHARD<br>EULER |  | MATEMÁTICAS |
|                   |                                                                                   |             |

|            |                                                         |                                        |        |
|------------|---------------------------------------------------------|----------------------------------------|--------|
| F THOUGHT: |                                                         | DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL |        |
| SUBJECT:   | SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES                          | GRADE:                                 | NOVENO |
| TEACHER:   | DANIEL HERNANDEZ                                        | TERM:                                  | 2017   |
| CYCLE:     | PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMATICAS |                                        |        |

|       |  |         |  |
|-------|--|---------|--|
| NAME: |  | COURSE: |  |
| DATE: |  | CODE:   |  |

Lee y contesta las siguientes preguntas:

### VELOCIDAD DE ESCAPE

Las matemáticas están presentes en todas las actividades humanas, y el principal problema para la conquista del espacio es el acceso al mismo. Porque, para situar una astronave en una órbita espacial es necesario imprimirle una velocidad mínima de 28.440 km por hora: casi 8 km por segundo; ya que, de no conseguirse esa velocidad, la astronave recorrería una trayectoria suborbital, cayendo nuevamente a la Tierra. La velocidad necesaria para escapar de la atracción gravitatoria terrestre es de 40.000 kilómetros por hora y de 60.000 para escapar de la del Sol; por consiguiente, estamos hablando de velocidades al menos diez veces mayores de las alcanzadas en aeronáutica. La velocidad de 28.440 km por hora permite situar la astronave en una órbita

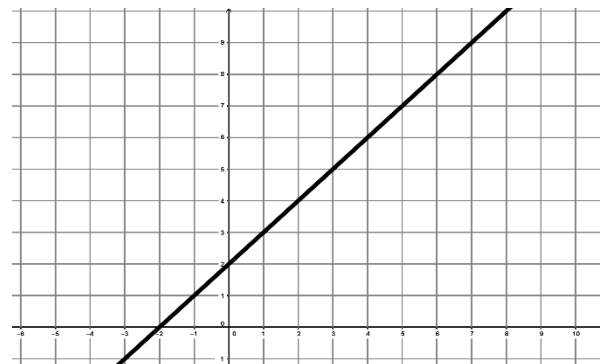
circular baja alrededor de la Tierra, es decir, en una órbita de unos cientos de kilómetros de altura, donde el efecto de la resistencia atmosférica es prácticamente nulo, lo que permite a la astronave mantenerse en órbita durante años. La órbita circular es una clase de órbita típica de muchos satélites artificiales; por ejemplo, la observación de la Tierra para estaciones espaciales, bien como base inicial para el tránsito, para su transferencia hacia otras órbitas, como las llamadas geoestacionarias. Un tipo de órbita utilizado para diversas aplicaciones, como telecomunicaciones o meteorología, que consiste en situar la astronave en una órbita circular en el plano del Ecuador, a una altura de 35.800 km por encima de la superficie de la Tierra. En este caso, el satélite tarda 24 horas en recorrer su órbita, es decir: el mismo tiempo que emplea la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje, lo que hace que el satélite permanece fijo con relación

## EVALUATION



son en general más costosas que las coplanares. Ocasionalmente puede combinarse el uso de reactores con otros recursos como el aprovechamiento del campo gravitatorio de algún astro para modificar la trayectoria de la astronave. Un famoso ejemplo del uso reciente de esta técnica es la de la sonda europea Ulises, que en febrero de 1992 utilizó la fuerte atracción gravitatoria de Júpiter para desviar su trayectoria inicial, en el plano de la eclíptica, hacia una órbita polar alrededor del Sol.

- Los satélites artificiales utilizan una clase de órbita típica denominada:
  - Circular Alta
  - Circular Baja intermedia
  - Circular Media
  - Circular
- El peso de una Astronave es siempre considerado:
  - Indispensable
  - Crítico
  - Importante
  - sensible
- La velocidad para vencer el campo gravitacional de la tierra es \_\_\_\_\_ a la velocidad para vencer el del sol:
  - Mayor
  - Menor
  - Equivalente
  - Igual
- Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $P_1(6, 8)$  y  $P_2(2, 4)$ . Utilizando la ecuación de la pendiente de una recta:  $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$
- Halle la ecuación de la recta anterior utilizando la ecuación:  $Y_2 - Y_1 = m(X_2 - X_1)$



- Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?
- La edad de Camila y de su mamá suman 54 años y dentro de 9 años la edad de la mamá será el doble de la edad de Camila. ¿Cuántos años tiene cada una?
- Enriqueta es costurera y quiere aprovechar una oferta de botones. El paquete de botones blancos cuesta \$15 y el de botones negros \$10. Si con \$180.00 compró en total 14 paquetes, ¿cuánto gastó en botones blancos?
- Juan pagó \$50 por 3 cajas de taquetes y 5 cajas de clavos. Pedro compró 5 cajas de taquetes y 7 de clavos y tuvo que pagar \$74. ¿Cuál es el precio de cada caja de taquetes y de cada caja de clavos?

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

|                                                                                   |                |                   |                                                               |                                               |               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------|
|  | <b>ÁLGEBRA</b> | <b>F THOUGHT:</b> |                                                               | <b>DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL</b> |               |
|                                                                                   |                | <b>SUBJECT:</b>   | <b>SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</b>                        | <b>GRADE:</b>                                 | <b>NOVENO</b> |
|                                                                                   |                | <b>TEACHER:</b>   | <b>DANIEL HERNANDEZ</b>                                       | <b>TERM:</b>                                  |               |
|                                                                                   |                | <b>CYCLE:</b>     | <b>PLNTEAMIENTO Y RESOLUCION DE SITUACIONES PROBLEMATICAS</b> | <b>S. YEAR:</b>                               | <b>2017</b>   |

|              |  |                |  |
|--------------|--|----------------|--|
| <b>NAME:</b> |  | <b>COURSE:</b> |  |
| <b>DATE:</b> |  | <b>CODE:</b>   |  |

Lee y contesta las siguientes preguntas:

### **LAS ORBITAS DE LOS PLANETAS**

¿Por qué todos los planetas ocupan aproximadamente el mismo plano orbital? La mejor conjetura astronómica es que todos se mueven en el mismo plano orbital porque nacieron de un mismo y único disco plano de materia. Las teorías sugieren que el sistema solar fue en origen una enorme masa de gas y polvo en rotación, que acaso fuese esférica en un principio. Bajo la influencia de su propia atracción gravitatoria fue condensándose, con lo cual tuvo que empezar a girar cada vez más deprisa para conservar el momento angular. En un cierto momento de este proceso de condensación y rotación cada vez más acentuadas, el efecto centrífugo acabó por desgajar una porción de materia del plano ecuatorial. Esta porción de materia desgajada, que representaba un porcentaje pequeño del total, formó un gran disco plano alrededor de la porción central principal de la nube. De un modo u otro (pues sobre los detalles no hay ni mucho menos un consenso general) se condensaron una serie de planetas a partir de ese disco, mientras que el grueso de la nube se convirtió en el Sol. Los planetas siguieron girando en la región antes ocupada por el disco, y por esa razón giran todos ellos más o menos en el mismo plano del ecuador solar. Por razones parecidas, los planetas, a medida que se fueron condensando, fueron formando satélites que giran, por lo general, en un único plano, que coincide con el del ecuador del planeta. Según se cree, las excepciones a esta regla son debidas a sucesos violentos ocurridos mucho después de la formación general del sistema solar. El planeta Plutón gira en un plano que forma un ángulo de 17 grados con el plano de revolución de la Tierra. Ningún otro planeta tiene una órbita tan inclinada. Algunos astrónomos han conjeturado que Plutón quizá fuese en otro

tiempo un satélite de Neptuno y que logró liberarse gracias a algún cataclismo no determinado. De los satélites actuales de Neptuno, el principal, que es Tritón, no gira en el plano ecuatorial de Neptuno, lo cual constituye otro indicio de algún cataclismo que afectó a ese planeta. Júpiter posee siete satélites pequeños y distantes que no giran en el plano de su ecuador. El satélite más exterior de Saturno se halla en el mismo caso. Es probable que estos satélites no se formaran en su presente posición, en el momento de nacer el sistema solar, sino que sean asteroides capturados mucho después por esos planetas gigantes. Muchos de los asteroides que giran entre las órbitas de Marte y Júpiter tienen planos orbitales muy inclinados. Una vez más, todo parece indicar una catástrofe. Es muy posible que en origen los asteroides fuesen un solo planeta pequeño que giraba en el plano general. Mucho después de la formación del sistema solar, una explosión o serie de explosiones puede que fragmentara ese malhadado mundo, colocando los fragmentos en órbitas que, en muchos casos diferían grandemente del plano orbital general. Los cometas giran en todos los planos posibles. Ahora bien, hay astrónomos que creen que muy en las afueras del sistema solar, como a un año-luz del Sol, existe una nube dispersa de cometas. Estos cometas puede que se hayan condensado a partir de las porciones más exteriores de la nube esférica original, antes de comenzar la contracción general y antes de formarse el disco ecuatorial. En tales circunstancias, cuando de vez en cuando un cometa abandona esa capa esférica y se precipita en las regiones interiores del sistema solar (quizá como resultado de la influencia gravitatoria de estrellas lejanas), su

## **EVALUATION**

1. El planeta con el ángulo más inclinado de rotación es:
  - a. La tierra
  - b. Saturno
  - c. Júpiter
  - d. Marte
2. Es posible que el planeta Plutón halla sido:
  - a. Una estrella
  - b. Un planetoide
  - c. Una Luna
  - d. Un Satélite
3. Es posible que el origen de los asteroides hubiese sido:
  - a. Una estrella menor
  - b. Un planeta mayor
  - c. Una nube
  - d. Un planeta menor

4. El costo de las entradas a una función de títeres es de \$30 para los adultos y \$20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron \$5930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a la función el sábado?

5. Marta y sus amigos pagaron \$109 por 5 hamburguesas y 7 refrescos. Si la semana anterior consumieron 8 hamburguesas y 11 refrescos y la cuenta fue de \$173, ¿cuánto cuesta cada hamburguesa y cada refresco?

6. El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo

y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro queda en 76 metros. ¿Cuáles son las medidas originales del rectángulo y cuáles las medidas del rectángulo agrandado?

7. Don José y don Tiburcio fueron a comprar semillas para sembrar. Don José compró cuatro sacos de maíz y tres sacos de frijol, y don Tiburcio compró tres sacos de maíz y dos de frijol. La carga de don José fue de 480 kilogramos y la de don Tiburcio de 340. ¿Cuánto pesaban cada saco de maíz y cada saco de frijol?

8. Encuentre dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.

9. En una fábrica tienen máquinas de tipo A y máquinas de tipo B. La semana pasada se dio mantenimiento a 5 máquinas de tipo A y a 4 del tipo B por un costo de \$3405. La semana anterior se pagó \$3135 por dar mantenimiento a 3 máquinas de tipo A y 5 de tipo B. ¿Cuál es el costo de mantenimiento de las máquinas de cada tipo?

10. Las edades de Pedro y de su papá suman 44 años. Hace 4 años la edad de Pedro era la octava parte de la de su papá. ¿Cuántos años tiene cada uno?

## **9.2 Instrumentos para la recolección de la información virtual ( vía correo)**

Estos talleres son aplicados para que los estudiantes los resuelvan y envíen sus respuestas vía correo, para luego ser socializados por cada uno de ellos en clase, para hacer retro alimentación en el manejo del tratamiento del problema que se planteó inicialmente, para que los estudiantes tengan la oportunidad de expresar sus opiniones en la realización de cada uno de los talleres.

### **COLEGIO GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO**

#### **TALLER No 3**

**PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES  $2 \times 2$**

**GRADO NOVENO**

**DOCENTE: DANIEL ANDRÉS HERNÁNDEZ GARZÓN**

#### **En la granja**

1. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?



Download from  
**Dreamstime.com**  
This watermarked sample image is for previewing purposes only.

43634974  
Batke82 | Dreamstime.com

2. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).



**COLEGIO GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO**

**TALLER No 4**

**PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES  $2 \times 2$**

**GRADO NOVENO**

**DOCENTE: DANIEL ANDRÉS HERNÁNDEZ GARZÓN**

1. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?



2. Dos obreros trabajan 8 horas diarios en la misma empresa. El primero gana 500 Euros diarios menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el segundo sólo 24. Si el primero ha

ganado 33.000 Euros más que el segundo calcula el salario diario de cada obrero.



**COLEGIO GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO**

**TALLER No 5**

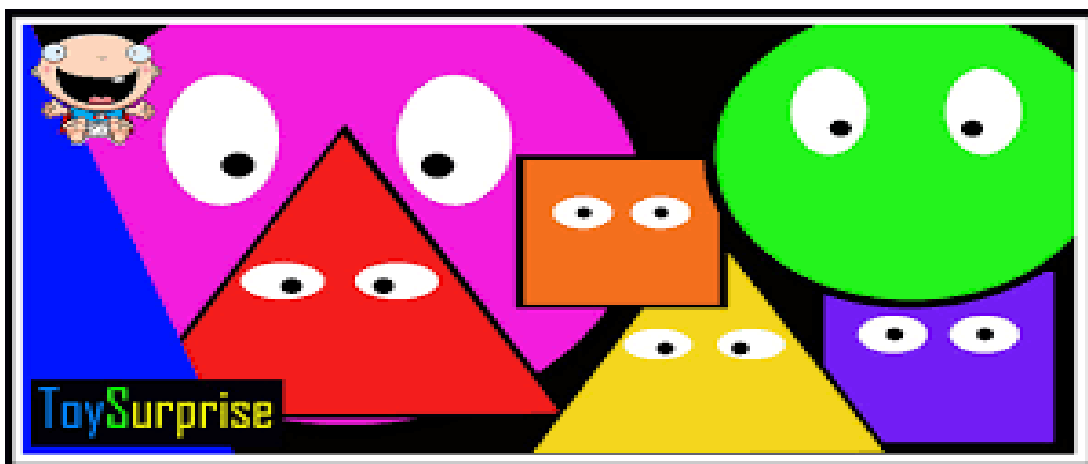
**PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES  $2 \times 2$**

**GRADO NOVENO**

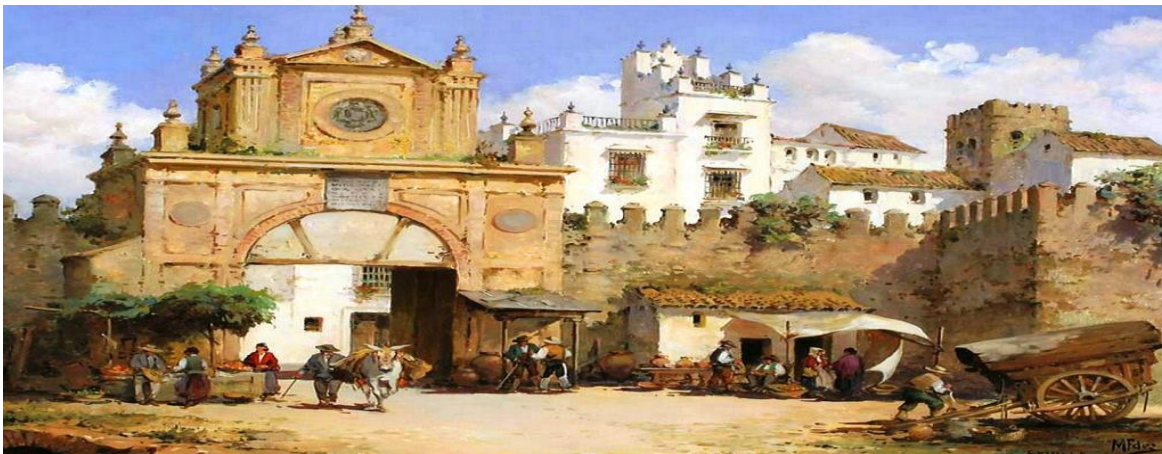
**DOCENTE: DANIEL ANDRÉS HERNÁNDEZ GARZÓN**

1. El perímetro de un rectángulo mide 36 metros. Si se aumenta en 2 metros su base y se disminuye en 3 metros su altura el área no cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.



2. En un pueblo, hace muchos años, se utilizaba, como unidades de medida de peso, la libra y la onza. Recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes:

"... pesando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495 gramos..." y "... resultando 2 libras y 8 onzas, cuando el extranjero preguntó por el peso en gramos le contestaron 1150 gramos". ¿Sabrías calcular el valor, en gramos, de la libra y la onza?



### **9.3 Instrumentos para la recolección de la información**

#### *9.3.1 Instrumento Diario de Campo (ver anexo 2)*

Se realizó el diario de campo como documento paralelo a la malla curricular correspondiente a las temáticas desarrolladas en el tercer periodo escolar incluyendo temáticas de geometría esencial para el trabajo planeado, motivando aún más a los estudiantes en la práctica de aula; es pertinente resaltar, que el desarrollo de la estrategia se adaptó, se implementó y se aplicó según las necesidades y cronograma de actividades académicas de la institución educativa.

## **10. Análisis de Resultados**

Se considera la importancia pedagógica y didáctica de la práctica expuesta desde nuestro enfoque como una de las herramientas matemáticas potencialmente útil para la resolución de problemas prácticos y científicos, así, consideradas desde la

antigüedad, como lo describe Gutiérrez (2014):

“La importancia de este tema radica en que desde su inicio los diferentes pueblos buscaban la forma de repartir propiedades, animales, objetos, etcétera, entre un grupo de personas. La repartición estaba sujeta a ciertas restricciones que hacia complicada la distribución de bienes, para esto se moldeaba el problema mediante diferentes ecuaciones, cuya solución daba respuesta al problema” (p.154).

En este tipo de reflexión, permite comprender que el planteamiento y desarrollo matemático que conllevan los problemas que se resuelven por medio de sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 permiten a los estudiantes de grado noveno enfrentar el manejo aritmético, geométrico, algebraico, e incluso el planteamiento y composición de funciones lineales.

La práctica está diseñada pedagógicamente desde sus tres ejes fundamentales, modelo pedagógico, desarrollo de competencias específicas, y evaluación como factor determinante para el conocer, como el estudiante logra explorar, modelar, construir matemáticamente la posible solución de las situaciones problema, desde un enfoque de cambio y variación, cambio se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo variación lo entendemos como cuantificación de dicho cambio (Cantoral, 2013) ; todo en la búsqueda de promover autonomía en el planteamiento y la construcción de solución de situaciones problema en contexto matemático variacional en ambientes cotidianos y científicos.

Siendo partidarios de la idea expuesta por Bell (1949, p.135) que afirma “*en cierto modo toda la matemática es una búsqueda de la incógnita*”, podemos así, plantear

a los estudiantes la necesidad de poseer un plan, una estrategia, para resolver con habilidad o competencia matemática y competencia en matemáticas situaciones problemáticas que en el marco de esta práctica pedagógica se consagra el énfasis en el planteamiento de ecuaciones lineales observando siempre los fenómenos de cambio y variación, desde una comprensión, una interpretación ventajosa de cualquier situación a resolver.

Se presentan cada una de los talleres aplicadas a los estudiantes:

Los talleres se diseñaron y aplicaron con la motivación de profundizar en el conocimiento pedagógico y didáctico del desarrollo del pensamiento variacional, gestionando una estrategia didáctica que proporcionara a los estudiantes actitudes de observación, actitudes de registro y utilización del lenguaje matemático; pero, sobre todo, una fuente de estímulo en el planteamiento y resolución de problemas, mediante sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ .

### **8.1 Taller No.1**

*Intenciones u objetivos del taller No 1:*

El taller está orientado a desarrollar en el estudiante actitudes de observación en el cambio de una magnitud con respecto a otra; actitudes de registro de estos cambios expresándolos mediante ecuaciones lineales, utilizando el lenguaje matemático permitiéndole interpretar el concepto de función lineal. Acorde a los principios propuestos en los lineamientos curriculares MEN (1998); con el objetivo específico de desarrollar el pensamiento variacional, mejorar la comprensión del aprendizaje del álgebra y adquirir mayor dominio en la utilización del lenguaje matemático.

*Estándar o competencia a desarrollar:*

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

El taller exige al estudiante la elaboración, comparación, y ejercitación de procedimientos para adquirir competencia en matemática, D'Amore (2008)

**Taller No 1**

| EVALUATION                          |             | F THOUGHT:                               |               |
|-------------------------------------|-------------|------------------------------------------|---------------|
| LEONHARD EULER                      | MATEMÁTICAS | SUBJECT: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES | MATEMÁTICAS   |
|                                     |             | TEACHER: DANIEL HERNÁNDEZ                | GRADE: NOVENO |
|                                     |             | CYCLE: IV                                | TERM: III     |
|                                     |             |                                          | 2017          |
| NAME: DANIEL FELIPE MEJIA RODRIGUEZ |             | COURSE: 902                              |               |
| DATE: 10/08/2017                    |             | CODE:                                    |               |

1- Grafique la siguiente función lineal:

$f(x) = 2x + 3$

2- Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $P_1(5, 4)$  y  $P_2(3, 2)$ . Sabiendo que la pendiente de una recta se define como:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

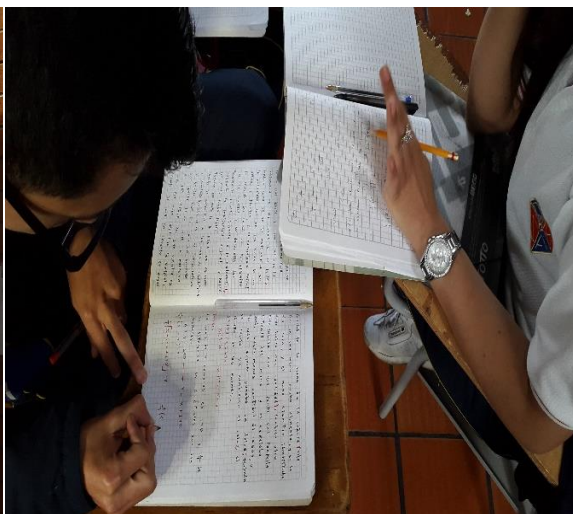
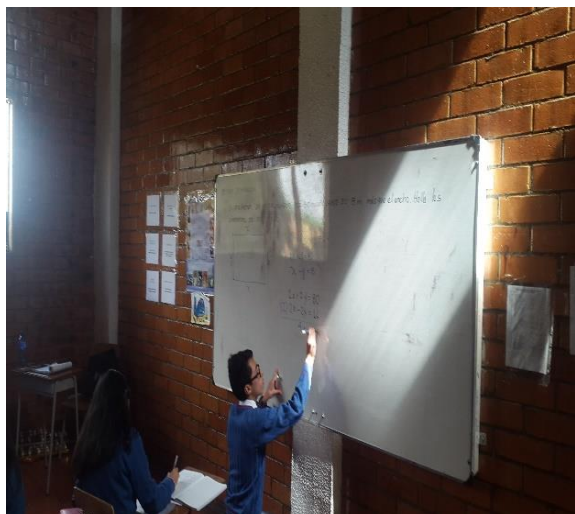
$m = \frac{2 - 4}{3 - 5} = \frac{-2}{-2} = 1$

3- Calcule la ecuación canónica de la recta del punto anterior utilizando la ecuación punto pendiente definida como:  $Y - Y_2 = m(X - X_2)$

$4 - Y_2 = \frac{2}{3}(6 - X_2)$   
 $4 - Y_2 = \frac{2}{3}X - \frac{12}{3}$   
 $4 - Y_2 = \frac{2}{3}X + 4$   
 $-Y_2 = \frac{2}{3}X + 4 - 4$   
 $-Y_2 = \frac{2}{3}X$   
 $Y = -\frac{2}{3}X$

4- Grafique la recta

GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO "EL TINTAL"  
El amor, proyección educativa de un país



*Descripción de la actividad:*

Determinar las características analíticas de una función lineal para hacer su representación gráfica observando, la variación directa entre dos variables y la variación de la función lineal afín, determinando la pendiente de la recta como concepto de cambio y variación

*Observaciones sobre los estudiantes en su forma de realizar el trabajo:*

Los estudiantes en sus respuestas confunden las coordenadas del plano cartesiano y por lo tanto no identifican claramente un delta y no calculan correctamente la pendiente de la recta, dificultándosele ver el concepto de pendiente como la variación de dos magnitudes.

Los estudiantes participan dinámicamente en la construcción de funciones lineales a partir de condiciones específicas que determinen sistemas de ecuaciones lineales consistentes, inconsistentes o bien dependiente.

## **8.2 Taller No.2**

*Intenciones u objetivos del taller No 2:*

El taller está orientado a desarrollar en el estudiante el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

*Estándar o competencia a desarrollar:*

El taller exige al estudiante la elaboración, comparación, y ejercitación de procedimientos para adquirir competencia en matemática, y la competencia matemática. D'Amore (2008).

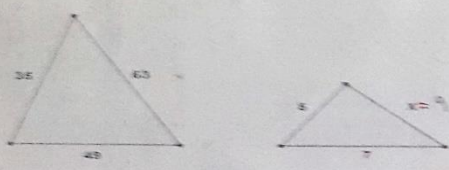
Los estudiantes desarrollan la competencia matemática en el planteamiento y resolución de problemas desde los sistemas de ecuaciones  $2 \times 2$  por cualquiera de los diferentes métodos establecidos en el álgebra básica, la práctica hace énfasis en el planteamiento de las situaciones problema, mediante la mediación de un plan estratégico, proponiendo el de Polya.

### **Taller No 2**

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

**EVALUATION**

5- Determine si los siguientes triángulos son semejantes:



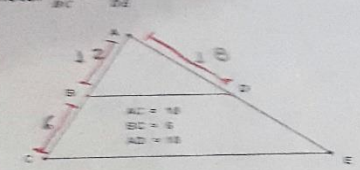
Handwritten solution for problem 5:

$$\frac{36}{48} = \frac{x}{7}$$

$$48 \cdot 1 = 49x$$

$$x = \frac{48}{49} \quad x = 9$$

6- Determine la longitud del segmento DE de la siguiente grafica, aplicando el teorema de Tales de Miléto:



Handwritten solution for problem 6:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{1.8}{x}$$

$$12x = 108$$

$$x = \frac{108}{12}$$

$$x = 9$$

7- La suma de dos números: 325 y su diferencia es 45. Halla los números.

Handwritten solution for problem 7:

$$x + y = 325$$

$$x - y = 45$$

$$2x = 370$$

$$x = \frac{370}{2}$$

$$x = 185$$

8- La suma de dos números es -42 y su diferencia es 52, encuentra los números.

Handwritten solution for problem 8:

$$x + y = -42$$

$$x - y = 52$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

9- Una compañía vende 185 teléfonos de dos tipos: el tipo A lo vende a US \$45 y el tipo B a US \$60. Si recibe por la venta US \$10,500, ¿Cuántos teléfonos de cada tipo vendió?

Handwritten solution for problem 9:

$$x(45) + y(60) = 10,500$$

$$45x + 60y = 10,500$$

$$x + y = 185$$

$$45x + 60y = 10,500$$

$$(-60) \rightarrow 60x - 60y = -11700$$

$$(-1) \rightarrow -15x = +600$$

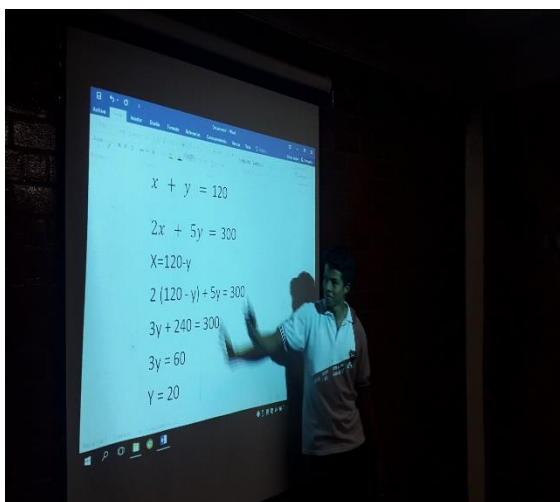
$$15x = 600$$

$$x = \frac{600}{15}$$

$$x = 40$$

GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO "EL TINTAL"

El amor, proyección educativa de un país



**Descripción de la actividad:**

Los estudiantes se interesan en la lectura de cada una de las situaciones problemáticas planteadas en el taller e inician una serie de planteamientos de

ecuaciones lineales 2 x 2 para poder exponer su principal hipótesis en la resolución de un problema; al ser demostrada la hipótesis en un alto grado de confiabilidad, resuelven el sistema, haciendo la respectiva comprobación y su respectiva socialización ante sus compañeros del trabajo realizado.

*Observaciones sobre los estudiantes en su forma de realizar el trabajo:*

Al inicio del trabajo se presentan dificultades en el manejo del texto del problema, planteándose ecuaciones incorrectas, pero, al cabo de varios talleres aplicados, los estudiantes muestran gran habilidad en el planteamiento de ecuaciones y se direccionan en la resolución del sistema por el método que les parece más simple o bien el que más les ha llamado la atención desde el punto de vista algebraico. Desde el valor del pensamiento numérico, los estudiantes identifican y establecen mediante ecuaciones lineales relaciones de covariación y correlación de magnitudes en procesos de fenómenos físicos, químicos, económicos, industriales, financieros, entre otros.

Es condición necesaria en los procesos de razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos según los lineamientos curriculares del MEN, 1994; motivar el desarrollo del pensamiento variacional, mediante el manejo de sistemas algebraicos y analíticos; además de trabajar el pensamiento numérico, espacial, aleatorio, métrico, con sus respectivos sistemas numéricos, geométricos, sistemas de datos, sistema de medidas, respectivamente; se visualiza la necesidad y la oportunidad pedagógica de potenciar el desarrollo de habilidades o

competencias matemáticas y competencias en matemáticas, según tipificación de (D'Amore,2008); haciendo un especial énfasis y, aplicadas sobre la base de situaciones problemáticas que desarrollan el pensamiento variacional, siendo pertinentes y consecuente con fenómenos de cambio y variación, como, problemas de aproximación, estimación numérica, y el planteamiento de funciones en el estudio de patrones, donde se evidencien procesos de cambio de una variable con respecto a otra en correlación directa o inversa evidenciando estos cambios desde el enfoque numérico además del funcional; situaciones o bien fenómenos de la vida diaria de los estudiantes o de su quehacer académico, promoviendo el desarrollo de su pensamiento matemático desde un enfoque de carácter científico, fomentando el liderazgo y la mediación para un mejor desempeño personal en la sociedad.

### **8.3 Taller No 3**

*Intenciones u objetivos del taller No 3: (Respuesta de los estudiantes en forma virtual, correo electrónico)*

El taller está orientado a desarrollar en el estudiante, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación mediante herramientas computacionales, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Método de resolución sugerido: sustitución. Motivar al estudiante a observar fenómenos físicos que afectan su cotidiano vivir, además propiciar un constante cuestionamiento, análisis y reflexión sobre la correlación, variación y cambio de las variables que intervienen en los diferentes fenómenos en un contexto científico

determinado, promoviendo la adquisición de sus evidencias, base de la ciencia.

*Estándar o competencia a desarrollar:*

El taller exige al estudiante la elaboración, comparación, y ejercitación de procedimientos algebraicos, computacionales para adquirir competencia en matemática, y la competencia matemática. D'Amore (2008).

### **Taller No 3**

## **GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO EL TINTAL**

**LAURA SOFIA CELEDON ROBLES**

**TALLER DE MATEMÁTICAS.**

**CURSO 902.**

1. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿cuantos animales hay de cada clase?



$$X + Y = 50$$

$$2X + 4Y = 134$$

$$X + Y = 50$$

$$Y = -X + 50$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$2X + 4(-X + 50) = 134$$

$$2X - 4X + 200 = 134$$

$$-2X = -200 + 134$$

$$-2X = -66$$

$$2X = 66$$

$$X = \frac{66}{2}$$

$$X = 33$$

$$33 + Y = 50$$

$$Y = 50 - 33$$

$$Y = 17$$

2. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántas luchadores había de cada clase? (recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).



$$X + Y = 42$$

$$6X + 8Y = 276$$

$$X + Y = 42 \quad Y = -X + 42$$

$$6X + 8(-X + 42) = 276 \quad 6X - 8X + 336 = 276$$

$$-6X = -336 + 276 \quad -6X = -60$$

$$6X = 60$$

$$X = \frac{60}{6}$$

$$X = 10$$

$$10 + Y = 42$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$Y = 42 - 10$$

$$Y = 32$$



*Descripción de la actividad:*

Se promueve el trabajo en el aula leyendo, planteando y desarrollando situaciones problémicas todo ello en grupos no mayores de cuatro estudiantes, después de buscar una excelente aprobación por parte de los estudiantes de la temática expuesta; se plantea el taller número tres, que tiene un manejo especial por la implementación de herramientas virtuales en Word, como editor de ecuaciones; Geogebra, archivos, correo electrónico, etc.

*Observaciones sobre los estudiantes en su forma de realizar el trabajo:*

La respuesta de los estudiantes es muy satisfactoria en términos de planteamiento

de ecuaciones y aplicación de métodos de resolución de sistemas lineales de ecuaciones simultaneas, la gran dificultad está en la negación de no querer manejar el aplicable Geogebra, las respuestas dadas por los estudiantes en los talleres virtuales socializaron en clase, haciendo parte de la estrategia didáctica.

#### **8.4 Taller No 4**

*Intenciones u objetivos del taller No 4: (Respuesta de los estudiantes en forma virtual, correo electrónico)*

El taller está orientado a desarrollar en el estudiante, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación mediante herramientas computacionales, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Método de resolución sugerido: Determinantes.

*Estándar o competencia a desarrollar:*

El taller exige al estudiante la elaboración, comparación, y ejercitación de procedimientos algebraicos, computacionales para adquirir competencia en matemática, y la competencia matemática. D'Amore (2008).

#### **Taller No 4**

**Preguntas de algebra      De: Nohary Soleil Cortés Moreno**

**Curso: 902                      Materia: Algebra                      2017-09-16**

**3.** En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de 2 y 5 litros.

¿Cuántas            botellas            de            cada            clase            se            han            utilizado?

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**



SOLUCIÓN:

$$\chi + \gamma = 120$$

$$2\chi + 5\gamma = 300$$

$$\chi = 120 - \gamma$$

$$2(120 - \gamma) + 5\gamma = 300$$

$$3\gamma + 240 = 300$$

$$3\gamma = 300 - 240$$

$$3\gamma = 60$$

$$\gamma = \frac{60}{3}$$

$$\gamma = 20$$

• COMPROBACIÓN:

$$\chi + 20 = 120$$

$$\chi = 120 - 20$$

$$\chi = 100$$

Se puede deducir que hay 100 botellas de 2 litros y 20 botellas de 5 litros.

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

**4.** Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 500 pts. Diarios menos que el segundo; Pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el primero solo 24. Si el primero a ganado 33.000 pts. mas que el segundo. Calcula el salario diario de cada obrero.



- SOLUCIÓN:

$$\gamma - \chi = 500$$

$$30\chi - 24\gamma = 33.000$$

$$\gamma = 500 + \chi$$

$$30\chi - 24(500 + \chi) = 33.000$$

$$30\chi - 1200 - 24\chi = 33.000$$

$$6\chi = 33.000 + 1.200$$

$$6\chi = 34.200$$

$$\chi = \frac{34.200}{6}$$

$$\chi = 5.700$$

- COMPROBACIÓN:

$$\gamma - 5.700 = 500$$

$$\gamma = 500 + 5.700$$

$$\gamma = 6.200$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

De esto concluimos que el primer obrero gana diario 6.200, mientras que el segundo gana 5.700



*Descripción de la actividad:*

Se promueve el trabajo en el aula leyendo, planteando y desarrollando situaciones problémicas en forma individual, después de buscar una excelente aprobación por parte de los estudiantes de la temática, resolución de sistemas de ecuaciones por el método de determinantes; se plantea el taller número cuatro, que tiene un manejo especial por la implementación de herramientas virtuales en Word, como editor de ecuaciones; Geogebra, archivos, correo electrónico, etc.

*Observaciones sobre los estudiantes en su forma de realizar el trabajo:*

La respuesta de los estudiantes es muy satisfactoria en términos de planteamiento de ecuaciones lineales simultaneas 2 x 2, ya en la resolución se generan tensiones académicas por utilizar un método o bien el otro, se permite a los estudiantes utilizar el método que más confianza les garantiza.

### **8.5 Taller No 5**

*Intenciones u objetivos del taller No 5: (Respuesta de los estudiantes en forma virtual, correo electrónico)*

El taller está orientado a desarrollar en el estudiante, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación mediante herramientas computacionales, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Método de resolución sugerido: Sarrus.

*Estándar o competencia a desarrollar:*

El taller exige al estudiante la elaboración, comparación, y ejercitación de procedimientos algebraicos, computacionales para adquirir competencia en matemática, y la competencia matemática. D"Amore (2008).

### **Taller No 5**

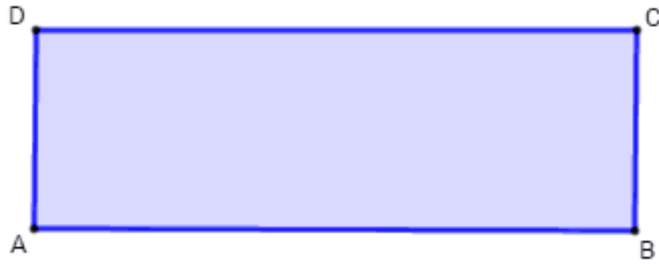
## **TALLER DE MATEMATICAS**

**ALUMNO: SANTIAO TORRES ROMERO**

**CURSO:901**

**2.(5) El perímetro de un rectángulo mide 36 metros si se aumenta en 2 m su base y se disminuye e 3 m su altura el área no cambia ¿calcula las dimensiones de los rectángulos?**

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**



**Solución**

$$(y + 2) + (8x - 3) + (y + 2) + (x - 3) = 36$$

$$2y + 4 + 2x - 6 = 36$$

$$2y + 2x = 36 - 4 + 6$$

$$2y + 2x = 38$$

$$(x - 3)(y + 2) = 80$$

$$2x + 2y = 38$$

$$xy + 2x - 3y = 86$$

**Método de sustitución**

$$2x = -2y + 38$$

$$x = \frac{2y}{2} + \frac{38}{2}$$

**Hacemos la sustitución**

$$y(-y + 19) + 2(-y + 19) - 3y = 86$$

**Resuelvo**

$$-y^2 + 19y - 2y + 38 - 3y = 86$$

$$-y^2 + 14y = 86 - 38$$

$$-y^2 + 14y = 48$$

$$y^2 - 14y = -48$$

$$y^2 - 14y + 48 = 0$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$(y - 6)(y - 8) = 0$$

$$y - 6 = 0 \quad y - 8 = 0$$

$$y = 6 \quad y = 8$$

$$2x + 2(6) = 38$$

$$2x + 12 = 38$$

$$2x = 38 - 12$$

$$2x = 26$$

$$x = 13$$

$$2x + 2y = 36$$

$$x + y = 18$$

**3.(6) En un pueblo hace muchos años, se utilizaba como unidades de medida de peso la libra y la onza, recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes:**

**...pesando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495g y resultando 2 libras y 8 onzas cuando el extranjero pregunto por su peso g le contestaron 1150g ¿sabrías calcular el valor en gramos de la libra y la onza?**



**Solución**

$$3x + 4y = 1495$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$2x + 8y = 1150$$

**Método de eliminación**

$$(-2) - 6x - 8y = -1495$$

$$2x + 8y = 1150$$

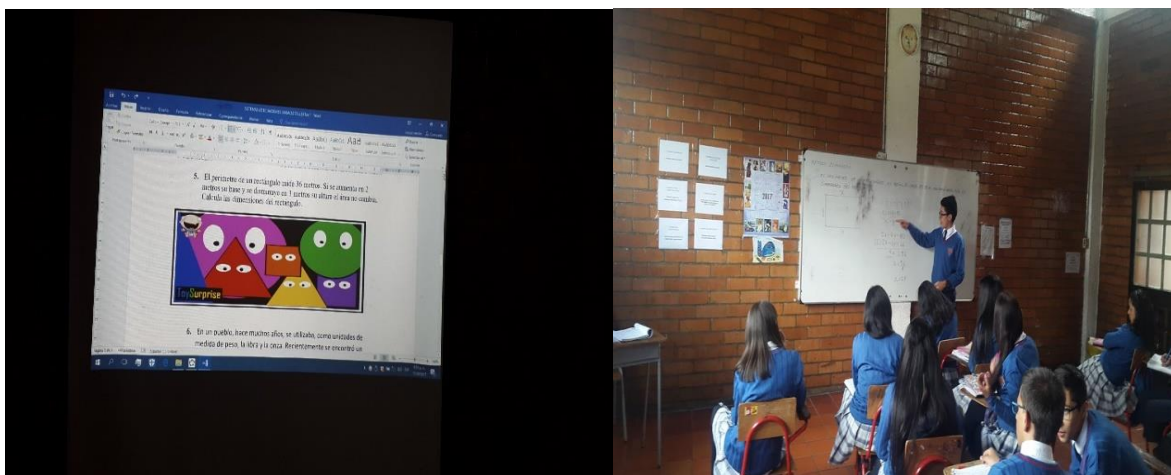
**Resultado**

$$-4x = -1840$$

$$(-1)4x = 1840$$

$$x = \frac{1840}{4}$$

$$x = 460$$



*Descripción de la actividad:*

Se promueve el trabajo en el aula leyendo, planteando y desarrollando situaciones problemáticas en forma socializada por parte de los estudiantes, después de buscar

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

una excelente desarrollo del tema por parte de los estudiantes de la temática, resolución de sistemas de ecuaciones por el método determinantes y método de Sarrus; se plantea el taller número cinco, que tiene un manejo especial por la implementación de herramientas virtuales en Word, como editor de ecuaciones; Geogebra, archivos, correo electrónico, etc.

*Observaciones sobre los estudiantes en su forma de realizar el trabajo:*

La respuesta de los estudiantes es muy satisfactoria en términos de planteamiento de ecuaciones lineales simultáneas 2 x 2, en este momento los estudiantes resuelven los sistemas por más de un método, insistiendo en su método predilecto.

**Tabla No 1**

De desempeño de estudiantes en el planteamiento y resolución de problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales.

| DESEMPEÑO | POSICIÓN | FRECUENCIA | FRECUENCIA ACUMULADA | FRECUENCIA RELATIVA |
|-----------|----------|------------|----------------------|---------------------|
| Básico    | 1        | 11         | 11                   | 18.3%               |
| Aceptable | 2        | 27         | 38                   | 45%                 |
| Bueno     | 3        | 12         | 50                   | 20%                 |
| Alto      | 4        | 10         | 60                   | 16.6%               |
| TOTAL     |          | 60         |                      | 99.9%               |

La siguiente valoración proporciona las fortalezas y debilidades presentadas por los estudiantes en el proceso de aplicación de los talleres.

**Básico:**

El estudiante presenta dificultades en comprender las condiciones de una situación

problemática determinada, no determina variables, parámetros ni plantea ecuaciones para la conformación de un sistema lineal de ecuaciones 2 x 2 solicitado.

**Aceptable:**

El estudiante comprende el enunciado de la situación problemática y lo expresa mediante la formulación de variables y parámetros, pero presenta dificultad en expresar matemáticamente las condiciones de variación, y no establece una relación en términos de función lineal.

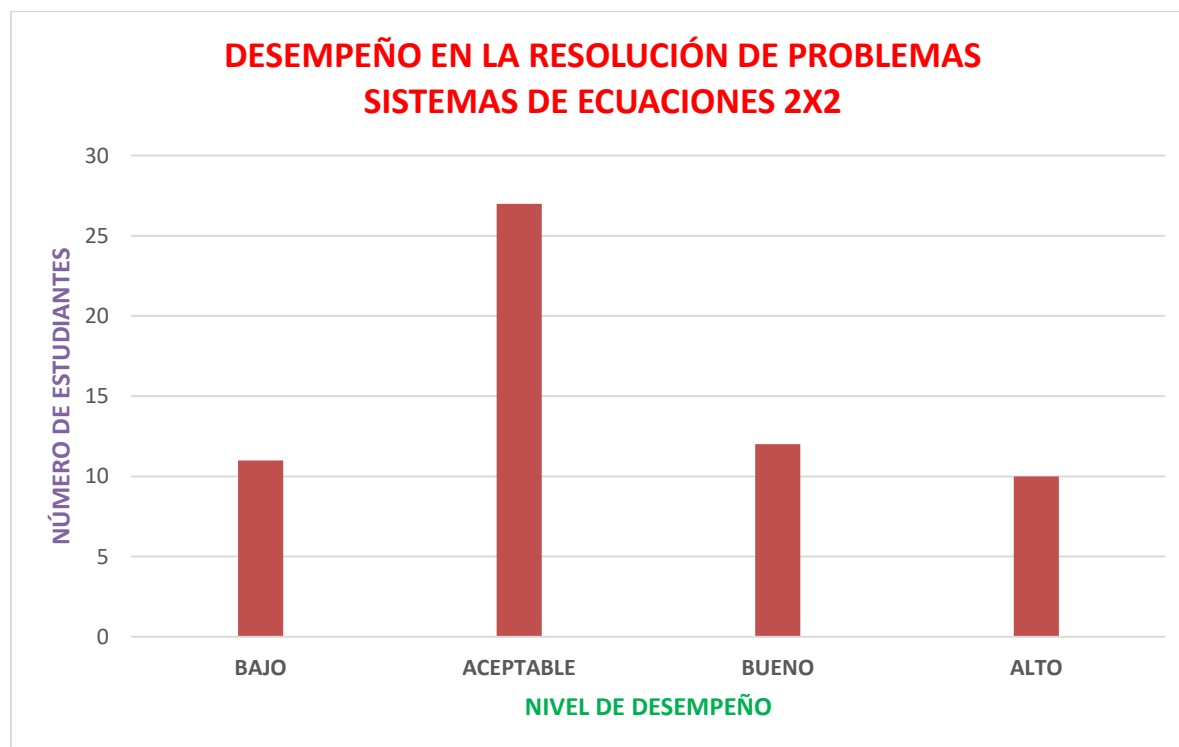
**Bueno:**

El estudiante reconoce mediante una función lineal el comportamiento de variabilidad directa o afín de las magnitudes de la situación problema y plantea el sistema de ecuaciones 2 x 2. Por lo menos con uno de los métodos de solución.

**Alto:**

El estudiante reconoce mediante una función lineal el comportamiento de variabilidad directa o afín de las magnitudes de la situación problema y plantea el sistema de ecuaciones 2 x 2. Empleando cualquier método de solución, comprobando los resultados obtenidos.

Gráfica No 1



## **11. Conclusiones**

En primera instancia la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales propone el estudio de los diferentes métodos de resolución de ecuaciones lineales y la resolución de problemas como parte de la aplicación de esta propuesta; con el objetivo del desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno, propuesta que concluye la familiaridad de estudio de otras ciencias y la continuidad en el aprendizaje matemático; resumiendo las conclusiones a que se llegó, después de una observación detallada de las variables de estudio:

- a. El desarrollo del pensamiento variacional se potencia realizando actividades de relación, de equivalencia y los problemas que se resuelven por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas son una fuente de riqueza didáctica para este tipo de objetivos didácticos.
- b. El desarrollo de problemas aritméticos o de carácter algebraico desarrolla en los estudiantes una mejor disposición de aprendizaje hacia el lenguaje algebraico.
- c. La variación de carácter lineal en los problemas fortalece la comprensión en el pensamiento numérico, geométrico y permite fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional.
- d. Las actividades que se inician con el planteamiento de ecuaciones que permiten resolver cuestionamientos sobre problemas priorizando el análisis matemático sobre en el trabajo matemático pueden garantizar mayor apropiación y dominio de una temática en exposición en el aula, esto es, que el estudiante da mayor importancia a los pasos que exigen mayor demanda cognitiva que a los pasos de memorización en el planteamiento y resolución de problemas.

- e. Se evidencio avances y adquisición de habilidad por parte de los estudiantes en actividades de análisis matemático en el planteamiento de ecuaciones y permitió ver las herramientas metodológicas, algoritmos de resolución como elementos algebraicos de fácil manejo.
- f. Se observa la demanda cognitiva por parte de los estudiantes en el manejo de procesos de análisis matemático mediante el trabajo de los diferentes pensamientos en forma simultánea, pensamiento numérico, pensamiento geométrico, pensamiento variacional, pensamiento métrico; concluyendo la integralidad no del proceso de enseñanza sino de aprendizaje.
- g. Los sistemas de ecuaciones lineales son objetos matemáticos que le permiten al estudiante entender, manejar y proponer situaciones problémicas en contextos cotidianos y científicos.
- h. Se evidencio en el carácter pedagógico y didáctico de la práctica realizada, la integralidad del proceso enseñanza aprendizaje, mostrando la oferta cognitiva de los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas y competencias en matemáticas.
- i. Se evidencio en la práctica el interés creciente de los estudiantes en visualizar y construir matemáticas desde los objetivos propuestos por la práctica.
- j. Se requiere mayor calidad de tiempo para implementar, y desarrollar mayores habilidades de pensamiento en el planteamiento y resolución de problemas.
- k. En la práctica se pudo observar que es muy conveniente en el proceso enseñanza aprendizaje de una temática determinada el docente en lo posible

manejo tres tiempos: pasado, presente y futuro en términos de fundamentación matemática para que el estudiante pueda recordar, poner en práctica y estimular su aprendizaje en forma volitiva.

### **11.1 En cuanto a los hallazgos con los estudiantes:**

Durante el desarrollo de la práctica, se pudo evidenciar las necesidades de los estudiantes en lo referente a su aprendizaje en la temática del planteamiento y resolución de ecuaciones lineales, factores en los cuales se notó en la mayoría de los casos poco manejo en el despeje de ecuaciones visto como una concesión que nos brinda el manejo de las propiedades de los números reales.

En el mismo trabajo de planteamiento y resolución de ecuaciones en las etapas de estimulación, se observó la importancia que dan los estudiantes a la verificación de los razonamientos y a los procedimientos que conllevan estos; trabajo realizado gracias a la implementación gráfica de la representación de función lineal.

Se logró potenciar el ejercicio del desarrollo del pensamiento variacional, junto con los demás pensamientos que integran el pensamiento matemático, con la estrategia de visualizar en primer plano las situaciones problema y posteriormente ver la herramienta de solución en cada uno de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Se observó también que dar oportunidad a los estudiantes de explicar sus planteamientos y estrategias de resolución de problemas fortalece el proceso de enseñanza aprendizaje, como lo define la competencia comunicativa.

## **11.2 Hallazgos frente a la labor docente**

Ratificar en la labor docente el dialogo pedagógico que debe existir siempre, entre los alumnos y su profesor para dinamizar los procesos de adquisición de conocimiento en procesos de aprendizaje.

El dominio de las diferentes temáticas y la programación hecha con antelación de estas permiten crear ambientes que permiten el refuerzo social, cultural y tecnológico, además del humano en los estudiantes y docente.

El acceso a recursos virtuales enriquece el proceso y los hace una prioridad en la práctica de la educación hoy día.

## **11.3 Proyecciones y trabajos a futuro**

La proyección a futuro es la continuidad en la investigación de las características de la educación matemática, como referente de una mejor sociedad, crítica, potencialmente más democrática y respetuosa de la vida en todos sus contextos. Se logró con el trabajo hecho, poner de manifiesto que en el contexto de la enseñanza aprendizaje de la ciencia de las matemáticas, no es un texto, ni una clase operacional, sino todo lo contrario, “es el estudio del pensamiento humano a través del tiempo”.



## **12. Referencias**

- Álvarez, J. (2001). Evaluar para conocer, examinar para excluir. Morata.
- Arenas, B. (2013) (Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas). Recuperado de [www.bdigital.unal.edu.co/11768/1/43277729.2013.pdf](http://www.bdigital.unal.edu.co/11768/1/43277729.2013.pdf)
- Bell, E. (2016). *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica.
- Cantoral, R. (2013). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Vol. 3). DF, México: Secretaría de Educación Pública. ISBN, 978-607.
- Ciscar, S. L., Martínez, M. , López-Goñi, I., González, J. , Raig, N. P., Muñoz, Y. M. V., ... & Rodríguez, J. (2011). *Didáctica de las matemáticas* (Vol. 122). Grao.
- D'Amore, B., Godino, J. D., & Pinilla, M. I. F. (2008). *Competencias y matemática*. Editorial Magisterio.
- Godino, J., Moll, V., & Raig, N. (2011). *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas* (Vol. 123). Grao.
- Gómez, O. (2015) (Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno). Recuperado de <https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/5966>
- Guerra, A. (2012) (Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales). Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/11057979.pdf>
- Hernández, S. (2014). *Propuesta didáctica para el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemático, desde el pensamiento variacional, con los estudiantes del grado cuarto de básica primaria del Colegio Cooperativo San Antonio de Prado, por medio de estrategias de enseñanza mediadas por los sistemas de gestión de aprendizaje durante el año 2014* (Trabajo de maestría, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín).
- Lehmann, C. H. (1995). Álgebra, Limusa.
- Manuel, A. (2002). La construcción del lenguaje matemático, Ed. Graó, España.
- Ministerio de Educación Nacional MEN. (2006) Estándares básicos de competencias en matemáticas. Recuperado de [https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf).

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1994). Lineamientos curriculares. Recuperado de <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html>

Stewar, J., Lothar, R., Saleem, W. (2001). Precálculo, Thomson.

Tamayo, J. (2016) (Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra). Recuperado de <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/510/TO-19960.pdf>

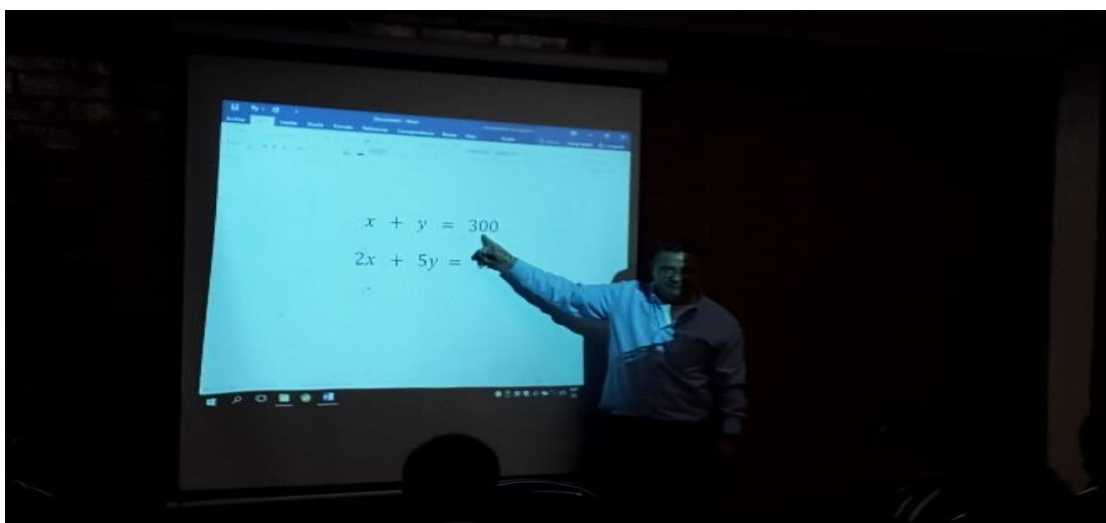
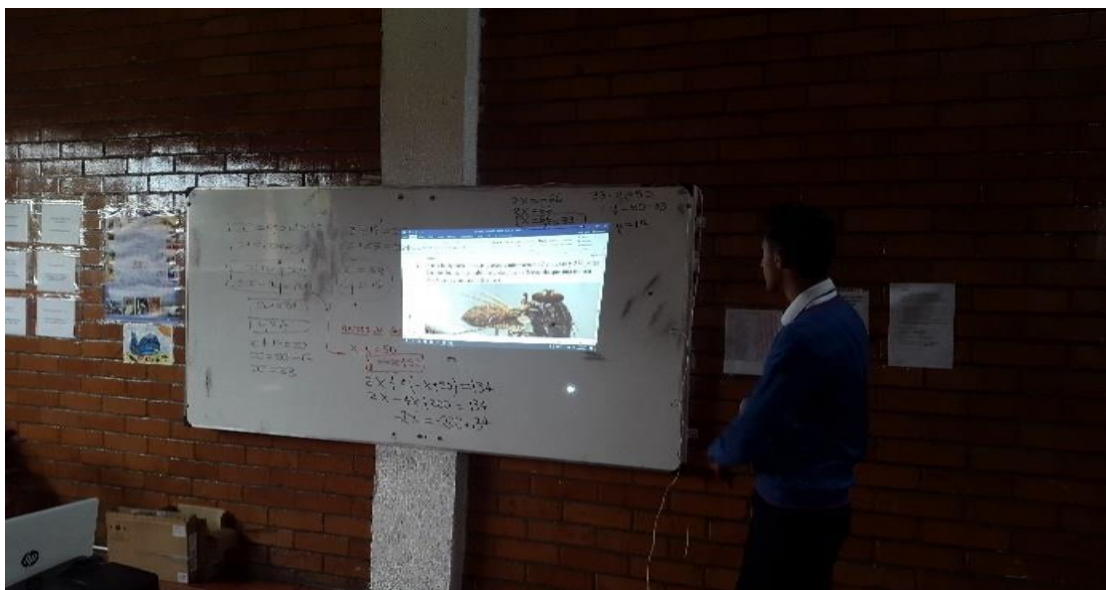
Uribe, L., & Castro, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional: relaciones entre la pendiente y la razón de cambio*. Cooperativa Editorial Magisterio.

Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9)*.

Villa, A., & Ruiz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad católica del norte*, (27)

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

**Anexo No 1. Trabajo realizado en aula**



[Fotografía de Daniel Hernández]. [Bogotá D.C. 2017] Archivos fotograficos

de práctica pedagógica. Col. GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO.

### **Anexo No 2. Ejemplo Respuesta Estudiantes: vía correo electrónico**

**Presentado por:** Daniel Felipe Mejía Rodríguez del curso 901.

#### **Ejercicios Matemáticos**

1. Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 500 euros diarios menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el primero solo 24. Si el primero ha ganado 33.000 Euros más que el segundo. Calcula el salario diario de cada obrero.



$$y - x = 500$$

$$30x - 24y = 33.000$$

*Se realiza por el metodo de sustitucion.*

$$Y = x + 500$$

*Sustituimos:*

$$30x - 24(x + 500) = 33.000$$

$$30x - 24x - 12.000 = 33.000$$

$$30x - 24x = 33.000 + 12.000$$

$$6x = 45.000$$

$$x = \frac{45.000}{6}$$

$$x = 7500$$

*Comprobacion*

$$y - 7.500 = 500$$

$$y = 8.000$$

$X = 7.500 \times 8 = 600.000$  Es el salario del obrero x.

$Y = 8.000 \times 8 = 640.000$  Es el salario del obrero

## TALLER DE MATEMATICAS

**ALUMNO: SANTIAO TORRES ROMERO**

**CURSO:901**

- 1. (4) Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 500 euros diarios menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el primero ha ganado 33.000 euros, más que el segundo ¿calcula el salario diario de cada obrero?**



**SOLUCION**

$$Y - X = 500$$

$$30X - 24Y = 33.000$$

$$Y = 500 + X$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$30X - 24(500 + X) = 33.000$$

$$30X - 1200 - 24X = 33.000$$

$$6X = 33.000 + 1200$$

$$X = \frac{34.200}{6} = 5700$$

$$Y = 500 + 5700 = 6200$$

Sebastián Benitez Rodríguez

901 Trabajo algebra Gimnasio moderno san francisco El tintal

Cuarto ejercicio

Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 500 euros diarias menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el primero solo 24. Si el primero ha ganado 33.000 euros más que el segundo.

Calcula el salario diario de cada obrero.



Solución

$$y - x = 500$$

$$30x - 24y = 33000$$

$$y = 500 + x$$

$$30x - 24(500 + x) = 33000$$

$$30x - 1200 - 24x = 33000$$

$$6x = 33000 + 1200$$

$$6x = 34200$$

$$x = \frac{34200}{6}$$

$$x = 5700$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

Reemplazo

$$y - 5700 = 500$$

$$y = 500 + 5700$$

$$y = 6200$$

Comprobación

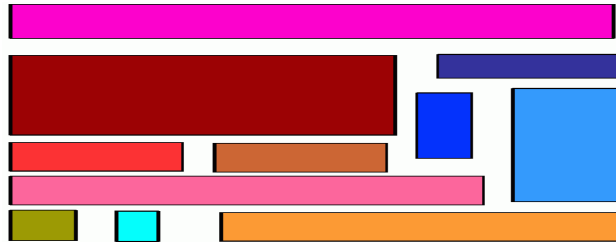
$$6200 - 5700 = 500$$

$$30(5700) - 24(6200) = 33000$$

$$171000 - 148800 = 33000$$

Quinto ejercicio

El perímetro de un rectángulo mide 36 m. Si se aumenta en 2 m su base y se disminuye en 3 m su altura el área ni cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.



Solución

$$xy = xy - 3x + 2y - 6$$

$$3x - 2y = -6$$

$$2x + 2y = 36$$

$$5x = 30$$

$$2(6) + 2y = 36$$

$$2y = 36 - 12$$

$$2y = 24$$

$$y = 12$$

$$2y + 2x = 36$$

$$2(12) + 2x = 36$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$x \cdot y = (x + 2)(y - 3)$$

$$6 \cdot 12 = (8)(9)$$

$$72 = 72$$

Sexto ejercicio

En un pueblo, hace muchos años, se utilizaban, como unidades de peso, la libra y la onza. Recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes: “pensando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495 gramos “y”...resultando 2 libras y 8 onzas, cuando el extranjero pregunto por el peso en gramos le contestaron 1150 gramos. ¿Sabrías calcular el valor, en gramos, la libra y la onza?



Solución

$$3x + 4y = 1495(-2)$$

$$2x + 8y = 1150$$

$$-6x - 8y = -2990$$

$$2x + 8y = 1150$$

$$-4x = -1840$$

$$x = \frac{-1840}{-4}$$

$$x = 460$$

$$-6(460) - 8y = -2990$$

$$-2760 - 8y = -2990$$

$$-8y = -2990 + 2760$$

$$-8y = -230$$

$$y = \frac{-230}{-8}$$

$$y = 28,75$$

Verificación

$$-2760 - 230 = -29$$

**Preguntas de algebra      De: Nohary Soleil Cortés Moreno**

**Curso: 902**

**Materia: Algebra**

**2017-09-16**

**1. En una granja de crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134.**

¿Cuántos                    animales                    hay                    de                    cada                    clase?



© Can Stock Photo - csp8390756

**SOLUCIÓN:**

$$x + y = 50$$

$$(x)4 + (y)2 = 134$$

$$(x)4 + (50 + x)2 = 184$$

$$4x + 100x = 184$$

$$104x = 184$$

$$104x = \frac{184}{104}$$

$$x = 17$$

**COMPROBACIÓN:**

$$17 + y = 50$$

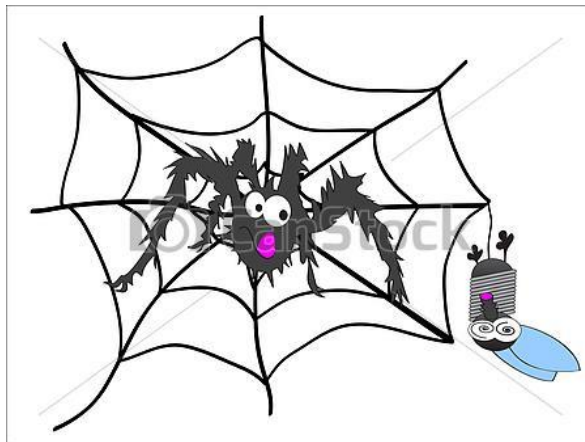
$$y = 50 - 17$$

$$y = 33$$

Se puede concluir que en la granja hay 33 gallinas y 17 conejos.

**2. En una lucha de moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas.**

¿Cuántos luchadores había de cada clase? ( recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña tiene 8 patas)



© Can Stock Photo - csp6196492

**SOLUCIÓN:**

$$x + y = 42$$

$$(x)6 + (y)8 = 276$$

$$6x + 8(-x + 42) = 276$$

$$26x - 8x + 336 = 276$$

$$6x = -336 + 276$$

$$-6x = -50$$

$$6x = 50$$

$$x = \frac{50}{6}$$

$$x = 25$$

**COMPROBACIÓN:**

$$25 + y = 42$$

$$y = 42 - 25$$

$$y = 17$$

Se puede deducir que hay 17 arañas y 25 moscas.

**5.** El perímetro de un rectángulo mide 36 m. Si se aumenta en 2m su base y se disminuye en 3m su altura el área no cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.



SOLUCIÓN:

$$(\gamma + 2) + (\chi - 3) + (\gamma + 2) + (\chi - 3) = 36$$

$$2\gamma + 4 + 2\chi - 6 = 36$$

$$2\gamma + 2\chi = 36 - 4 + 6$$

$$2\gamma + 2\chi = 38$$

LAS DOS ECUACIONES SERÍAN:

$$2\chi + 2\gamma = 38$$

$$\chi\gamma + 2\chi - 3\gamma = 36$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:

$$2\chi = -2\gamma + 38$$

$$\chi = \frac{-2\gamma}{2} + \frac{38}{2}$$

$$\chi = -\gamma + 19$$

SE HACE LA SUSTITUCIÓN:

$$\gamma(-\gamma + 19) + 2(-\gamma + 19) - 3\gamma = 86$$

RESUELVO:

$$-\gamma^2 + 19\gamma - 2\gamma + 38 - 3\gamma = 86$$

$$-\gamma^2 + 14\gamma = 48(-1)$$

$$\gamma^2 - 14\gamma = -48$$

$$\gamma^2 - 14\gamma + 48 = 0$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$(\gamma - 6)(\gamma - 8) = 0$$

$$\gamma - 6 = 0$$

$$\gamma = 6$$

$$\gamma - 8 = 0$$

$$\gamma = 8$$

COMPROBACIÓN:

$$2\chi + 2(6) = 38$$

$$2\chi + 12 = 38$$

$$2\chi = 38 - 12$$

$$2\chi = 26$$

$$\chi = 13$$



$$8 + 8 + 10 + 10 = 36$$

$$X-3$$

$$10 \cdot 8 = 80$$

#### EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

##### RESOLUCIÓN Y PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES.

ALEJANDRA CHAVEZ 902

4) Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa el primero gana 500 euros diarios menos que el segundo, pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el segundo solo 24. Si el primero ha ganado 33.000 más que el segundo, calcule el salario diario de cada obrero.



$$x - y = 500$$

$$x = y + 5000$$

$$30x - 24y = 33.000$$

Reemplazo

$$30(Y + 500) - 24Y = 33.000$$

$$30Y + 15000 - 24Y = 33.000$$

$$30Y - 24Y + 15000 = 33.000$$

$$6Y + 15000 = 33.000$$

$$6Y = 33.000 - 15000$$

$$Y = 18000/6$$

$$Y = 3000$$

$$X - 3000 = 500$$

$$X = 500 + 3000$$

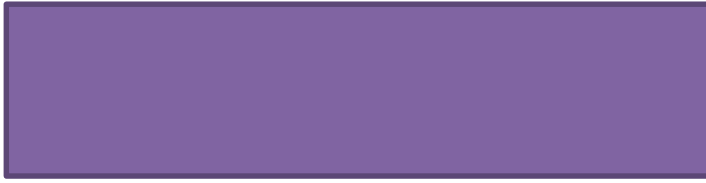
$$X = 3500$$

El salario diario del obrero 1 es 3500 euros y el salario diario del obrero 2 es 3000 euros.

5) el perímetro de un rectángulo mide 36 m, si se aumenta en 2m su base y se disminuye en 3m su altura el área no cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.

b

a



$$2b + 2a = 36$$

$$2b = 36 - 2a$$

$$b = (36 - 2a)/2$$

$$b = 18 - a$$

$$ba = -3b + 2a - 6$$

$$3b - 2a = -6$$

$$3(18 - a) - 2a = -6$$

$$54 - 3a - 2a = -6$$

$$54 - 5a = -6$$

$$54 + 6 = 5a$$

$$60 = 5a$$

$$\frac{60}{5} = a$$

$$a = 12$$

Comprobación problema

$$(8)(9) = 72$$

$$12 + 12 + 6 + 6 = 36$$

LA ALTURA DEL RECTÁNGULO ES 12m Y SU BASE MIDE 6m

6) En un pueblo hace muchos años, se utilizaba como unidades de medida de peso; la libra y la onza. Recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes.

...pesando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495 g resultando 2 libras y 8 onzas...

Cuando el extranjero le pregunto por su peso en gramos le contestaron 1150g  
¿SABRIAS CALCULAR EL VALOR EN GRAMOS DE LA LIBRA Y LA ONZA?



$$(-2) \quad 3x + 4y = 1495$$

$$2x + 8y = 1150$$

La libra tiene un valor de 460g y la onza un valor de 28.75g

$$-6x - 8y = -1495$$

$$2x + 8y = 1150$$

$$(-1) \quad -4x = -1840$$

$$4x = 1840$$

$$x = 1840/4$$

$$x = 460$$

$$1380 + 4y = 1495$$

$$4y = 1495 - 1380$$

$$y = \frac{115}{4}$$

$$y = 28.75$$

$$1380 + 115 = 1495$$

**GIMNASIO MODERNO SAN FRANCISCO EL TINTAL**

**LAURA SOFIA CELEDON ROBLES**

3. En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros  
¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**



$$X + Y = 120$$

$$2X + 5Y = 300$$

$$X = 120 - y$$

$$2 (120 - y) + 5y = 300$$

$$3y + 240 = 300$$

$$3y = 60$$

$$y = 20$$

4. Dos obreros trabajadores 8 horas diarias en la misma empresa el primero gana 500 euros diarios menos que el segundo, pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el segundo solo 24. Si el primero ha ganado 33.000 euros más que el segundo calcule el salario diario de cada obrero.



$$Y + X = 42$$

$$30X - 24Y = 33.000$$

$$Y = 500 + X$$

$$30X - 24 (500 + X) = 33.000$$

$$30X - 1200 - 24X = 33.000$$

$$6X - 1200 = 33.000$$

$$6X = 33.000 + 1200$$

$$6X = 34.200$$

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

$$X = \frac{34.200}{6}$$

$$X = 5.700 \text{ euros}$$

$$Y = 500 + 5.700 = 6.200 \text{ euros}$$

5. El perímetro de un rectángulo mide 36 metros si se aumenta en 2 metros su base y se disminuye en 3 metros su altura el área no cambia. Calcula las dimensiones del rectángulo.

$$X + Y = 8$$

$$2X + 2Y = 36$$

$$X + Y = 8$$

$$Y = -X + 8$$

$$2X + 2(-X + 8) = 36$$

$$2X - 2X + 16 = 36$$

$$-2X = -16 + 36$$

$$-2X = 20$$

$$2X = -20$$

$$X = \frac{-20}{2}$$

$$X = -10$$

$$10 + Y = 8$$

$$Y = 8 - 10$$

$$Y = -2$$

6. En el pueblo, hace muchos años, se utiliza, como unidades de medida de peso, la libra y la onza. Recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes: "... pesando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495 gramos..." "y" ... resultando 2 libras y 8 onzas, cuando el extranjero pregunto por el peso en gramos le contestaron 1150 gramos"... ¿sabrías calcular el valor, de la libra y la onza?



***DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO***

$$X + Y = 1150$$

$$3X + 4Y = 1495$$

$$X + Y = 1150 \quad Y = -X + 1150$$

$$3X + 4(-X + 1150) = 1495$$

$$3X - 4X + 4600 = 1495$$

$$-3X = -4600 + 1495$$

$$-3X = -3105$$

$$3X = 3105 \quad X = \frac{3105}{3} \quad X = 1035$$

$$1035 + Y = 1150 \quad Y = 1150 - 1035 \quad Y = 115$$

**Anexo No 3. Diario de Campo**

| SEMANA | TEMA                                                                                 | TALLER                                                                                                                                              | SOCIALIZACIÓN                                                                                                      | EVALUACIÓN                                                                                                               | SOCIALIZACIÓN                                                                      |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Función Lineal y Función Lineal Afín                                                 | Representación de una función lineal en el plano cartesiano utilizando su pendiente y la ecuación canónica de la recta.                             | Utilizando medios audio visuales, se revisa el trabajo de graficar una función lineal mediante su ecuación.        | Se realiza evaluación en grupo no mayores de tres alumnos                                                                | Cada grupo socializa su trabajo al resto de la clase                               |
| 2      | Grafica de Funciones Lineales                                                        | Se realiza taller virtual queriendo desarrollar en el estudiante habilidad en el manejo de geogebra                                                 | Los estudiantes presentan sus inquietudes en el manejo de geogebra.                                                |                                                                                                                          |                                                                                    |
| 3      | Semejanza de Triángulos                                                              | En clase magistral se presenta el teorema de Tales de Mileto y sus aplicaciones para triángulos semejantes                                          | Se revisan y corrigen ejercicios realizados en clase y encasa                                                      | Se realiza evaluación individual de algunos ejercicios de aplicación                                                     |                                                                                    |
| 4      | Planteamiento y resolución de problemas Mediante el método de reducción e igualación | Se plantean situaciones problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones simultaneas y se pide a los estudiante el planteamiento de estas | Los estudiantes manifiestan sus inquietudes de las dificultades y logros en el proceso de planteamiento y solución | Se convoca a los estudiantes a realizar talleres de respuesta virtual que luego son socializados en el aula por medio de | Se revisan algunos trabajos para hacer la retroalimentación del trabajo realizado. |

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL DESDE LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 X 2 PARA ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO**

|          |                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                    |                                                                                                                                               |                                                                                                 |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                           | ecuaciones, logrado el objetivo se desarrollan los métodos de solución.                                                                                                                                                     |                                                                                                                    | ayudas audiovisuales                                                                                                                          |                                                                                                 |
| <b>5</b> | Planteamiento y resolución de problemas Mediante el método de sustitución y Determinantes | Se plantean situaciones problemas que se resuelven mediante sistemas de ecuaciones simultáneas y se pide a los estudiante el planteamiento de estas ecuaciones, logrado el objetivo se desarrollan los métodos de solución. | Los estudiantes manifiestan sus inquietudes de las dificultades y logros en el proceso de planteamiento y solución | Se convoca a los estudiantes a realizar talleres de respuesta virtual que luego son socializados en el aula por medio de ayudas audiovisuales | Se revisan algunos trabajos para hacer la retroalimentación del trabajo realizado.              |
| <b>6</b> |                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                             | Aclaración de inquietudes en procedimientos y manejo de gráficas método virtual.                                   | Evaluación institucional de fin de periodo.                                                                                                   | Recuperaciones de metas no alcanzadas durante el trabajo, con ejercicios monitoreados en clase. |