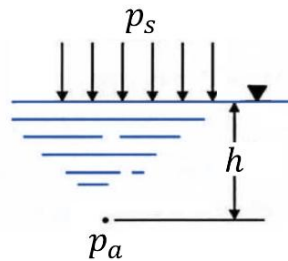


EMPUJE HIDROSTÁTICO SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA

I.1. INTRODUCCIÓN

La presión hidrostática ejercida por un líquido de densidad ρ o peso específico γ a una profundidad h bajo la superficie libre es:

$$p = \rho gh = \gamma h \quad (1)$$



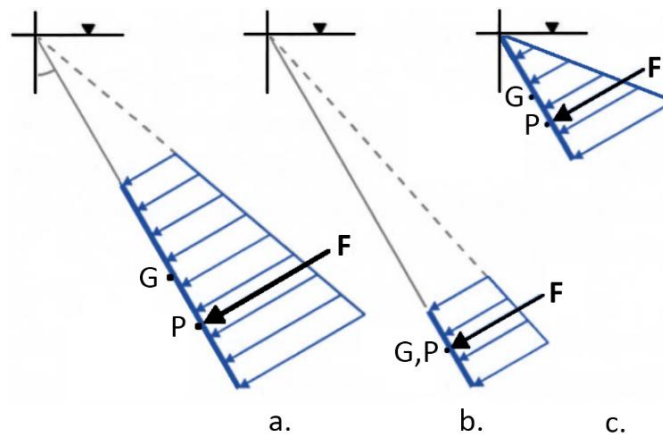
Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 1 Presión hidrostática a una profundidad h

Esta presión es la debida únicamente a la altura de la columna de fluido h . Para obtener la presión absoluta p_a a la profundidad h , se debe añadir cualquier presión p_s que se esté aplicando en la superficie del fluido teniendo:

$$p_a = p_s + p \quad (2)$$

$$\text{O } p_a = p_s + \gamma h$$



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 2 Empuje Hidrostático sobre superficies planas

La presión hidrostática genera empujes sobre cualquier superficie que actúe. La Fig. 2(a) indica la distribución de la presión medida sobre una superficie plana en el líquido. La presión actúa normal a la superficie incrementándose linealmente con la profundidad bajo la superficie del agua. El resultado de la fuerza de presión es una fuerza única F , la cual por supuesto es normal también a la superficie. Si la presión fuera uniforme, F debería actuar a través del centro de gravedad G de la superficie plana. Sin embargo, como la presión se incrementa con la profundidad, la línea de acción de F es a través de algún punto más bajo P llamado centro de presión (MARKLAND, 1994). Si la extensión de la superficie plana es pequeña comparada con su profundidad como se muestra en la Fig 2(b), la presión hidrostática es casi constante sobre ella, por lo que el centro de presión se encuentra casi en el centro de gravedad. Sin embargo, si el borde superior del área del plano se encuentra en la superficie del agua, la distribución de presión es triangular, cómo se muestra en la Fig. 2(c) y P se encontrará a una distancia significativa bajo G .

La fuerza hidrostática en una superficie sumergida tal como la cara de una presa o sobre una compuerta de esclusa puede ser muy grande, siendo necesario calcular tal fuerza con certeza.

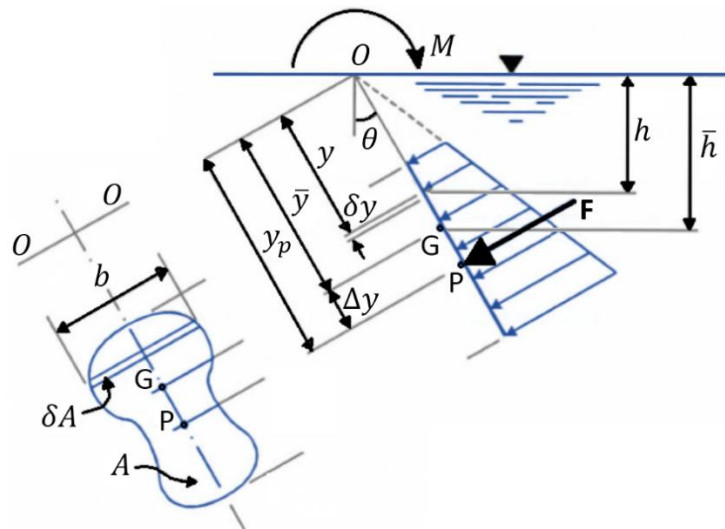
Determinación analítica de la posición del centro de presión

Considérese una superficie plana A inclinada un ángulo θ con la vertical, como se muestra en la vista frontal y lateral de la Fig. 3. Por simplicidad, la superficie se toma simétrica en la vista frontal. El área δA del elemento mostrado a la profundidad h , es

$$\delta A = b\delta y$$

Donde b es su ancho y δy su longitud medida bajo la pendiente. La presión hidrostática sobre el elemento es:

$$p = \gamma h$$



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"
Fig. 3 Determinación de la posición del centro de presión

Y la fuerza hidrostática del elemento δF es:

$$\delta F = p \cdot \delta A = \gamma \cdot h \cdot \delta A$$

La fuerza resultante F se obtiene integrando sobre la totalidad del área A :

$$F = \gamma \int h \cdot \delta A$$

La profundidad \bar{h} del centro de gravedad G está dada por definición por:

$$\bar{h} \cdot A = \int h \cdot \delta A$$

De las anteriores dos ecuaciones se tiene que:

$$F = \gamma \cdot \bar{h} \cdot A$$

Tomando \bar{p} como la presión hidrostática en el centro de gravedad:

$$\bar{p} = \gamma \cdot \bar{h}$$

Y la fuerza F se puede escribir como:

$$F = \bar{p} \cdot A \quad (4)$$

La magnitud de F es por consiguiente simplemente el producto de la presión hidrostática en el centro de gravedad y el área de la superficie. Para obtener la posición de F , se toman momentos sobre el eje a través de O , tendido sobre la superficie del agua (MARKLAND, 1994).

El elemento de momento δM sobre O producido por el elemento de fuerza δF es:

$$\delta M = y \cdot \delta F$$

Sustituyendo δF

$$\delta M = \gamma \cdot h \cdot y \cdot \delta A$$

Escribiendo h en términos de y de la relación trigonométrica $y = h \cdot \sec \theta$,

$$\delta M = \gamma \cdot y^2 \cdot \sec \theta \cdot \delta A$$

Integrando sobre la superficie el momento resultante es

$$M = \gamma \cdot \sec \theta \int y^2 \cdot \delta A$$

El segundo momento del área de A sobre el eje en O es por definición,

$$I_o = \int y^2 \cdot \delta A$$

Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$M = \gamma \cdot \sec \theta \cdot I_o \quad (5)$$

Este momento se puede expresar también cómo

$$M = F \cdot y_p$$

Donde y_p es la profundidad medida bajo la pendiente del centro de presión P bajo la superficie del agua.

$$F = \gamma \cdot \bar{h} \cdot A = \gamma \cdot \bar{h} \cdot \sec \theta \cdot A$$

$$y_p = I_o / A \cdot \bar{y} \quad (6)$$

Este resultado se puede simplificar haciendo uso del teorema de los ejes paralelos el cual, relaciona el segundo momento del área I_o respecto al eje O con el segundo momento I_g respecto al eje paralelo a través de G por:

$$I_o = Ay^2 + I_g = Ay^2 + Ak_g^2 \quad (7)$$

I_o = segundo momento del área sobre el eje en O

I_g = segundo momento del área sobre el eje en G

k_g = radio de giro de A sobre el eje en G

$$y_p = \bar{y} + k_g^2 / \bar{y} \quad (8)$$

La distancia oblicua $\Delta y = y_p - \bar{y}$ entre P y G es

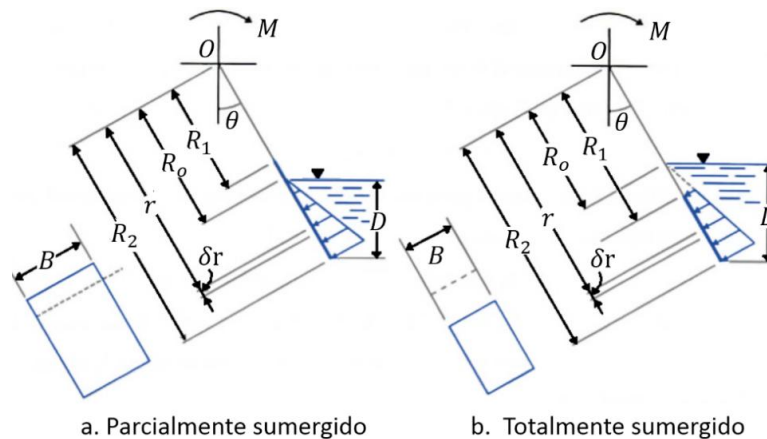
$$\Delta y = k_g^2 / \bar{y} \quad (9)$$

En resumen, la fuerza resultante F es $\bar{p} \cdot A$ el producto de la presión hidrostática \bar{p} en el centro de gravedad G y el área A de la superficie. Esta

fuerza actúa en el centro de presión P el cual se encuentra a la distancia oblicua Δy bajo G dada por $\Delta y = k_g^2 / \bar{y}$.

En el experimento descrito a continuación una superficie plana es sometida a presión hidrostática, la medición del momento resultante se realiza alrededor de un eje fijo sobre la superficie del agua. Este momento es comparado con un valor derivado del análisis similar al presentado anteriormente.

Determinación analítica del momento con respecto a un eje sobre la superficie del agua



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 4 Determinación del momento alrededor de un eje sobre la superficie del agua

Considérese una placa rectangular inclinada un ángulo θ con la vertical, la cual está sujeta a la acción del incremento de la profundidad de agua. La figura anterior muestra el caso en que la placa está parcialmente sumergida (a) y completamente sumergida bajo el nivel de la superficie del agua (b). Se

derivarán las expresiones para el momento producido alrededor de un eje fijo O sobre la superficie del agua.

Siendo D la profundidad del agua sobre el lado más bajo del rectángulo, R_1 es la distancia oblicua desde el eje O al lado más alto y R_2 la distancia oblicua al lado más bajo, R_o es la distancia oblicua a la superficie del agua (MARKLAND, 1994). Para encontrar el momento alrededor del eje en O se considera primero el momento producido por la acción de la presión hidrostática sobre un elemento extendido en la distancia oblicua r desde el eje y de la longitud oblicua δr . El ancho de la placa rectangular es B , así que el área del elemento δA es:

$$\delta A = b \delta r$$

La profundidad del elemento bajo la superficie del agua es $(r - R_o) \cdot \cos \vartheta$, la presión hidrostática en el punto es

$$p = \gamma \cdot (r - R_o) \cdot \cos \theta$$

La fuerza hidrostática δF sobre el elemento es

$$\delta F = p \cdot \delta A = \gamma \cdot B \cdot (r - R_o) \cdot \cos \theta \cdot \delta r$$

Esta fuerza actúa a un radio r del eje O , por tanto el momento producido alrededor de O es

$$\delta M = \gamma \cdot B \cdot r \cdot (r - R_o) \cdot \cos \theta \cdot \delta r$$

El momento total M obtenido de la integración sobre el área sumergida es

$$M = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \int r \cdot (r - R_o) \cdot \delta r \quad (10)$$

Los límites de integración para cada una de las figuras mostradas anteriormente son diferentes. En el caso de la figura (a) cuando la superficie rectangular está parcialmente sumergida

$$R_o > R_1 \text{ y } M = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \int_{R_o}^{R_2} r \cdot (r - R_o) \cdot \delta r = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \int_{R_o}^{R_2} (r^2 - R_o \cdot r) \cdot \delta r$$

$$\text{Lo cual conduce a } M = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \left[r^3/3 - R_o \cdot r^2/2 \right]_{R_o}^{R_2}$$

$$\text{o } M = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \left\{ (R_2^3 - R_o^3)/3 - R_o \cdot (R_2^2 - R_o^2)/2 \right\} \quad (11)$$

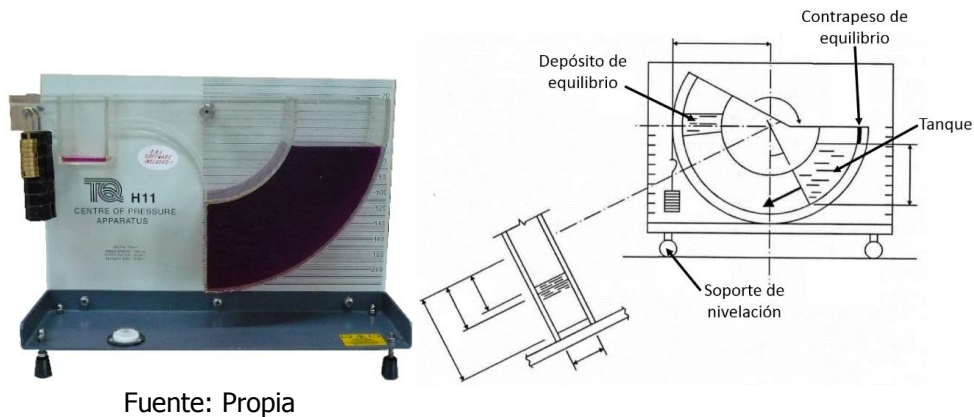
Para el caso donde todo el rectángulo está sumergido, como se muestra en la figura (b),

$$R_o < R_1 \text{ y } M = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \int_{R_1}^{R_2} r \cdot (r - R_o) \cdot \delta r = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \int_{R_1}^{R_2} (r^2 - R_o \cdot r) \cdot \delta r$$

$$\text{o } M = \gamma \cdot B \cdot \cos \theta \left\{ (R_2^3 - R_1^3)/3 - R_o \cdot (R_2^2 - R_1^2)/2 \right\} \quad (12)$$

Haciendo uso del aparato descrito a continuación el momento ejercido alrededor de un eje sobre la superficie puede ser medido directamente en comparación con estas expresiones analíticas.

I.2. Descripción del montaje y procedimiento experimental



Fuente: Propia

Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 5 Diagrama del aparato experimental para medir el momento hidrostático

La figura anterior representa el equipo de laboratorio con agua contenida a una profundidad D en un tanque de cuadrante. Este tanque está confinado entre dos láminas de plástico planas transparentes y dos laminas las cuales están curvadas en arcos concéntricos centrados en el punto O . Todo el ensamblaje puede pivotar a lo largo de una superficie horizontal plana. En el diagrama la lámina plana del tanque de cuadrante se inclina un ángulo ϑ respecto a la vertical, bajo la acción combinada del momento M sobre O de la presión del agua en la lámina plana y el momento WR_w producido por el peso W aplicado.

Iniciando con el tanque de cuadrante vacío y sin peso se nivela cuidadosamente la base. Luego el ensamblaje es llevado a la posición deseada con la placa en un ángulo ϑ colocando cuidadosamente agua dentro del tanque de ajuste. Puede ser necesario remover el contrapeso para alcanzar el ángulo deseado. El soporte de peso es ahora colgado de una cuerda en suspensión causando que el ensamblaje gire hacia la izquierda. Entonces se agrega agua en

el tanque de cuadrante hasta que se restaure el ángulo correcto. La profundidad de agua correspondiente D , medida por encima del borde inferior de la placa, se lee en la escala en la parte trasera del tanque, el paralelaje es evitado observando a lo largo de la superficie del agua. Luego se van añadiendo pesos incrementalmente en la cuerda de pesos y la profundidad D se va registrando en cada incremento hasta que el tanque de cuadrante este lleno.

El experimento se repite para varios valores de ángulo de inclinación.

I.3.Resultados y Cálculos

A continuación se presenta un ejemplo de los resultados y cálculos a realizar.

La tabla 1 muestra un conjunto de resultados para cuando el ángulo de inclinación es de 30 grados. La profundidad del agua medida bajo la pendiente $R_2 - R_0$ se encuentra de la profundidad D medida verticalmente, de la relación:

$$R_2 - R_0 = D \cdot \sec\theta$$

La superficie está parcialmente sumergida cuando $R_2 - R_0$ es menor de 100 mm, y está completamente sumergida cuando es mayor de 100 mm. El momento M debido al peso W es

$$M = 203 W \text{ gramf m}$$

$$M = 0.203 W \text{ kgf mm}$$

Donde W está expresado en unidades de gramf en cualquiera de estas expresiones.

Dimensiones del Aparato

Radio hasta borde inferior	R_2	$200 \text{ mm} = 0.200 \text{ m}$
Radio hasta el borde superior	R_1	$100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$
Profundidad	$R_2 - R_1$	$100 \text{ mm} = 0.100 \text{ m}$
Ancho del rectángulo	B	$75 \text{ mm} = 0.075 \text{ m}$
Radio a un colgador de peso	R_w	$203 \text{ mm} = 0.203 \text{ m}$

Tabla 1 Valores experimentales del momento M , $\vartheta = 30$ grados

W (gramf)	D (mm)	R ₂ - R ₀ (mm)	M (kgf · mm)	h = $\frac{R_2 - R_0}{R_2 - R_1}$	m = $\frac{M}{M_{ref}}$
50	34	39.3	10.1	0.393	0.265
70	42	48.5	14.2	0.485	0.301
100	51	58.9	20.3	0.589	0.354
120	56	64.9	24.4	0.647	0.387
150	63	72.7	30.4	0.727	0.430
170	68	78.5	34.5	0.785	0.451
200	74	85.4	40.6	0.854	0.488
220	78	90.1	44.7	0.901	0.509
250	83	95.8	50.7	0.958	0.544
270	87	100.5	54.8	1.005	0.560
300	93	107.4	60.9	1.074	0.582
350	102	117.8	71.0	1.178	0.619
400	111	128.2	81.2	1.282	0.650
450	120	138.6	91.3	1.386	0.677
500	129	149.0	101.5	1.490	0.699
550	138	159.3	111.6	1.593	0.719
600	147	169.7	121.8	1.697	0.737
650	156	180.1	131.9	1.801	0.752
700	166	191.7	142.1	1.917	0.761

Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Las columnas de encabezado h y m de la tabla anterior se refieren a la inclinación no dimensional de la profundidad del agua y al momento no dimensional, calculados como se presenta posteriormente.

Tabla 2 Valores teóricos del momento M, $\vartheta = 0$ y $\vartheta = 30^\circ$

$R_0 > R_1$ (Ecuación 11)			$R_0 < R_1$ (Ecuación 12)		
$R_2 - R_1$ (mm)	M (kgf · mm)		$R_2 - R_1$ (mm)	M (kgf · mm)	
	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 30^\circ$		$\theta = 0^\circ$	$\theta = 30^\circ$
0	0.0	0.0	100	62.5	54.1
10	0.7	0.6	110	73.7	63.9
20	2.9	2.5	120	85.0	73.6
30	6.4	5.6	130	96.3	83.4
40	11.2	9.7	140	107.5	93.1
50	17.2	14.9	150	118.8	102.8
60	24.3	21.0	160	130.0	112.6
70	32.5	28.1	170	141.3	122.3
80	41.6	36.0	180	152.5	132.1
90	51.6	44.7	190	163.8	141.8
100	62.5	54.1	200	175.0	151.6

Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

La tabla anterior presenta los valores teóricos de M para ambos casos de $\vartheta = 0$ y $\vartheta = 30$ grados, calculados de la siguiente forma:

Cuando $R_0 > R_1$: insertando valores numéricos la ecuación correspondiente es:

$$M = 1000 \times 0.075 \left\{ \frac{(0.200^3 - R_0^3)}{3} - R_0 \frac{(0.200^3 - R_0^2)}{2} \right\} \cos\theta \quad \text{kgf m}$$

Lo cual se reduce a:

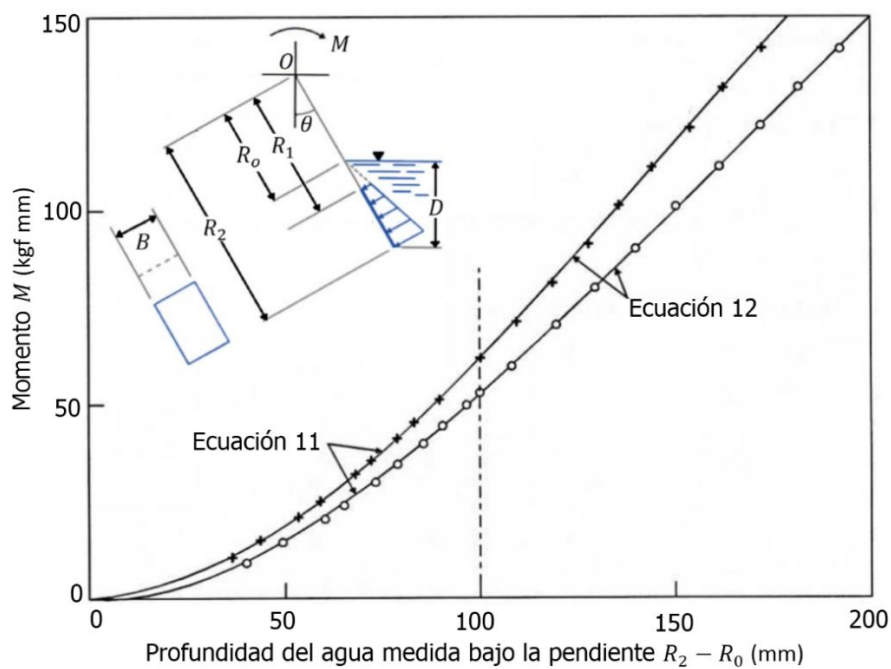
$$M = (200 - 1.5R_0 + 1.25 \times 10^{-5}R_0^3) \cos\theta \quad \text{kgf m}$$

Donde R_0 es expresado en mm.

Cuando $R_o < R_1$: insertando valores numéricos en la ecuación correspondiente una reducción similar conduce al resultado:

$$M = (175 - 1.125R_o)\cos\theta \quad \text{kgf m}$$

Donde R_o es expresado de nuevo en mm.



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 6 Variación del momento con profundidad inclinada de agua

Las comparaciones entre los resultados experimentales y los valores calculados son presentadas en la figura anterior.

Determinación analítica del momento adimensional

Los resultados pueden ser también expresados de forma adimensional haciendo uso del valor del momento de referencia M_{ref} para el cual los valores de M son relacionados.

Puesto que M surge del producto de las tres cantidades: presión hidrostática, área, y brazo del momento, se buscan expresiones de valores de referencia para cada una de ellas, de las cuales el momento de referencia M_{ref} se derivará. Una presión de referencia conveniente es la presión hidrostática en el borde más bajo del rectángulo, esto es:

$$P_{ref} = \gamma \cdot D = \gamma \cdot (R_2 - R_0) \cdot \cos\theta$$

Una elección para el área de referencia es la del rectángulo:

$$A_{ref} = B \cdot (R_2 - R_0)$$

Para el brazo del momento de referencia se elige el radio a la altura media del rectángulo,

$$R_{ref} = (R_2 + R_1)/2$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores se tiene el momento de referencia como:

$$M_{ref} = \gamma \cdot B \cdot \cos\theta \cdot (R_2^2 - R_1^2)(R_2 + R_0)/2 \quad (13)$$

Nombrando m como la relación entre M y M_{ref} , la expresión analítica para M se puede hacer adimensional dividiéndola por M_{ref} , obteniendo para la sumersión parcial:

$$\text{Cuando } R_o > R_1 \quad m = \frac{M}{M_{ref}} = \frac{\frac{2}{3}(R_2^2 - R_0^3) - R_0 \cdot (R_2^2 - R_0^2)}{(R_2^2 - R_1^2) \cdot (R_2 - R_0)}$$

Similarmente para la sumersión total se tiene:

$$\text{Cuando } R_o < R_1 \quad m = \frac{M}{M_{ref}} = \frac{\frac{2}{3}(R_2^2 - R_1^3) - R_0 \cdot (R_2^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2) \cdot (R_2 - R_0)}$$

En ambos casos m es un momento adimensional. Note que las cantidades γ , B y ϑ han desaparecida del lado derecho de estas ecuaciones; solo permanecen los radios R_o , R_1 , y R_2 . Los resultados pueden ser simplificados expresando los radios R_o y R_1 en términos del radio R_2 por las sustituciones

$$R_o = r_o \cdot R_2 \quad y \quad R_1 = r_1 \cdot R_2$$

Donde se pueden considerar r_o y r_1 como radios adimensionales. Los resultados finales adimensionales son:

Para sumersión parcial, cuando $r_o > r_1$,

$$m = \frac{\frac{2}{3}(1 - r_o^3) - r_o \cdot (1 - r_o^2)}{(1 - r_1^2) \cdot (1 - R_o)} \quad (14)$$

Para sumersión total, cuando $r_o < r_1$,

$$m = \frac{\frac{2}{3}(1 - r_1^3) - r_0 \cdot (1 - r_1^2)}{(1 - r_1^2) \cdot (1 - R_0)} \quad (15)$$

La correspondiente profundidad oblicua adimensional, expresada en términos de la altura oblicua del rectángulo es

$$h = \frac{1 - r_0}{1 - r_1} \quad (16)$$

Note que $h < 1$ representa la sumersión parcial y $h > 1$ representa sumersión total.

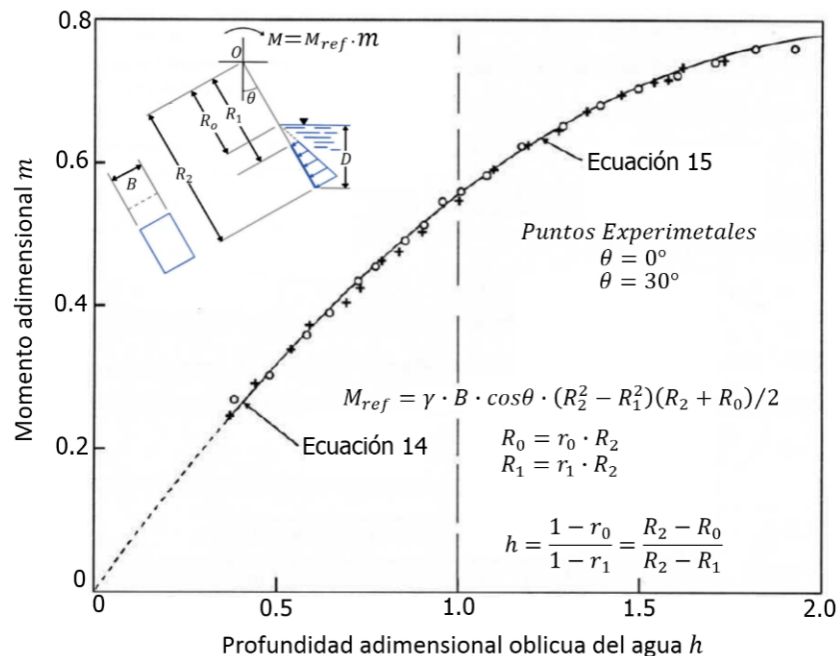
Los valores teóricos de m pueden ser calculados fácilmente de las ecuaciones anteriores para cualquier valor deseado de r_0 , y los valores correspondientes de h también pueden ser encontrados. La siguiente tabla presenta los valores calculados para h en el rango de 0 a 2. Similarmente los valores experimentales de m y h pueden ser calculados de los valores experimentales del momento m y la profundidad oblicua $R_2 - R_0$.

Tabla 3 Valores teóricos del momento adimensional m , $r_1 = 0.5$

$r_0 > r_1$			$r_0 < r_1$		
r_0	h	m	r_0	h	m
1.0	0.0	0.000	0.5	1.0	0.556
0.9	0.2	0.129	0.4	1.2	0.630
0.8	0.4	0.249	0.3	1.4	0.683
0.7	0.6	0.360	0.2	1.6	0.722
0.6	0.8	0.462	0.1	1.8	0.753
0.5	1.0	0.556	0.0	2.0	0.778

Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

La siguiente gráfica compara los resultados medidos con las curvas teóricas dibujadas de los valores de la tabla anterior.



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 7 Variación del momento adimensional con la profundidad adimensional oblicua del agua

I.4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

1. Con los datos obtenidos experimentalmente desarrollar la práctica tal como se presenta en los apartados anteriores.
2. Comparar los resultados con los obtenidos analíticamente. Calcular el error obtenido y mostrarlo gráficamente. Analizar los resultados que se tienen tanto experimental como analíticamente.
3. ¿Qué sugerencia hace para mejorar el montaje experimental?

4. En el experimento el aparato pivota de su posición de equilibrio a ϑ en el valor deseado a lo largo de una superficie plana y horizontal. Este centro instantáneo de movimiento es el punto de contacto del aparato con la superficie. Sin embargo, para establecer el momento hidrostático ejercido por la presión del agua en el extremo rectangular del tanque de cuadrante, se toman momentos alrededor del centro O más que del centro instantáneo. ¿Qué justificación ve para esto? ¿Por qué debe ser cero el momento resultante alrededor de O, cuando el aparato no rota alrededor de este punto O? ¿Cómo podría escribir la ecuación de momentos alrededor de un centro instantáneo?

I.5. BIBLIOGRAFÍA

MARKLAND, E. (1994) "A first course in Hydraulics", Published by TecQuipment Limited, 1994. Recuperado de: <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&uact=8&ved=0CC0QFjAC&url=http%3A%2F%2Ffacultad.bayamon.inter.edu%2Fomez%2F3110%2FAnnex-Lab2.docx&ei=x0zKVKbCNpfIsASVhoKYCQ&usg=AFQjCNHxOsagSNkDxkke16-K5aNtHikoew&bvm=bv.84607526,d.cWc>. Fecha de recuperación: 1 de agosto de 2014.

Medina H., Mecánica de fluidos, capítulo 4. Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Recuperado de: http://biblioteca.pucp.edu.pe/docs/elibros_pucp/medina_hugo/Medina_Fisica2_Cap4.pdf. Fecha de recuperación: 20 de agosto de 2014.