

**UNIVERSIDAD SANTO
TOMAS - BOGOTÁ**

Problemas Resueltos de Métodos Numéricos (1)

Con uso de software CAS

Ing. Civil Carlos J. Alba Mendoza
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

PRESENTACION

En este documento se presenta la solución de dos problemas¹ en el contexto de la asignatura MÉTODOS NUMÉRICOS Y OPERACIONAL del plan de estudios del Programa de Ingeniería Civil de la Universidad Santo Tomás de Bogotá, y está dirigido a los estudiantes de dicho curso como un elemento de apoyo en su estudio.

En el primer problema se plantea y resuelve una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) para analizar el comportamiento del nivel de líquido de un tanque que tiene un abastecimiento de variación sinusoidal y el líquido es sacado a un flujo constante. En el segundo problema se determina el caudal en los diferentes tramos de una red de tubería en estado estacionario, mediante la solución por métodos numéricos de las ecuaciones que se plantean en cada tramo. En ambos casos se utilizan herramientas disponibles en EXCEL® y en el software matemático EULER MATH TOOLBOX (Maxima).

¹ Tomados de "Numerical Methods for Engineers", Chapra-Canale, 2010

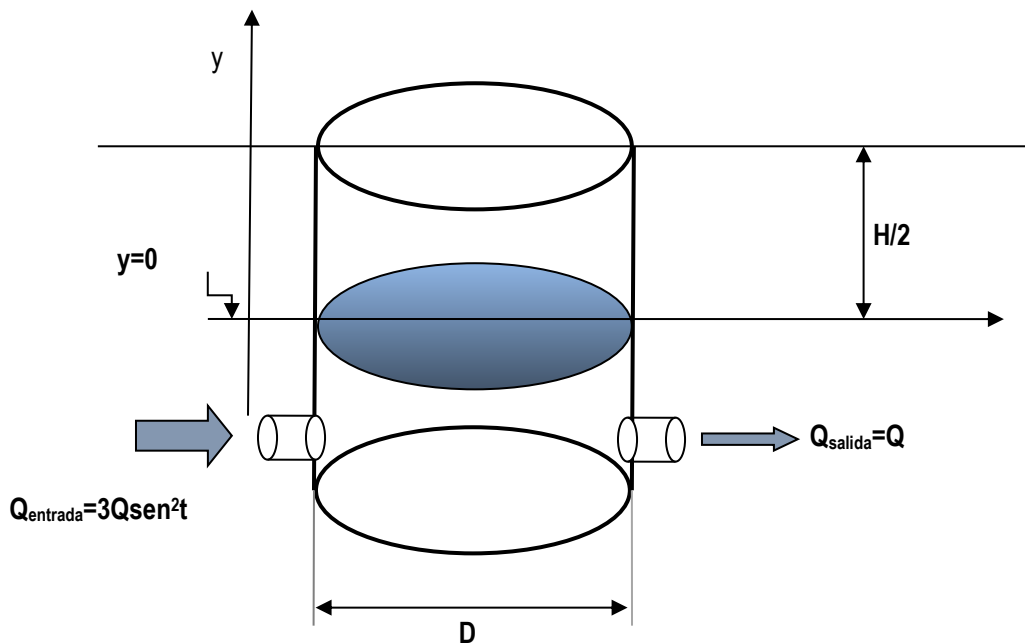
EJEMPLO DE UN MODELO MATEMATICO TANQUE DE ALMACENAMIENTO

Un tanque de almacenamiento contiene un líquido de altura y donde $y = 0$ cuando el tanque está medio lleno. El líquido es desalojado con una velocidad de flujo constante (caudal) Q para satisfacer la demanda. El contenido es reabastecido a una velocidad de flujo sinusoidal de $3Q\sin^2 t$.

: $Q=400 \text{ m}^3/\text{seg}$, $D=40 \text{ mt}$

Se pide:

1. Elaborar una gráfica de la variación del nivel del agua (y) de $t = 0$ a $t = 5 \text{ días}$
2. Determinar gráfica y analíticamente en qué momento de alcanzan y cuáles son los niveles mínimo y máximo del nivel del líquido al cabo de los cinco días.



Solución:

Ecuación General:

$$\frac{\text{Cambio de Volumen}}{\text{Unidad de tiempo}} = \text{Flujo de Entrada} - \text{Flujo de Salida}$$

$$\frac{dV}{dt} = 3Q\sin^2 t - Q$$

Pero: $Volumen = Area Transversal (A) * y$

Siendo Área Transversal (A) del tanque constante (por ser cilíndrico recto) podemos reescribir:

$$\frac{d(Ay)}{dt} = 3Q\sin^2 t - Q$$

$$A \frac{dy}{dt} = 3Q \sin^2 t - Q$$

$$Ec. (a) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{Q}{A} (3 \sin^2 t - 1)$$

Que es la ecuación diferencial que debemos resolver determinando una función $y(t)$ que la satisfaga.

Solución con EMT²:

Problema Tanque Almacenamiento (Qsalida constante)

a) Solución de EDO planteada

```
>:: altura:= ode2('diff(y,x)=(Q/A)*(3*(sin(x))^2-1),y,x)
```

$$y = \frac{3 \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) Q}{4A} + \%c$$

```
>:: ic1(altura,x=0,y=0), f(h):=rhs(%)
```

$$y = - \frac{(3 \sin(2x) - 2x) Q}{4A}$$

$$f(h) := - \frac{(3 \sin(2x) - 2x) Q}{4A}$$

Gráfica de la variación de altura para los datos del problema:

```
>Q:=400; D:=40; tttotal:=5;
>A:=pi*D^2/4;
>plot2d(:,f(h),a=0,b=tttotal, color=blue, title="Variación Altura Tanque",
...
xl="t (días)", yl="h (m)")
```

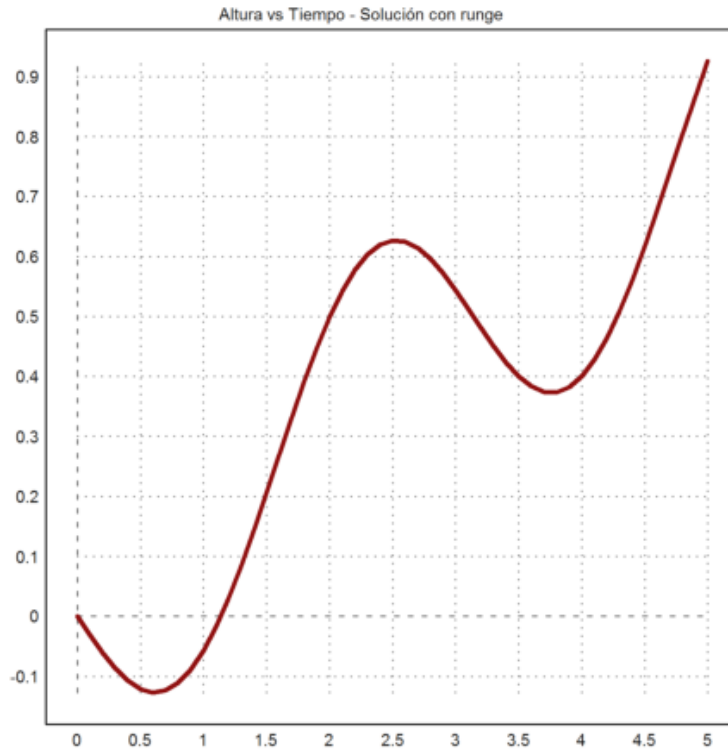
b) Solución numérica:

Se generan las abscisas (x) y se resuelve la EDO:

```
>x:=0:0.10:5;
>dydx:="(Q/A)*(3*(sin(x))^2-1)";
>y:=runge(dydx,x,0); // Se resuelve la EDO, es decir se generan las
ordenadas (y)
>plot2d(x,y,title="Altura vs Tiempo - Solución con runge", color=red) //
Se grafica x-y
>s:= heun(dydx,x,0);
```

² Software matemático CAS (licencia GPL) "Euler Math Toolbox", <http://www.euler-math-toolbox.de/>

```
>plot2d(x,s,title="Altura vs Tiempo - Solucion por Heun")
>t:= adaptiverunge(dydx,x,0);
>plot2d(x,t,title="Altura vs Tiempo - Solucion por Adaptativa",
color=green)
```



Así como los niveles pedidos:

- **Gráficamente** (o del resultado de cualquiera de las soluciones numéricas) se puede leer que:
 - $H_{\min.}$: 0.1270 m antes de 1 día (en $x=0.60$ día),
 - $H_{\max.}$: 0.9256 mt al final del 5to día.
- **Análíticamente** el primer valor ($H_{\min}$) en que la derivada es cero, es decir igualando la Ec.(a) a cero tenemos:

$$3\text{sen}^2 t - 1 = 0$$

$$\text{sen } t = \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow t = 0.61547970867 \text{ día}$$

El valor máximo ($H_{\max}$) se puede leer directamente para $t=5$.

Solución Numérica:

La solución numérica se plantea así mediante el método de Euler:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$$

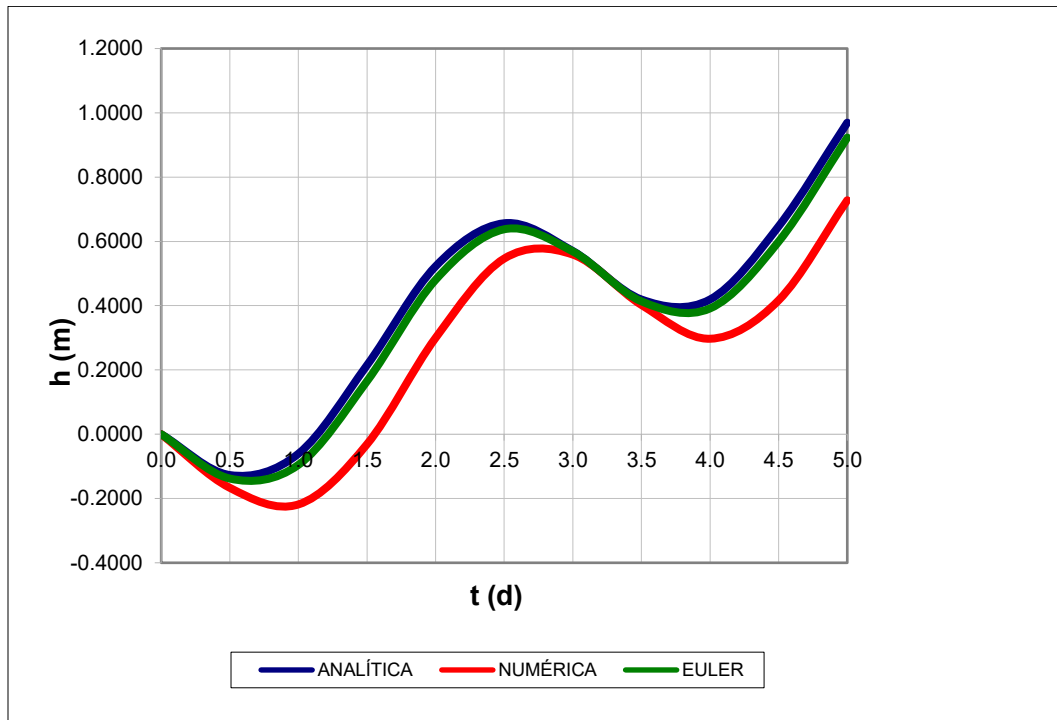
Por tanto:

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{Q}{A} (3\text{sen}^2 t - 1)$$

$$Ec. (b) \quad v_{i+1} = v_i + \left[\frac{Q}{A} (3\text{sen}^2 t - 1) \right] \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Se elabora la tabla y se grafica:

	ANALÍTICA	NUMÉRICA	EULER
t	y _a	y _n	
d	m	m	
0.0	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	-0.1270	-0.1667	-0.1378
1.0	-0.0607	-0.2184	-0.0953
1.5	0.2147	-0.0310	0.1651
2.0	0.5225	0.2998	0.4806
2.5	0.6564	0.5465	0.6377
3.0	0.5699	0.5590	0.5686
3.5	0.4191	0.4022	0.4135
4.0	0.4193	0.2971	0.3915
4.5	0.6470	0.4168	0.5995
5.0	0.9693	0.7279	0.9229



La Col(4) de la Tabla anterior se obtuvo mediante la definición de una función - que en este caso se denominó "Euler2(dt, ti, tf, yi, Q, A)" - en VBA de EXCEL®, para lo cual se accede al editor de VBA (ALT+F11) /Insertar Módulo y se digita el siguiente código:

```

Option Explicit
Function Euler2(dt, ti, tf, yi, Q, A)
Dim h As Double, t As Double, y As Double, dydt As Double
t = ti
y = yi
h = dt
Do
    If t + dt > tf Then
        h = tf - t
    End If
    dydt = dy2(t, y, Q, A)
    y = y + dydt * h
    t = t + h
    If t >= tf Then Exit Do
Loop
Euler2 = y
End Function
Function dy2(t, y, Q, A)
Const g As Double = 9.8066
dy2 = (Q / A) * (3 * (Sin(t)) ^ 2 - 1)
End Function
    
```

Esta función se invoca en la columna 4 (=Euler2(dt, ti, tf, yi, Q, A) que usa los parámetros definidos dt, ti, tf, yi, Q, A:

=Euler2(dt_2,B42,B43,E42,Q,A)				
B	C	D	E	F
	ANALÍTICA	NUMÉRICA	EULER	
t	Yanalitica	Ynumerica	Yeuler	
d	m	m		
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	
0.5	-0.1270	-0.1667	-0.1378	
1.0	-0.0607	-0.2184	-0.0953	
1.5	0.2147	-0.0310	0.1651	
2.0	0.5225	0.2998	0.4806	
2.5	0.6564	0.5465	0.6377	
3.0	0.5699	0.5590	0.5686	
3.5	0.4191	0.4022	0.4135	
4.0	0.4193	0.2971	0.3915	
4.5	0.6470	0.4168	0.5995	
5.0	0.9693	0.7279	0.9229	

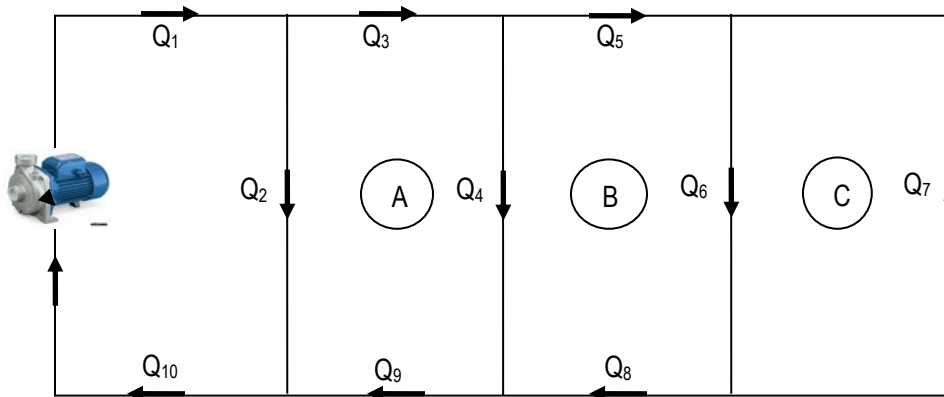
PROBLEMA: RED DE TUBERÍA

Un fluido se bombea como se muestra en la figura. En estado estacionario los balances de masa y de energía mecánica se pueden plantear con ecuaciones lineales. Utilizando métodos numéricos determinar el flujo en cualquier parte de la tubería, conocidos el diámetro del tubo (D) y longitud (L) de cada tramo, así como el flujo total (Q_1), el factor de fricción (f) y la densidad del fluido (ρ) (Ver tabla de datos).-

$$Q_1 = \text{Caudal inicial} = 1.00 \frac{m^3}{s};$$

$$\mu = \text{viscosidad dinámica} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{N \cdot s}{m^2};$$

$$\rho = \text{densidad del fluido} = 1.00 \frac{kg}{dm^3}$$



Datos:

Tramo	D (m)
1	1.0
2	1.0
3	1.0
4	1.0
5	1.0
7	1.0

Solución:

Consideramos las siguientes relaciones:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}; \quad V = \frac{Q}{A}; \quad Re = \frac{D\rho V}{\mu}$$

$$\text{Ecuación de Von Karman:} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log(Re\sqrt{f}) - 0.4$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$4.0 \frac{\log(Re\sqrt{f})}{\log(10)} - 0.4 - \frac{1}{\sqrt{f}} = 0$$

La caída de presión (ΔP) es:

$$\text{Caída Presión Unitaria: } \frac{\Delta P}{L} = f \frac{\rho v^2}{2D} = f \frac{\rho}{2D} \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4}$$

$$\text{Caída Presión Tramo: } \Delta P = \frac{16 f L \rho}{\pi^2 2D^5} Q^2$$

Planteamos las ecuaciones de balances de masa y de energía:

$$\begin{aligned} 1.00 &= Q_2 + Q_3 \\ Q_3 &= Q_4 + Q_5 \\ Q_5 &= Q_6 + Q_7 \\ Q_6 &= Q_6 + Q_7 \\ Q_8 &= Q_6 + Q_7 \rightarrow Q_8 = Q_5 \\ Q_9 &= Q_4 + Q_8 \rightarrow Q_9 = Q_3 \\ \text{Bucle A: } \Delta P_3 Q_3^2 + \Delta P_4 Q_4^2 + \Delta P_3 Q_3^2 - \Delta P_2 Q_2^2 &= 0 \\ \text{Bucle B: } \Delta P_5 Q_5^2 + \Delta P_6 Q_6^2 + \Delta P_5 Q_5^2 - \Delta P_4 Q_4^2 &= 0 \\ \text{Bucle C: } 3\Delta P_7 Q_7^2 - \Delta P_6 Q_6^2 &= 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que según lo anterior: tramo 8 equivale al tramo 5 y tramo 9 equivale a tramo 3, estas ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} \text{Ec. (1)} \quad 1 &= Q_2 + Q_3 \\ \text{Ec. (2)} \quad Q_3 &= Q_4 + Q_5 \\ \text{Ec. (3)} \quad Q_5 &= Q_6 + Q_7 \\ \text{Ec. (4)} \quad 2\Delta P_3 Q_3^2 + \Delta P_4 Q_4^2 - \Delta P_2 Q_2^2 &= 0 \\ \text{Ec. (5)} \quad 2\Delta P_5 Q_5^2 + \Delta P_6 Q_6^2 - \Delta P_4 Q_4^2 &= 0 \\ \text{Ec. (6)} \quad 3\Delta P_7 Q_7^2 - \Delta P_6 Q_6^2 &= 0 \end{aligned}$$

Para la solución de este sistema consideramos la pérdida unitaria de presión para cada tramo:

Solución en Excel:

Datos:

Caudal inicial:	$Q_1 =$	1.0	m ³ /s
Viscosidad dinámica:	$\mu =$	0.0001	N s/m ²
Densidad:	$\rho =$	1	ton/m ³

Se elabora la siguiente tabla con valores arbitrarios de Q (de Tramo 2 a Tramo 7) a fin de establecer una plantilla que nos permita aplicar el SOLVER:

Col.(1)	Col.(2)	Col.(3)	Col.(4)	Col.(5)	Col.(6)	Col.(7)	Col.(8)
Tramo	D (m)	Area(m ²) $= \frac{\pi D^2}{4}$	Q (m ³ /s)	V (m/s) $= \frac{Q}{A}$	Re $= \frac{D \rho V}{\mu}$	f (función FalsePos)	$\Delta P = f \frac{\rho v^2}{2D}$
1	1.000	0.7854	1.0000	1.27323954	12,732	0.0072544	0.0058802
2	1.000	0.7854	0.5000	0.63661977	6,366	0.0087372	0.0017705

UNIVERSIDAD SANTO TOMAS- FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

Col.(1)	Col.(2)	Col.(3)	Col.(4)	Col.(5)	Col.(6)	Col.(7)	Col.(8)
Tramo	D (m)	Area(m ²) $=\frac{\pi D^2}{4}$	Q (m ³ /s)	V (m/s) $=\frac{Q}{A}$	Re $=\frac{D\rho V}{\mu}$	f (función FalsePos)	$\Delta P = f \frac{\rho v^2}{2D}$
3	1.000	0.7854	0.5000	0.63661977	6,366	0.0087372	0.0017705
4	1.000	0.7854	0.5000	0.63661977	6,366	0.0087372	0.0017705
5	1.000	0.7854	0.5000	0.63661977	6,366	0.0087372	0.0017705
6	1.000	0.7854	0.5000	0.63661977	6,366	0.0087372	0.0017705
7	1.000	0.7854	0.5000	0.63661977	6,366	0.0087372	0.0017705

Se plantea el sistema de ecuaciones (balances de masa y de energía) en la plantilla de Excel (su resultado para los valores arbitrarios se muestran en la columna RHS):

			RHS	(RHS) ²
Ec.(1)	Q2+Q3-Q1	=	0.00	0.0000E+00
Ec.(2)	Q4+Q5-Q3	=	0.5000	2.5000E-01
Ec.(3)	Q6+Q7-Q5	=	0.5000	2.5000E-01
Ec.(4)	2ΔP3+ΔP4-ΔP2	=	0.003541057	1.2539E-05
Ec.(5)	2ΔP5+ΔP6-ΔP4	=	0.003541057	1.2539E-05
Ec.(6)	3ΔP7-ΔP6	=	0.003541057	1.2539E-05
			Suma:	5.0004E-01

Función Objetivo=0

Los valores de la columna RHS se elevan al cuadrado [columna (RHS)²] y su suma, que debe ser 0, define la celda objetivo del solver.

Como restricciones se toma:

$$0 < Q_i(\text{col. 4}) < Q_1(\text{dato})$$

(es decir que los valores de Q de tramos 2 a 7 deben satisfacer la desigualdad anterior.

Los parámetros del SOLVER son:

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: ☐ Máx ☐ Mín ☒ Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Cálculo de f (factor de fricción):

La columna 7 de la tabla anterior se calcula buscando la raíz de la ecuación de von Karman citada, es decir el valor de f que satisfaga la siguiente ecuación:

$$4.0 \frac{\log(Re\sqrt{f})}{\log(10)} - 0.4 - \frac{1}{\sqrt{f}} = 0$$

Para ello se crea una función en EXCEL mediante VBA, utilizando en este caso un algoritmo del método de la "falsa posición" (regula falsi). Primero se accede al editor de VBA (ALT+F11) /Insertar Módulo y se digita el siguiente código:

```
Option Explicit
Function FalsePos(Re)
Dim iter As Integer, imax As Integer
Dim il As Integer, iu As Integer
Dim xrold As Single, fl As Single, fu As Single, fr As Single
Dim xl As Single, xu As Single, es As Single
Dim xr As Single, ea As Single

xl = 0.00001
xu = 1
es = 0.01
imax = 40
```

```

iter = 0
fl = f(xl, Re)
fu = f(xu, Re)
Do
    xrold = xr
    xr = xu - fu * (xl - xu) / (fl - fu)
    fr = f(xr, Re)
    iter = iter + 1
    If xr <> 0 Then
        ea = Abs((xr - xrold) / xr) * 100
    End If
    If fl * fr < 0 Then
        xu = xr
        fu = f(xu, Re)
        iu = 0
        il = il + 1
        If il >= 2 Then fl = fl / 2
    ElseIf fl * fr > 0 Then
        xl = xr
        fl = f(xl, Re)
        il = 0
        iu = iu + 1
        If iu >= 2 Then fu = fu / 2
    Else
        ea = 0
    End If
    If ea < es Or iter >= imax Then Exit Do
Loop
FalsePos = xr
End Function

Function f(x, Re)
f = 4 * Log(Re * Sqr(x)) / Log(10) - 0.4 - 1 / Sqr(x)
End Function

```

Esta función se invoca en la columna 7 [=FalsePos(Re)] que usa el valor de “Re” calculado en la columna inmediatamente anterior (columna 6).

En la Tabla de resultados se puede comprobar que los Q calculados satisfacen las ecuaciones de balance de masa y energía que se plantearon.:

Tramo	D (m)	Area (m ²)	Q(m ³ /s)	V (m/s)	Re	f	ΔP
1	1.0000	0.7854	1.0000	1.27324	12,732	0.00725	0.005880
2	1.0000	0.7854	0.6449	0.82116	8,212	0.00815	0.002746
3	1.0000	0.7854	0.3551	0.45208	4,521	0.00963	0.000984
4	1.0000	0.7854	0.1348	0.17165	1,717	0.01301	0.000192
5	1.0000	0.7854	0.2202	0.28038	2,804	0.01112	0.000437
6	1.0000	0.7854	0.0334	0.04248	425	0.02171	0.000020
7	1.0000	0.7854	0.1868	0.23787	2,379	0.01171	0.000331

UNIVERSIDAD SANTO TOMAS- FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

EXTRAER : =FalsePos(F1526)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1516																
1517	Caudal inicial:		Q1=	1	m ³ /s											
1518	Viscosidad dinámica:		μ=	0.0001	N s/m ²											
1519	Densidad:		ρ=	1	ton/m ³											
1520																
1521																
1522																
1523																
1524																
1525	Tramo	D (m)	Area (m ²)	Q (m ³ /s)	V (m/s)	Re	f	ΔP								
1526	1	1.0000	0.7854	1.0000	1.27324	12.732	=FalsePos(F1526)									
1527	2	1.0000	0.7854	0.6449	0.82116	8.212	0.00815	0.002746								
1528	3	1.0000	0.7854	0.3551	0.45208	4.521	0.00963	0.000984								
1529	4	1.0000	0.7854	0.1348	0.17165	1.717	0.01301	0.000192								
1530	5	1.0000	0.7854	0.2202	0.28038	2.804	0.01112	0.000437								
1531	6	1.0000	0.7854	0.0334	0.04248	425	0.02171	0.000020								
1532	7	1.0000	0.7854	0.1868	0.23787	2.379	0.01171	0.000331								
1533																
1534	Sistema de Ecuaciones:															
1535						RHS	(RHS) ²									
1536	Ec.(1)	Q2+Q3-Q1	=		0.00	1.3035E-14										
1537	Ec.(2)	Q4+Q5-Q3	=		0.0000	1.5063E-09										
1538	Ec.(3)	Q6+Q7-Q5	=		0.0000	7.7946E-10										
1539	Ec.(4)	2ΔP3+ΔP4-ΔP2	=		-0.00058595	3.4334E-07										
1540	Ec.(5)	2ΔP5+ΔP6-ΔP4	=		0.000702071	4.9290E-07										
1541	Ec.(6)	3ΔP7-ΔP6	=		-0.00027242	7.4213E-08										
1542					Suma:	9.1274E-07										

Caída Presión Unitaria: $\frac{\Delta P}{L} = f \frac{\rho v^2}{2D}$

Para calcular "f" se crea una función en EXCEL mediante VBA, utilizando (en este caso) un algoritmo del método de la "falsa posición" (regula falsi). Primero se accede al editor de VBA (ALT+F11) /Insertar Módulo y se digita el correspondiente código. Al volver a la hoja de trabajo, la función se invoca con el nombre y parametros definidos (FalsePos en este caso).

Parámetros de Solver

Establecer objetivo: **\$H\$1543**

Para: ☐ Máx ☐ Mín ☒ Valor de: **0**

Cambiando las celdas de variables: **\$D\$1527:\$D\$1532**

Sujeto a las restricciones:

\$D\$1527:\$D\$1532 <= \$D\$1526
\$D\$1527:\$D\$1532 >= 0