UNIVERSIDAD SANTO TOMAS - BOGOTÁ

SOLUCIÓN EDO TIPOS f(x) Y f(x,y)

Con uso de software EULER MATH TOOLBOX (EMT)

Ing. Carlos J. Alba Mendoza
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

PRESENTACION

Se presenta la solucion de dos tipos de EDO lineales por los metodos de Euler, Heun, Punto Medio y Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4). Las fórmulas a que se hace mención para la elaboración de las tablas (desarrolladas en EXCEL ®) corresponden a las del curso de OPERACIONAL Y NUMÉRICOS en el dcoumento "Fórmulas y Contenido" subido a la plataforma MOODLE.

Dichas fórmulas son[1]:

$$Ecuación\ de\ Euler\ (5.1) \qquad y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i * h$$

$$Ec.(5.2) \qquad y_{i+1}^0 = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i * h$$

$$Ec.(5.3) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1} = f'(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$$

$$Ec.(5.4) \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{f'(x_i, y_i) + f'(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} * h$$

$$Ec.(5.5) \qquad y_{i+1/2} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i * \frac{h}{2}$$

$$Ec.(5.6) \qquad y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1/2} * h$$

$$Ec.(5.7a) \qquad k_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_i = f'(x_i, y_i)$$

$$Ec.(5.7b) \qquad k_2 = f'(x_{i+h/2}, y_{i+k_1 h/2})$$

$$Ec.(5.7c) \qquad k_3 = f'(x_{i+h/2}, y_{i+k_2 h/2})$$

$$Ec.(5.7d) \qquad k_4 = f'(x_{i+h}, y_{i+k_3 h})$$

$$Ec.(5.7) \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Por otra parte se ha utilizado el software matemático (CAS) EULER MATH TOOLBOX (EMT), desarrollado por el Profesor René Grothmann de la Universidad Católica de Eichstatt basado en el software MAXIMA. El software EMT tiene licencia GPL.[2]

[1] Adaptadas de: Chapra S., Canale R., MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS,6ta Ed.,McGraw Hill.
[2] http://www.euler-math-toolbox.de/

Ejemplos Solución de EDO Tipo y'=f(x)

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = 1 - e^{-x}$$

Condición inicial:

$$y_0 = 1$$

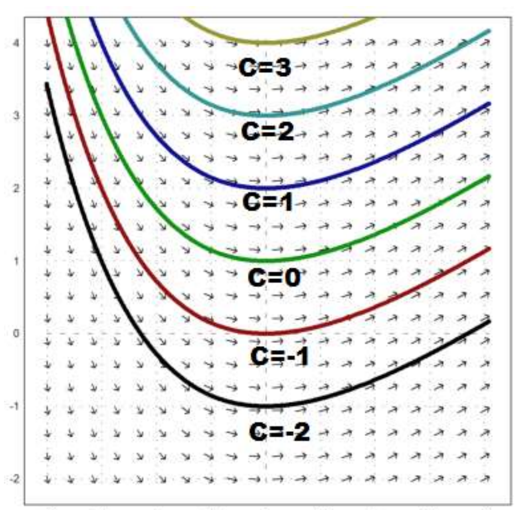
Intervalo: $-2 \geq x \leq 2$

La solución analítica encontrada da el $y_{verdadero}$:

$$y_{verd} = x + e^{-x}$$

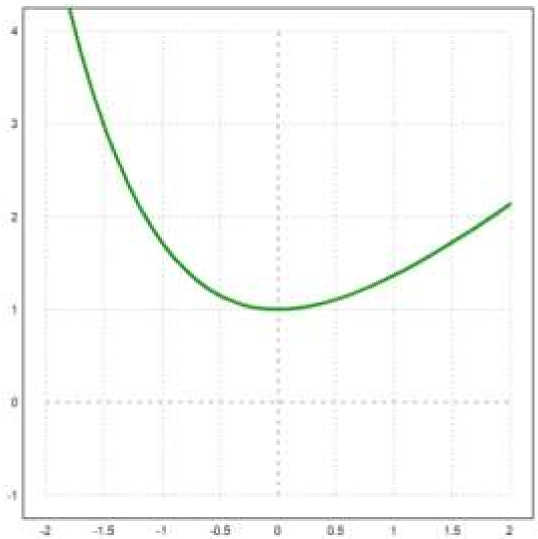
SOLUCION ANALITICA (SIMBÓLICA) CON EMT:

```
>:: dydx1:=ode2('diff(y,x)=1-%e^(-x),y,x)
                             - x
                        y = E    + x + %c

>:: ic1(dydx1, x=0,y=1)
                            - x     x
                       y = E    (x E  + 1)

Campo de vectores:
>vectorfield("1-%e^(-x)",-2,2,-2,4)

Gráfica de las soluciones:
>x:=-2:0.1:2; for i=-2 to 4; plot2d("%e^(-x)+x+i", thickness=4,color=i+3,
>add); end:
```



La solución particular, es decir para las condiciones iniciales dadas, corresponde a la curva: c=0.

```
SOLUCIÓN NUMÉRICA CON EMT
(solución particular para la condición inicial))
>dydx:="1-%e^(-x)";
>x:=0:0.1:2;
>y1:=runge(dydx,x,1);
>plot2d(x,y1,a=-2,b=2,c=-1,d=4,color=green, thickness=3)
>x:=0:-0.1:-2;
>y2:=runge(dydx,x,1);
>plot2d(x,y2,color=green, thickness=3, >add):
```

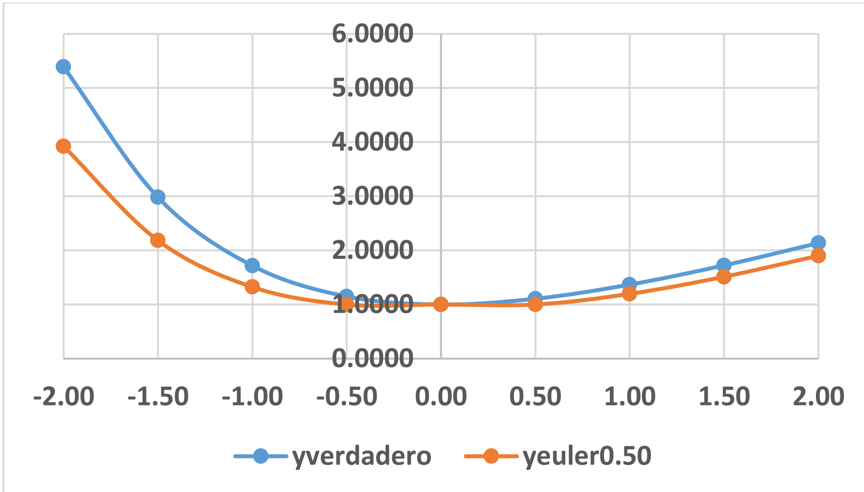


1) **MÉTODO DE EULER**:

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5, y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

X	$y_{verdadero}$	Ec.(5.1) $y_{euler0.50}$	[dy/dx]i	Error
-2.00	5.38906	3.92435		
-1.50	2.98169	2.18350	-3.48169	26.8%
-1.00	1.71828	1.32436	-1.71828	22.9%
-0.50	1.14872	1.00000	-0.64872	12.9%
0.00	1.00000	1.00000	0.00000	0.0%
0.50	1.10653	1.00000	0.39347	9.6%
1.00	1.36788	1.19673	0.63212	12.5%
1.50	1.72313	1.51279	0.77687	12.2%
2.00	2.13534	1.90123	0.86466	11.0%

En la Tabla anterior debe tenerse presente que en la rama izquierda o negativa (de -2.00 a 0.00) la Ec.(5.1) debe ajustarse cambiándole el signo para que sume los valores, toda vez que la pendiente es negativa. La comparacion gráfica se presenta en la siguiente figura:



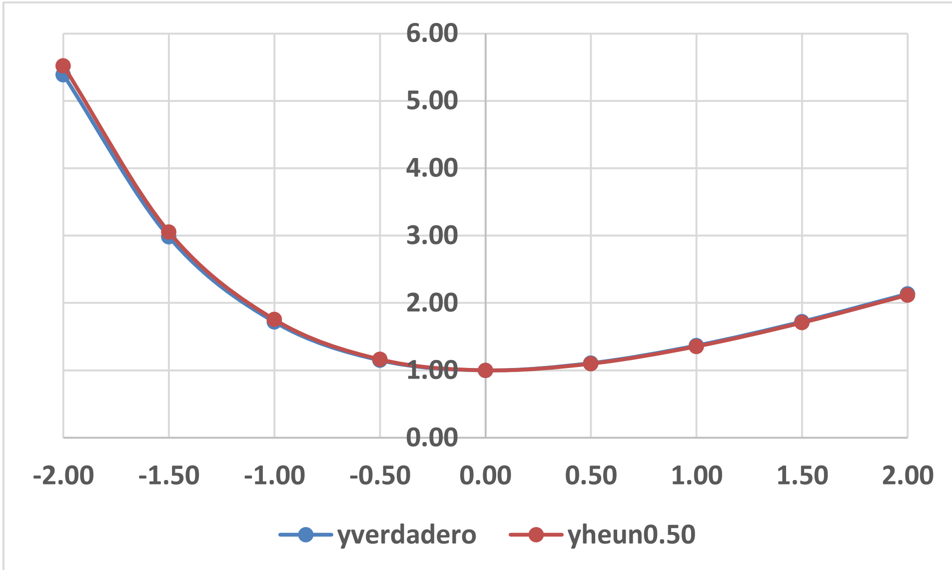
Este procedimiento lo podemos repetir con un tamaño de paso h=0.25 y aunque mejora la precisión el error continua siendo alto.

2) METODO DE HEUN:

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5, y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

x		Ec.5.2	Ec.5.3	Ec.5.4	Error
	$y_{verdadero}$	y^0_{i+1}	$[dy/dx]_{i+1}$	$y_{heun0.50}$	
-2.00	5.38906	3.92435	-6.38906	5.5216	2.5%
-1.50	2.98169	2.18350	-3.48169	3.0539	2.4%
-1.00	1.71828	1.32436	-1.71828	1.7539	2.1%
-0.50	1.14872	1.00000	-0.64872	1.1622	1.2%
0.00	1.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.0%
0.50	1.10653	1.0000	0.39347	1.0984	0.7%
1.00	1.36788	1.2951	0.63212	1.3548	1.0%
1.50	1.72313	1.6708	0.77687	1.7070	0.9%
2.00	2.13534	2.0954	0.86466	2.1174	0.8%

En la Tabla anterior debe tenerse presente que en la rama izquierda o negativa (de -2.00 a 0.00) la Ec.(5.4) debe ajustarse cambiándole el signo para que sume los valores, toda vez que la pendiente es negativa. La comparacion gráfica se presenta en la siguiente figura, en la cual se aprecia el grado de precisión de éste método:

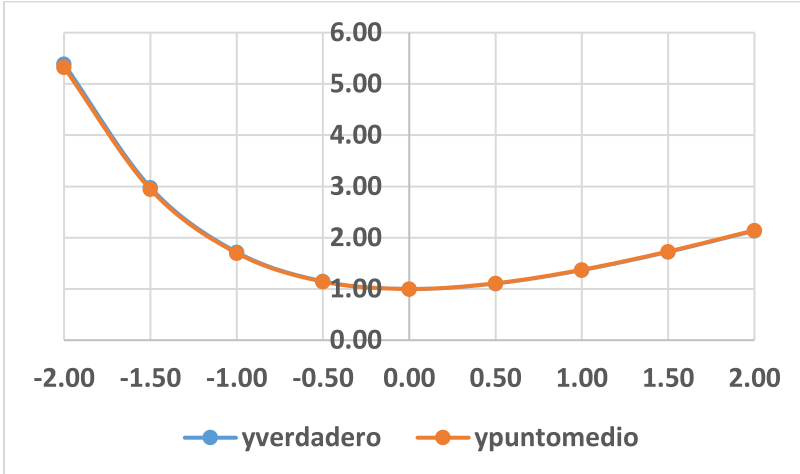


3) MÉTODO DEL PUNTO MEDIO

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5, y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

x				Ec.5.5		Ec.5.6	Error
	$y_{verdadero}$	$[dy/dx]_i$	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	$[dy/dx]_{i+1/2}$	$y_{puntomedio}$	
-2.00	5.38906	-6.38906				5.32299	1.2%
-1.50	2.98169	-3.48169	-1.75	6.92025	-4.75460	2.94568	1.2%
-1.00	1.71828	-1.71828	-1.25	3.81611	-2.49034	1.70051	1.0%
-0.50	1.14872	-0.64872	-0.75	2.13008	-1.11700	1.14201	0.6%
0.00	1.00000	0.00000	-0.25	0.97983	-0.28403	1.00000	0.0%
0.50	1.10653	0.39347	0.25	1.00000	0.22120	1.11060	0.4%
1.00	1.36788	0.63212	0.75	1.20897	0.52763	1.37442	0.5%
1.50	1.72313	0.77687	1.25	1.53245	0.71350	1.73116	0.5%
2.00	2.13534	0.86466	1.75	1.92538	0.82623	2.14428	0.4%

En la Tabla anterior debe tenerse presente que en la rama izquierda o negativa (de -2.00 a 0.00) las Ec.(5.5) y (5.6) deben ajustarse cambiándole el signo para que sume los valores, toda vez que la pendiente es negativa. La comparacion gráfica se presenta en la siguiente figura, en la cual se aprecia el grado de precisión de éste método:



Se observa que en este método se alcanza una mayor precisión con respecto a los métodos anteriores, puesto que los valores de los errores son del porden de la mitad de método Heun.

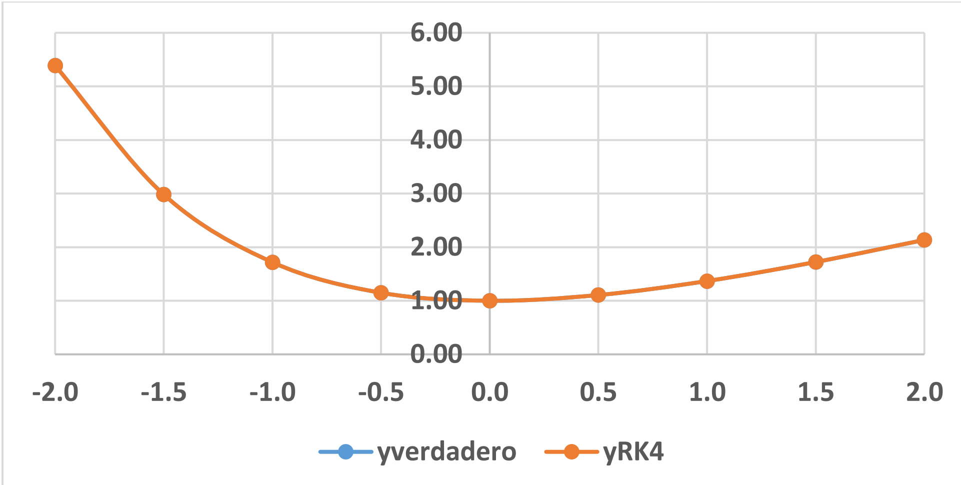
4) **METODO RK4:**

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5, y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

x	$y_{verdadero}$	Ec.(5.7a) $k_1 = y'_i$	xi + h/2	$y_i + k_1h/2$	Ec.(5.7b) k_2	$y_i + k_2h/2$
-2.00	5.3891	-6.3891	-1.7500			
-1.50	2.9817	-3.4817	-1.2500	6.9865	-4.7546	6.5778
-1.00	1.7183	-1.7183	-0.7500	3.8522	-2.4903	3.6043
-0.50	1.1487	-0.6487	-0.2500	2.1479	-1.1170	1.9976
0.00	1.0000	0.0000	0.2500	1.3109	-0.2840	1.2197
0.50	1.1065	0.3935	0.7500	1.0000	0.2212	1.0553
1.00	1.3679	0.6321	1.2500	1.2049	0.5276	1.2384
1.50	1.7231	0.7769	1.7500	1.5259	0.7135	1.5462
2.00	2.1353	0.8647	2.2500	1.9173	0.8262	1.9297

Ec.(5.7c) k_3	$x_i + h$	$y_i + k_3h$	Ec.(5.7d) k_4	Ec.(5.7) y_{RK4}	Error
				5.3892	0.0%
-4.7546	-1.5000	7.7665	-3.4817	2.9818	0.0%
-2.4903	-1.0000	4.2269	-1.7183	1.7183	0.0%
-1.1170	-0.5000	2.2768	-0.6487	1.1487	0.0%
-0.2840	0.0000	1.2907	0.0000	1.0000	0.0%
0.2212	0.5000	1.1106	0.3935	1.1065	0.0%
0.5276	1.0000	1.3703	0.6321	1.3679	0.0%
0.7135	1.5000	1.7246	0.7769	1.7231	0.0%
0.8262	2.0000	2.1362	0.8647	2.1353	0.0%

En la Tabla anterior debe tenerse presente que en la rama izquierda o negativa (de -2.00 a 0.00) las Ec.(5.7) deben ajustarse cambiándole el signo para que sume los valores, toda vez que la pendiente es negativa. La comparacion gráfica se presenta en la siguiente figura:



Como se observa en las tablas y gráficos anteriores, este método es el que representa la mayor exactitud.

Ejemplos Solución de EDO Tipo y'=f(x,y)

Resolver la EDO:

$$Ec.(a) \qquad \frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

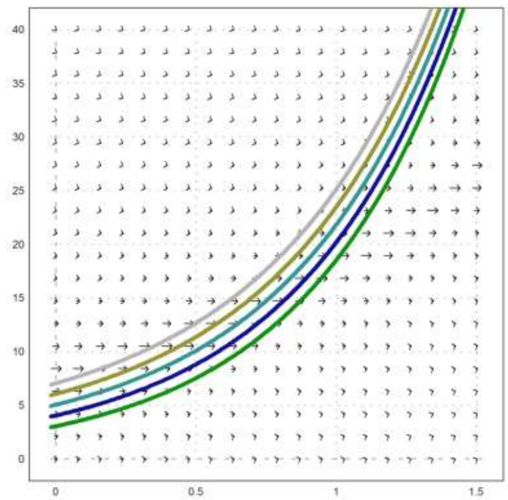
$$Rango \quad : \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$Condición\ inicial: \quad y_{(0)} = 2.$$

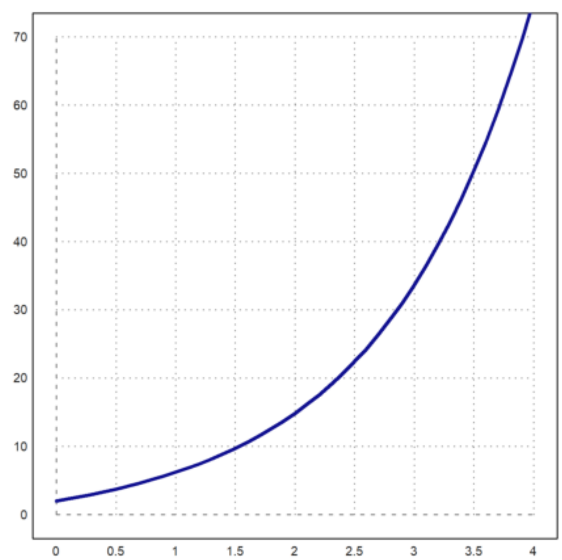
SOLUCIÓN ANALÍTICA (SIMBÓLICA) CON EMT:

```
>& dydx1:=ode2('diff(y,x)=4*%e^(0.8*x)-0.5*y,y,x)
                                       13 x
                                       ----
                                        10
                          - x/2  40 E
                    y = E       (-------- + %c)
                                    13
>& ic1(dydx1, x=0,y=2)
                                       13 x
                                       ----
                          - x/2         10
                        E       (40 E      - 14)
                    y = ----------------------
                                   13
Campo de vectores:
```

```
>vectorfield("4*%e^(0.8*x)-0.5*y",0,2,0,70)

Gráfica de las soluciones:
>x:=0:0.1:4; for i=0 to 4; plot2d("(%e^(0.5*x))*((40*%e^(1.3*x))/13+i)",
thickness=4,color=i+3, >add); end;
```




```
SOLUCIÓN NUMÉRICA
(solución particular para la condición inicial))
>dydx:="4*%e^(0.8*x)-0.5*y";
>x:=0:0.1:4;
>y1:=runge(dydx,x,2);
>plot2d(x,y1,a=0,b=4,c=0,d=70,color=blue, thickness=3):
```



La solución analítica encontrada da el $y_{verdadero}$:

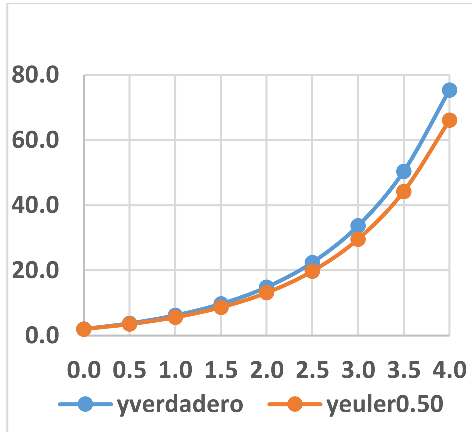
$$y_{verd} = \frac{e^{-0.5x}}{13} \cdot [40e^{1.3x} - 14]$$

1) MÉTODO DE EULER:

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5, y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

x	$y_{verdadero}$	Ec.(5.1) $y_{euler0.50}$	$[dy/dx]_i$	Error
0.0000	2.0000	2.0000	3.0000	
0.5000	3.7515	3.5000	4.2173	6.7%
1.0000	6.1946	5.6086	6.0978	9.5%
1.5000	9.7070	8.6576	8.9517	10.8%
2.0000	14.8439	13.1334	13.2454	11.5%
2.5000	22.4270	19.7561	19.6782	11.9%
3.0000	33.6772	29.5952	29.2951	12.1%
3.5000	50.4118	44.2428	43.6572	12.2%
4.0000	75.3390	66.0714	65.0944	12.3%

1 - Método de Euler

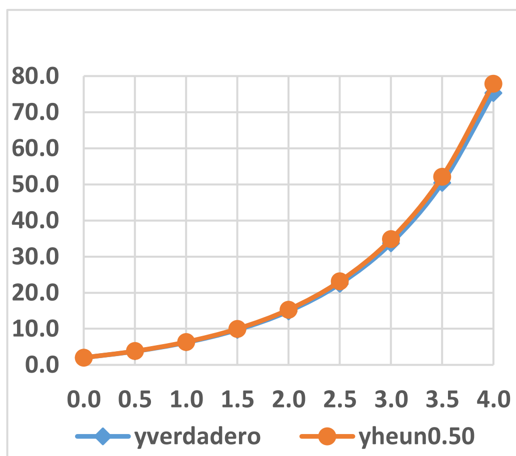


2) METODO DE HEUN:

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5, y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

x	$y_{verdadero}$	Ec.(5.2) y^0_{i+1}	Ec.(5.3) $[dy/dx]_{i+1}$	Ec.(5.4) $y_{heun0.50}$	Error
0.00	2.0000		3.0000	2.0000	0.0%
0.50	3.7515	3.5000	4.2173	3.8043	1.4%
1.00	6.1946	5.9130	5.9457	6.3451	2.4%
1.50	9.7070	9.3179	8.6215	9.9869	2.9%
2.00	14.8439	14.2976	12.6633	15.3081	3.1%
2.50	22.4270	21.6397	18.7364	23.1580	3.3%
3.00	33.6772	32.5262	27.8296	34.7995	3.3%
3.50	50.4118	48.7143	41.4214	52.1123	3.4%
4.00	75.3390	72.8230	61.7186	77.8973	3.4%

.2 - Metodo de Heun

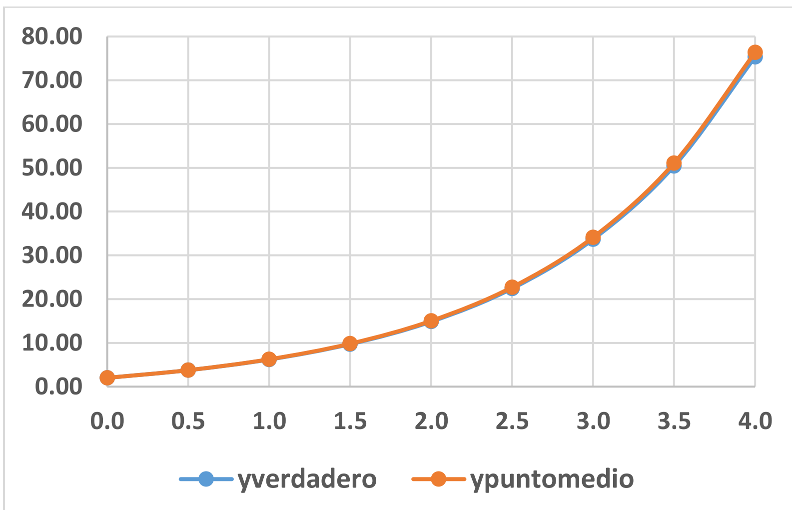


Como se esperaba, en este caso el error es mucho menor que en el método de Euler y la curva obtenida se ajusta mucho mejor a la teórica (verdadera).

3) MÉTODO DEL PUNTO MEDIO

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5, y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

x	$y_{verdadero}$	$x_{i+1/2}$	Ec.5.5	$[dy/dx]_{i+1/2}$	Ec.5.6	Error
			$y_{i+1/2}$		$y_{puntomedio}$	
0.00	2.00000			3.0000	2.00000	0.0%
0.50	3.75152	0.25	2.7500	3.5106	3.75531	0.1%
1.00	6.19463	0.75	4.6330	4.9720	6.24130	0.8%
1.50	9.70704	1.25	7.4843	7.1310	9.80679	1.0%
2.00	14.84392	1.75	11.5895	10.4260	15.01981	1.2%
2.50	22.42701	2.25	17.6263	15.3854	22.71252	1.3%
3.00	33.67717	2.75	26.5589	22.8206	34.12283	1.3%
3.50	50.41177	3.25	39.8280	33.9410	51.09331	1.4%
4.00	75.33896	3.75	59.5786	50.5529	76.36975	1.4%



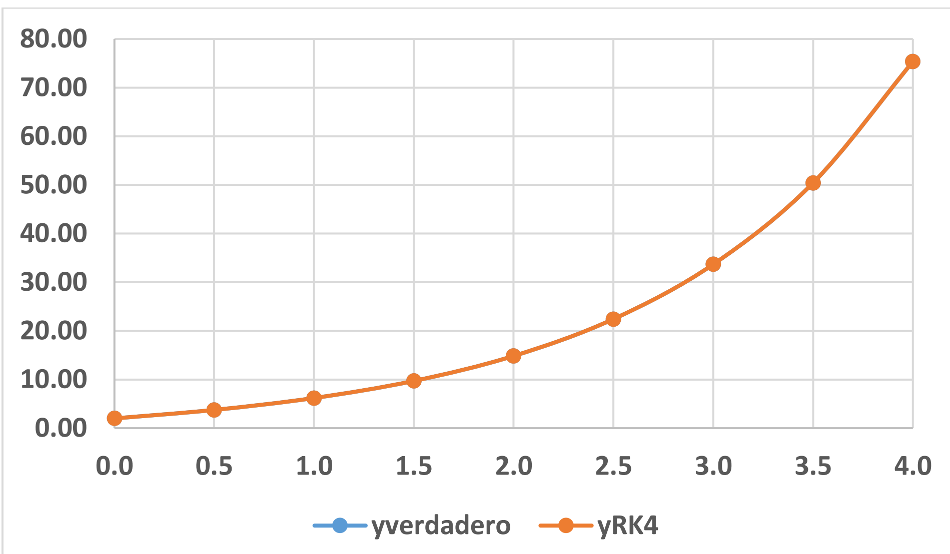
4) METODO RK4:

Se elabora la tabla de cálculo (con un tamaño de paso h=0.5), y se comparan gráficamente los resultados analítico y numerico:

x	$y_{verdadero}$	Ec.(5.7a)	$x_i + h/2$	$y_i + k_1h/2$	Ec.(5.7b)	$y_i + k_2h/2$
		$k_1 = y'_i$			k_2	
0.00	2.00000					
0.50	3.75152	3.0000	0.25	2.75000	3.5106	2.87765
1.00	6.19463	4.0914	0.75	4.77456	4.9012	4.97700
1.50	9.70704	5.8046	1.25	7.64620	7.0500	7.95755
2.00	14.84392	8.4266	1.75	11.81442	10.3136	12.28617
2.50	22.42701	12.3896	2.25	17.94250	15.2273	18.65194
3.00	33.67717	18.3418	2.75	27.01431	22.5929	28.07708

x	$y_{verdadero}$	Ec.(5.7a) $k_1 = y'_i$	$x_i + h/2$	$y_i + k_1h/2$	Ec.(5.7b) k_2	$y_i + k_2h/2$
3.50	50.41177	27.2527	3.25	40.49316	33.6084	42.08208
4.00	75.33896	40.5706	3.75	60.55866	50.0628	62.93172

Ec.(5.7c) k3	xi + h	yi + k3h	Ec.(5.7d) k4	Ec.(5.7) yRK4	Error
				2.0000	0.0000%
3.4468	0.50	3.72339	4.1056	3.7517	0.0047%
4.8000	1.00	6.15169	5.8263	6.1950	0.0066%
6.8944	1.50	9.64222	8.4594	9.7078	0.0075%
10.0777	2.00	14.74663	12.4388	14.8451	0.0080%
14.8726	2.50	22.28142	18.4155	22.4289	0.0082%
22.0615	3.00	33.45961	27.3629	33.6800	0.0084%
32.8139	3.50	50.08694	40.7351	50.4160	0.0084%
48.8763	4.00	74.85416	60.7030	75.3453	0.0085%



Como se observa en las tablas y gráficos anteriores, este método es el que representa la mayor exactitud.

TABLAS DE CALCULO

Tipo y'=f(x)

D162 =D163-E163*$D$156

1) METODO DE EULER (Un paso)

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \cdot h$$

$$y_{verd} = x + e^{-x}$$

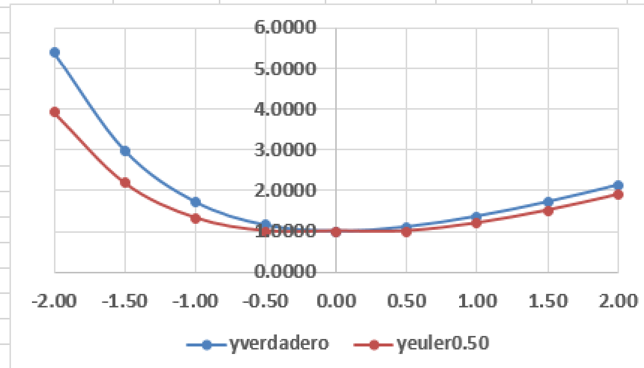
h = tamaño de paso = 0.50

Signo cambiado en la ecuación

	x	$y_{verdadero}$	Ec.(5.1) $y_{euler0.50}$	[dy/dx]i	Error
	-2.00	5.38906	3.92435		
	-1.50	2.98169	2.18350	-3.48169	26.8%
	-1.00	1.71828	1.32436	-1.71828	22.9%
	-0.50	1.14872	1.00000	-0.64872	12.9%
Cond. Inic	0.00	1.00000	1.00000	0.00000	0.0%
	0.50	1.10653	1.00000	0.39347	9.6%
	1.00	1.36788	1.19673	0.63212	12.5%
	1.50	1.72313	1.51279	0.77687	12.2%
	2.00	2.13534	1.90123	0.86466	11.0%

Rama izquierda

Rama derecha



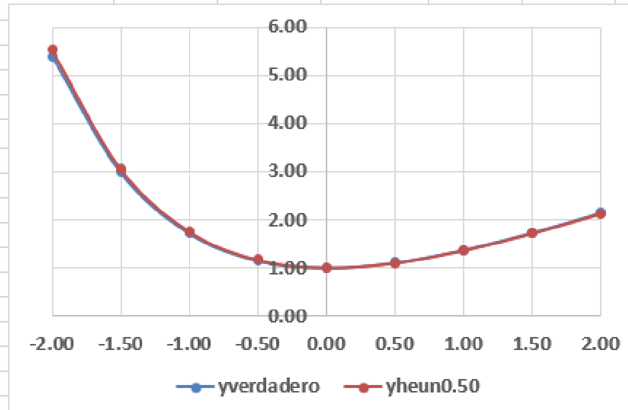
D180 =D181-E181*$D$156

2) METODO DE HEUN

h = tamaño de paso = 0.50

Signo cambiado en la ecuación

	x	$y_{verdadero}$	Ec.5.2 y^0_{i+1}	Ec.5.3 $[dy/dx]_{i+1}$	Ec.5.4 $y_{heun0.50}$	Error	
	-2.00	5.38906	3.92435	-6.38906	5.5216	2.5%	Rama izquierda
	-1.50	2.98169	2.18350	-3.48169	3.0539	2.4%	
	-1.00	1.71828	1.32436	-1.71828	1.7539	2.1%	
	-0.50	1.14872	1.00000	-0.64872	1.1622	1.2%	
Cond. Inic	0.00	1.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.0%	
	0.50	1.10653	1.0000	0.39347	1.0984	0.7%	Rama derecha
	1.00	1.36788	1.1967	0.63212	1.3548	1.0%	
	1.50	1.72313	1.5128	0.77687	1.7070	0.9%	
	2.00	2.13534	1.9012	0.86466	2.1174	0.8%	



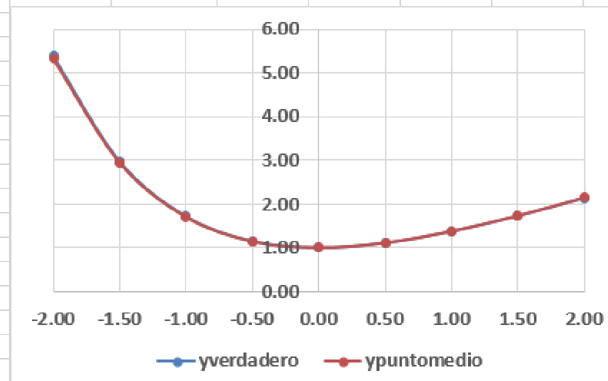
F197 =H196-D196*$D$191/2

3) METODO DEL PUNTO MEDIO

h = tamaño de paso = 0.50

Signo cambiado en la ecuación

	x	$y_{verdadero}$	$[dy/dx]_i$	$x_{i+1/2}$	Ec.5.5 $y_{i+1/2}$	$[dy/dx]_{i+1/2}$	Ec.5.6 $y_{puntomedio}$	Error	
	-2.00	5.38906	-6.38906				5.32299	1.2%	Rama izquierda
	-1.50	2.98169	-3.48169	-1.75	6.92025	-4.75460	2.94568	1.2%	
	-1.00	1.71828	-1.71828	-1.25	3.81611	-2.49034	1.70051	1.0%	
	-0.50	1.14872	-0.64872	-0.75	2.13008	-1.11700	1.14201	0.6%	
Cond. Inic	0.00	1.00000	0.00000	-0.25	0.97983	-0.28403	1.00000	0.0%	
	0.50	1.10653	0.39347	0.25	1.00000	0.22120	1.11060	0.4%	Rama derecha
	1.00	1.36788	0.63212	0.75	1.20897	0.52763	1.37442	0.5%	
	1.50	1.72313	0.77687	1.25	1.53245	0.71350	1.73116	0.5%	
	2.00	2.13534	0.86466	1.75	1.92538	0.82623	2.14428	0.4%	



4) METODO DE RUNGE-KUTTA 4to ORDEN (RK4)

Signo cambiado en la ecuación

h = tamaño de paso = 0.50

			Ec.(5.7a)			Ec.(5.7b)		Ec.(5.7c)			Ec.(5.7d)	Ec.(5.7)		
	x	$y_{verdadero}$	$k_1 = y'_i$	$x_i + h/2$	$y_i + k_1h/2$	k_2	$y_i + k_2h/2$	k_3	$x_i + h$	$y_i + k_3h$	k_4	y_{RK4}	Error	
	-2.00	5.3891	-6.3891	-1.7500								5.3892	0.0%	Rama izquierda
	-1.50	2.9817	-3.4817	-1.2500	6.9865	-4.7546	6.5778	-4.7546	-1.5000	7.7665	-3.4817	2.9818	0.0%	
	-1.00	1.7183	-1.7183	-0.7500	3.8522	-2.4903	3.6043	-2.4903	-1.0000	4.2269	-1.7183	1.7183	0.0%	
	-0.50	1.1487	-0.6487	-0.2500	2.1479	-1.1170	1.9976	-1.1170	-0.5000	2.2768	-0.6487	1.1487	0.0%	
Cond. Inic	0.00	1.0000	0.0000	0.2500	1.3109	-0.2840	1.2197	-0.2840	0.0000	1.2907	0.0000	1.0000	0.0%	
	0.50	1.1065	0.3935	0.7500	1.0000	0.2212	1.0553	0.2212	0.5000	1.1106	0.3935	1.1065	0.0%	Rama derecha
	1.00	1.3679	0.6321	1.2500	1.2049	0.5276	1.2384	0.5276	1.0000	1.3703	0.6321	1.3679	0.0%	
	1.50	1.7231	0.7769	1.7500	1.5259	0.7135	1.5462	0.7135	1.5000	1.7246	0.7769	1.7231	0.0%	
	2.00	2.1353	0.8647	2.2500	1.9173	0.8262	1.9297	0.8262	2.0000	2.1362	0.8647	2.1353	0.0%	

=M215-D215*$D$209/2

=M214-G215*$D$209/2

=M216-I217*$D$209

=M217-(D216+2*G217+2*I217+L217)*$D$209/6

Ejemplo 5.2 Caso dy/dx=f(x,y)

Tipo y'=f(x,y):

1) METODO DE EULER para un paso (Ec.5.1)

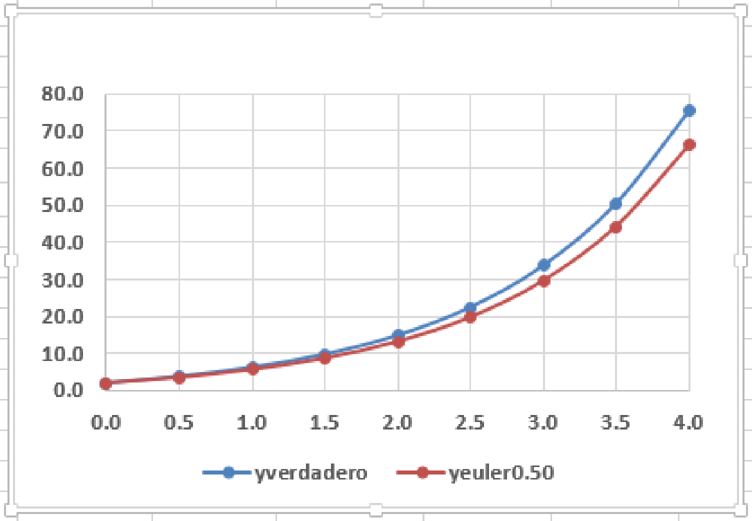
Ec.(5.1): $$y_{nuevo} = y_{anterior} + \left[\frac{dy}{dx}\right]_i * h$$

Condiciones Iniciales

Dato calculado

h = tamaño de paso = 0.50

x	Ec.(b) $y_{verdadero}$	Ec.(5.1) $y_{euler0.50}$	$[dy/dx]_i$	Error
0.0000	2.0000	2.0000	3.0000	
0.5000	3.7515	3.5000	4.2173	6.70%
1.0000	6.1946	5.6086	6.0978	9.46%
1.5000	9.7070	8.6576	8.9517	10.81%
2.0000	14.8439	13.1334	13.2454	11.52%
2.5000	22.4270	19.7561	19.6782	11.91%
3.0000	33.6772	29.5952	29.2951	12.12%
3.5000	50.4118	44.2428	43.6572	12.24%
4.0000	75.3390	66.0714	65.0944	12.30%



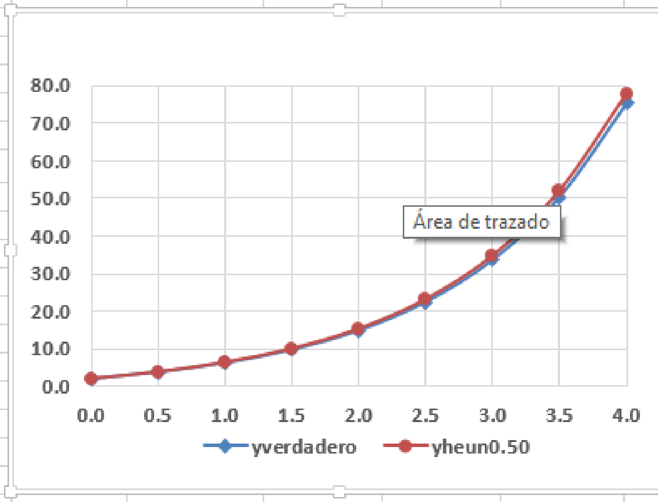
2) METODO DE HEUN

Condiciones iniciales

Dato calculado

h = tamaño de paso = 0.50

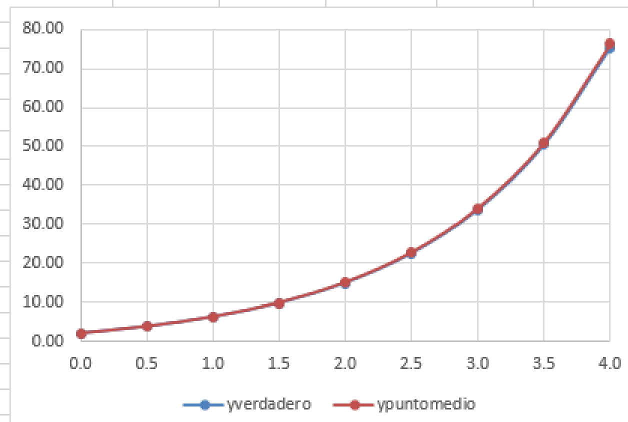
	x	Ec.(b) $y_{verdadero}$	Ec.(5.2) y^0_{i+1}	Ec.(5.3) $[dy/dx]_{i+1}$	Ec.(5.4) $y_{heun0.50}$	Error
Cond. Inic	0.00	2.0000		3.0000	2.0000	0.0%
	0.50	3.7515	3.5000	4.2173	3.8043	1.4%
	1.00	6.1946	5.9130	5.9457	6.3451	2.4%
	1.50	9.7070	9.3179	8.6215	9.9869	2.9%
	2.00	14.8439	14.2976	12.6633	15.3081	3.1%
	2.50	22.4270	21.6397	18.7364	23.1580	3.3%
	3.00	33.6772	32.5262	27.8296	34.7995	3.3%
	3.50	50.4118	48.7143	41.4214	52.1123	3.4%
	4.00	75.3390	72.8230	61.7186	77.8973	3.4%



3) METODO DEL PUNTO MEDIO

h = tamaño de paso = 0.50

x	Ec.(b) $y_{verdadero}$	$x_{i+1/2}$	Ec.5.5 $y_{i+1/2}$	Ec.(a) $y'_{i+1/2}$	Ec.5.6 $y_{puntomedio}$	Error
0.00	2.00000			3.0000	2.00000	0.0%
0.50	3.75152	0.25	2.7500	3.5106	3.75531	0.1%
1.00	6.19463	0.75	4.6330	4.9720	6.24130	0.8%
1.50	9.70704	1.25	7.4843	7.1310	9.80679	1.0%
2.00	14.84392	1.75	11.5895	10.4260	15.01981	1.2%
2.50	22.42701	2.25	17.6263	15.3854	22.71252	1.3%
3.00	33.67717	2.75	26.5589	22.8206	34.12283	1.3%
3.50	50.41177	3.25	39.8280	33.9410	51.09331	1.4%
4.00	75.33896	3.75	59.5786	50.5529	76.36975	1.4%



M308 | =M307+(D308+2*G308+2*I308+L308)*$D$302/6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
300	3) METODO DE RUNGE-KUTTA 4to ORDEN (RK4)													
301														
302		h = tamaño de paso =		0.50										
303														
304				**Ec.(5.7a)**			**Ec.(5.7b)**		**Ec.(5.7c)**			**Ec.(5.7d)**	**Ec.(5.7)**	**Error**
305		**x**	$y_{verdadero}$	$k_1 = y'_i$	$x_i + h/2$	$y_i + k_1h/2$	k_2	$y_i + k_2h/2$	k_3	$x_i + h$	$y_i + k_3h$	k_4	y_{RK4}	
306		0.00	2.00000										2.0000	0.0000%
307		0.50	3.75152	3.0000	0.25	2.75000	3.5106	2.87765	3.4468	0.50	3.72339	4.1056	3.7517	0.0047%
308		1.00	6.19463	4.0914	0.75	4.77456	4.9012	4.97700	4.8000	1.00	6.15169	5.8263	6.1950	0.0066%
309		1.50	9.70704	5.8046	1.25	7.64620	7.0500	7.95755	6.8944	1.50	9.64222	8.4594	9.7078	0.0075%
310		2.00	14.84392	8.4266	1.75	11.81442	10.3136	12.28617	10.0777	2.00	14.74663	12.4388	14.8451	0.0080%
311		2.50	22.42701	12.3896	2.25	17.94250	15.2273	18.65194	14.8726	2.50	22.28142	18.4155	22.4289	0.0082%
312		3.00	33.67717	18.3418	2.75	27.01431	22.5929	28.07708	22.0615	3.00	33.45961	27.3629	33.6800	0.0084%
313		3.50	50.41177	27.2527	3.25	40.49316	33.6084	42.08208	32.8139	3.50	50.08694	40.7351	50.4160	0.0084%
314		4.00	75.33896	40.5706	3.75	60.55866	50.0628	62.93172	48.8763	4.00	74.85416	60.7030	75.3453	0.0085%
315														