

Comparison of algorithms for reliability-based structural optimization

Henry Octavio Cortés-Ramos¹, Carlos Julio Camacho-López², Rodrigo Andrés Calvo Ocampo^{2,1}

1 Universidad Nacional de Colombia

2 Universidad Santo Tomás Bogotá

Abstract

The design of reliable structures requires robust tools that allow the analysis of the behavior of the system subject to variability in its resistance and applied loads. For this, there are several formulations and computational algorithms that enable to model the structural behavior under uncertainties. Under these requirements, the most popular and reliable optimum design methodology is the reliability based optimization (RBO), which should be implemented through the combination of high fidelity mathematical or computational models, e.g. finite element models, efficient and accurate reliability estimation methods, and efficient and effective engineering optimization algorithms. Most RBO applications for structural optimization has the latest developments in efficient computational techniques for simulation and reliability calculations, however, although a variety of optimization methods exist, they generally do not perform a selection of the optimization algorithm more appropriate for each application. In this context, the main contribution of this article is the performing of a comparative study of the computational performance of optimization algorithms applied in structural optimization by RBO. The study compared the numerical performance of optimization algorithms in three problems. Compared algorithms correspond to derivative based algorithms, direct search algorithms, and bioinspired algorithms; including the most representative algorithms of each category. The results of the comparative study point out advantages and disadvantages of the use of the different types of algorithms and allow to conclude on the criteria that must be considered for the choice of an algorithm that favors the computational performance.

OPEN ACCESS

Published: 03/01/2018

Accepted: 06/06/2017

Submitted: 18/01/2017

DOI:
10.23967/j.rimni.2017.7.003

Keywords:
structural optimization
reability
optimization methods
reability index
numerical efficiency

Resumen

El diseño de estructuras confiables requiere de herramientas robustas que permitan analizar el comportamiento del sistema sometido a variabilidad en su resistencia y cargas aplicadas. Para esto, se disponen de diversas formulaciones y algoritmos computacionales que permiten modelar el comportamiento estructural bajo incertidumbres. Bajo estos requerimientos, la metodología de diseño óptimo más popular y confiable es la optimización basada en confiabilidad (*RBO*, *reliability based optimization*), que puede implementarse a través de la combinación de modelos matemáticos o computacionales de alta fidelidad, e.g. modelos de elementos finitos, métodos eficientes y precisos de estimación de la confiabilidad, y algoritmos eficientes y eficaces de optimización en ingeniería. La mayoría de aplicaciones de *RBO* para optimización estructural cuenta con los últimos desarrollos de técnicas computacionales eficientes para simulación y cálculo de confiabilidad, sin embargo, a pesar de que existe una gran variedad de métodos de optimización, generalmente no realizan una selección del algoritmo de optimización más apropiado para cada aplicación. En este contexto, la contribución principal de este artículo es la realización de un estudio comparativo del desempeño computacional de algoritmos de optimización aplicados en optimización estructural por *RBO*. El estudio realizado comparó el desempeño numérico de algoritmos de optimización en tres problemas. Los algoritmos comparados corresponden a algoritmos basados en derivadas, algoritmos de búsqueda directa, y algoritmos bioinspirados; incluyendo los algoritmos más representativos de cada categoría. Los resultados del estudio comparativo señalan ventajas y desventajas del uso de los diferentes tipos de algoritmos y permiten concluir sobre los criterios que deben considerarse para la selección de un algoritmo que favorezca el rendimiento computacional.

1. Introducción

La optimización basada en confiabilidad (*RBO*, *reliability-based optimization*) es una metodología que hace posible resolver problemas de optimización que requieren el modelamiento explícito de los efectos de las incertidumbres. En aplicaciones de optimización estructural, la metodología de *RBO* es más apropiada que los procedimientos de diseño determinísticos, debido a que en estas aplicaciones se debe tener en cuenta de forma precisa la inherente

incertidumbre presente en el sistema. Los códigos de diseño y la optimización estructural determinística modelan la incertidumbre a través de factores de seguridad que no están vinculados directamente a la incertidumbre existente en las variables de diseño y en los demás parámetros del sistema estructural. Esto último lleva generalmente a estructuras sobrediseñadas e inclusive en algunos casos a diseños inviables.

Si bien la metodología *RBO* presenta ventajas sobre los métodos determinísticos en aplicaciones de diseño en ingeniería, también presenta retos debido al alto costo numérico involucrado en su solución. Tanto la estimación de la confiabilidad estructural como el proceso iterativo de optimización requieren muchas evaluaciones de modelos numéricos para simulación computacional.

La cuantificación de la incertidumbre en optimización estructural se realiza generalmente a través de restricciones de confiabilidad, definidas en términos de probabilidades de falla o índices de confiabilidad. Cualquiera de estos dos conceptos probabilísticos requiere algoritmos apropiados y eficientes de simulación estocástica, e.g. *Monte Carlo Simulation* [1]; de estimación aproximada de la confiabilidad, e.g. método de confiabilidad de primer orden (*FORM, first order reliability method*) [2] y el método de confiabilidad de segundo orden (*SORM, second order reliability method*) [3] que destacan por su simplicidad y eficiencia desde el punto de vista de implementación y costo computacional. Sin embargo, existen métodos de estimación de confiabilidad más avanzados que involucran metamodelos, que permiten reemplazar los modelos computacionales intensivos por unos más eficientes, pero su implementación es más compleja y su eficiencia está siendo evaluada en la actualidad con resultados prometedores [4]. Entre los métodos basados en metamodelos se destacan los modelos sustitutos de kriging (*kriging surrogates*) [5], y caos polinomial (*polynomial chaos*) [6].

Hay un interés creciente en la investigación de metodologías *RBO*, sin embargo, hay pocos trabajos de revisión que ofrezcan una comparación completa del desempeño de implementaciones de *RBO*. Los pocos estudios existentes se centran en métodos específicos de estimación de confiabilidad o en la implementación de esquemas generales de *RBO*, dejando sin comparar las diferentes posibilidades que pueden brindar las diferentes familias de algoritmos de optimización [7,8]. No obstante, para la selección de un esquema eficiente de *RBO* en aplicaciones de optimización estructural es fundamental conocer las diferencias en el desempeño de las diferentes familias de algoritmos de optimización.

Ante el escenario descrito, el objetivo de este trabajo es contribuir con una visión general de los diferentes tipos de algoritmos que se pueden emplear para optimización estructural dentro de la metodología de *RBO*. Los algoritmos implementados y presentados representan a cada una de las tres principales familias de algoritmos de optimización: algoritmos basados en derivadas (e.g. *interior point algorithms*), algoritmos de búsqueda directa (e.g. *PS, pattern search*) y algoritmos bioinspirados (e.g. *GA, genetic algorithms*). El desempeño numérico de los algoritmos de optimización evaluados se prueba a través de varios problemas de prueba de optimización estructural basada en confiabilidad que involucran desde modelos matemáticos a modelos numéricos de elementos finitos. Finalmente, se concluye con la discusión de los resultados sobre el desempeño numérico de los algoritmos estudiados para dar un panorama de sus capacidades y limitaciones.

2. Optimización basada en confiabilidad (RBO)

La optimización basada en confiabilidad tiene como objetivo buscar el mejor compromiso entre costo y seguridad por medio del control de las incertidumbres presentes en el proceso de diseño. Dentro de los diferentes métodos de *RBO*, la estimación de la confiabilidad puede ser calculada por medio de la probabilidad de falla del sistema o a través del índice de confiabilidad.

Los métodos de cálculo de confiabilidad tienen como objetivo principal la evaluación de la probabilidad de falla estructural al determinar si se superan los límites representados por las funciones de estado límite [9]. Se conoce como estado límite a la condición específica a partir de la cual la estructura o parte de esta es incapaz de desempeñarse como se requiere. Generalmente, en *RBO* para el caso de estructuras la función de estado límite se puede definir como el margen de seguridad que hay entre la resistencia y la carga de una estructura. De esta manera la función de estado límite G y la probabilidad de falla P_f se pueden definir como [10]:

$$G(X) = R(X) - S(X) \quad (1)$$

$$P_f = P[G(X) < 0] \quad (2)$$

donde R es la resistencia y S es la carga a la que está sometido el sistema. Tanto la resistencia $R(X)$ como la sollicitación $S(X)$ son funciones de las variables aleatorias X , por lo que la notación $G(X) < 0$ denota la región de falla, $G(X) = 0$ indica la superficie de falla (estado límite) y $G(X) > 0$ representa la región segura, como se muestra en la [Figura 1](#).

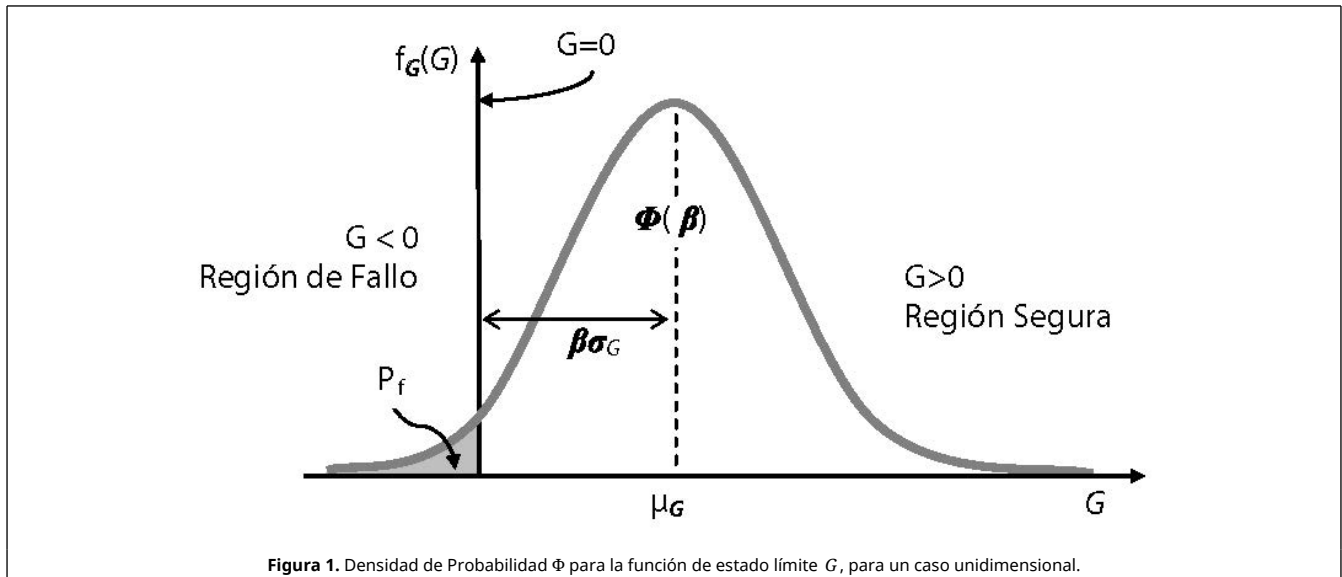


Figura 1. Densidad de Probabilidad Φ para la función de estado límite G , para un caso unidimensional.

Para el caso especial con $G(X)$ lineal, variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas, el índice de confiabilidad (β) puede ser calculado como:

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \tag{3}$$

donde μ_G representa la media y σ_G la desviación estándar de la función de estado límite $G(X)$. Es decir, que entre mayor sea β mayor será la distancia entre el valor medio μ_G y la superficie de fallo de $G(X)$, lo que representa una menor probabilidad de fallo y por lo tanto una mayor confiabilidad.

Para el caso en que $G(X)$ es no lineal, μ_G y σ_G se obtienen a través de la linealización de la función $G(X)$ a través de la expansión en serie de Taylor de primer orden. Este método se conoce como el método de valor medio (MVFOSM, mean value first-order second moment), por lo que μ_G y σ_G se calculan como [2,11]:

$$\mu_G = G(\mu_X) \tag{4}$$

$$\sigma_G = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G(\mu_X)}{\partial X_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

2.1. Formulación básica de RBO

La formulación general para un problema de RBO consiste en minimizar la función objetivo sujeta a restricciones probabilísticas. En esta formulación hay dos tipos de variables: variables de diseño \mathbf{d} y variables aleatorias \mathbf{X} . Un problema de optimización estructural basada en confiabilidad se representa matemáticamente como:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}} : C(\mathbf{d}) \\ \text{s. a. : } & \begin{cases} P [G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

donde \mathbf{d} es el vector de variables de diseño, \mathbf{X} es el vector de variables aleatorias, C es la función objetivo, G_i es la i -ésima función de estado límite, h_j son las restricciones determinísticas, $P[\cdot]$ es el operador de probabilidad, P_{fi}^t es la probabilidad de falla admisible, m es el número de funciones de estado límite y M es el número total de restricciones. Las restricciones determinísticas generalmente son límites inferiores y superiores de las variables de diseño. Las restricciones probabilísticas definen la región factible al restringir la probabilidad de violar el estado límite G_i para la probabilidad de falla admisible P_{fi}^t , donde la probabilidad de falla puede ser calculada por la siguiente integral múltiple:

$$P [G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] = \int \cdots \int_{G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7)$$

donde $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias \mathbf{X} . Calcular de forma exacta la integral es poco práctico. En la práctica se utilizan métodos numéricos que aproximan el cálculo de probabilidad de falla, a través de simulación numérica, e.g. métodos avanzados de simulación; métodos de aproximación de la función de estado límite por expansión en series de Taylor, e.g. *FORM* y *SORM*; y métodos de aproximación de la función de estado límite por modelos sustitutos.

2.2. Implementación de una técnica RBO

La aproximación del índice de confiabilidad (*RIA*, *reliability index approach*) [12] usa el método *FORM* a través del algoritmo Hasofer y Lind (*HL*) [13] para el análisis de confiabilidad. Dentro de las formulaciones *RBO*, *RIA* es uno de las aproximaciones clásicas del índice de confiabilidad y se define matemáticamente como:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}} : C(\mathbf{d}) \\ \text{s. a. : } & \begin{cases} \beta_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \geq \beta_i^t & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

donde β_i y β_i^t son el índice de confiabilidad calculado y el índice de confiabilidad objetivo respectivamente para la i -ésima función de estado límite. Para transformar las variables aleatorias \mathbf{X} en variables normalizadas no correlacionadas \mathbf{U} (i.e. $U_i = \Phi^{-1}[f_{X_i}(X_i)] = T(X_i)$) [6], el índice de confiabilidad se calcula resolviendo el problema de optimización restringida:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{U}} \|\mathbf{U}\| \\ \text{s. a. : } & G_i(\mathbf{U}) \leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

La solución \mathbf{U}^* es el punto más probable de falla (*MPFP*, *most probable failure point*), y el índice de confiabilidad está dado por $\beta_i = \|\mathbf{U}^*\|_i$. De acuerdo a la aproximación de *FORM*, la probabilidad de falla está dada por: $P_{fi} = \Phi(-\beta_i)$ donde Φ es la distribución Gaussiana estándar.

3. Algoritmos de optimización

3.1. Algoritmo de punto interior (IPA, interior point algorithm)

Es un algoritmo basado en gradientes para minimizar funciones objetivo no lineales sujetas a restricciones no lineales de igualdad y desigualdad. En este trabajo se usa la versión del algoritmo que está implementada en el *toolbox* de optimización de Matlab®, presentada por R.H. Byrd et. al. [14], el cual aplica técnicas de programación cuadrática secuencial (*SQP*, *sequential quadratic programming*), y usa la metodología de la región de confianza (*TR*, *trust región*), para asegurar la robustez y permitir el uso directo de derivadas de segundo orden.

3.2. Algoritmo de búsqueda en patrón (PS, pattern search)

Es un algoritmo de optimización creado en 1961 [15], para resolver problemas de optimización que no requiere información sobre el gradiente de la función objetivo. A diferencia de los métodos de optimización más tradicionales que usan información sobre el gradiente o derivadas superiores para buscar un punto óptimo, un algoritmo de búsqueda directa explora alrededor del punto actual, buscando un punto donde el valor de la función objetivo sea inferior al valor en el punto actual. El método es aplicable también en problemas de optimización para funciones no diferenciables o discontinuas. En este trabajo se usa la versión del algoritmo que está implementada en el *toolbox* de optimización de Matlab®, presentada por T. Kolda et. al. [16].

3.3 Algoritmo genético (GA, genetic algorithm)

Es un método basado en la selección natural de la evolución, teoría que fue propuesta por Charles Darwin. El algoritmo genético modifica repetidamente una población de individuos (soluciones). En cada paso, el algoritmo genético selecciona individuos aleatoriamente a partir de la población actual, para ser parientes y usarlos para producir a los descendientes de la siguiente generación. A través de generaciones sucesivas, la población "evoluciona" hacia una solución óptima [17]. El algoritmo genético es aplicable también a problemas en los cuales la función

objetivo es discontinua, no diferenciable, estocástica, o altamente no lineal. Los algoritmos genéticos pueden también manejar problemas de optimización con variables discretas, enteras o mixtas. El GA al ser un algoritmo basado en una población de individuos, en la práctica llega generalmente a un óptimo global. Al tener un mecanismo aleatorio de selección y combinación de individuos, los resultados obtenidos por el GA tienen una variabilidad inherente, y requieren por lo general un elevado número de evaluaciones de la función objetivo. El GA al no ser un algoritmo de punto interior intenta llevar al cumplimiento de las restricciones a través de una función de penalidad, motivo por el cual puede tener dificultades en encontrar una solución viable. Debido a su simplicidad, los algoritmos genéticos son fáciles de implementar y usar, siendo usados por lo general en aplicaciones de optimización multiobjetivo y de RBO [18].

4. Comparación Numérica

Para este estudio se implementó en Matlab© el método RIA como método de RBO por su simplicidad y eficiencia. Para el cálculo de confiabilidad se usó el método FORM, a través del código de Kostandyan E.E. [19].

El desempeño numérico de los algoritmos de optimización que se evalúan en este trabajo para aplicaciones estructurales de RBO, se estudia a través de tres ejemplos: 1) diseño óptimo de una columna corta, 2) optimización de un bastidor, y 3) optimización de una armadura de 10 barras. Para este estudio comparativo se usan las versiones de los tres algoritmos de optimización mencionados en la sección 3, que hacen parte del toolbox de optimización de Matlab©. Para el ejemplo 3 las funciones de estado límite representan restricciones que fueron implementadas usando el toolbox de elementos finitos CALFEM [20].

Los criterios de convergencia de los algoritmos de optimización comprenden: el cambio relativo en la función objetivo, a través del parámetro TolFun; el cambio absoluto en las variables de optimización, a través del parámetro TolX; y la verificación de las restricciones, a través del parámetro TolCon. Para el caso específico del algoritmo GA, el tamaño de la población (*PopulationSize*) se fijó en 20 individuos y la fracción de cruzamiento (*CrossFraction*) se fijó en el valor por defecto, correspondiente a 0.8 (lo que implica una fracción de mutación de 0.2). Para el algoritmo IPA en el cálculo de las derivadas se usaron diferencias finitas (*forward finite differences*). Para el algoritmo PS y *Fmincon-IPA* se asignaron los siguientes valores para los parámetros de convergencia: TolFun=10⁻⁸, TolCon=10⁻⁸ y TolX=10⁻¹². Para el algoritmo GA se asignaron los siguientes valores para los parámetros de convergencia: TolFun=10⁻⁶ y TolCon=10⁻⁶.

4.1. Diseño de una columna corta

Este problema fue propuesto en el 2009 por Y. Aoues y A. Chateaneuf [7], usando el algoritmo de optimización SQP y diferentes estrategias de RBO como RIA, PMA (*performance measure approach*) y SORA (*sequential optimization and reliability assessment*). Para este problema, con los algoritmos de optimización evaluados en este trabajo la confiabilidad se estimó por el método MVFOSM y HL.

Este problema consiste en minimizar el área de la sección transversal de una columna corta. La columna tiene una sección transversal rectangular de dimensiones *b* y *h*, está sometida a una fuerza aleatoria *F* y a momentos de flexión biaxial *M*₁ y *M*₂. De acuerdo a la ley constitutiva elástico-plástica, la función de estado límite está dada por:

$$G(X) = 1 - \frac{4M_1}{bh^2f_y} - \frac{4M_2}{b^2hf_y} - \frac{F^2}{(bhf_y)^2} \quad (9)$$

El índice de confiabilidad objetivo es de $\beta^t = 3$; las variables de diseño $\mathbf{d} = \{\mu_b, \mu_h\}$ son los valores medios de la base y la altura de la sección transversal, el punto inicial de diseño es: $\mathbf{d}^0 = [0.5, 0.5]$. Las variables aleatorias son el límite elástico del material *f_y*, los momentos flexionantes aplicados *M*₁ y *M*₂, la fuerza normal aplicada *F*, la base *b* y la altura *h* de la sección transversal. Todas las variables aleatorias de este problema tienen distribución normal como se muestra en la Tabla 1. Se aplican diferentes coeficientes de variación para *h* y *b*: 0.00, 0.05, 0.10 y 0.15 (un coeficiente de variación 0.0 indica que la variable es determinística).

Tabla 1. Datos estadísticos de las variables aleatorias para el problema del diseño de la columna corta

Variable	Distribución	Media	COV
<i>b</i> (m)	Normal	μ_b	0.05, 0.1, 0.15
<i>h</i> (m)	Normal	μ_h	0.05, 0.1, 0.15
<i>M</i> ₁ (kN . m)	Normal	250	0.3
<i>M</i> ₂ kN . m	Normal	125	0.3
<i>F</i> kN	Normal	250	0.2

$$F_y \text{ MPa} \quad \text{Normal} \quad 40 \quad 0.1$$

Entonces, el problema de *RBO* se define como:

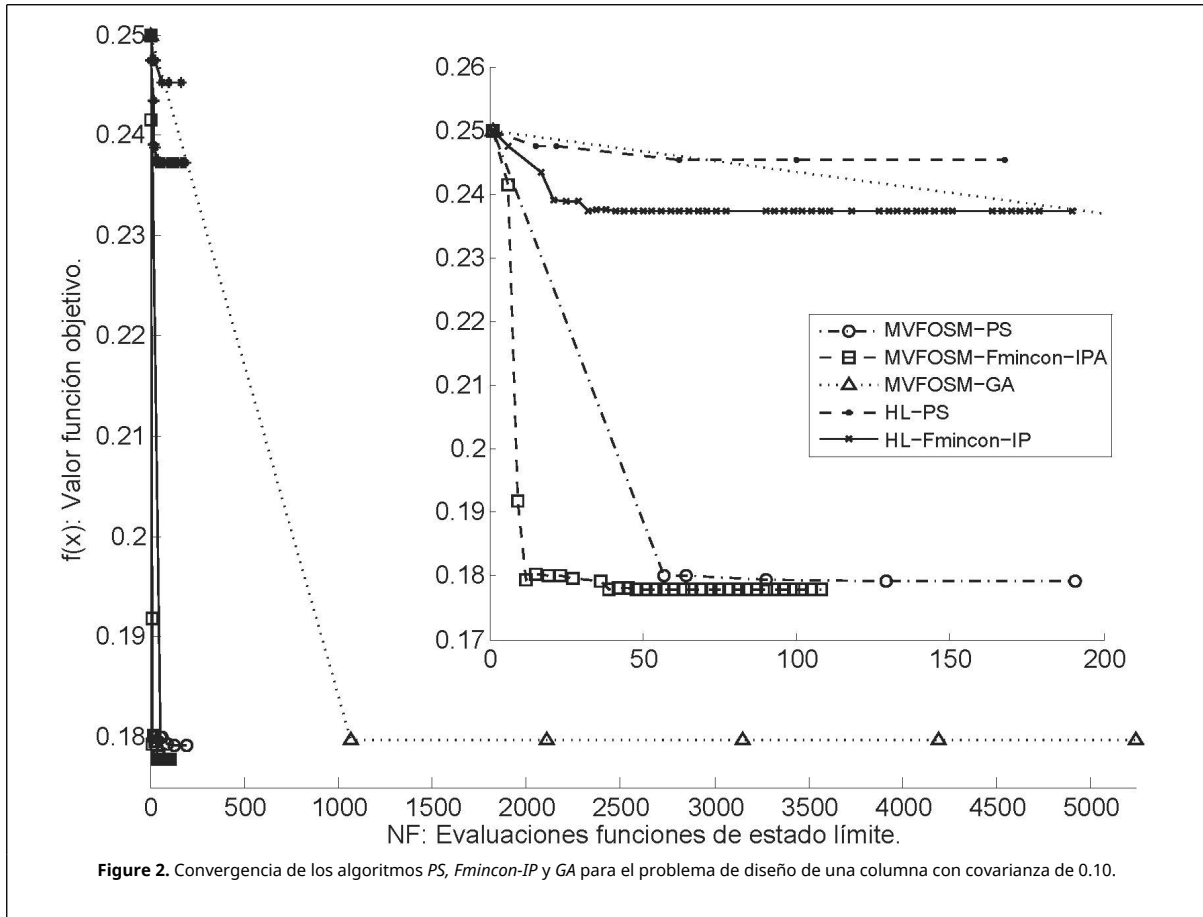
$$\begin{aligned} \min_{\mu_b, \mu_h} : A(\mathbf{d}, \mathbf{X}) &= \mu_b \mu_h \\ \text{s. a. : } &\begin{cases} P(G(X) < 0) \leq P_f \\ 0.5 \leq \mu_b / \mu_h \leq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

En la [Tabla 2](#), están consignados los resultados obtenidos con el β calculado por *MVFOSM* y *FORM* a través de *HL*. En los dos casos se observa que *Fmincon-IPA* tuvo la mejor eficiencia, al tener el menor número de evaluaciones de las funciones de estado límite (*G-eval*), seguido de *PS* y *GA*. La eficiencia de los tres algoritmos de optimización usando los dos esquemas del cálculo de β también se corrobora en la [Figura 2](#). En el caso del β calculado por *MVFOSM*, para una covarianza de 0.10 los tres algoritmos convergieron a $\mathbf{d}^* = [0.3, 0.6]^T$ correspondiendo a un área de aproximadamente 0.18 m^2 , sin embargo, para el caso del β calculado por *HL*, los algoritmos convergieron a $\mathbf{d}^* = [0.34, 0.69]^T$ con un área aproximada de 0.24 m^2 , con la particularidad de que *PS* convergió a un valor ligeramente mayor, y el *GA* no logró convergencia (nc). El resultado más estable y ligeramente mejor del *MVFOSM* frente al *HL* se debe a que en la implementación de *MVFOSM* se usaron las derivadas analíticas de la función de estado límite. Al comparar los resultados de los tres algoritmos estudiados con los resultados de la literatura [6] se observa que la eficiencia de los tres primeros algoritmos es mayor, seguido de cerca por el algoritmo *SORA-SQP* y con una eficiencia mucho menor *PMA-SQP* y *RIA-SQP*. Teniendo en cuenta que el valor inicial de la función objetivo es de $A(\mathbf{x}^0) = 0.25 \text{ m}$, para el caso de covarianza de 0.1, los porcentajes de reducción de área para los algoritmos con el método *MVFOSM* fue de 27%, mientras que para los algoritmos con el método *FORM* fue de 5%.

Tabla 2. Resultados para diseño de una columna corta. por *RBO*

Método	A(m)	COV			
		0	0.05	0.1	0.15
β-MVFOSM					
<i>Fmincon-IPA</i>	h^*b^*	0.129	0.154	0.1778	0.1993
	β^*	3	3	3	3
	G-eval(iter)	196(39)	103(31)	108(32)	96(30)
<i>PS</i>	h^*b^*	0.128	0.155	0.179	0.2022
	β^*	3	3	3	3
	G-eval(iter)	224(5)	196(5)	191(5)	175(5)
<i>GA</i>	h^*b^*	0.1343	0.1596	0.1811	0.2088
	β^*	3.083	3.124	3.01	3.105
	G-eval(iter)	3150(3)	5436(5)	5236(5)	5236(5)
β-FORM					
<i>Fmincon-IPA-HL</i>	h^*b^*	0.191	0.202	0.237	0.303
	β^*	3	3	3	3
	G-eval(iter)	145(38)	192(53)	190(46)	407(41)
<i>PS-HL</i>	h^*b^*	0.194	0.205	0.245	0.306
	β^*	3	3	3	3
	G-eval(iter)	189(5)	182(5)	168(5)	147(5)
<i>GA-HL</i>	h^*b^*	nc	nc	nc	nc
	β^*	nc	nc	nc	nc
	G-eval(iter)	nc	nc	nc	nc
<i>RIA-SQP-HL</i> ¹	h^*b^*	0.192	0.202	0.237	0.302
	β^*	3	2.999	3	3
	G-eval(iter)	600(4)	525(5)	630(5)	945(5)
<i>PMA-SQP-HL</i> ¹	h^*b^*	0.191	0.202	0.237	0.302
	β^*	2.996	2.997	2.999	2.999
	G-eval(iter)	450(5)	651(5)	570(4)	684(5)
<i>SORA-SQP</i> ¹	h^*b^*	0.192	0.202	0.237	0.301
	β^*	2.999	2.999	2.997	2.998

¹ Resultados obtenidos por Younes Aoues • Alaa Chateaneuf [6]



Cabe mencionar que el *MVFOSM-GA* mostró una alta confiabilidad en los resultados estadísticos como se puede observar en la [Tabla 3](#).

Tabla 3. Resultados estadísticos para el problema de diseño de una columna corta por *RBO*, con 10 ejecuciones independientes del *GA*

COV	Función Objetivo			# G-eval	
	Media	Desviación Estándar		Media	Desviación Estándar
0.00	0.1355	0.0072		3150.0	312.9
0.05	0.1625	0.0030		5236.0	0.0
0.10	0.1877	0.0064		5236.0	0.0
0.15	0.2116	0.0082		5236.0	0.0

Nota: Se usaron los parámetros por defecto del *GA* con un tamaño de población 20.

4.2. Optimización de un bastidor

Este problema fue presentado por Y. Tsompanakis, et. al. [21] y V. Dubourg, et. al. [5] empelando *SORA*, *RIA* y *Kriging*. Como se muestra en la [Figura 3](#), el bastidor soporta la carga de su propio peso debido a la gravedad y una carga adicional *P* en su extremo derecho. Los elementos tienen sección transversal rectangular $W_{ab} \times W_t$ y $W_{cd} \times W_t$

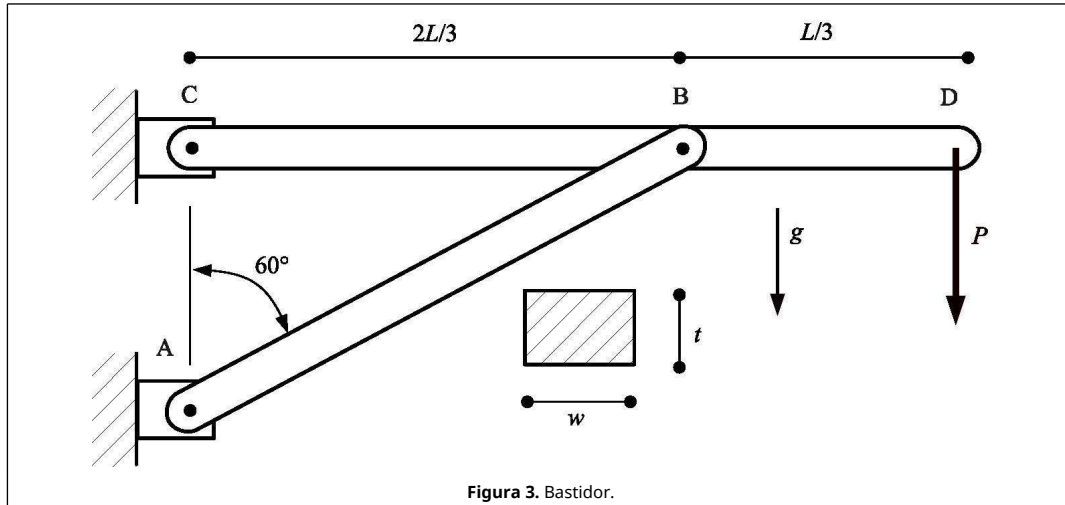


Figura 3. Bastidor.

El problema *RBO* consiste en minimizar la masa total de la estructura, sujeto a dos restricciones estocásticas en los esfuerzos permisibles y a dos restricciones determinísticas sobre las variables de optimización $\mathbf{d} = \{\mu_t, \mu_{W_{AB}}, \mu_{W_{CD}}\}$, que corresponden a las dimensiones de las secciones transversales de los elementos. La formulación matemática del problema es:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} W(\mathbf{d}, \mathbf{X}) &= \rho \mu_t L \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} \mu_{W_{AB}} + \mu_{W_{CD}} \right) \\ \text{s. a. : } &\begin{cases} \beta_1 \geq 2 \text{ y } \beta_2 \geq 2 \\ 0.05 \text{ m} \leq d_j \leq 0.300 \text{ m} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

β_1 y β_2 representan los índices de confiabilidad definidos para las funciones de estado límite $G_1(X)$ y $G_2(X)$ respectivamente, que están definidas por las ecuaciones (12) y (13). El modelo probabilístico para este ejemplo comprende variables aleatorias independientes cuyos datos están consignados en la Tabla 4.

Tabla 4. Datos estadísticos de las variables aleatorias para el bastidor.

Variable	Distribución	Media	COV
μ_t	m Normal	0.275	0.05
$\mu_{W_{AB}}$	m Normal	0.06	0.05
$\mu_{W_{CD}}$	m Normal	0.2	0.05
P	kN Gumbel	100	0.15
E	GPa Gumbel	200	0.08
F_y	MPa Log-normal	225	0.08
ρ	kg/m^3 Weibull	7860	0.10
L	m Normal	5	0.05

$G_1(X)$ restringe el esfuerzo máximo debido a flexión en la viga horizontal (CD, en el punto B), el cual no debe exceder el límite de elasticidad del material f_y de manera que la primera función de estado límite es la siguiente:

$$G_1(X) = f_y - \sigma_b \quad (12)$$

con:

$$\sigma_b = \frac{6M_B}{W_{CD}\mu_t^2}, \quad M_B = \frac{PL}{3} + \frac{\rho g \mu_{W_{CD}} \mu_t L^2}{18}$$

$G_2(X)$ restringe la máxima carga axial permisible en el elemento AB, la cual no debe exceder la carga crítica por pandeo de Euler F_{pandeo} (despreciando su propio peso).

$$G_2(X) = F_{pandeo} - F_{AB} \quad (13)$$

con:

$$F_{pandeo} = \frac{\pi^2 EI}{L_{AB}^2} = \frac{\pi^2 E \mu_t \mu_{W_{AB}}^3 9 \sin^2 \theta}{48 L^2}$$

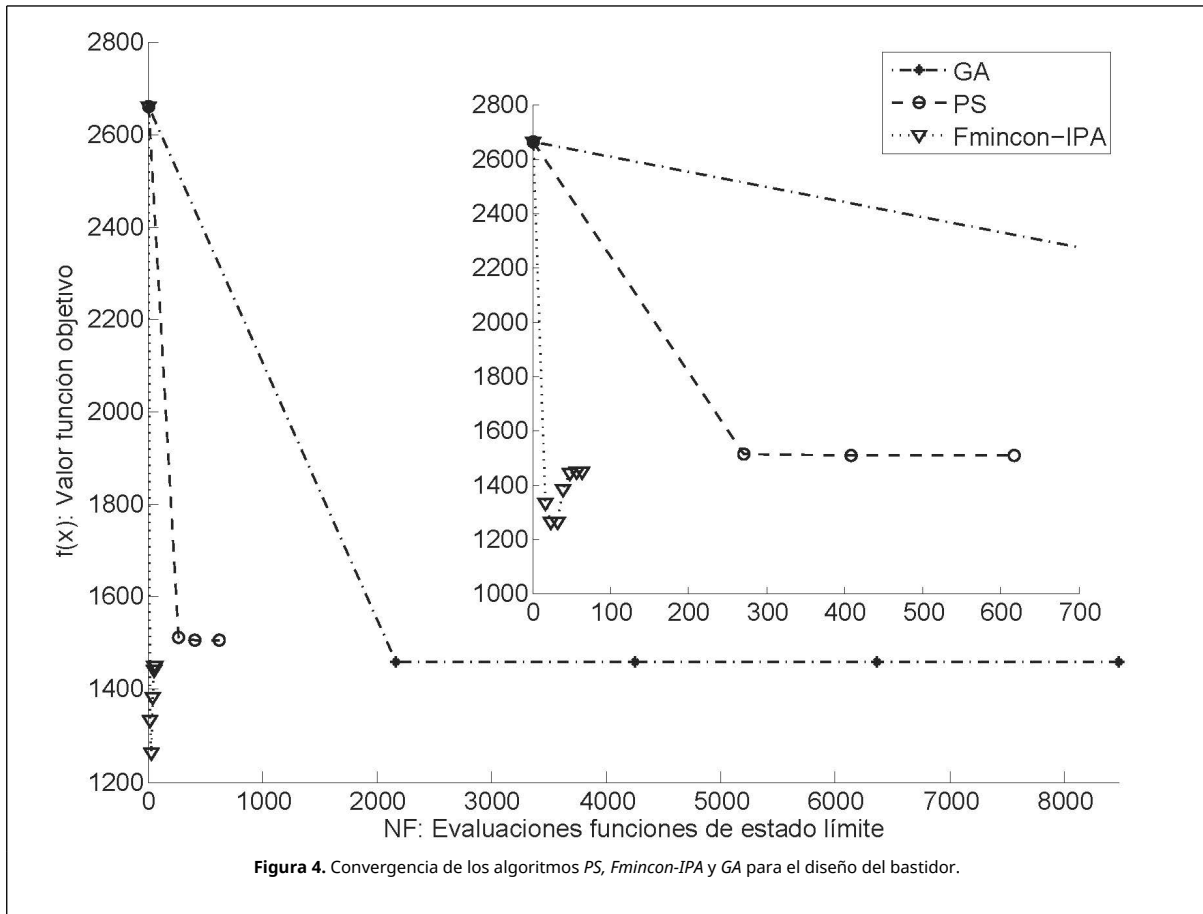
$$F_{AB} = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{3P}{2} + \frac{3 \rho g \mu_{W_{CD}} \mu_t L}{4} \right)$$

En la *Tabla 5* están consignados los resultados óptimos obtenidos a través de diferentes métodos de *RBO* y algoritmos de optimización. *RIA-Fmincon-IPA* muestra la mejor eficiencia con el menor número de evaluaciones de las funciones de estado límite (G-eval=64), seguido de *Kriging* (G-eval=150), *RIA-PS*(G-eval=618), *SORA-SQP*(G-eval=1340), *RIA-SQP*(G-eval=2340) y finalmente *RIA-GA* (G-eval=8470). La eficiencia de los tres algoritmos de optimización evaluados en este trabajo se corrobora en el gráfico de convergencia ilustrado en la *Figura 4*. Adicionalmente con esos tres algoritmos se obtuvo un mejor valor de la función objetivo, lo que indica que los demás algoritmos posiblemente llegaron a un óptimo local. Teniendo en cuenta que el valor inicial de la función objetivo es de $W(\mathbf{x}^0) = 2660.68$ kg, los porcentajes de reducción de masa para cada algoritmo son los siguientes: *RIA-Fmincon-IPA* (46%), *Kriging*, (39%), *RIA-PS*(43%), *SORA-SQP* (42%), *RIA-SQP*(37%) y por ultimo *RIA-GA* (45%).

Tabla 5. Resultados para el bastidor por *RBO*

Método	Variables de diseño.		W* función objetivo (kg)	G-eval(iter)	β
	(mm)				
<i>RIA-Fmincon-IPA</i>	wab*	61.16			
	wcd*	75.9	1449.98	64(7)	$\beta_1=2.00$
	t*	299.93			$\beta_2=2.00$
<i>RIA-PS</i>	wab*	63.21			
	wcd*	92.15	1507.60	618(3)	$\beta_1=2.00$
	t*	272.41			$\beta_2=2.00$
<i>RIA-GA</i>	wab*	61.51			
	wcd*	78.52	1459.35	8470(4)	$\beta_1=2.00$
	t*	294.98			$\beta_2=2.00$
<i>RIA-SQP</i> ²	wab*	61			
	wcd*	157	1675	2340(5)	$\beta_1=1.96$
	t*	209			$\beta_2=2.01$
<i>SORA-SQP</i> ²	wab*	61			
	wcd*	157	1550	1340(22)	$\beta_1=1.96$
	t*	209			$\beta_2=2.01$
<i>Kriging-SQP</i> ¹	wab*	59			
	wcd*	135	1610	150(10)	$\beta_1=2.01$
	t*	226			$\beta_2=2.03$

¹Resultados obtenidos por [5], ²Resultados Obtenidos por [21]



Los resultados del *GA* para este problema muestran una confiabilidad razonable en relación al valor de la función objetivo, y una variabilidad alta del número de evaluaciones las funciones de estado límite (*G-eval*). Ver [Tabla 6](#).

Tabla 6. Resultados estadísticos para el problema del bastidor, con 10 ejecuciones independientes del Algoritmo Genético (*GA*)

Función Objetivo		# G-eval	
Media	Desviación Estándar	Media	Desviación Estándar
1497.14	41.796	10345.0	3784.5

Nota: Fueron usados los parámetros por defecto del AG con un tamaño de población 20.

4.3. Optimización de una armadura de 10 barras por RBO

Este ejemplo consiste en la optimización basada en confiabilidad de una estructura plana articulada de 10 barras, mostrada en la [Figura 5](#), sometida a restricciones de desplazamientos y de tensiones [22].

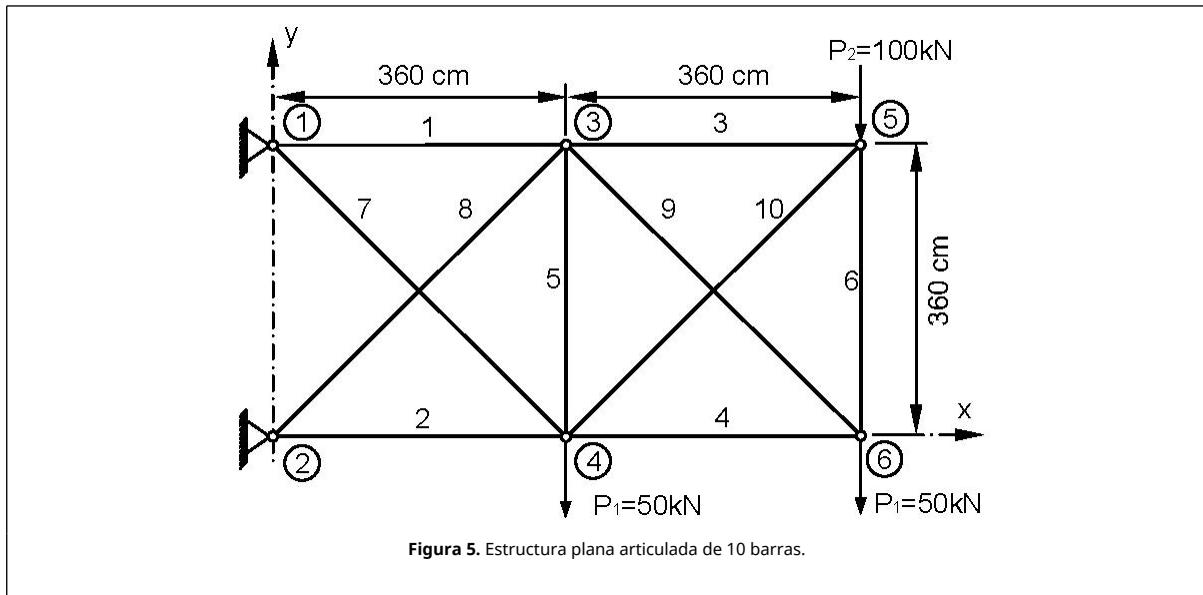


Figura 5. Estructura plana articulada de 10 barras.

Este ejemplo sirve para analizar el comportamiento de métodos *RBO* con un problema estructural en el que las funciones de estado límite dependen de forma implícita de las variables de diseño. El problema *RBO* para la estructura articulada de 10 barras consiste minimizar el volumen de la estructura sujeto a restricciones de confiabilidad sobre las tensiones, desplazamientos y pandeo. La estructura está soportando las siguientes cargas aleatorias: $P_1=100$ kN aplicada en el nodo 5 y $P_2=50$ kN aplicada en los nodos 4 y 6. Las barras son de acero y sección transversal rectangular maciza. Se considera que las barras de la estructura están agrupadas por motivos de fabricación en 3 grupos correspondientes a las barras horizontales (A_1), verticales (A_2) y diagonales (A_3). El problema *RBO* considera estos tres grupos como las variables de diseño $\mathbf{d} = \{\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3}\}$, que corresponden a las áreas de las secciones transversales de las barras de cada grupo. El módulo de elasticidad E y la tensión admisible σ^a son variables aleatorias, definidas en la [Tabla 7](#).

Tabla 7. Datos estadísticos de las variables aleatorias del problema de la estructura de 10 barras.

Variable	Distribución	Media.	COV
μ_{A_1} cm^2	Log-Normal	20	0.05
μ_{A_2} cm^2	Log-Normal	20	0.05
μ_{A_3} cm^2	Log-Normal	20	0.05
E kN/cm^2	Log-Normal	21000	0.05
σ_a kN/cm^2	Log-Normal	21	0.05
P_1 kN	Log-Normal	100	0.20
P_2 kN	Log-Normal	50	0.05

La formulación matemática del problema es:

$$\min_{\mathbf{d}} V(\mathbf{d}, \mathbf{X})$$

$$s. a. : \begin{cases} P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) < 0) \leq P_{f_i}^t \\ \text{con } \beta_i^t = 3.7 \quad i = 1, \dots, 22. \\ 5cm^2 \leq d_j \leq 75cm^2 \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (14)$$

La restricción del desplazamiento vertical en el nodo 6 (q_v) está definida por la ecuación (15) para desplazamientos positivos y por la ecuación (16) para desplazamientos negativos, limitado por un desplazamiento máximo admisible de $q_v^a = 3.5$ cm

$$G_1(X) = 1 + \frac{q_v}{q_v^a} \quad (15)$$

$$G_2(X) = \frac{q_v}{-q_v^a} - 1 \quad (16)$$

Las restricciones de tensión en los elementos de la estructura están dadas por la ecuación (17), limitadas por la tensión admisible σ_k^a que puede soportar cada elemento y está dada por:

$$G_i(X) = 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_k^a} \quad k = 1, \dots, 10.; i = 3, \dots, 12. \quad (17)$$

donde σ_k es la tensión calculada en cada elemento.

Las restricciones de compresión en los elementos de la estructura están dadas por la ecuación (18), limitadas por la tensión crítica de pandeo de Euler σ_k^c

$$G_i(X) = 1 + \frac{\sigma_k}{\sigma_k^c} \quad k = 1, \dots, 10.; i = 13, \dots, 22. \quad (18)$$

con

$$\sigma_k^c = \frac{\pi^2 EI_k}{L_k^2 A_k}$$

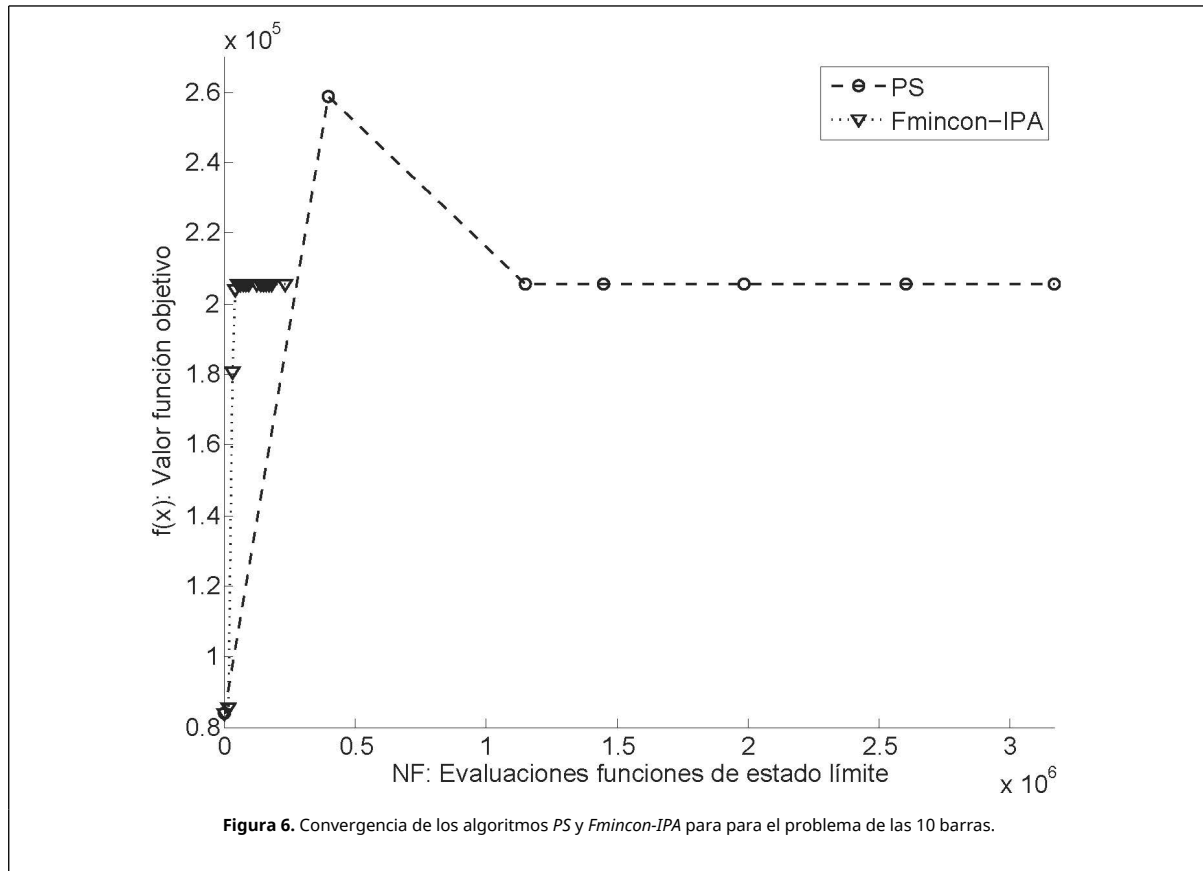
donde I_k es el momento de inercia mínimo de la sección transversal, L_k la longitud del elemento y A_k es el área de sección transversal de la k -ésima barra.

En la [Tabla 8](#) están consignados los resultados óptimos obtenidos a través de diferentes métodos de *RBO* y algoritmos de optimización. *RIA-Fmincon-IPA* muestra la mejor eficiencia con el menor número de evaluaciones de las funciones de estado límite (G-eval) seguido de *RIA-PS*. La eficiencia de estos dos algoritmos de optimización se corrobora en el gráfico de convergencia ilustrado en la [Figura 6](#). No se puede concluir sobre la eficiencia de los demás algoritmos registrados en la [Tabla 8](#) debido a que en la literatura no registran el número de evaluaciones de las funciones de estado límite realizadas (G-eval) y el algoritmo genético no logró convergencia. Como se evidencia en la [Tabla 8](#) todos los algoritmos llegaron a un óptimo cercano, sin embargo, se diferencian dos grupos de resultados. Teniendo en cuenta que el valor inicial de la función es $V(\mathbf{x}^0) = 83929.4 \text{ cm}^3$, los dos primeros algoritmos logran una estructura con un volumen 16% menor respecto al volumen de la estructura obtenida por los últimos seis algoritmos de la tabla. Cerrolio L.[22] usa algoritmos de optimización basados en derivadas, obtenidas por: derivación directa (*DDM*) y por diferencias finitas (*FFD*, *forward finite differences*).

Tabla 8. Resultados para el problema de la estructura de 10 barras por *RBO*

Método RBDO	Volumen (cm ³)	Variables de diseño (cm ²)			G-eval(iter)
		A_1^*	A_2^*	A_3^*	
RIA-Fmincon-IPA	205723.9	54.892	21.150	54.727	233940(15)
RIA-PS	205723.91	54.892	21.150	54.727	3173610(6)
RIA-GA	nc	nc	nc	nc	nc
RIA-DDM ¹	218918.69	55.789	22.695	60.026	-(10)
PMA-DDM ¹	218925.81	55.791	22.694	60.029	-(13)
SORA-DDM ¹	218926.87	55.791	22.695	60.029	-(10)
RBDO-FFD ¹	219326.19	55.886	22.810	60.118	-(8)
PMA-FFD ¹	219330.28	55.886	22.810	60.120	-(8)
SORA-FFD ¹	219330.28	55.886	22.810	60.120	-(8)

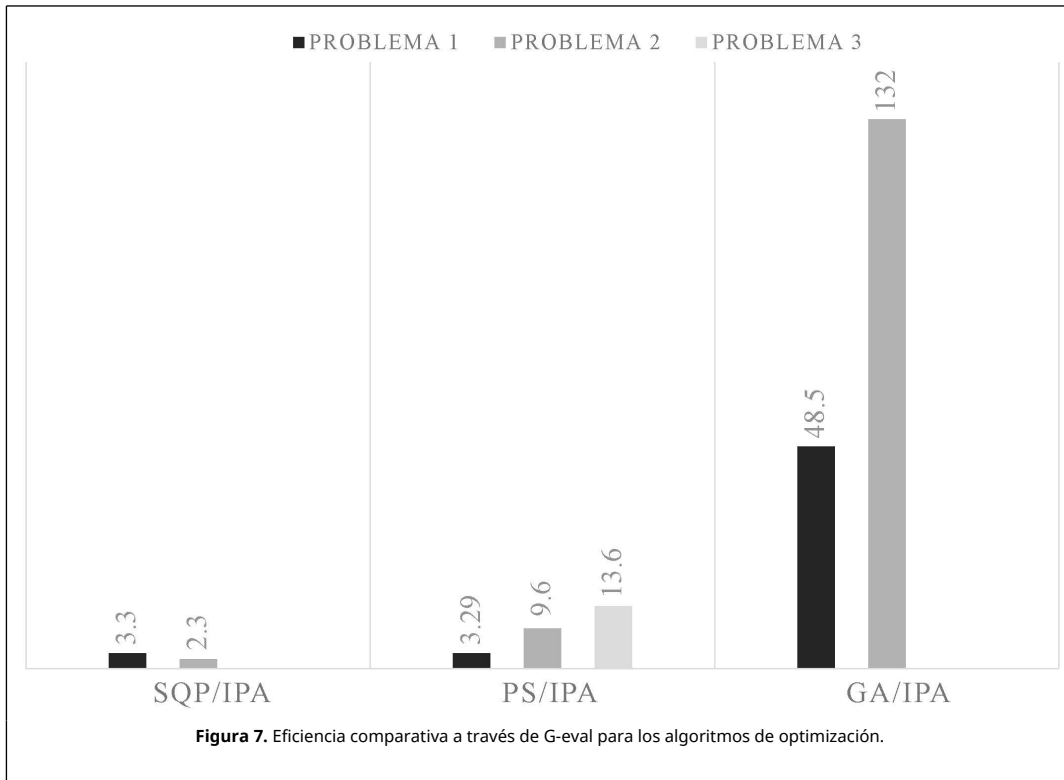
¹ Resultados de Cerrolio L.[22]. Nota: nc significa que el algoritmo no converge.



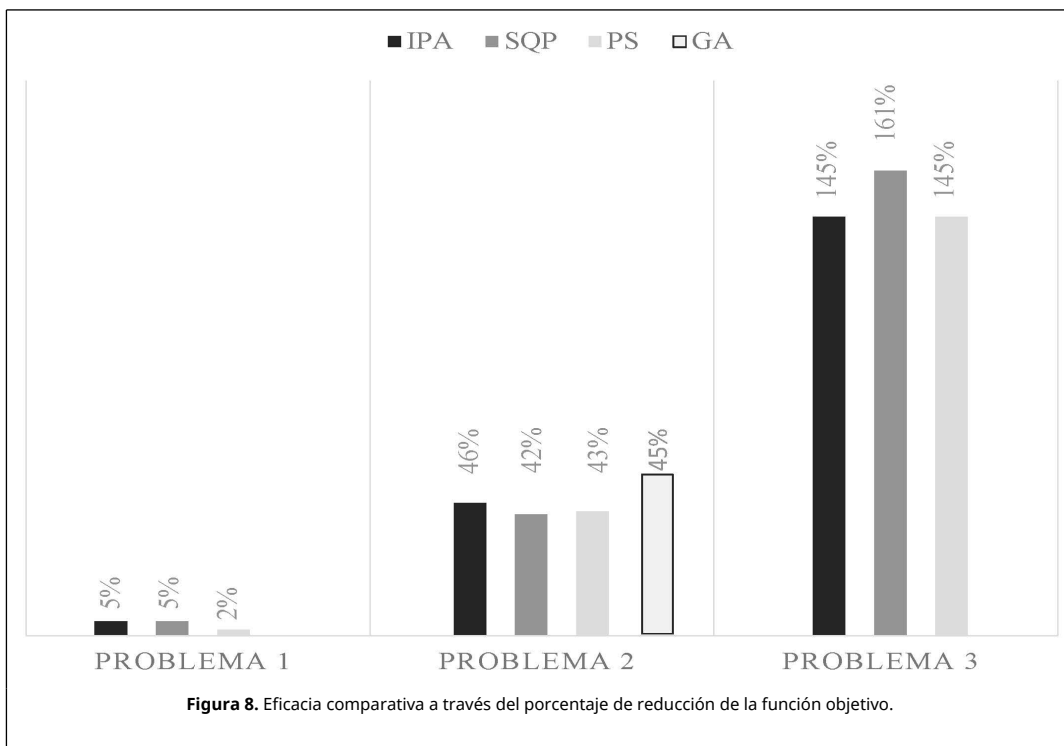
5. Resultados y discusiones

Los resultados obtenidos en los problemas de prueba implementados en este estudio se presentan en la sección 4, a través de tablas de resultados, gráficos de convergencia y un breve análisis de estos.

La comparación directa entre los tres algoritmos que se implementaron para los tres problemas de optimización estructural por *RBO* muestra que el algoritmo de optimización *Fmincon-IPA* (como *IPA*) fue el más eficiente al tener un menor costo computacional por requerir menos evaluaciones de las funciones de estado límite (G-eval), seguido por el algoritmo *PS* y finalmente el algoritmo *GA*. Al comparar estos resultados con los obtenidos por otros algoritmos disponibles en la literatura se ratifica que el algoritmo más eficiente sigue siendo *Fmincon-IPA*, seguido de *SQP*, *PS* y *GA*. Estos resultados comparativos de eficiencia computacional se observan claramente en el diagrama de barras de la *Figura 7*, que compara el cociente del G-eval de cada uno de los algoritmos de optimización y el G-eval del algoritmo más eficiente (el de menor G-eval).



La eficacia, definida como la capacidad de llegar al óptimo con precisión, puede cuantificarse al comparar los porcentajes de reducción de la función objetivo, obtenidos por cada algoritmo de optimización. Como se puede observar en la Figura 8, para los dos primeros problemas de prueba *IPA* fue el más eficaz, seguido de cerca por *SQP* y *PS*, al tener los mayores porcentajes. Para el tercer problema de prueba *IPA* y *PS* fueron los más eficaces al lograr el menor porcentaje de aumento de la función objetivo, seguido de cerca por *SQP*.



6. Conclusiones

En este trabajo se presenta un estudio comparativo del desempeño numérico de algoritmos de optimización representativos de las principales familias de algoritmos de optimización en la solución computacional de problemas de optimización estructural por *RBO*. Esta comparación ofrece la información suficiente para la selección de un algoritmo de optimización apropiado para aplicaciones de optimización estructural computacionalmente intensivas típicas de la *RBO*, teniendo en cuenta características como la eficiencia, eficacia y facilidad de implementación. Para problemas de optimización estructural por *RBO* de estructuras de pequeño porte, la familia de algoritmos de optimización basados en derivadas presentó la mayor eficiencia y eficacia computacional, seguido por la familia de algoritmos de optimización de búsqueda directa y por la familia de algoritmos de optimización bioinspirados basado en poblaciones de individuos. En relación a la facilidad de implementación, los algoritmos de optimización más fáciles de implementar son los de búsqueda directa y los bioinspirados; sin embargo, en relación a la facilidad de uso, todas las familias de algoritmos de optimización poseen parámetros particulares y criterios de convergencia que hacen que en general todos sean relativamente fáciles de usar.

Los algoritmos bioinspirados poblacionales presentan una característica particular que, si bien les puede permitir obtener óptimos globales, también los hace menos estables al involucrar mecanismos aleatorios en su funcionamiento y al no garantizar el cumplimiento de las restricciones en todo el proceso de optimización.

Dentro de las estrategias del cálculo de confiabilidad, los métodos aproximados de primer orden muestran resultados eficientes y precisos. Sin embargo, para potenciar su eficiencia y precisión se aconseja que, en caso de ser posible, se implementen en su versión analítica o semianalítica, disponiendo de las derivadas analíticas de las funciones de estado límite para cuantificar los índices de confiabilidad.

Las aplicaciones de optimización estructural por *RBO* para problemas en estructuras de grande porte es aún una tarea desafiante debido al alto costo computacional demandado. En esta área aún se esperan grandes progresos que permitan incrementar drásticamente la eficiencia computacional para poder abordar problemas de optimización estructural de mayor complejidad.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo económico que han recibido para la realización de este trabajo por parte de la Universidad Santo Tomás, a través de los proyectos del fondo de investigación FODEIN con códigos 003 del 2013 y 051 del 2014. También agradecen el apoyo recibido por la Universidad Nacional de Colombia.

Referencias

- [1] R. Reuven Y., Simulation and the Monte Carlo method, 1st ed., John Wiley & Sons., New York, 1981.
- [2] A.M. Hasofer, N.C. Lind, An Exact and Invariant First-order Reliability Format, J. Eng. Mech. Div. (1973) 111–121.
- [3] A. Der Kiureghian, H.-Z. Lin, S.-J. Hwang, Second-Order Reliability Approximations, J. Eng. Mech. 113 (1987) 1208–1225. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:8(1208).
- [4] V. Keshavarzadeh, H. Meidani, D.A. Tortorelli, Gradient based design optimization under uncertainty via stochastic expansion methods, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 306 (2016) 47–76. doi:10.1016/j.cma.2016.03.046.
- [5] V. Dubourg, B. Sudret, J.M. Bourinet, Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation, Struct. Multidiscip. Optim. 44 (2011) 673–690. doi:10.1007/s00158-011-0653-8.
- [6] B. Sudret, Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification, Fifth Asian-Pacific Symp. Struct. Reliab. Its Appl. (2012) 53–76.
- [7] Y. Aoues, A. Chateauneuf, Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization, Struct. Multidiscip. Optim. 41 (2009) 277–294. doi:10.1007/s00158-009-0412-2.
- [8] M.A. Valdebenito, G.I. Schuëller, A survey on approaches for reliability-based optimization, Struct. Multidiscip. Optim. 42 (2010) 645–663. doi:10.1007/s00158-010-0518-6.
- [9] O. Ditlevsen, P. Bjerager, Methods of Structural Systems Reliability, Struct. Saf. 3 (1986) 195–229. doi:10.1016/0167-4730(86)90004-4.
- [10] S.-K. Choi, R.V. Grandhi, R.A. Canfield, Reliability-based Structural Design, Springer, London, 2007.
- [11] C.A. Cornell, A probability-based structural code, J. Proc. 66 (1969) 974–985.
- [12] E. Nikolaidis, R. Burdisso, Reliability based optimization: A safety index approach, Comput. Struct. 28 (1988) 781–788. doi:10.1016/0045-7949(88)90418-X.
- [13] A.M. Hasofer, N.C. Lind, Exact and Invariant Second-Moment Code Format, J. Eng. Mech. Div. 100 (1974) 111–121.
- [14] R.H. Byrd, J.C. Gilbert, J. Nocedal, A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming, Math. Program. Ser. B. 89 (2000) 149–185. doi:10.1007/PL00011391.
- [15] R. Hooke, T.A. Jeeves, Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems, J. ACM. 8 (1961) 212–229. doi:10.1145/321062.321069.
- [16] T.G. Kolda, R.M. Lewis, V. Torczon, A generating set direct search augmented Lagrangian algorithm for optimization with a combination of general and linear constraints, Tech. Rep. SAND2006-5315, Sandia Natl. Lab. (2006) 44.
- [17] D.E. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, 1st ed., Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1989.

- [18] L.L. Corso, H.M. Gomes, G.P. Mezzomo, A. Molter, Otimização baseada em confiabilidade para uma célula de carga multiaxial utilizando algoritmos genéticos, Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 32 (2016) 221–229. doi:10.1016/j.rimni.2015.07.002.
- [19] E.E. Kostandyan, J.D. Sorensen, Reliability assessment of IGBT modules modeled as systems with correlated components, Proc. - Annu. Reliab. Maintainab. Symp. (2013) 1–6. doi:10.1109/RAMS.2013.6517663.
- [20] P.-E. AUSTRELL, O. DAHLBLOM, J. LINDEMANN, A. OLSSON, CALFEM-a finite element toolbox, version 3.4, Lund University, Sweden, 2004.
- [21] Y. Tsompanakis, N.D. Lagaros, M. Papadrakakis, Structural design optimization considering uncertainties (Structures and Infrastructures 1), Taylor & Francis, London, 2008.
- [22] L. Cerrolio, Metodología eficiente de optimización de diseño basada en fiabilidad aplicada a estructuras, Ph.D. Thesis, Universidad de la Rioja, Logroño, España, 2013.