

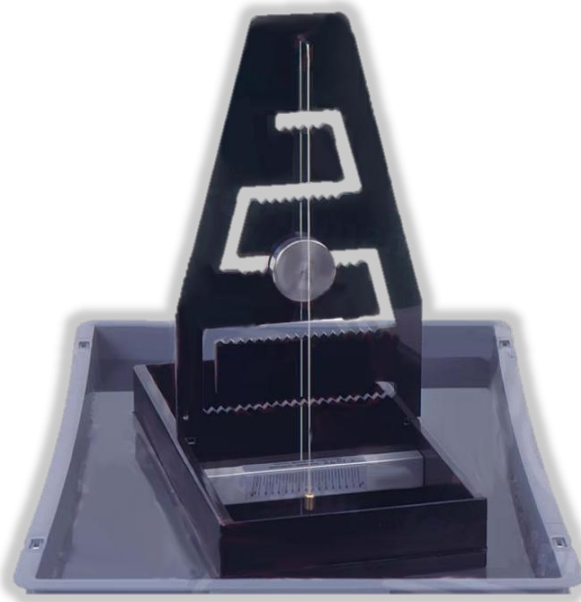
ESTABILIDAD DE UN CUERPO FLOTANTE

I.1. OBJETIVO

Determinar la estabilidad de un pontón haciendo variar su centro de gravedad a diferentes alturas y comparar los datos obtenidos experimentalmente con los resultados teóricos.

I.2. EQUIPO

TecQuipment H2 Stability of a Floating Body Apparatus.



Fuente: http://www.tecquipment.com/Datasheets/H2_1110.pdf

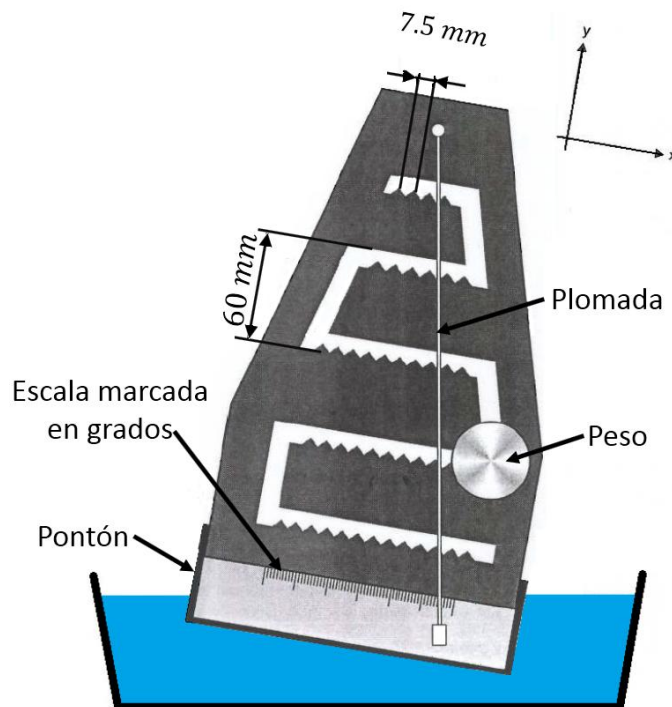
Fig. 1 Aparato para determinar la estabilidad de un cuerpo flotante

Otros elementos

Termómetro

I.3. DESCRIPCIÓN DEL APARATO

El montaje experimental es mostrado en la Fig. 2. Un pontón de forma rectangular flota en el agua llevando una vela plástica con cinco filas con ranuras en V a alturas equidistantes en la vela. Los centros de las ranuras están espaciados a intervalos de 7.5 mm igualmente dispuestos acerca de la línea central de la vela. Además, se tiene un peso ajustable consistente en dos cilindros torneados los cuales pueden ser atornillados juntos ajustándose en las ranuras en V de la vela: esto puede ser utilizado para cambiar la altura del centro de gravedad y el ángulo de escorado del pontón. Una plomada se suspende del centro superior de la vela y es utilizada conjuntamente con la escala ajustada bajo la base de la vela para medir el ángulo de escorado (Markland, 1994, p3).



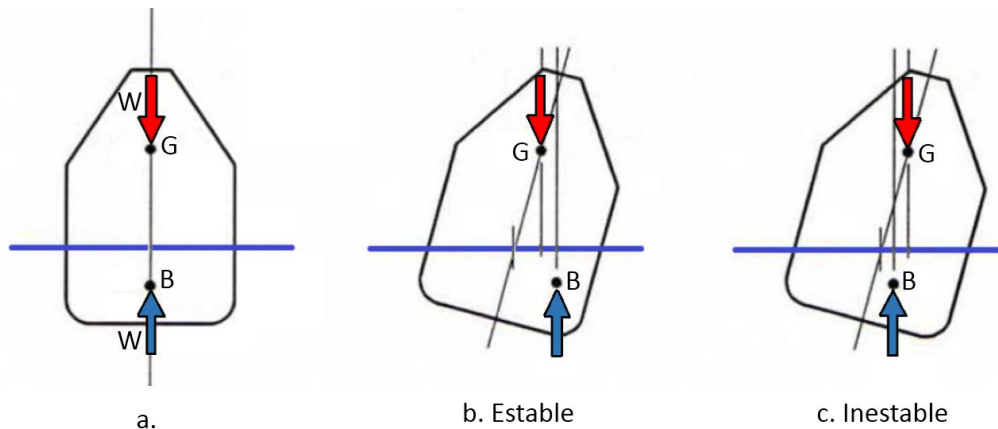
Adaptado de: <http://bc.inter.edu/facultad/omeza/3110/Laboratory%203-Anexo.pdf>

Fig. 2 Disposición del pontón flotante

I.4. MARCO TEÓRICO

Cuando se diseña un barco (el cual flota en el agua) es necesario establecer de antemano que flotará verticalmente en equilibrio estable.

La siguiente figura representa un cuerpo flotando el cual está en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas iguales y opuestas, a saber, su peso W actuando verticalmente hacia abajo a través de su centro de gravedad G , y la fuerza de flotabilidad, de igual magnitud W , actuando verticalmente hacia arriba en el centro de flotabilidad B . Este centro de flotabilidad está localizado en el centro de gravedad del fluido desplazado por el barco. Cuando se encuentra en equilibrio, los puntos B y G se encuentran en la misma línea vertical (Markland, 1994, p4).



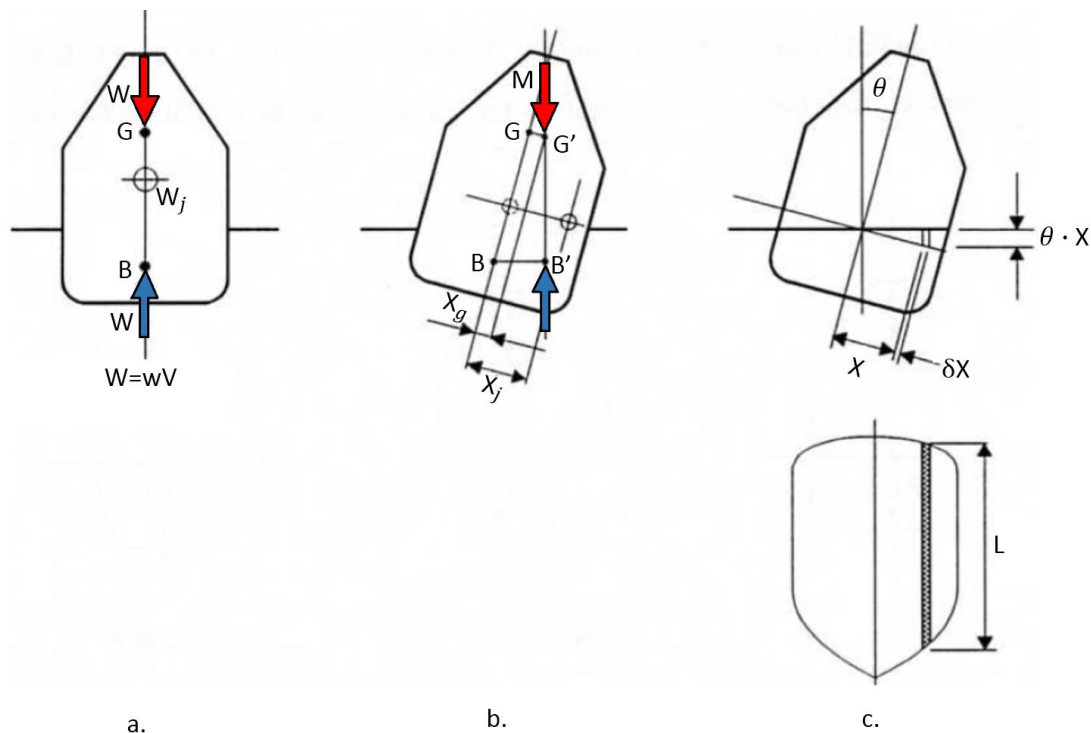
Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"
Fig. 3 Fuerzas actuando sobre un cuerpo flotante

A primera vista, puede parecer que la condición para equilibrio estable sería que G debiera encontrarse debajo de B . Sin embargo esto no es así. Para establecer la condición verdadera de estabilidad, considérese un pequeño desplazamiento angular desde la posición de equilibrio, tal como se presenta en las figuras (b) y (C) anteriores. Mientras el barco se inclina, el centro de flotabilidad se mueve hacia los lados permaneciendo siempre en el centro de gravedad del

líquido desplazado. Si, como se muestra en la figura (b), el peso y la fuerza de flotación producen un par el cual actúa para restaurar el barco a su posición inicial, el equilibrio es estable. Sin embargo, si el par actúa para mover el barco aún más de su posición inicial, como en la figura (c) entonces el equilibrio es inestable. El caso especial cuando el par resultante es cero representa la condición de estabilidad neutra. Como se aprecia en la figura (b) anterior es perfectamente posible obtener equilibrio estable cuando el centro de gravedad G está localizado sobre el centro de flotación B (Markland, 1994, p4).

A continuación, se presenta cómo la estabilidad puede ser determinada experimentalmente, y cómo los cálculos teóricos pueden ser utilizados para predecir los resultados.

I.4.1. Determinación experimental de la estabilidad



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"
Fig. 4 Derivación de las condiciones de estabilidad

La figura anterior muestra un cuerpo de peso W flotando en quilla. El centro de gravedad G puede ser desplazado hacia los lados moviendo un peso W_j a lo ancho del cuerpo. Cuando el peso se mueve una distancia x_j , como se muestra en la figura (b) anterior, el centro de gravedad de todo el ensamblaje se mueve a G' . La distancia GG' denotada por X_g está dada por:

$$X_g = W_j \cdot X_j / W$$

El cambio del centro de gravedad causa la inclinación del cuerpo a una nueva posición de equilibrio en un ángulo θ con la vertical tal como se muestra en la figura 2(b), y un movimiento asociado del centro de flotabilidad de B a B' . El punto B' debe estar verticalmente bajo G' , puesto que el cuerpo está en equilibrio en la posición inclinada. El punto M formado por la intersección de la prolongación de la línea vertical que pasa por B' y la prolongación de la línea BG es conocido como Metacentro. (Markland, 1994, p4). Se puede considerar el movimiento del peso como la causa de que el cuerpo flotante pivote alrededor del punto M . Por consiguiente, el equilibrio es estable si el metacentro se encuentra por encima de G . Siempre que θ sea pequeño, la distancia GM está dada por:

$$GM = x_g / \theta$$

Donde θ corresponde a la medición angular. Sustituyendo x_g en la ecuación anterior se tiene:

$$GM = \frac{W_j}{W} \cdot \frac{x_j}{\theta} \quad (2)$$

La dimensión GM es llamada altura metacéntrica. En el experimento descrito a continuación, está es medida directamente de la pendiente de una gráfica de x_j vs θ , obtenida por el movimiento del peso a través de un pontón (Markland, 1994, p5).

I.4.2. Determinación analítica de BM

El cálculo de la posición del metacentro puede ser realizado como sigue.

El movimiento del centro de flotabilidad B' produce un momento de la fuerza de sustentación alrededor del centro original de flotabilidad B . Para establecer la magnitud de este momento, primero consideremos el momento ejercido por un pequeño elemento del cambio en el volumen desplazado, como se indica en la figura 2(c), (Markland, 1994, p5). El elemento de ancho δx a una distancia x de B , tiene una profundidad $\theta \cdot x$ debida a la inclinación del cuerpo. Su longitud, como se muestra en la vista en planta (c) es L . Por tanto el volumen δV del elemento es:

$$\delta V = \theta \cdot x \cdot L \cdot \delta x = \theta L x \delta x$$

Y la fuerza de sustentación δF es:

$$\delta F = w \cdot \delta V = w \theta L x \delta x$$

Donde w es el peso específico del agua. El momento alrededor de B producido por la fuerza δF es

$$\delta M = \delta F \cdot x = w \theta L x^2 \delta x$$

El momento total alrededor de B se obtiene integrando sobre la totalidad del área del cuerpo en el plano de la superficie del agua:

$$M = w \theta \int L x^2 \delta x = w \theta I \quad (3)$$

I es el segundo momento alrededor del eje de simetría del área plana de agua del cuerpo.

Este momento representa el movimiento del empuje wV de V a B' , es decir, $wV \cdot BB'$. Igualando esto a la expresión de M de la ecuación anterior:

$$wV \cdot BB' = w\theta I$$

De la geometría de la figura se tiene que:

$$BB' = \theta \cdot BM$$

Y eliminando BB' de estas dos ecuaciones se tiene que

$$BM = I/V \quad (4)$$

Para el caso particular de un cuerpo con una plataforma rectangular de ancho D y longitud L , el segundo momento I es fácilmente hallado como:

$$I = \int_{-D/2}^{D/2} Lx^2 dx = L \int_{-D/2}^{D/2} x^2 dx = L \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-D/2}^{D/2} = LD^3/12 \quad (5)$$

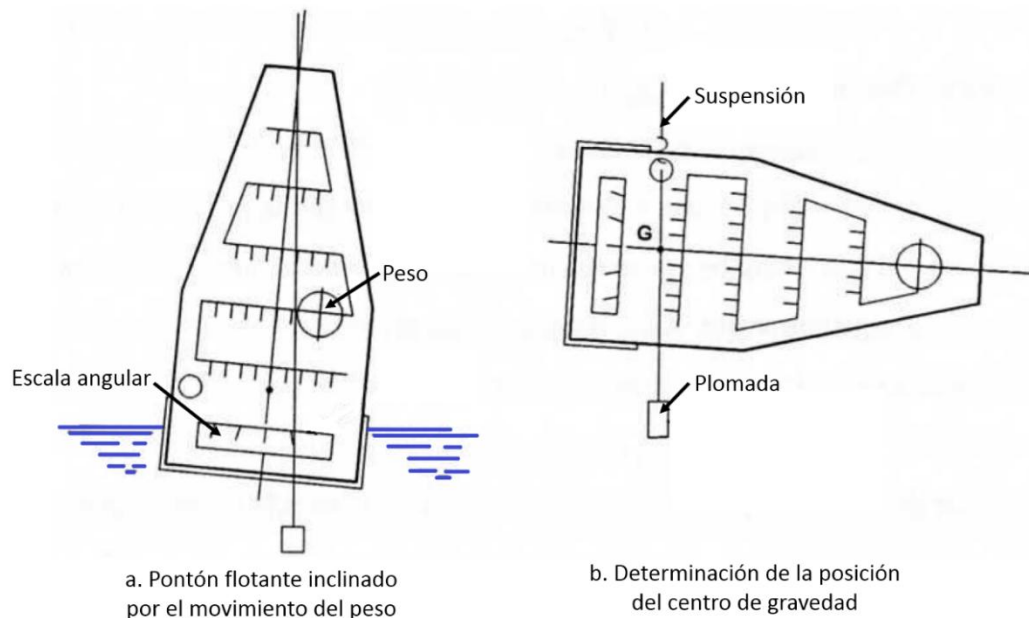
La distancia BG se puede hallar de las posiciones calculadas o medidas de B y G , tal que la altura metacéntrica GM es:

$$GM = BM - BG \quad (6)$$

Así, se obtiene una verificación del resultado obtenido experimentalmente de atravesar el peso transversalmente del cuerpo flotante.

I.5. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

El pontón mostrado en la Fig. 5 tiene una plataforma rectangular y está provisto de una vela rígida. El cilindro de peso es atravesado en intervalos preestablecidos a varias alturas a través del pontón a lo largo de las ranuras en la vela. Los ángulos de inclinación son mostrados por el movimiento de la plomada sobre la escala angular como de muestra en la Fig. 5(a).



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 5 Esquema del pontón

Primero se mide la altura del centro de gravedad del ensamblaje para una altura elegida del peso. El pontón se suspende de un agujero en un lado de la vela, como se indica en la figura 5(b) y el peso se coloca en una posición sobre la línea de simetría para causar que el pontón cuelgue con su base aproximadamente vertical. Una plomada es entonces colgada del punto de suspensión. La altura del centro de gravedad G de todo el ensamblaje suspendido entonces se encuentra en el punto donde la plomada intercepta la línea de simetría del pontón. Esto establece la posición

de G para este peso particular. La posición de G para cualquier otro peso puede ser calculado de la estática elemental, como se muestra más adelante.

Después de medir el ancho externo y la longitud del pontón y anotar los pesos de los diferentes componentes, el pontón se deja flotar en el agua.

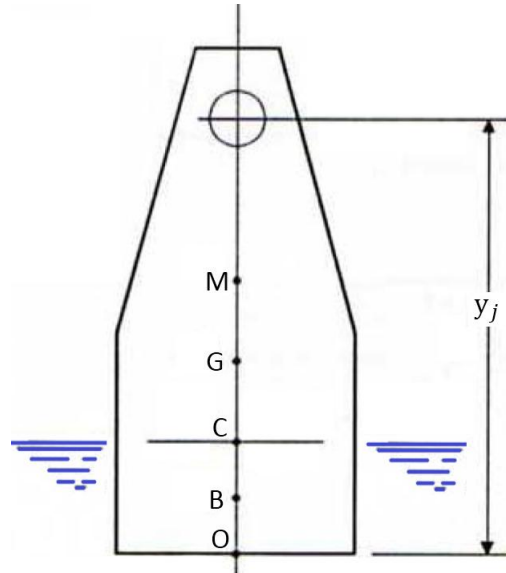
Con el peso sobre la línea de simetría se utilizan pequeños pesos magnéticos para equilibrar el ensamblaje incluida la quilla, indicada por un cero en la escala angular. El peso es entonces movido en pasos a través del ancho del pontón, registrando en cada paso el ángulo de inclinación (en un rango el cual es típicamente $\pm 8^\circ$). Este procedimiento es repetido para el peso a través de diferentes alturas.

I.6. Resultados y Cálculos

I.6.1. Peso y dimensiones del Pontón

Peso de pontón (excluyendo el peso del disco)	w_p	2.430 kgf
Peso del disco	w_j	0.391 kgf
El peso total del conjunto flotante	$W = w_p + w_j$	2.821 kgf
Desplazamiento pontón	$V = \frac{W}{w} = 2.821 \text{ kgf}/1000$	$2.821 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
Amplitud de pontón	D	201.8 mm = 0.2018 m
Longitud del pontón	L	360.1 mm = 0.3601 m
Área de pontón en el plano de la superficie del agua	$A = DL$	$7.267 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
Momento de inercia (Segundo momento de Área)	$I = LD^3/12$	$2.466 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
Profundidad de inmersión	$OC = V/A$	$3.88 \times 10^{-2} \text{ m}$
Altura del centro de flotabilidad B por encima de O	$OB = BC = OC/2$	19.4 mm

I.6.2. Altura del centro de gravedad



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 6 Esquema cuerpo flotante

La Fig. 6 muestra esquemáticamente las posiciones del centro de flotabilidad B, el centro de gravedad G, y el metacentro M. O es un punto de referencia sobre la superficie externa del pontón y C es el punto donde el eje de simetría cruza el plano de la superficie del agua. El espesor del material del cual está hecho el pontón se asume como 2mm. La altura de G sobre el punto de referencia O es OG. La altura del peso sobre O es y_j .

Cuando el pontón se suspende como se muestra en la Fig. 5(b) y el peso se coloca en la ranura superior de la vela, se realizan las siguientes mediciones:

Altura del peso sobre O $y_j = 345 \text{ mm}$

Atura correspondiente de G sobre O $OG = 92 \text{ mm}$

El valor de OG puede ser entonces determinado para cualquier otro valor de y_j , Si y_j cambia por Δy_j , se producirá un cambio en $W_j \cdot \Delta y_j / W$. La separación vertical de las ranuras en la vela es de 60mm, así que OG cambiara en intervalos de $0.391 \times 60 / 2.821 = 8.32 \text{ mm}$.

La tabla 1 muestra los valores de OG calculados de esta forma para 5 alturas diferentes y_j de pesos.

Tabla 1 Alturas de OG de G sobre la base O del pontón

y_j (mm)	105	165	225	285	345
OG (mm)	58.7	67.1	75.4	83.7	92.0

Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

I.6.3. Determinación experimental de la altura metacéntrica GM

La tabla (2) muestra los resultados obtenidos cuando el pontón es inclinado por el cruce del peso a través de su ancho.

Tabla 2 Ángulos de inclinación causados por el desplazamiento del peso

Altura del peso $y_j(\text{mm})$	Desplazamiento de peso desde el centro $x_j(\text{mm})$						
	-45	-30	-15	0	15	30	45
105	-7.8	-5.2	-2.7	0.0	-2.6	5.2	7.8
165		-6.2	-3.1	0.0	-3.2	6.2	
225		-7.7	-3.8	0.0	-3.9	7.8	
285			-5.2	0.0	-5.2		
345			-7.5	-0.1	-7.4		

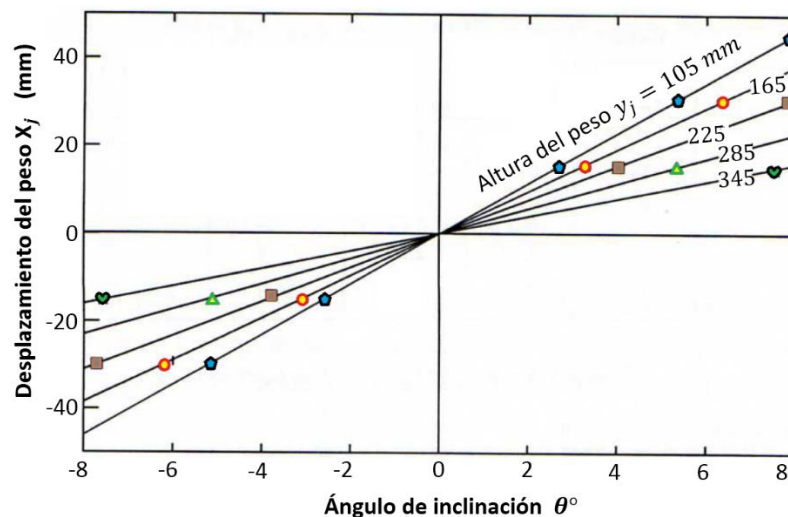
Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Estos resultados son presentados en la Fig. 7. Para cada altura de peso, el ángulo de escorado es proporcional al desplazamiento del peso. La altura metacéntrica puede ser encontrada por la ecuación (2), haciendo uso de los gradientes de las líneas de la Fig. 7. Por ejemplo, cuando $y_j = 105\text{mm}$, el gradiente es:

$$dx_j/d\theta = 5.76\text{mm/deg} = 5.76 \times 57.3 = 330.0\text{ mm/rad}$$

Reemplazando en la ecuación (2),

$$GM = \frac{W_j}{W} \cdot \frac{x_j}{\theta} = \frac{0.391}{2.821} \times 330.0 = 45.7\text{ mm}$$



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 7 Variación del ángulo de inclinación con el desplazamiento del peso

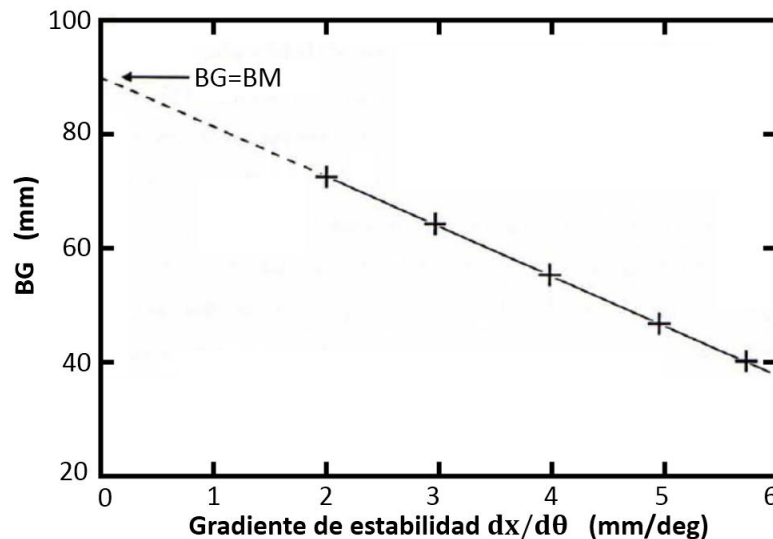
Este valor y los valores correspondientes para otras alturas de pesos, son colocados en la cuarta columna de la tabla 3. Los valores de BM son también mostrados y obtenidos de la siguiente forma (ver Fig.4 para la notación):

$$BM = BG + GM = OG - OB + GM = OG + GM - 19.4$$

Como BM solo depende de la medición y el peso total del pontón, su valor debe ser independiente de la altura del peso, siendo esto razonablemente verificado por los resultados experimentales. El valor calculado de la teoría es:

$$BM = I/V = 2.466 \times 10^{-4} / 2.821 \times 10^{-3} = 8.74 \times 10^{-2} m = 87.4 \text{ mm}$$

Lo cual corresponde satisfactoriamente con los valores obtenidos experimentalmente.



Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Fig. 8 Variación de la estabilidad con la altura metacéntrica

Otra forma de expresar los resultados experimentales es presentada en la Fig. 8, donde la altura BG del centro de gravedad sobre el centro de flotabilidad es presentada como función de la pendiente x_j/θ . Los puntos experimentales se encuentran en una línea recta la cual hace intersección con el eje BG en el valor de 90mm. Como BG se aproxima a este valor, $x_j/q \rightarrow 0$.

Tabla 3 Altura metacéntrica derivada experimentalmente

Altura del peso (mm)	OG (mm)	x_j/θ (mm/deg)	Altura metacéntrica GM (mm)	BM (mm)
105	58.7	5.76	45.7	85.0
165	67.1	4.82	38.3	86.0
225	75.4	3.88	30.8	86.8
285	83.7	2.88	22.9	87.2
345	92.0	2.01	16.0	88.6

Fuente: Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics"

Es decir, el pontón puede estar entonces inclinado por un movimiento infinitesimal del peso; esto es en la condición de estabilidad neutral. Bajo esta condición, el centro de gravedad coincide con el metacentro, es decir $BM = BG$. Así de la Fig.8 se observa que $BM = 90\text{mm}$. Este valor determinado experimentalmente concuerda satisfactoriamente con el valor teórico de 87.4mm .

Discusión de resultados

El experimento demuestra como la estabilidad de un cuerpo flotante es afectada por el cambio en la altura del centro de gravedad, y como la altura metacéntrica se puede establecer experimentalmente moviendo el centro de gravedad de lado a lado a través del cuerpo. El valor establecido de esta forma concuerda satisfactoriamente con el dado por los resultados analíticos $BM = I/V$.

I.7. Cuestiones de discusión

1. ¿Qué sugerencias tiene para mejorar el aparato?
2. ¿El movimiento de la plomada sobre la escala angular afecta los resultados de alguna forma? Considere por ejemplo, una plomada de 0.005 kgf de peso, desplazada de lado a lado a través de una distancia de 90mm como el pontón se inclina a 8 grados. ¿Qué efecto tiene esto comparado con el del deslizamiento correspondiente del peso?
3. ¿Qué exactitud considera usted se debe alcanzar en obtener el valor de BM? Si por ejemplo, la incertidumbre en la medición de D y L es $\pm 2\text{mm}$, ¿cuál es la incertidumbre en el valor calculado de BM?
4. ¿Cómo se afectaría la estabilidad del pontón si flotara en un líquido con una mayor densidad que la del agua?

I.8. BIBLIOGRAFÍA

Markland, E. (1994) "A first course in Hydraulics" by Emeritus Professor E. Markland, Published by TecQuipment Limited, 1994.

H2 Stability of a Floating Body, Lecture03, Annex - Lab, <http://bc.inter.edu/facultad/omeza/3110/Laboratory%203-Anexo.pdf>, recuperado el 5 de Agosto de 2011.