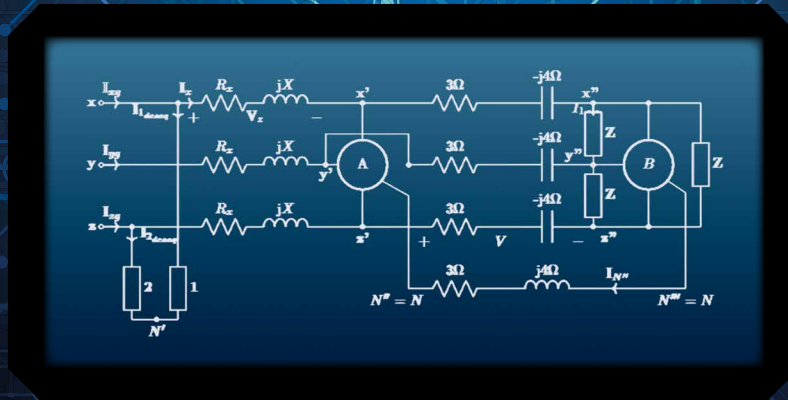




ANÁLISIS BÁSICO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN RÉGIMEN SINUSOIDAL PERMANENTE

Carlos Andrés Torres Pinzón

Harrynson Ramírez Murillo

Andrés Felipe Panesso Hernández

Maximiliano Bueno López



Análisis Básico de Circuitos Eléctricos en Régimen Sinusoidal Permanente

Análisis Básico de Circuitos Eléctricos en Régimen Sinusoidal Permanente

Carlos Andrés Torres Pinzón

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Harrynson Ramírez Murillo

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Andrés Felipe Panesso Hernández

Universidad de La Salle

Maximiliano Bueno López

Universidad Tecnológica de Pereira



2026

Torres Pinzón, Carlos Andrés

Análisis básico de circuitos eléctricos en régimen sinusoidal permanente / Carlos Andrés Torres Pinzón, Harrynson Ramírez Murillo, Andrés Felipe Panesso Hernández y Maximiliano Bueno López, Primera edición, Bogotá: Universidad Santo Tomás, 2026.

151 páginas.

Incluye referencias bibliográficas e índice.

E-ISBN: 978-958-782-706-4

1. Circuitos eléctricos 2. Corriente alterna 3. Análisis sinusoidal 4. Método fasorial
5. Sistemas trifásicos I. Universidad Santo Tomás (Colombia).

CDD 621.3192

CO-BoUST

© Carlos Andrés Torres Pinzón
(caatorresp@udistrital.edu.co), Harrynson
Ramírez Murillo
(hramirez@udistrital.edu.co), Andrés
Felipe Panesso Hernández
(afpanesso@unisalle.edu.co), Maximiliano
Bueno López (m.bueno3@utp.edu.co), 2026

© Universidad Santo Tomás, 2026

Ediciones USTA
Bogotá, D.C., Colombia
Carrera 9 n.º 51-11
Teléfono: (+571) 587 8797, ext. 2990
editorial@usta.edu.co

Corrección de estilo:
José Ludwing Cepeda Aparicio

Diagramación y montaje de cubierta:
Patricia Montaña Domínguez

Hecho el depósito que establece la ley
E-ISBN: 978-958-782-706-4

Primera edición, abril 2026

Esta obra tiene una versión de acceso abierto
disponible en el Repositorio Institucional
de la Universidad Santo Tomás:
<https://repository.usta.edu.co/>

Universidad Santo Tomás
Vigilada MinEducación
Reconocimiento personería jurídica: Resolución
3645 del 6 de agosto de 1965, MinJusticia
Acreditación Institucional de Alta Calidad
Multicampus: Resolución 014525 del 28 de julio de
2022, 8 años, MinEducación

*Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta
obra, por cualquier medio,
sin la autorización expresa del titular de los derechos.*

Índice general

Introducción al libro	11
1. Análisis Sinusoidal y Números Complejos	13
1.1. Análisis sinusoidal en régimen permanente	14
1.1.1. Características de las sinusoides	14
1.1.2. Relaciones trigonométricas básicas en CA	15
1.1.3. Análisis de circuitos de CA sinusoidal en el dominio del tiempo	20
1.2. Introducción a los números complejos	27
1.2.1. Representación gráfica y analítica	27
1.2.2. Algunas propiedades y operaciones de los números complejos	30
1.3. Ejemplo de aplicación	40
1.4. Ejercicios propuestos	43
1.5. Ejercicios de introducción al diseño	47
2. Método Fasorial	49
2.1. Definición del método fasorial	50
2.2. Elementos básicos	55
2.2.1. Resistencia	55
2.2.2. Inductancia	56
2.2.3. Capacitancia	57
2.2.4. Combinación serie RL	58
2.2.5. Combinación serie RC	60
2.2.6. Combinación serie RLC	61
2.2.7. Combinación paralelo RL	61
2.2.8. Combinación serie-paralelo	62
2.2.9. Dipolo general	63
2.3. Representación de una función compleja $\mathbb{V}(t)$	67
2.4. Ejercicios propuestos	81
2.5. Ejercicios de introducción al diseño	85
3. Análisis de Potencia en Régimen Sinusoidal Permanente	87
3.1. Potencia instantánea	88
3.1.1. Resistencia	88
3.1.2. Inductancia	89
3.1.3. Capacitancia	89

3.2.	Potencia promedio	90
3.3.	Valor eficaz de una corriente o de una tensión	91
3.4.	Potencia compleja	92
3.5.	Reducción de potencias	94
3.5.1.	Dipolos en paralelo	94
3.5.2.	Dipolos en serie	95
3.5.3.	Conexión general	96
3.6.	Corrección del factor de potencia	97
3.7.	Teorema de máxima tranferencia de potencia media	98
3.8.	Sentido del flujo de potencia	99
3.9.	Ejemplos de aplicación	100
3.10.	Ejercicios propuestos	106
3.11.	Ejercicios de introducción al diseño	108
4.	Circuitos Eléctricos Trifásicos	109
4.1.	Introducción a los sistemas polifásicos	110
4.2.	Teorema de Millman	112
4.3.	Sistema monofásico trifilar	113
4.4.	Sistemas bifásicos	114
4.5.	Sistemas trifásicos	115
4.5.1.	Secuencia de fases	115
4.5.2.	Relación de corrientes en una delta y estrella equilibradas	118
4.6.	Potencia aparente en sistemas trifásicos	124
4.6.1.	Potencia instantánea	124
4.6.2.	Potencia compleja	125
4.7.	ejemplos de aplicación	126
4.8.	Sistemas Trifásicos con Desequilibrio	129
4.9.	Ejercicios propuestos	139
4.10.	Ejercicios de introducción al diseño	147
	Bibliografía	149

Índice de figuras

1.1. Gráfica de la función $f(t)$ presentada en la ecuación (1.1) para una senoide.	14
1.2. Ubicación de un punto en una circunferencia de radio unitario.	15
1.3. Triángulo con ubicación de las aristas y vértices.	16
1.4. Señales sinusoidales representadas en la pantalla de un osciloscopio.	17
1.5. Señal sinusoidal $v_1(t)$	17
1.6. Señal sinusoidal $v_2(t)$	18
1.7. Todas las señales representadas en la pantalla de un osciloscopio.	19
1.8. Relación $v(t)$ e $i(t)$ en un elemento pasivo cualquiera.	20
1.9. Símbolos de los elementos pasivos básicos para circuitos eléctricos.	20
1.10. Circuito eléctrico RLC serie.	21
1.11. Circuito eléctrico RL mixto.	25
1.12. Plano complejo o de Argand.	27
1.13. Representación gráfica de una cantidad compleja $\mathbb{Z}$	29
1.14. Representación de la suma compleja.	32
1.15. Raíces de $\mathbb{Z} = \sqrt[3]{-j27}$ en el plano complejo.	34
1.16. Representación gráfica de la ecuación compleja (1.65).	35
1.17. Representación gráfica ecuación compleja (1.72).	36
1.18. Representación gráfica de ecuación compleja (1.77).	37
1.19. Circuito eléctrico del Ejemplo 1.2.7.	38
1.20. Representación gráfica de la ecuación (1.86).	39
1.21. Modelo con parámetros concentrados de una línea de baja tensión.	40
1.22. Ubicación de un punto en una circunferencia de radio $\sqrt{A^2 + B^2}$	41
1.23. Comparación del plano de la figura 1.22 con un plano complejo.	41
1.24. Representación gráfica de la ecuación (1.97).	42
1.25. Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 2, literal a	43
1.26. Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 2, literal b	44
1.27. Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 1.26, literal c	44
1.28. Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 2, literal d	45
1.29. Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 1.4.	46
1.30. Circuito eléctrico RLC paralelo.	46
2.1. Circuito eléctrico ejemplo 2.1.1.	53
2.2. Circuito RLC serie del Ejemplo 2.1.2.	54
2.3. Resistencia en el dominio del tiempo y de la frecuencia.	55
2.4. Diagrama fasorial que representa las variables $\mathbb{V}_R$ e $\mathbb{I}_R$ para una resistencia.	56
2.5. Inductancia en el dominio del tiempo y de la frecuencia.	56

2.6. Diagrama fasorial que representa las variables $\mathbb{V}_L$ e $\mathbb{I}_L$ para una inductancia.	57
2.7. Capacitancia en el dominio del tiempo y de la frecuencia.	58
2.8. Diagrama fasorial que representa las variables $\mathbb{V}_C$ e $\mathbb{I}_C$ para una capacitancia.	58
2.9. Circuito serie RL.	59
2.10. Diagrama fasorial de un circuito serie RL (Referencia $\mathbb{I}$).	59
2.11. Diagrama fasorial de un circuito serie RL (Referencia $\mathbb{V}$).	60
2.12. Circuito serie RC.	60
2.13. Diagrama fasorial de un circuito serie RC (referencia $\mathbb{I}$).	60
2.14. Circuito serie RLC.	61
2.15. Diagrama fasorial de un circuito serie RLC (referencia $\mathbb{I}$).	61
2.16. Circuito paralelo RL.	62
2.17. Diagrama fasorial de un circuito paralelo RL (referencia $\mathbb{V}$).	62
2.18. Circuito serie-paralelo.	63
2.19. Diagramas fasoriales de un circuito serie-paralelo.	63
2.20. Dipolo general en el dominio del tiempo y transformado al de la frecuencia.	64
2.21. Conexión de n admitancias en paralelo.	64
2.22. Admitancia equivalente de los cuadripolos de la figura 2.21.	65
2.23. Conexión de n cuadripolos en serie, junto a su impedancia equivalente en los terminales a y b	65
2.24. Parte real R_{eq} e imaginaria R_{eq} de la impedancia equivalente $\mathbb{Z}_{eq}$	66
2.25. Posición en el plano complejo de fasor $\mathbb{V}(t)$ en los instantes 0 , t_1 y t_2	67
2.26. Representación instantánea de $\mathbb{V}(t)$	68
2.27. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.1.	69
2.28. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.1 para el cálculo de $\mathbb{V}_{Th}$	70
2.29. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.1 para el cálculo de $\mathbb{Z}_{Th}$	70
2.30. Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.1.	70
2.31. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.2.	71
2.32. Circuito eléctrico de la figura 2.31 transformado al dominio de la frecuencia.	71
2.33. Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.2.	72
2.34. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.2 para el cálculo de $\mathbb{Z}_{Th}$	73
2.35. Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.2.	73
2.36. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.3.	74
2.37. Circuito eléctrico en el dominio de la frecuencia para el Ejemplo 2.3.3.	74
2.38. Circuito equivalente de Thévenin para el Ejemplo 2.3.3.	75
2.39. Circuito eléctrico ejemplo 2.3.3 para el cálculo de $\mathbb{Z}_{Th}$	76
2.40. Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.3.	77
2.41. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.4.	77
2.42. Diagrama fasorial del Ejemplo 2.3.4.	78
2.43. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.5.	78
2.44. Diagramas fasoriales para el Ejemplo 2.3.5.	79
2.45. Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.6.	80
2.46. Diagramas fasoriales del Ejemplo 2.3.6.	81
2.47. Ejercicio 1 - Ejercicios propuestos 2.4.	81
2.48. Ejercicio 2 - Ejercicios propuestos 2.4.	82
2.49. Ejercicio 3 - Ejercicios propuestos 2.4.	82
2.50. Ejercicio 4 - Ejercicios propuestos 2.4.	83

2.51. Ejercicio 5 - Ejercicios propuestos 2.4.	83
2.52. Ejercicio 6 - Ejercicios propuestos 2.4.	83
2.53. Ejercicio 7 - Ejercicios propuestos 2.4.	84
2.54. Ejercicio 8 - Ejercicios propuestos 2.4.	84
2.55. Impedancia equivalente de un circuito eléctrico pasivo.	85
3.1. Potencia activa instantánea de una resistencia.	88
3.2. Potencia reactiva instantánea de una inductancia.	89
3.3. Potencia reactiva instantánea de una capacitancia.	90
3.4. Circuito resistivo en AC Vs circuito resistivo en CC.	91
3.5. Dipolo General.	92
3.6. Triángulo de potencias para carga inductiva y capacitiva.	93
3.7. Conexión de n cuadripolos generales conectados en paralelo.	94
3.8. Potencia compleja equivalente consumida en la carga S_{eq} para una conexión paralelo.	95
3.9. Conexión de n cuadripolos generales conectados en serie.	96
3.10. Potencia compleja equivalente consumida en la carga para una conexión serie.	96
3.11. Conexión general de dipolos.	96
3.12. Triángulo de potencias.	97
3.13. Superficie formada por la potencia activa en la carga para diferentes valores de R_L y X_L	99
3.14. Representación Esquemática de un Dipolo.	100
3.15. Circuito en el dominio del tiempo del Ejemplo 3.9.1.	100
3.16. Circuito transformado para el Ejemplo 3.9.1.	101
3.17. Circuito Ejemplo 3.9.2.	102
3.18. Diagramas fasoriales para el Ejemplo 3.9.2.	103
3.19. Sistema de potencia considerado para el Ejemplo 3.9.3.	104
3.20. Diagramas fasoriales para el ejemplo 3.9.3 con un factor de potencia en atraso.	104
3.21. Diagramas fasoriales para el ejemplo 3.9.3 para un factor de potencia en adelanto.	105
3.22. Conexión en paralelo de las cargas monofásicas 1, 2 y 3.	106
3.23. Circuito integrador con amplificador operacional.	107
3.24. Circuito eléctrico lineal propuesto.	107
4.1. Fuente m -fásica conectada en (a) Y y (b) Δ	110
4.2. Polígono regular con fuentes m -fásicas equilibradas.	111
4.3. Relación entre tensiones de fase V_F y de línea V_L para una fuente m -fásica.	111
4.4. Circuito de aplicación del <i>teorema de Millman</i>	112
4.5. Circuito monofásico trifilar.	113
4.6. Sistema bifásico considerado.	115
4.7. Relación entre tensiones de fase y de línea para el sistema bifásico.	116
4.8. Esquema de un sistema trifásico general.	117
4.9. Tensiones de fase de secuencia positiva.	118
4.10. Tensiones de fase de secuencia negativa.	118
4.11. Método gráfico para la obtención de la tensiones de línea a partir de las tensiones de fase.	119
4.12. Método gráfico para la obtención de la tensiones de fase a partir de las tensiones de línea.	119
4.13. Relación de impedancias conectadas en una delta (Δ) y estrella (Y) general.	120
4.14. Relación de corrientes en una delta (Δ) y estrella (Y) balanceadas.	120
4.15. Relación fasorial de corrientes en una delta y estrella equilibradas.	121

4.16. Sistema trifásico equilibrado ejemplo 4.5.1.	122
4.17. Diagrama fasorial de la tensión de línea y de fase para los nodos $R'S'T'$	122
4.18. Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.5.1.	123
4.19. Sistema trifásico trifilar.	124
4.20. Sistema trifásico equilibrado ejemplo 4.7.1.	126
4.21. Diagrama fasorial de la tensión de línea y de fase para los nodos RST	126
4.22. Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.7.1.	127
4.23. Diagrama fasorial de potencias del generador trifásico.	128
4.24. Sistema trifásico ejemplo 4.8.1.	129
4.25. Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.8.1.	130
4.26. Diagrama fasorial de la <i>primera ley de Kirchhoff</i> en el nodo x'' del ejemplo 4.8.1.	130
4.27. Diagrama de potencias trifásicas del generador del ejemplo 4.8.1.	133
4.28. Sistema trifásico ejemplo 4.8.2.	134
4.29. Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.8.2.	135
4.30. Diagrama fasorial de la <i>primera ley de Kirchhoff</i> en el nodo R' del ejemplo 4.8.2.	136
4.31. Diagrama fasorial correspondiente a $\sec(-)$ para tensiones de línea y fase en el generador del ejemplo 4.8.2.	138
4.32. Carga trifásica desequilibrada conectada en paralelo con el generador.	138
4.33. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 1.	139
4.34. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 2.	140
4.35. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 3.	141
4.36. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 4.	142
4.37. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 5.	143
4.38. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 6.	144
4.39. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 7.	145
4.40. Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 8.	146
4.41. Curvas de demanda diaria de potencias activa y reactiva (en kW y kvar).	147

Agradecimientos

Los autores expresan su más sincero agradecimiento a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad Santo Tomás, Universidad de La Salle, y la Universidad Tecnológica de Pereira, por el apoyo institucional brindado para el desarrollo de este libro, así como a la Facultad de Ingeniería de la UD, cuyo entorno académico favoreció la discusión y consolidación de los contenidos aquí presentados.

Agradecemos especialmente a nuestros estudiantes, quienes, con sus preguntas, observaciones y participación en clase, contribuyeron a identificar necesidades reales de aprendizaje y a mejorar la claridad pedagógica de los capítulos. Asimismo, extendemos nuestro reconocimiento a los colegas y revisores que leyeron versiones preliminares del manuscrito y ofrecieron comentarios valiosos para fortalecer el rigor técnico y la coherencia del texto.

Este libro es el resultado de la colaboración de los autores en función de brindar a los estudiantes de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, herramientas que les permitan desenvolverse con mayor facilidad en situaciones que requieran de la solución, modelado, implementación y diseño de sistemas eléctricos que involucren la corriente alterna sinusoidal.

Introducción

Introducción al libro

Este libro es el resultado de la colaboración de los autores en función de brindar a los estudiantes de ingeniería eléctrica y electrónica, herramientas que les permitan desenvolverse con mayor facilidad en situaciones que requieran de la solución, modelado, implementación y diseño de sistemas eléctricos que involucren la corriente alterna sinusoidal.

Como aclaración, vale mencionar que para este texto se han considerado como convención, las notaciones de elementos de circuito y simbología del IEEE [1]; también se indica que las unidades de medida para las cantidades empleadas, así como los múltiplos y submúltiplos decimales, son tomados del sistema internacional de unidades [2], de igual forma que se adopta el punto como separador decimal según la disposición del BIPM y por ser el más empleado por los autores en su labor profesional. En algunos casos, por razones de amplio uso en la profesión de la ingeniería se usarán unidades que no son aceptadas en [2] como es el caso del mho ($\mathcal{U}$) para la admitancia.

Algunos de los ejemplos presentados en este libro fueron simulados en LTspice® XVII, (que puede ser descargado gratuitamente en <https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html>), y se dejan a disposición de los interesados para su descarga y utilización en https://drive.google.com/drive/folders/19a1Ro-IOofcYiDT2Twkpe_rLU-aPgDV0?usp=sharing.

Capítulo 1

Análisis Sinusoidal y Números Complejos

1.1. Análisis sinusoidal en régimen permanente

1.1.1. Características de las sinusoides

Las señales que se obtienen de la generación de energía eléctrica a partir de máquinas rotativas, de la respuesta subamortiguada en algunos circuitos de segundo orden, y de algunos resonadores y osciladores, son señales cuya forma se conoce como *sinusoide*. Las sinusoides son funciones periódicas que siguen la forma de una función seno o de una función coseno, de acuerdo con las representaciones básicas de la trigonometría.

En adición, y de acuerdo con [3], una sinusoide es “fácil de manejar de manera matemática” y por si fuera poco esta ventaja, su derivada y antiderivada (integral indefinida) son también sinusoides de la misma frecuencia, lo que la convierte en una función de especial interés para diferentes aplicaciones de circuitos eléctricos. En la figura 1.1 se muestra la forma general de una sinusoide en función del tiempo, así como sus componentes.

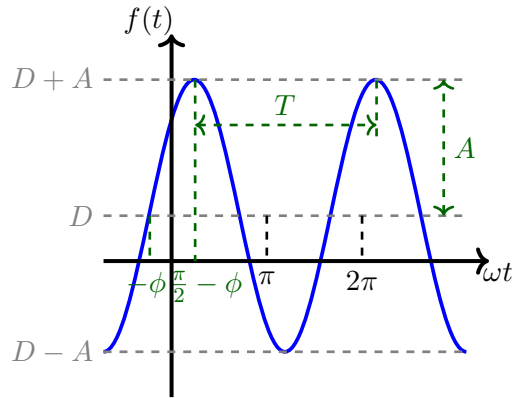


Figura 1.1: Gráfica de la función $f(t)$ presentada en la ecuación (1.1) para una sinusoide.

La forma general de una sinusoide es:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi) + D \quad (1.1)$$

De (1.1) se definen sus componentes como:

- $f(t)$: función en el dominio de la variable t . En principio, será la representación de la tensión y de la corriente, por lo que su unidad de medida dependerá de la cantidad representada ([V] o [A]).
- t : variable independiente, que para efectos prácticos siempre será el *tiempo* [s].
- $\omega t + \phi$: *argumento* de la función sinusoidal [rad].
- ω : *frecuencia angular* [rad/s]. La frecuencia angular es directamente proporcional a la *frecuencia cíclica* o natural (f) [Hz] e inversamente proporcional al *periodo* (T) [s]. La relación de reciprocidad entre la frecuencia cíclica y el periodo se muestran en la ecuación (1.2).

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f \\ T &= \frac{1}{f} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (1.2)$$

- ϕ : *fase* o desplazamiento angular [rad]. Dado que en muchas aplicaciones de ingeniería la diferencia de ángulos de fase entre señales son muy pequeñas, por facilidad se prefiere emplear el grado sexagesimal [°] como unidad de medida, por lo que debe tenerse cuidado con la unidad de medida de la fase al momento de calcular la resultante del argumento en un instante t cualquiera.
- A : *amplitud* de la senoide ([V] o [A]). Esta se determina a partir de la diferencia entre los valores extremos de la función (máximo o mínimo) y el promedio.
- D : *compensación* o desplazamiento de la magnitud ([V] o [A])¹. Este valor corresponde al promedio de todos los puntos de la función $f(t)$ evaluada en un periodo.

1.1.2. Relaciones trigonométricas básicas en CA

Aunque la lista de indentidades trigonométricas que involucran a las funciones seno y coseno son muchas y muy diversas, en esta sección se presentan las más empleadas en la expansión, reducción y análisis de las respuestas de señales sinusoidales. Los nombres y formas son tomados de [4].

■ Funciones trigonométricas

Las funciones en la ecuación (1.3) se obtienen del triángulo resultante del radio unitario de la circunferencia de la figura 1.2, y su proyección sobre los ejes coordenados, y que son la base para la representación de las demás funciones trigonométricas.

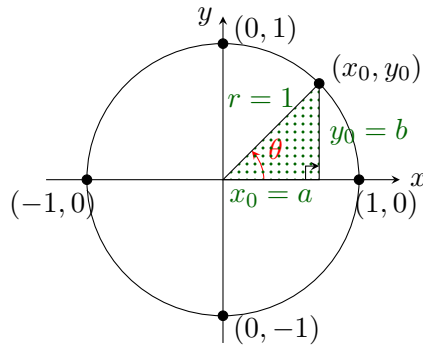


Figura 1.2: Ubicación de un punto en una circunferencia de radio unitario.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{b}{r} & \text{si } r = 1 \Rightarrow & \sin \theta = y_0 \\ \cos \theta &= \frac{a}{r} & & \cos \theta = x_0 \\ \tan \theta &= \frac{b}{a} & & \tan \theta = \frac{y_0}{x_0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

■ Identidades trigonométricas fundamentales

Las identidades en la ecuación (1.3) se pueden obtener directamente desde las funciones básicas y el *teorema de Pitágoras*, tal como se muestra en la ecuación (1.5).

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

¹Este desplazamiento es más conocido en el ámbito de la ingeniería como *offset*, por su expresión en inglés.

■ **Identidades de sumas y diferencias**

Estas son bastante útiles para casos con funciones donde sus argumentos contienen varios términos, tal como se muestra en la ecuación (1.5).

$$\begin{aligned}\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B\end{aligned}\tag{1.5}$$

■ **Algunas expresiones de reducción**

Estas son bastante útiles para casos con funciones donde sus argumentos contienen varios términos, tal como se muestra en la ecuación (1.6).

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(x \pm \pi) &= -\sin x & \cos(x \pm \pi) &= -\cos x \\ \sin(x \pm \pi/2) &= \pm \cos x & \cos(x \pm \pi/2) &= \mp \sin x\end{aligned}\tag{1.6}$$

Una expresión muy utilizada para representar gráficamente operaciones de adición y sustracción entre sinusoides, es la que se muestra en la ecuación (1.7).

$$A \cos x \pm B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x \mp \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)\tag{1.7}$$

■ **Leyes de senos y de cosenos**

Para las fórmulas presentadas en las ecuaciones (1.8) y (1.9), las letras A , B y C representan las aristas de un triángulo, mientras que las letras griegas α , β y γ son los ángulos internos de los vértices opuestos a las aristas mencionadas, como se muestra en la figura 1.3. A partir de esto, se presenta la *ley de cosenos* y *ley de senos*, tal como se muestra en las ecuaciones (1.8) y (1.9), respectivamente.

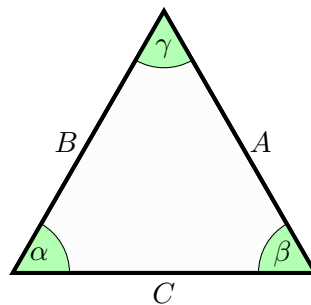


Figura 1.3: Triángulo con ubicación de las aristas y vértices.

$$\begin{aligned}\text{Ley de cosenos: } A^2 &= B^2 + C^2 - 2 \cdot B \cdot C \cos \alpha \\ B^2 &= C^2 + A^2 - 2 \cdot C \cdot A \cos \beta \\ C^2 &= A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cos \gamma\end{aligned}\tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\text{Ley de senos: } \frac{\sin \alpha}{A} &= \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{C} \\ \frac{A}{\sin \alpha} &= \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}\end{aligned}\tag{1.9}$$

Ejemplo 1.1.1.

En un osciloscopio se grafican las señales de tensión $v_1(t)$ y $v_2(t)$, con los factores de amplitud y tiempo que se muestran en la figura 1.4.

Obtenga una expresión para ambas señales sinusoidales representadas en la figura, y graficar la señal $v_M(t)$ correspondiente a la suma de las señales adquiridas por el instrumento.

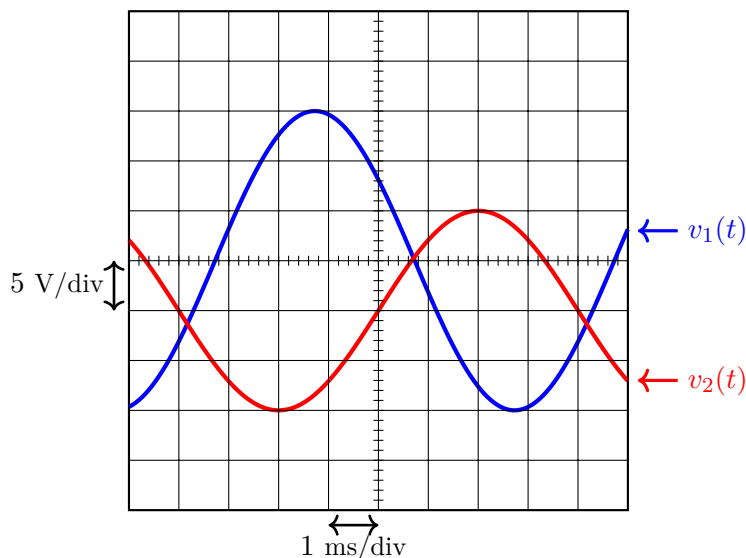


Figura 1.4: Señales sinusoidales representadas en la pantalla de un osciloscopio.

Solución

Lo primero por considerar es la obtención de las expresiones que representan a ambas señales sinusoidales, conociendo que la expresión resultante tiene la forma mostrada en (1.1), es decir que $v(t) = A \sin(\omega t + \phi) + D = A \cos(\omega t + \phi - \pi/2) + D$. Para ello, es mejor observarlas por separado, iniciando con $v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \phi_1) + D_1$, tal como se muestra en la figura 1.5.

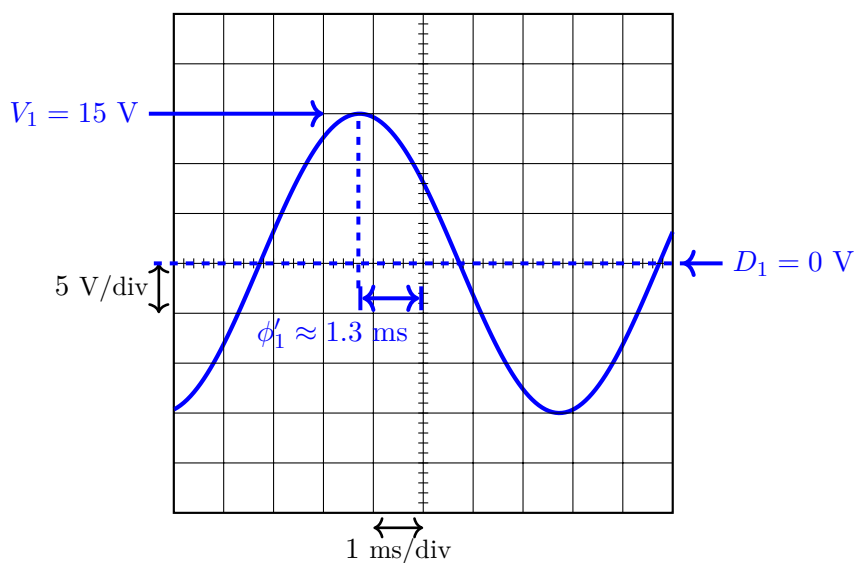


Figura 1.5: Señal sinusoidal $v_1(t)$.

A partir de los datos recolectados en pantalla para la caracterización de la señal, como son el desplazamiento de la magnitud y angular (compensación D_1 y fase ϕ'_1), amplitud (V_1) y periodo (T), se procede a calcular los parámetros faltantes hasta obtener la función $v_1(t)$.

Puede notarse que $T = 8$ ms, es decir, que la señal se repite cada 8 divisiones horizontales, cada una con una escala de 1 ms/div. Luego, usando la ecuación (1.2), se calcula la frecuencia angular de la señal.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \text{ ms}} = 250\pi \text{ rad/s}$$

También, cabe notar que la fase ϕ'_1 está expresada como función del tiempo, aunque, dado que este parámetro hace parte del argumento de una función trigonométrica, es necesario calcularla en función de un ángulo.

$$\phi_1 = \phi'_1 \frac{2\pi}{T} = 1.3 \text{ ms} \frac{2\pi}{8 \text{ ms}} = \frac{13\pi}{40} \approx 1.02 \text{ rad} = 58.5^\circ$$

De esta forma, se obtiene la forma final de la primera señal como se presenta en la ecuación (1.10).

$$\therefore v_1(t) = 15 \cos(250\pi \cdot t + 58.5^\circ) \text{ V} \quad \checkmark \quad (1.10)$$

Ahora se repite el mismo procedimiento con la segunda señal, es decir, $v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \phi_2) + D_2$, tal como se muestra en la figura 1.6.

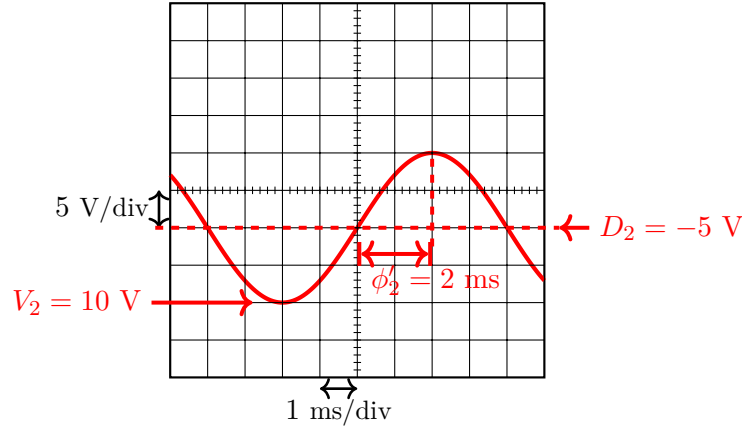


Figura 1.6: Señal sinusoidal $v_2(t)$.

Al igual que con la fase ϕ'_1 , ϕ'_2 también está expresada como función del tiempo, por lo que es necesario calcularla en función de un ángulo.

$$\phi_2 = \phi'_2 \frac{2\pi}{T} = 2 \text{ ms} \frac{2\pi}{8 \text{ ms}} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \text{ rad} = 90^\circ$$

De esta forma, se obtiene la forma final de la segunda señal y que se presenta en la ecuación (1.11).

$$\therefore v_2(t) = 10 \cos(250\pi \cdot t - 90^\circ) - 5 \text{ V} = 10 \sin(250\pi \cdot t) - 5 \text{ V} \quad \checkmark \quad (1.11)$$

Cabe resaltar que, para expresar la función de $v_2(t)$ sin un ángulo de fase, se empleó una de las fórmulas de reducción presentadas en la ecuación (1.6).

Por último, se solicita graficar la función $v_M(t)$, que corresponde a la suma de las dos señales adquiridas.

Para este propósito, primero se expanden las funciones obtenidas para las señales conocidas empleando la identidad de suma de términos de una función trigonométrica de la ecuación (1.5), para luego reducir los términos comunes por factor común, y finalmente emplear la fórmula de reducción entre funciones trigonométricas presentada en la ecuación (1.7).

$$\begin{aligned}
 v_M(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\
 &= 15 \cos(250\pi \cdot t + 58.5^\circ) + 10 \sin(250\pi \cdot t) - 5 \\
 &= 15 [\cos(250\pi \cdot t) \cdot \cos(58.5^\circ) - \sin(250\pi \cdot t) \cdot \sin(58.5^\circ)] + 10 \sin(250\pi \cdot t) - 5 \\
 &= 15 [\cos(250\pi \cdot t) \cdot 0.5225 - \sin(250\pi \cdot t) \cdot 0.8526] + 10 \sin(250\pi \cdot t) - 5 \\
 &= 7.8375 \cos(250\pi \cdot t) - 12.7896 \sin(250\pi \cdot t) + 10 \sin(250\pi \cdot t) - 5 \\
 &= 7.8375 \cos(250\pi \cdot t) - 2.7896 \sin(250\pi \cdot t) - 5 \\
 &= \sqrt{7.8375^2 + 2.7896^2} \cos \left(250\pi \cdot t + \tan^{-1} \left(\frac{2.7896}{7.8375} \right) \right) - 5
 \end{aligned}$$

Entonces, resolviendo se obtiene la forma simplificada de $v_M(t) = V_M \cos(\omega t + \phi_M) + D_M$ en la ecuación (1.12).

$$\begin{aligned}
 \therefore v_M(t) &= 8.3192 \cos(250\pi \cdot t + 19.6^\circ) - 5 \text{ V} \\
 &= 8.3192 \sin(250\pi \cdot t - 70.4^\circ) - 5 \text{ V} \quad \checkmark
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Por facilidad, de la función presentada en la ecuación (1.12) ahora se calcula el ángulo de fase ($19.2^\circ \approx 0.342 \text{ rad}$) en unidades de tiempo ($\phi'_M = \phi_M \frac{T}{2\pi} = 0.342 \text{ rad} \frac{8 \text{ ms}}{2\pi \text{ rad}} \approx 0.44 \text{ ms}$), con lo que finalmente se procede a graficar la función solicitada, como se muestra en la figura 1.7.

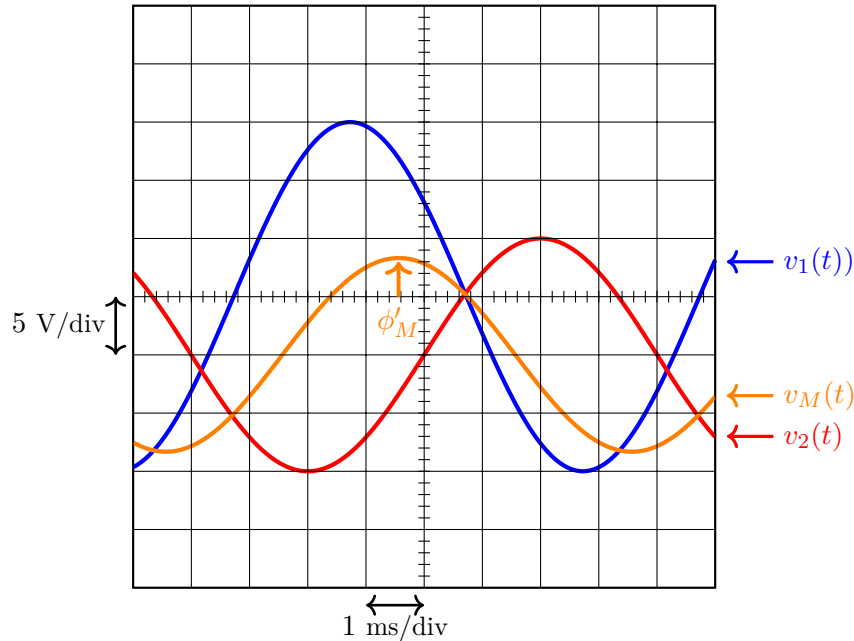


Figura 1.7: Todas las señales representadas en la pantalla de un osciloscopio.

1.1.3. Análisis de circuitos de CA sinusoidal en el dominio del tiempo

Para iniciar, se parte de dos señales conocidas en dominio del tiempo, una de tensión y otra de corriente en un elemento de circuito conocido como *dipolo general* (ver figura 1.8).

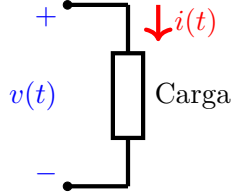


Figura 1.8: Relación $v(t)$ e $i(t)$ en un elemento pasivo cualquiera.

Considerando la notación mostrada en la figura 1.9², se presentan en la tabla 1.1 las expresiones en el dominio del tiempo para los elementos básicos de los circuitos eléctricos, es decir, la resistencia, la inductancia y la capacitancia³ y se muestran en figura 1.9.

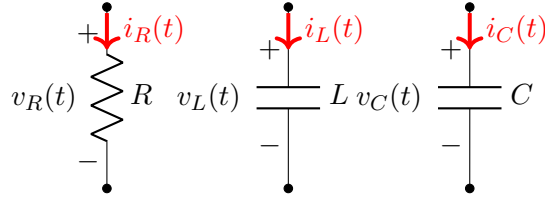


Figura 1.9: Símbolos de los elementos pasivos básicos para circuitos eléctricos.

Si bien las expresiones de la tabla 1.1 son aplicables a cualquier función derivable, es importante recordar que las cantidades de tensión y corriente en un elemento general de circuito eléctrico no son conservativas, lo que en términos matemáticos implica que no son estrictamente continuas en todo el intervalo de observación. Esto lleva a considerar la condición de que los conceptos de derivabilidad y continuidad de una función están estrechamente relacionados, pero no son iguales.

Resistencia (R)	Inductancia (L)	Capacitancia (C)
$v_R(t) = Ri_R(t)$	$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(t) dt + v_C(t_0)$
$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(t) dt + i_L(t_0)$	$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$

Tabla 1.1: Expresiones temporales para los elementos básicos de circuitos.

No obstante, dado el enfoque de este libro (y como se menciona en su título "(...) en *régimen sinusoidal permanente*"), todas las señales de tensión, de corriente, y como consecuencia también las de potencia, son continuas, y por tanto, derivables. Esto representa una ventaja en la caracterización e interpretación de las funciones, pero también una desventaja desde la simplificación y el uso de la aritmética para la aplicación de las leyes fundamentales de la teoría de los circuitos, como las leyes de Kirchhoff.

²Se refiere a esta notación como de referencia normal, pero es más frecuente la expresión *convención pasiva*. Se retomará este aspecto más adelante.

³Para efectos de este libro, se excluye al *memristor* [5, 6, 7], entre los elementos lineales de circuitos eléctricos.

Para ilustración del lector, y que este logre comprender lo engorroso que puede ser obtener la solución general de un circuito eléctrico cualquiera con excitación sinusoidal en *régimen permanente*⁴, analizado en el dominio del tiempo, se presenta el Ejemplo 1.1.2 para un circuito RLC serie y el Ejemplo 1.1.3 para un circuito RL mixto.

Ejemplo 1.1.2.

Obtenga una expresión para calcular la corriente $i(t)$ en el circuito eléctrico de la figura 1.10. Considere que $v_C(t_0) = 0$ para la solución que debe ser planteada para régimen permanente.

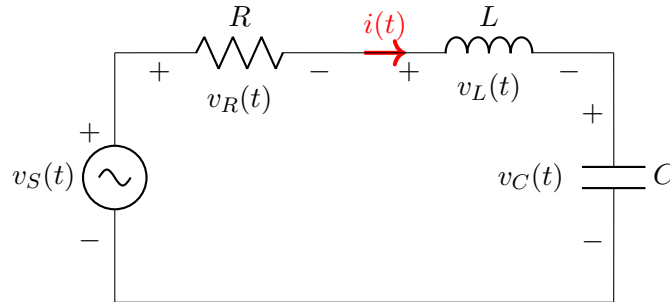


Figura 1.10: Circuito eléctrico RLC serie.

Luego, sustituya en la expresión obtenida los valores asignados: $v_S(t) = 50 \cos(100t)$ V, $R = 4 \Omega$, $L = 80$ mH, $C = 2000 \mu\text{F}$, y calcule la corriente para el circuito eléctrico RLC serie propuesto.

Solución

Considerando que la tensión en la fuente corresponde a una función sinusoidal y que el circuito eléctrico que será analizado es completamente lineal (todas las tensiones y corrientes oscilan a la misma frecuencia), se determina entonces que la expresión para la corriente tiene la forma $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$. A partir de aquí, se plantea la relación entre los elementos de circuito empleando la *segunda ley de Kirchhoff* de la ecuación (1.13).

$$\sum v_{loop}(t) = 0 : \quad v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_S(t)$$

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_C(t_0) = v_S(t) \quad (1.13)$$

Nota 1: Dado que $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, la expresión integro-diferencial mostrada en (1.13) también puede ser escrita en función de la carga eléctrica y no de la corriente, presentando la forma de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden $\left[L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = v_S(t) \right]$. Con esta representación en función de la carga eléctrica, no es necesario establecer una condición inicial (condición de frontera) para determinar el valor de la constante de integración, es decir, la consideración de que $v_C(t_0) = 0$.

⁴También conocido como *estado estable*.

Ahora, se expande la función de $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, por medio de la identidad trigonométrica que se muestra en la ecuación (1.14).

$$i(t) = I_m [\cos(\omega t) \cos(\theta_i) - \sin(\omega t) \sin(\theta_i)] \quad (1.14)$$

Y se toman las componentes constantes de la ecuación (1.14), así:

$$\begin{aligned} A &= I_m \cos(\theta_i) \\ B &= I_m \sin(\theta_i) \end{aligned} \quad (1.15)$$

De este modo será más sencillo establecer los valores de I_m en la ecuación (1.16) y θ_i en la ecuación (1.17) a partir de los coeficientes A y B presentados en la ecuación (1.15).

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2} &= \sqrt{I_m^2 \cos^2(\theta_i) + I_m^2 \sin^2(\theta_i)} = I_m \sqrt{\cos^2(\theta_i) + \sin^2(\theta_i)} \\ \Rightarrow I_m &= \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{I_m \sin(\theta_i)}{I_m \cos(\theta_i)} = \tan(\theta_i) \\ \Rightarrow \theta_i &= \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

En este punto, también puede reescribirse la expresión de la corriente en la ecuación (1.14) usando los coeficientes A y B , como se muestra en las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20).

$$i(t) = A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t) \quad (1.18)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t) - B\omega \cos(\omega t) \quad (1.19)$$

$$\int_{t_0}^t i(t) dt = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) \quad (1.20)$$

Ahora es posible sustituir las expresiones de $i(t)$ en la ecuación (1.13), por las obtenidas en las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20), resultando la ecuación (1.21):

$$\begin{aligned} R(A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)) + L(-A\omega \sin(\omega t) - B\omega \cos(\omega t)) + \\ + \frac{1}{C} \left(\frac{A}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) \right) &= V_m \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \left[AR - B \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \cos(\omega t) - \left[BR + A \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \sin(\omega t) &= V_m \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) puede ser resuelta utilizando el *método de coeficientes indeterminados*, gracias a que los términos $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ son *funciones ortogonales* si se consideran en periodos completos.

Nota 2: Por definición, dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son *ortogonales* en el intervalo $t \in [a, b]$ siempre y cuando se satisfaga que:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

Para el caso de $f_1(t) = \sin(\omega t)$ y $f_2(t) = \cos(\omega t)$, al ser evaluadas en un intervalo $[t_0, t_0 + kT]$, para todo $\{k \in \mathbb{N}\}$ y $\{T = \frac{2\pi}{\omega}\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_{t_0}^{t_0+kT} \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+kT} \sin(2\omega t) dt \\ &= \frac{-1}{4} [\cos(2\omega t)]_{t_0}^{t_0+kT} \\ &= \frac{-1}{4} [\cos(2\omega t_0 + 2\omega kT) - \cos(2\omega t_0)] \\ &= \frac{-1}{4} [\cos(2\omega t_0 + 4\pi k) - \cos(2\omega t_0)] \\ &= \frac{-1}{4} [\cos(2\omega t_0) - \cos(2\omega t_0)] \\ &\therefore \langle f_1, f_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Lo que permite determinar que las funciones $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ son ortogonales para cualquier número k de periodos completos.

Por lo que al separar las componentes ortogonales de la ecuación (1.21) resultan las ecuaciones independientes en la ecuación (1.22), y que se presentan reorganizadas en un sistema 2×2 en la ecuación (1.23).

$$AR - B \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = V_m \quad \& \quad A \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + BR = 0 \quad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} R & -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Luego, se obtienen las expresiones de A y B mediante la *regla de Cramer*, tal como se muestra en la ecuaciones (1.24) y (1.25), respectivamente:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} V_m & -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ 0 & R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & R \end{vmatrix}} \\ \Rightarrow A &= \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} V_m \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\begin{vmatrix} R & V_m \\ \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & R \end{vmatrix}} \\
\Rightarrow B &= \frac{-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} V_m
\end{aligned} \tag{1.25}$$

A partir de lo obtenido en (1.24) y (1.25) para los coeficientes A y B , ahora se sustituyen en las ecuaciones (1.16) y (1.17) para obtener las expresiones resultantes de I_m y θ_i , tal como se muestra en las ecuaciones (1.26) y (1.27), respectivamente:

$$\begin{aligned}
I_m &= \sqrt{\frac{R^2}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2} V_m^2 + \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2} V_m^2} \\
\Rightarrow I_m &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \tan^{-1} \left(\left[\frac{-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} V_m \right] \div \left[\frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} V_m \right] \right) \\
\Rightarrow \theta_i &= -\tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Finalmente, al sustituir las ecuaciones (1.26) y (1.27) en $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, se obtiene la expresión general para la corriente eléctrica $i(t)$ en un circuito RLC serie como el de la figura 1.10 y la ecuación (1.28).

$$\therefore i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \right) \checkmark \tag{1.28}$$

Es así, como al sustituir los valores asignados: $V_m = 50$ V, $\theta_v = 0^\circ$, $\omega = 100$ rad/s, $R = 4 \Omega$, $L = 80$ mH, y $C = 2000 \mu\text{F}$, en la ecuación (1.28), se obtiene la ecuación (1.29):

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{50}{\sqrt{4^2 + \left(100 \cdot 80\text{m} - \frac{1}{100 \cdot 2000\mu}\right)^2}} \cos \left(100t - \tan^{-1} \left(\frac{100 \cdot 80\text{m} - \frac{1}{100 \cdot 2000\mu}}{4} \right) \right) \\
\Rightarrow i(t) &= 10 \cos(100t - 36.87^\circ) \text{ A} \checkmark
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Ejemplo 1.1.3.

Obtenga una expresión en régimen permanente para la tensión $v_L(t)$ en la inductancia del circuito eléctrico RL de la figura 1.11.

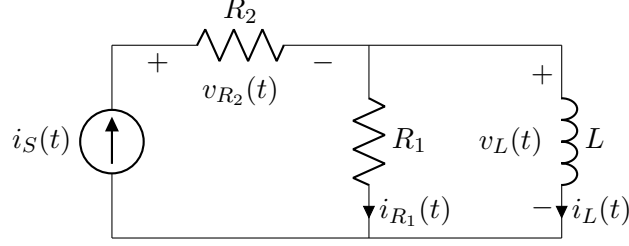


Figura 1.11: Circuito eléctrico RL mixto.

Luego calcule la corriente que circula a través de la inductancia y la tensión en la resistencia R_2 cuando el circuito consta de los siguientes parámetros: $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 300 \text{ m}\Omega$, y $L = 350 \text{ mH}$, y cuya excitación es provocada por una fuente $i_S(t) = 3 \cos(5t) \text{ A}$.

Solución

Para iniciar, se plantea la relación entre los elementos de circuito empleando la *primera ley de Kirchhoff* en el nodo inferior, tal como se muestra en la ecuación (1.30):

$$\sum i_{cut}(t) = 0 : \quad i_{R_1}(t) + i_L(t) = i_S(t)$$
$$\frac{v_{R_1}(t)}{R_1} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(t) dt + i_L(t_0) = i_S(t) \quad (1.30)$$

Dado que $v_{R_1}(t) = v_L(t)$ por estar ambos elementos en paralelo, la ecuación (1.30) resulta en la ecuación (1.31), que cuenta con una única función desconocida $v_L(t)$, según la ecuación (1.31).

$$\frac{v_L(t)}{R_1} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(t) dt + i_L(t_0) = i_S(t) \quad (1.31)$$

Luego, derivando en ambas partes de la igualdad se obtiene la ecuación (1.32):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_L(t)}{R_1} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(t) dt + i_L(t_0) \right) = \frac{d}{dt} (i_S(t))$$
$$\frac{1}{R_1} \frac{dv_L(t)}{dt} + \frac{1}{L} v_L(t) = \frac{di_S(t)}{dt} \quad (1.32)$$

Nótese que ahora, en la ecuación (1.32) se tiene una *ecuación diferencial lineal ordinaria no homogénea de primer orden*, por lo que antes de su solución se organizan sus coeficientes, tal como se muestra en la ecuación (1.33):

$$\underbrace{\frac{1}{R_1}}_{a_0(t)} \frac{dv_L(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{L}}_{a_1(t)} v_L(t) = \underbrace{-I_m \omega \sin(\omega t)}_{f(t)} \quad (1.33)$$

Luego, se tiene $p(t)$ y $q(t)$ en la ecuación (1.34):

$$p(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)} = \frac{R_1}{L}$$
$$q(t) = \frac{f(t)}{a_0(t)} = -I_m R_1 \omega \sin(\omega t) \quad (1.34)$$

Quedando la expresión general simplificada $v'_L + p \cdot v_L = q$, la cual se puede resolver utilizando el *factor integrante* $\mu(t) = e^{\int p(t) dt}$, que se presenta en la ecuación (1.35).

$$\mu(t) = e^{\int \frac{R_1}{L} dt} = e^{\frac{R_1}{L} t} \quad (1.35)$$

Aunque, como $\mu(v'_L + p \cdot v_L) = (\mu \cdot v_L)' = \mu \cdot q$, la ecuación (1.33) se reemplaza ahora por la ecuación (1.36).

$$\left(e^{\frac{R_1}{L} t} \cdot v_L(t) \right)' = e^{\frac{R_1}{L} t} (-I_m R_1 \omega \sin(\omega t)) \quad (1.36)$$

Finalmente, al operar y simplificar la ecuación (1.36), se obtiene la función de $v_L(t)$, tal como se muestra en la ecuación (1.37).

$$\int \left(e^{\frac{R_1}{L} t} \cdot v_L(t) \right)' dt = \int e^{\frac{R_1}{L} t} (-I_m R_1 \omega \sin(\omega t)) dt$$

$$e^{\frac{R_1}{L} t} \cdot v_L(t) = -I_m R_1 \omega \int e^{\frac{R_1}{L} t} \sin(\omega t) dt$$

$\int e^{ax} \sin(bx) dx = e^{ax} \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2}$, con $a = \frac{R_1}{L}$ y $b = \omega$, entonces...

$$e^{\frac{R_1}{L} t} \cdot v_L(t) = -I_m R_1 \omega e^{\frac{R_1}{L} t} \frac{\frac{R_1}{L} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)}{\left(\frac{R_1}{L}\right)^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow v_L(t) = \frac{I_m R_1 \omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} ((\omega L) \cos(\omega t) - R_1 \sin(\omega t)) \quad (1.37)$$

A continuación se utiliza la identidad trigonométrica en la ecuación (1.7), y con esta se presenta en la ecuación (1.38) la expresión solicitada, para luego sustituir en esta los valores asignados.

$$\therefore v_L(t) = I_m \frac{R_1 \omega L}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{R_1}{\omega L}\right)\right) \checkmark \quad (1.38)$$

$$\Rightarrow v_L(t) = 3.95 \cos(5t + 48.8^\circ) \text{ V} \quad (1.39)$$

Luego, para el cálculo de la corriente por la rama de la inductancia, se emplea la tensión obtenida $v_L(t)$ en la ecuación (1.39) en la forma temporal empleada en la ecuación (1.30) y se muestra en la ecuación (1.40)

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(t) dt + i_L(t_0)$$

$$i_L(t) = \frac{V_L}{L} \int_{t_0}^t \cos(\omega t + \theta_{v_L}) dt + i_L(t_0)$$

$$i_L(t) = \frac{V_L}{\omega L} \sin(\omega t + \theta_{v_L}) - i_L \Big|_{t_0} + i_L(t_0)$$

$$i_L(t) = \frac{3.95}{5 \cdot 350\text{m}} \sin(5t + 48.8^\circ) = \frac{3.95}{5 \cdot 350\text{m}} \cos(5t + 48.8^\circ - 90^\circ)$$

$$\Rightarrow i_L(t) = 2.26 \cos(5t - 41.2^\circ) \text{ A} \checkmark \quad (1.40)$$

Por último, se obtiene la respuesta en régimen permanente de $v_{R_2}(t)$, tal como se muestra en la ecuación (1.41).

$$\begin{aligned} v_{R_2}(t) &= R_2 \cdot i_S(t) \\ v_{R_2}(t) &= R_2 \cdot I_m \cos(\omega t) = 300\text{m} \cdot 3 \cos(5t) \\ \Rightarrow v_{R_2}(t) &= 900 \cos(5t) \text{ mV} \checkmark \end{aligned} \quad (1.41)$$

1.2. Introducción a los números complejos

El *método fasorial*, utilizado en el análisis de circuitos eléctricos en régimen permanente sinusoidal, implica el manejo de cantidades complejas para reducir la operación de funciones que en el dominio del tiempo pueden llegar a ser engorrosas y extensas [8] (como muestra se pueden revisar los ejemplos 1.1.2 y 1.1.3). A partir de esto, se muestra que es necesario realizar una introducción a las propiedades de los números complejos, especialmente las que se utilizarán en este libro.

1.2.1. Representación gráfica y analítica

Considere el par ordenado $\mathbb{Z} \equiv (a, b)$ [9], donde a y b son números reales, y para el que se cumplen las leyes de operación del álgebra de clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad, existencia de elementos neutros, aditivo inverso y multiplicativo inverso. A este par ordenado se le denomina *número complejo*.

El uso de los números complejos por primera vez se le atribuye a Carl Friedrich Gauss; sin embargo, el símbolo i fue introducido por Leonard Euler en 1743. En este punto, cabe aclarar que en ingeniería eléctrica se emplea el símbolo j en lugar del introducido por Euler, para evitar confusiones en la notación con la variable de la corriente eléctrica.

En adición, los números complejos se pueden representar de varias formas, algebraica, polar, exponencial y trigonométrica. Estos números también se pueden representar geoméricamente a partir de un sistema de dos coordenadas perpendiculares, compuestas por una parte real que se representa sobre el eje de las abscisas y una parte imaginaria que se representa sobre el eje de las ordenadas, tal como se muestra en la figura 1.12. A este plano se le denomina *plano complejo*, aunque también se le conoce como *plano de Gauss* o *plano de Argand* [10].

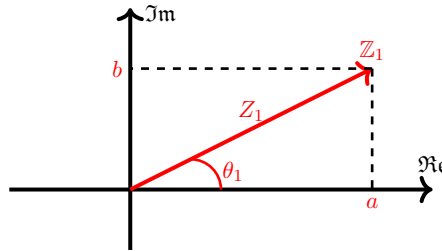


Figura 1.12: Plano complejo o de Argand.

De esta manera, todo punto $\mathbb{Z}_1$ en el plano complejo se puede representar de la misma forma que se representan los puntos en el plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$). Cabe resaltar que las propiedades del álgebra vectorial en dos dimensiones son aplicables también a las variables complejas, con excepción del producto escalar y vectorial.

De acuerdo con la figura 1.12, la variable compleja $\mathbb{Z}_1$ se puede expresar además de su representación natural de *par ordenado* mediante las siguientes representaciones analíticas.

■ **Representación algebraica o rectangular**

Un número complejo $\mathbb{Z}$ consta de dos partes, una real (a) y una imaginaria (b), y para su representación en forma de binomio se utiliza el símbolo j , tal y como se presenta en la ecuación (1.42).

$$\mathbb{Z}_1 = a + jb \quad (1.42)$$

Es importante mencionar que a y b son números reales, pero para que su representación en forma compleja sea consistente se requiere de la cantidad unitaria imaginaria $j \equiv (0, 1)$ (una forma común con la que se conoce a esta cantidad unitaria es $j = \sqrt{-1}$).

■ **Representación polar**

Un número complejo $\mathbb{Z}$, al igual que en la representación rectangular, también consta de dos partes, un módulo (Z_1) y un argumento principal (θ_1), cuya forma se presenta en la ecuación (1.43).

$$\mathbb{Z}_1 = Z_1 \angle \theta_1 \quad (1.43)$$

Donde Z_1 o $|\mathbb{Z}_1|$ es la magnitud, norma o módulo del número complejo $\mathbb{Z}_1$, que es una cantidad real no negativa; mientras que θ_1 es el argumento principal o ángulo del número complejo, y por convención es positivo si se mide a partir de la abscisa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj o CCW⁵.

■ **Representación trigonométrica**

Si se aplica la representación polar a un número complejo y se obtienen sus partes real e imaginaria a partir de las funciones trigonométricas dadas en la ecuación (1.3), se obtiene la representación de las ecuaciones (1.44) y (1.45)⁶, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1 &= Z_1 \angle \theta_1 \\ &= Z_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\mathbb{Z}_1 = Z_1 \cos \theta_1 + j Z_1 \sin \theta_1 \quad (1.45)$$

■ **Representación exponencial**

A partir del *teorema de Taylor* algunas funciones elementales son deducidas. En particular, al expandir las partes real e imaginaria de la ecuación (1.44) aplicando la *serie de Maclaurin* para ambas funciones de θ , y con $Z_1 = 1$, se logra deducir la ecuación (1.46), que también se conoce como la *fórmula de Euler*.

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta} \quad (1.46)$$

Cuando la *fórmula de Euler* es evaluada en $\theta = \pi$, se obtiene la conocida *identidad de Euler* ($e^{j\pi} = -1$). Luego, si se aplica la ecuación (1.46) en (1.45), resulta la representación exponencial para números complejos dada en la ecuación (1.47).

$$\mathbb{Z}_1 = Z_1 e^{j\theta_1} \quad (1.47)$$

⁵CCW: *Counterclockwise* (sentido antihorario). CW: *Clockwise* (sentido horario).

⁶En algunos textos y documentos se sigue utilizando la notación CIS ($\cos \theta + j \sin \theta$) en la forma $\mathbb{Z}_1 = Z_1 \text{cis } \theta_1$, por simplicidad en relación con la representación trigonométrica, y por facilidad de mecanografiado con respecto a la representación polar.

Ejemplo 1.2.1.

Expresar el número complejo $\mathbb{Z}$ mostrado en el diagrama de Argand de la figura 1.13 en las representaciones de par ordenado (a, b) , rectangular $(a + j \cdot b)$, polar $(r \angle \theta)$, exponencial $(r \cdot e^{j\theta})$, trigonométrica $(r \cos \theta + j \cdot r \sin \theta)$ y CIS $(r \text{ cis } \theta)$.

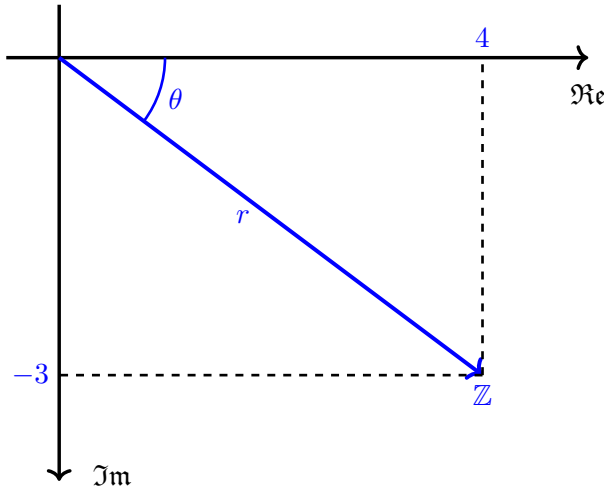


Figura 1.13: Representación gráfica de una cantidad compleja $\mathbb{Z}$.

Solución

Lo primero que se debe conocer son las cantidades básicas para la representación de cualquier cantidad en un plano.

Parte real	$\rightarrow$	$a = \Re\{\mathbb{Z}\} = 4$
Parte imaginaria	$\rightarrow$	$b = \Im\{\mathbb{Z}\} = -3$
Módulo	$\rightarrow$	$r = \text{abs}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$
Argumento principal	$\rightarrow$	$\theta = \arg(\mathbb{Z}) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) \approx -36.87^\circ$

Ahora, con estas cantidades conocidas, se procede a escribir el número complejo $\mathbb{Z}$ en las representaciones indicadas:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}_{\text{par ordenado}} &= (4, -3) \\
 \mathbb{Z}_{\text{rectangular}} &= 4 - j3 \\
 \mathbb{Z}_{\text{polar}} &= 5 \angle -36.87^\circ \\
 \mathbb{Z}_{\text{exponencial}} &= 5 e^{-j36.87^\circ} \\
 \mathbb{Z}_{\text{trigonométrica}} &= 5 \cos(36.87^\circ) - j5 \sin(36.87^\circ) \\
 \mathbb{Z}_{\text{cis}} &= 5 \text{ cis } (-36.87^\circ)
 \end{aligned}$$

Nota 3: Puede notarse que es posible hallar relaciones entre cualquiera de estas cantidades básicas de una representación compleja empleando las funciones trigonométricas presentadas en (1.3) y el *teorema de Pitágoras*.

$$\begin{aligned} a &= \Re\{\mathbb{Z}\} = r \cos \theta = \frac{b}{\tan \theta} = \sqrt{r^2 - b^2} \\ b &= \Im\{\mathbb{Z}\} = r \sin \theta = a \tan \theta = \sqrt{r^2 - a^2} \\ r &= \text{abs}(\mathbb{Z}) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos \theta} = \frac{b}{\sin \theta} \\ \theta &= \arg(\mathbb{Z}) = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{a}{r} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{b}{r} \right) \end{aligned}$$

Lo anterior permite determinar que con dos cantidades básicas se pueden obtener las dos restantes, sin importar su representación. De hecho, al observar el diagrama de la figura 1.12 se puede notar que se trata de un triángulo rectángulo, por lo que siempre se conoce el ángulo en uno de sus vértices, que tiene un ángulo recto ($\angle \theta = \pi/2 \text{ rad} = 90^\circ$).

En general, la resolución de triángulos es una de las aplicaciones más importantes de la trigonometría, mostrando que cualquier triángulo puede resolverse si se conocen, al menos, tres de sus elementos, siendo al menos uno de ellos una de las aristas.

1.2.2. Algunas propiedades y operaciones de los números complejos

A continuación se describen algunas propiedades y operaciones que se utilizarán en el desarrollo de este libro. Sin embargo, para el lector que desee profundizar un poco más en estas propiedades y operaciones, se sugiere revisar las referencias [10, 11, 12].

■ Complejo conjugado

Una de las operaciones de gran relevancia en los cálculos con números complejos es el conjugado, tal como se muestra en la ecuación (1.48):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1 &= a_1 + jb_1 = Z_1 e^{j\theta_1} \\ \mathbb{Z}_1^* &= a_1 - jb_1 = Z_1 e^{-j\theta_1} \end{aligned} \tag{1.48}$$

■ Negativo de un número complejo

Al cambiar de signo a $\mathbb{Z}_1$, se tiene un desfase de 180° , tal como se muestra en la ecuación (1.49):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1 &= a_1 + jb_1 = Z_1 e^{j\theta_1} \\ -\mathbb{Z}_1 &= -a_1 - jb_1 = Z_1 e^{j(\theta_1 \pm \pi)} \end{aligned} \tag{1.49}$$

■ Igualdad de dos números complejos

En la ecuación (1.50) se muestran dos números complejos $\mathbb{Z}_1$ y $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_1 &= a_1 + jb_1 = Z_1 e^{j\theta_1} \\ \mathbb{Z}_2 &= a_2 + jb_2 = Z_2 e^{j\theta_2} \end{aligned} \tag{1.50}$$

Para que $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2$, se debe las condiciones mostradas en la ecuación (1.51):

$$\begin{aligned} \text{Rectangular: } a_1 &= a_2 \quad ; \quad b_1 = b_2 \\ \text{Polar: } Z_1 &= Z_2 \quad ; \quad \theta_1 = \theta_2 \end{aligned} \tag{1.51}$$

■ Multiplicación

Primero se utiliza la representación cartesiana de la ecuación (1.52):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= a_3 + jb_3 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Ahora, si se utiliza la representación exponencial, se obtiene la ecuación (1.53):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2 &= Z_1 e^{j\theta_1} Z_2 e^{j\theta_2} \\ &= Z_1 Z_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= Z_1 Z_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) \\ &= Z_3 \angle \theta_3 \end{aligned} \tag{1.53}$$

■ División

Al igual que en el caso anterior, primero se presenta la operación mediante representación rectangular de la ecuación (1.54).

$$\mathbb{Z}_3 = \frac{\mathbb{Z}_1}{\mathbb{Z}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \tag{1.54}$$

Para este caso, con el fin de simplificar la expresión (1.54), se multiplica y se divide por el conjugado del número complejo $\mathbb{Z}_2$, tal como se muestra en la ecuación (1.42):

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3 = \frac{\mathbb{Z}_1}{\mathbb{Z}_2} &= \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 - ja_1b_2 + ja_2b_1 - j^2b_1b_2}{a_2^2 - ja_2b_2 + jb_2a_2 - j^2b_2^2} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + j \left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \end{aligned} \tag{1.55}$$

Cuando se trabaja esta operación, por simplicidad se recomienda utilizar las representaciones polar y exponencial, tal como se muestra en la ecuación (1.56).

$$\mathbb{Z}_3 = \frac{\mathbb{Z}_1}{\mathbb{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\theta_1}}{Z_2 e^{j\theta_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle (\theta_1 - \theta_2) \tag{1.56}$$

■ Suma compleja

Dados los números complejos $\mathbb{Z}_1 = a_1 + jb_1$ y $\mathbb{Z}_2 = a_2 + jb_2$, se determina que la suma compleja se muestra en la ecuación (1.57):

$$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 = a_3 + jb_3 = Z_3 \angle \theta_3 \tag{1.57}$$

Esta operación puede ser fácilmente comprobada de forma gráfica, tal como se muestra en la figura 1.14.

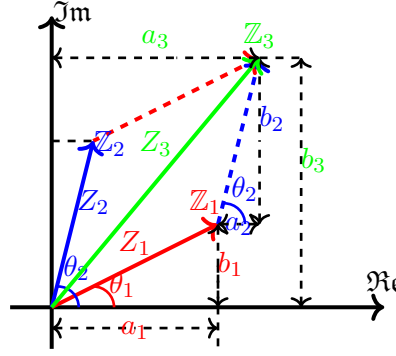


Figura 1.14: Representación de la suma compleja.

De la figura 1.14 se obtienen las ecuaciones (1.58) y (1.59):

$$a_3 = a_1 + a_2 \quad b_3 = b_1 + b_2 \quad (1.58)$$

$$Z_3 = a_3 + jb_3 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \quad Z_3 = Z_3 \angle \theta_3$$

$$Z_3 = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \quad \theta_3 = \arctan\left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}\right) \quad (1.59)$$

■ Producto de un número complejo por su conjugado

En diversas situaciones resulta conveniente operar cantidades solo con sus módulos, y para ello se puede hacer uso de la ecuación (1.60).

$$Z_1 Z_1^* = (Z_1 \angle \theta_1)(Z_1 \angle -\theta_1) = Z_1^2 \angle (\theta_1 - \theta_1) = Z_1^2 \angle 0^\circ = Z_1^2 \quad (1.60)$$

Cabe mencionar que una desventaja de la resultante de este producto es su no linealidad, lo que implica múltiples resultados y la necesidad de descartar aquellos que no tengan sentido para las aplicaciones de circuitos eléctricos.

■ Potencias y raíces

Extendiendo la operación del producto presentada en la ecuación (1.53) a n números complejos, obteniéndose la ecuación (1.61):

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_n = Z_1 e^{j\theta_1} Z_2 e^{j\theta_2} \dots Z_n e^{j\theta_n} \\ &= Z_1 Z_2 \dots Z_n e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} \\ &= Z_1 Z_2 \dots Z_n \angle (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Luego, si todos los módulos y argumentos en la ecuación (1.61) son iguales, es decir, que $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n$, se obtienen las ecuaciones (1.62) y (1.63) que le dan forma al *teorema de De Moivre* [12], tal como se muestra en las ecuaciones (1.62) y (1.63):

$$\begin{aligned} Z^n &= Z^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) \\ &= Z^n e^{jn\theta} \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} Z^{1/n} &= Z^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \\ &= Z^{1/n} e^{j(\theta + 2k\pi)/n} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Para todo $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Ejemplo 1.2.2.

Desarrollar *paso a paso* las operaciones indicadas hasta obtener un resultado para $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \frac{(\sqrt{3}, 1)^4 + \left(14 + (j8)(\sqrt{3} - 1)\right)^*}{(\sqrt{2} \angle 45^\circ)(j1) - (-3 + j1)}$$

Solución

Aunque se esté operando con números complejos, se debe cumplir con la jerarquía de operaciones de la aritmética, es decir: paréntesis, exponentes, multiplicación y división (de izquierda a derecha), y por último la suma y resta de términos (de izquierda a derecha).

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \frac{(\sqrt{3}, 1)^4 + \left(14 + (j8)(\sqrt{3} - 1)\right)^*}{(\sqrt{2} \angle 45^\circ)(j1) - (-3 + j1)} \\ &= \frac{(2e^{j30^\circ})^4 + \left(14 + j(8\sqrt{3} - 8)\right)^*}{\sqrt{2} \angle 135^\circ - (-3 + j1)} \\ &= \frac{16e^{j120^\circ} + \left(14 - j(8\sqrt{3} - 8)\right)}{\sqrt{2} \angle 135^\circ + 3 - j1} \\ &= \frac{-8 + j8\sqrt{3} + 14 - j8\sqrt{3} + j8}{-1 + j1 + 3 - j1} \\ &= \frac{6 + j8}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{Z} = 3 + j4 = 5 \angle 53.13^\circ \quad \checkmark$$

Nota 4: Como se mencionó previamente, y también se observa en el desarrollo de este ejemplo, para operaciones relacionadas con el producto de números complejos (esto incluye además de la multiplicación, a la división, las potencias y raíces), estas se operan con mayor facilidad en representaciones como la polar y exponencial. Por otra parte, las operaciones relacionadas con la adición y sustracción, son más fáciles en representaciones como la rectangular y de par ordenado.

Ejemplo 1.2.3.

Hallar las tres raíces cúbicas del número complejo $\mathbb{Z} = -j27$. Luego, interpretar geoméricamente esta respuesta.

Solución

Para la obtención de estas raíces, se emplea la fórmula presentada en la ecuación (1.63) para el *teorema de De Moivre*, pero antes se convierte a su representación en forma exponencial, siendo esta, $\mathbb{Z} = 27 \angle -90^\circ = 27e^{-j\pi/2}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^{1/3} &= Z^{1/3} \cdot e^{j(\theta+2k\pi)/3} \\ &= 27^{1/3} \cdot e^{j(-\pi/2+2k\pi)/3} \\ &= 3 \cdot e^{j(-\pi/2+2k\pi)/3} \quad \forall k \in \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo el valor de k en la última expresión, se obtienen las tres raíces para $\mathbb{Z}$, tal como se muestra en la ecuación (1.65):

$$\begin{aligned} k = 0 & \rightarrow \mathbb{Z}_0 = 3e^{-j\pi/6} = 3\angle -30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} - j\frac{3}{2} \quad \checkmark \\ k = 1 & \rightarrow \mathbb{Z}_1 = 3e^{j\pi/2} = 3\angle 90^\circ = j3 \quad \checkmark \\ k = 2 & \rightarrow \mathbb{Z}_2 = 3e^{j7\pi/6} = 3\angle -150^\circ = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - j\frac{3}{2} \quad \checkmark \end{aligned} \quad (1.64)$$

Luego, para la interpretación geométrica de las raíces obtenidas, estas se ubican en el plano complejo, resultando en la figura 1.15.

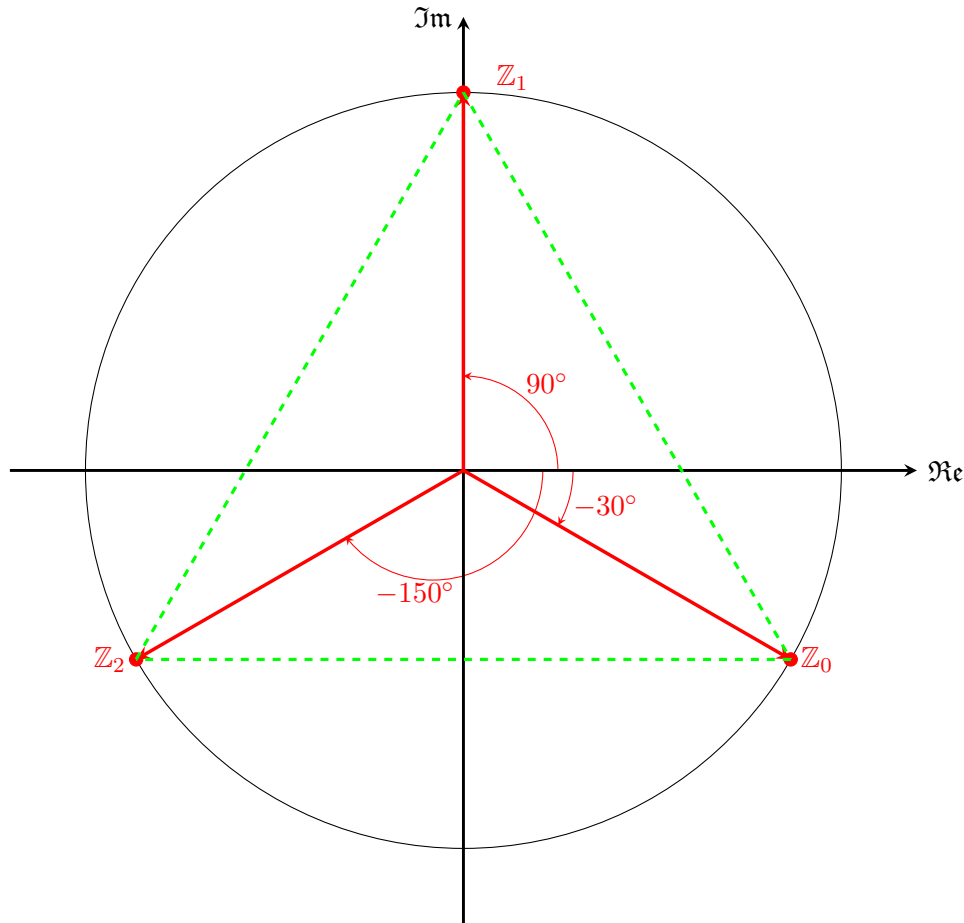


Figura 1.15: Raíces de $\mathbb{Z} = \sqrt[3]{-j27}$ en el plano complejo.

Es importante notar que, en general, las n raíces de un número complejo se comportan como vértices de un polígono regular de n lados, facilitando su ubicación sobre el plano complejo e interpretación de resultados numéricos para cantidades físicas.

Además, con la aplicación de las propiedades definidas en la sección 1.2.2, se pueden encontrar parámetros de ecuaciones complejas de forma analítica o gráfica, como se presenta en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2.4.

Considérese que en la ecuación compleja (1.65) las cantidades están dadas en voltios:

$$5\angle 0^\circ + 8\angle -30^\circ = V_3\angle \alpha_3 \quad (1.65)$$

Determinar el valor de α_3 y V_3 .

- **Método analítico:** En este método se aplica la *identidad de Euler* (1.46) y posteriormente se utiliza la propiedad de igualdad de dos números complejos, tal como se muestra en las ecuaciones (1.66) y (1.67):

$$\begin{aligned} 5 \cos(0^\circ) + 8 \cos(-30^\circ) &= V_3 \cos(\alpha_3) \\ 5 \sin(0^\circ) + 8 \sin(-30^\circ) &= V_3 \sin(\alpha_3) \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} 5 + 4\sqrt{3} &= V_3 \cos(\alpha_3) \\ -4 &= V_3 \sin(\alpha_3) \end{aligned} \quad (1.67)$$

Despejando V_3 de la primera expresión de la ecuación (1.67) y reemplazándola en la segunda, la ecuación (1.68):

$$\tan(\alpha_3) = \frac{-4}{5+4\sqrt{3}} \quad (1.68)$$

Resolviendo la ecuación (1.68), se tiene la ecuación (1.69):

$$\alpha_3 = -18.54^\circ \quad \checkmark \quad (1.69)$$

Ahora, reemplazando el valor anterior en cualquiera de las dos expresiones la ecuación (1.67), se obtiene que el valor de la magnitud restante es $V_3 = 12.58$ V.

- **Método gráfico:** Este método permite determinar la solución correcta mediante la construcción del correspondiente diagrama de la ecuación compleja (1.65) por medio del método del paralelogramo, tal como se muestra en la figura 1.16.

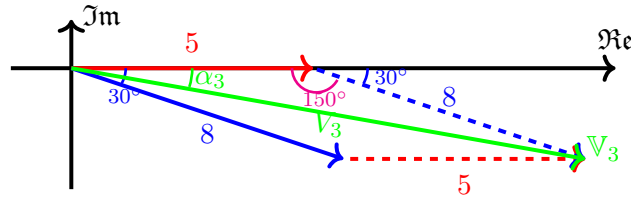


Figura 1.16: Representación gráfica de la ecuación compleja (1.65).

A partir de la figura 1.16, se pueden determinar V_3 y α_3 mediante el uso de la *ley de cosenos* y la *ley de senos*, tal como se muestra en las ecuaciones (1.70) y (1.71), respectivamente.

$$\begin{aligned} V_3^2 &= 5^2 + 8^2 - 2(5)(8) \cos(150^\circ) \\ \Rightarrow V_3 &= 12.58 \text{ V} \quad \checkmark \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_3}{\sin(150^\circ)} &= \frac{8}{\sin(\alpha_3)} \\ \Rightarrow \alpha_3 &= 18.54^\circ \end{aligned} \quad (1.71)$$

Teniendo en cuenta que el argumento principal de V_3 en la figura 1.16 se ubica por debajo del eje real, entonces el valor correcto del ángulo sería $\alpha_3 = -18.54^\circ$.

Ejemplo 1.2.5.

Encontrar los valores de la magnitud V_1 y el argumento α_2 de la ecuación compleja que se muestra en la ecuación (1.72), dada en voltios, utilizando los dos métodos vistos anteriormente.

$$V_1 e^{j0^\circ} + 80 e^{j\alpha_2} = 120 e^{j30^\circ} \quad (1.72)$$

Solución

- **Método analítico:** Aplicando la *identidad de Euler*, tal como se muestra en la ecuación (1.73):

$$\begin{aligned} V_1 \cos(0^\circ) + 80 \cos(\alpha_2) &= 120 \cos(30^\circ) \\ V_1 \sin(0^\circ) + 80 \sin(\alpha_2) &= 120 \sin(30^\circ) \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} V_1 + 80 \cos(\alpha_2) &= 60\sqrt{3} \\ 80 \sin(\alpha_2) &= 60 \end{aligned}$$

De la segunda expresión de la ecuación (1.73) se obtiene el valor de α_2 , y reemplazándolo luego en la primera expresión se logra deducir el valor de V_1 , tal como se muestra en la ecuación (1.74).

$$\alpha_2 = 48.59^\circ \Rightarrow V_1 = 51.01 \text{ V} \quad \checkmark \quad (1.74)$$

- **Método gráfico:** Se contruye la representación gráfica en la figura 1.17 de la ecuación compleja (1.72).

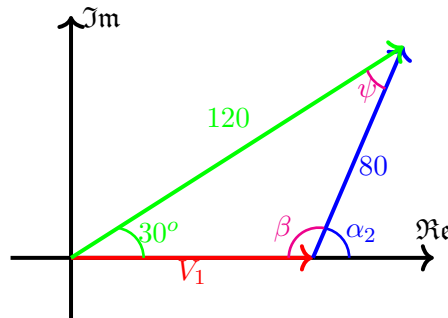


Figura 1.17: Representación gráfica ecuación compleja (1.72).

Mediante el uso de la *ley de senos*, se obtienen los valores de la magnitud V_1 y ángulo α_2 en la ecuación (1.75)

$$\frac{120}{\sin(\beta)} = \frac{80}{\sin(30^\circ)} \quad (1.75)$$

$$\beta = \begin{cases} 48.59^\circ & \times \\ 180^\circ - 48.59^\circ = 131.41^\circ & \checkmark \end{cases}$$

De acuerdo con la figura 1.17, el valor del ángulo $\beta = 131.41^\circ$, por ende, $\alpha_2 = 180^\circ - \beta = 48.59^\circ$. De esta manera, aplicando el criterio de suma de ángulos internos de un triángulo, se obtiene el valor de $\psi = 18.59^\circ$, tal como se muestra en la ecuación (1.76):

$$\frac{V_1}{\sin(18.59^\circ)} = \frac{80}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow V_1 = 51.01 \text{ V} \quad \checkmark \quad (1.76)$$

Ejemplo 1.2.6.

Encontrar los valores de la magnitud I_1 y el ángulo δ de la ecuación compleja que se muestra en ecuación (1.77). Considere todas las magnitudes en amperios.

$$I_1 \angle -30^\circ + 50 \angle \delta = 20 \angle 40^\circ \quad (1.77)$$

Solución

- **Método analítico:** Se plantean las expresiones de las ecuaciones (1.78) y (1.2.2).

$$\begin{aligned} I_1 \cos(-30^\circ) + 50 \cos(\delta) &= 20 \cos(40^\circ) \\ I_1 \sin(-30^\circ) + 50 \sin(\delta) &= 20 \sin(40^\circ) \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} 50 \cos(\delta) &= 20 \cos(40^\circ) - I_1 \cos(30^\circ) \\ 50 \sin(\delta) &= 20 \sin(40^\circ) + I_1 \sin(30^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50^2 &= 20^2 - 40I_1 \cos(30^\circ) \cos(40^\circ) + I_1^2 + 40I_1 \sin(30^\circ) \sin(40^\circ) \\ I_1^2 + 40I_1 (\sin(30^\circ) \sin(40^\circ) - \cos(30^\circ) \cos(40^\circ)) - 2100 &= 0 \end{aligned} \quad (1.79)$$

De la ecuación (1.79) se obtiene la solución y se muestra en la ecuación (1.80):

$$I_1 = \begin{cases} 53.17 \text{ A} & \checkmark \\ -39.49 \text{ A} & \times \end{cases} \quad (1.80)$$

Reemplazando el valor de I_1 en cualquiera de las expresiones de la ecuación (1.78), se obtiene la ecuación (1.81):

$$\delta = 127.92^\circ \checkmark \quad (1.81)$$

- **Método gráfico:** A continuación, se realiza una representación gráfica de ecuación compleja (1.77), y se muestra en la figura F1.5.

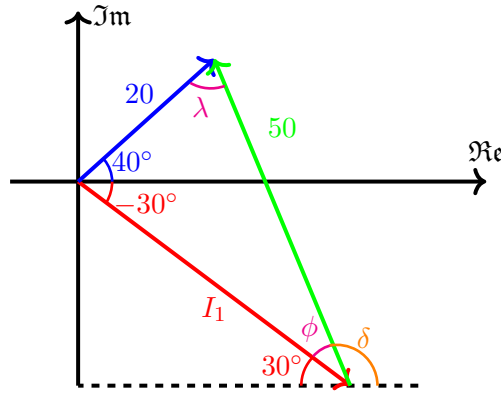


Figura 1.18: Representación gráfica de ecuación compleja (1.77).

Mediante el uso de la *ley de senos* se obtiene el valor de ϕ y δ en las ecuaciones (1.82) y (1.83), respectivamente.

$$\frac{50}{\sin(70^\circ)} = \frac{20}{\sin(\phi)}$$

$$\phi = 22.08^\circ \quad (1.82)$$

$$\delta = 180^\circ - 30^\circ - \phi = 127.92^\circ \quad (1.83)$$

Aplicando el criterio de suma de ángulos internos de un triángulo, se obtiene el valor de $\lambda = 180^\circ - 70^\circ - \phi = 87.92^\circ$. De esta manera, aplicando nuevamente *ley de senos*, se obtiene la ecuación (1.84):

$$\frac{50}{\sin(70^\circ)} = \frac{I_1}{\sin(87.92^\circ)} \quad (1.84)$$

$$I_1 = 53.17 \text{ A} \quad (1.85)$$

Ejemplo 1.2.7.

Hallar los valores de V_1 y θ para el circuito de la figura 1.19. Considerar las unidades de las magnitudes dadas en voltios.

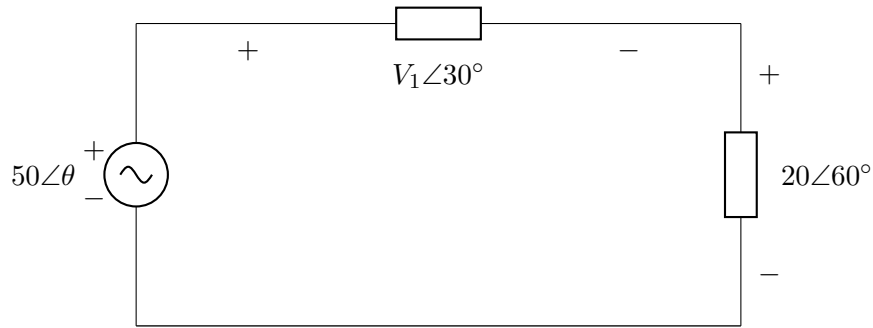


Figura 1.19: Circuito eléctrico del Ejemplo 1.2.7.

Solución

- **Método analítico:** Aplicando la *segunda ley de Kirchhoff*, se obtiene la ecuación compleja (1.86):

$$50\angle\theta = V_1\angle30^\circ + 20\angle60^\circ \quad (1.86)$$

Ahora, utilizando la *identidad de Euler*, se obtiene la ecuación (1.87):

$$50(\cos(\theta) + j\sin(\theta)) = V_1(\cos(30^\circ) + j\sin(30^\circ)) + 20(\cos(60^\circ) + j\sin(60^\circ)) \quad (1.87)$$

Separando la ecuación (1.87) en componentes real e imaginario, se presenta el sistema de ecuaciones en variable real, tal como se muestra en la ecuación (1.88).

$$\begin{cases} 50\cos(\theta) = V_1\cos(30^\circ) + 20\cos(60^\circ) \\ 50\sin(\theta) = V_1\sin(30^\circ) + 20\sin(60^\circ) \end{cases} \quad (1.88)$$

Elevando al cuadrado cada ecuación de la ecuación (1.88) y sumándolas, se obtiene la solución en la ecuación (1.89):

$$\begin{aligned} V_1^2 + 40(\cos(30^\circ)\cos(60^\circ) + \sin(30^\circ)\sin(60^\circ))V_1 + 20^2 - 50^2 &= 0 \\ V_1 = -66.31 \text{ V} \times \quad V_1 = 31.67 \text{ V} \checkmark &\Rightarrow \theta = 41.54^\circ \checkmark \end{aligned} \quad (1.89)$$

- **Método gráfico:** Se realiza el diagrama fasorial de la figura 1.20, correspondiente a la ecuación (1.86):

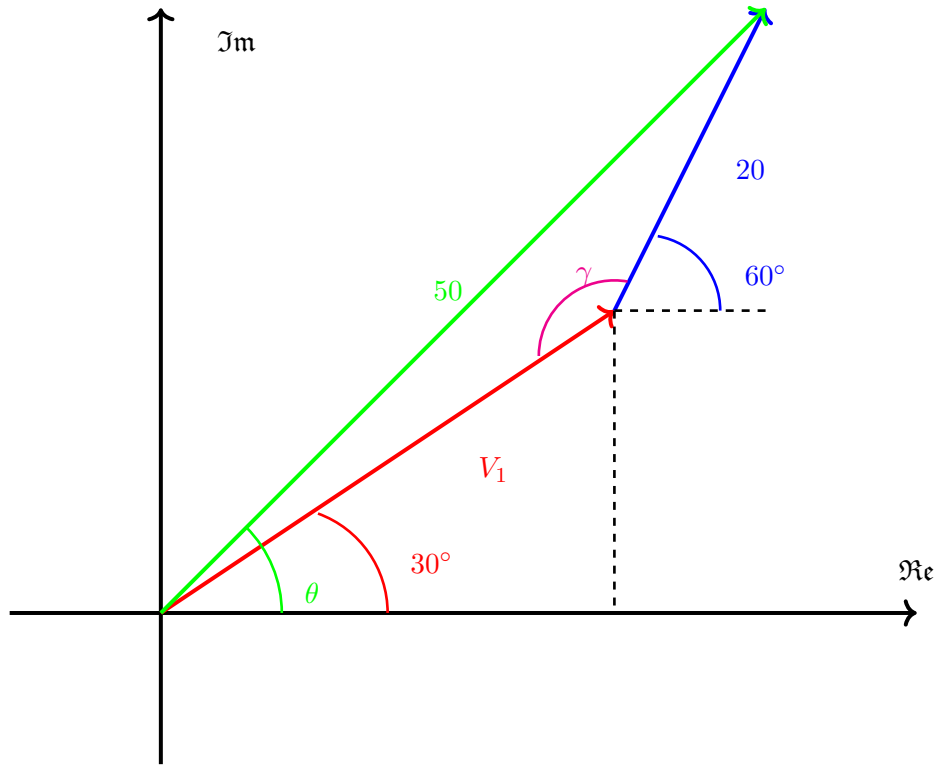


Figura 1.20: Representación gráfica de la ecuación (1.86).

Posteriormente, se calcula la tensión V_1 mediante la *ley de cosenos*, tal como se muestra en la ecuación (1.90):

$$\gamma = 180^\circ - 60^\circ + 30^\circ = 150^\circ \quad (1.90)$$

$$\beta = \theta - 30^\circ$$

$$50^2 = V_1^2 + 20^2 - 2(V_1)(20) \cos(150^\circ)$$

Los valores obtenidos para V_1 se muestran en la ecuación (1.91).

$$V_1 = \begin{cases} 31.67 \text{ V} & \checkmark \\ -66.31 \text{ V} & \times \end{cases} \quad (1.91)$$

Finalmente, el ángulo θ viene dado por la ecuación (1.92):

$$20^2 = V_1^2 + 50^2 - 2(V_1)(50) \cos(\theta - 30^\circ)$$

$$\beta = \theta - 30^\circ = 11.54^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 41.54^\circ \quad \checkmark \quad (1.92)$$

1.3. Ejemplo de aplicación

Ejemplo 1.3.1.

Suponga una línea monofásica de distribución de energía de baja tensión a 120 voltios (este valor se encuentra clasificado en Colombia en [13]). Esta línea se puede modelar solo con una resistencia y una inductancia ($R = 0.48 \Omega$ y $L = 0.65 \text{ mH}$), y como se muestra en la figura 1.21, esta alimenta en cierto momento de su operación una falla puramente resistiva en el nodo de carga y cuya corriente medida es $i_{falla}(t) = 200 \cos(120\pi t) \text{ A}$.

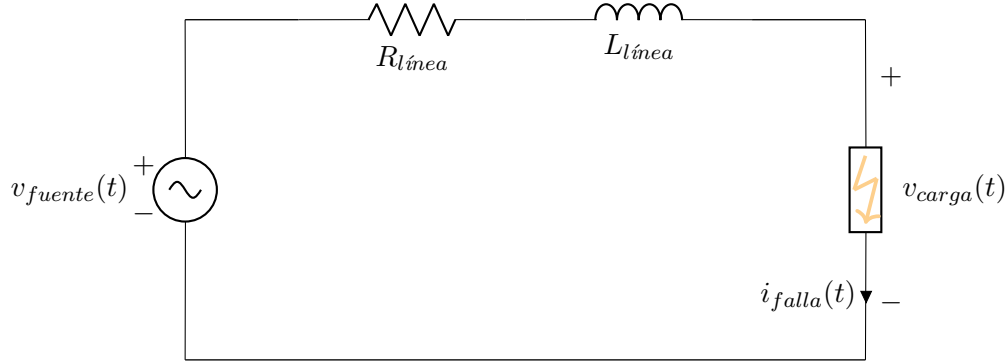


Figura 1.21: Modelo con parámetros concentrados de una línea de baja tensión.

Se requiere conocer la amplitud de la tensión de régimen permanente recibida por la carga durante el evento de falla (V_{carga}), sabiendo que la tensión suministrada por la fuente es $v_{fuente}(t) = 120 \cos(120\pi t + \theta) \text{ V}$. Considere solo la naturaleza resistiva de la falla, ignorando los parámetros de la carga.

Solución Primero se obtiene una ecuación a partir de la *segunda ley de Kirchhoff* para el circuito de la figura 1.21, obteniéndose la ecuación (1.93):

$$v_{carga}(t) + Ri_{falla}(t) + L \frac{di_{falla}(t)}{dt} = v_{fuente}(t)$$

$$V_{carga} \cos(\omega t) + RI_{falla} \cos(\omega t) + L \frac{d}{dt} (I_{falla} \cos(\omega t)) = V_{fuente} \cos(\omega t + \theta)$$

$$V_{carga} \cos(\omega t) + RI_{falla} \cos(\omega t) - \omega LI_{falla} \sin(\omega t) = V_{fuente} \cos(\omega t + \theta)$$

$$\Rightarrow (V_{carga} + RI_{falla}) \cos(\omega t) - \omega LI_{falla} \sin(\omega t) = V_{fuente} \cos(\omega t + \theta) \quad (1.93)$$

Puede notarse que todos los términos de la ecuación (1.93) contienen una función $\cos(\omega t)$ o $\sin(\omega t)$, lo que implica que es posible encontrar una representación más simple para obtener V_{carga} . Para ello, se expande la función coseno de $v_{fuente}(t)$ usando la ecuación (1.5), obteniéndose la ecuación (1.94).

$$(V_{carga} + RI_{falla}) \cos(\omega t) - \omega LI_{falla} \sin(\omega t) = V_{fuente} \cos(\omega t) \cos(\theta) - V_{fuente} \sin(\omega t) \sin(\theta) \quad (1.94)$$

Donde las ecuaciones (1.95) y (1.96), corresponden a las expresiones independientes.

$$\cos(\omega t) \rightarrow V_{carga} + RI_{falla} = V_{fuente} \cos(\theta) \quad (1.95)$$

$$-\sin(\omega t) \rightarrow \omega LI_{falla} = V_{fuente} \sin(\theta) \quad (1.96)$$

Por último, se resuelven ambas ecuaciones iniciando con el valor de la fase θ a partir de la ecuación (1.96), y luego se sustituye este valor en la ecuación (1.95) para calcular la amplitud de la tensión de régimen permanente recibida por la carga durante el evento de falla (V_{carga}).

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\omega L I_{falla}}{V_{fuente}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{120\pi \cdot 0.65m \cdot 200}{120} \right) \Rightarrow \theta = 24.1^\circ$$

$$V_{carga} = V_{fuente} \cos(\theta) - R I_{falla} = 120 \cos(24.1^\circ) - 0.48 \cdot 200$$

$$\therefore V_{carga} = 13.54 \text{ V } \checkmark$$

Sin embargo, para representar de forma simple esta *ley de Kirchhoff de tensiones*, vale la pena repasar la ecuación (1.7) y la **Nota 2** del primer ejemplo de este capítulo. De aquí, se observa que las funciones $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ son ortogonales, y que además la función coseno adelanta a la función seno en 90° , formando una base para la visualización de estas funciones en un plano en $\mathbb{R}^2$ de la figura 1.22 similar al plano complejo mostrado en la figura 1.12. Además, merece recordar que los números reales son un subconjunto de los números complejos ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), por lo que no es extraño separar los términos independientes para las coordenadas ortogonales $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$.

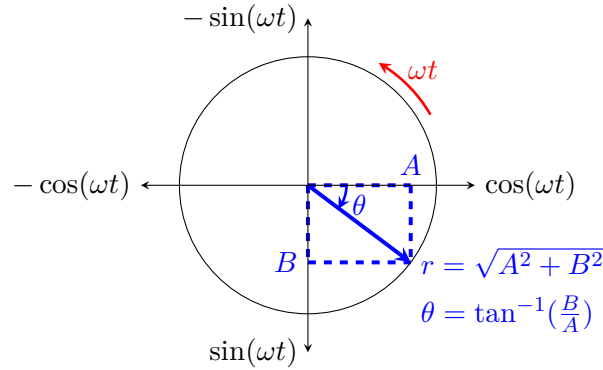


Figura 1.22: Ubicación de un punto en una circunferencia de radio $\sqrt{A^2 + B^2}$.

A partir de la información obtenida de la figura 1.22, se puede plantear un método alternativo usando números complejos, aprovechando que se pueden diagramar los términos de los ejes ortogonales como si se tratara del plano complejo, como se presenta en la figura 1.23.

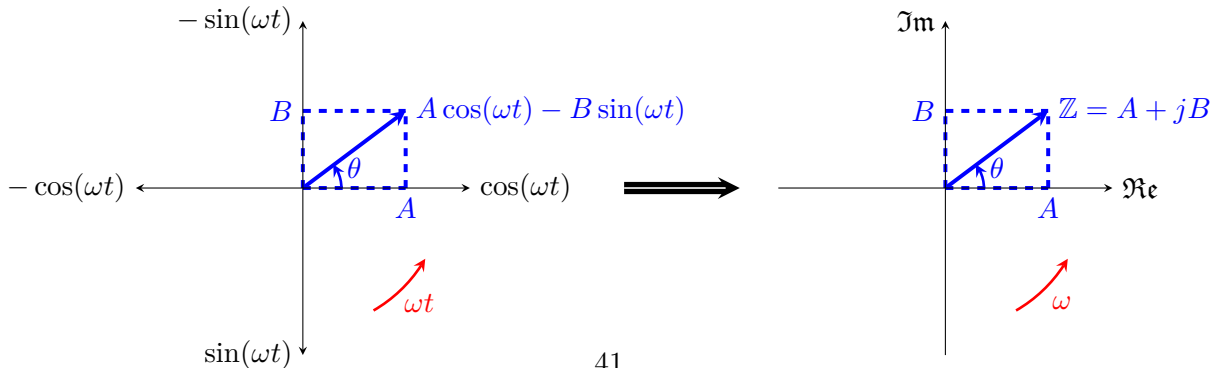


Figura 1.23: Comparación del plano de la figura 1.22 con un plano complejo.

Entonces, es posible representar los tres términos de la ecuación (1.93) como una ecuación compleja, tal y como se muestra en la ecuación (1.97).

$$(V_{carga} + RI_{falla}) + j(\omega LI_{falla}) = V_{fuente} \angle \theta \quad (1.97)$$

A su vez, esta ecuación compleja puede ser representada gráficamente como se muestra en la figura 1.24.

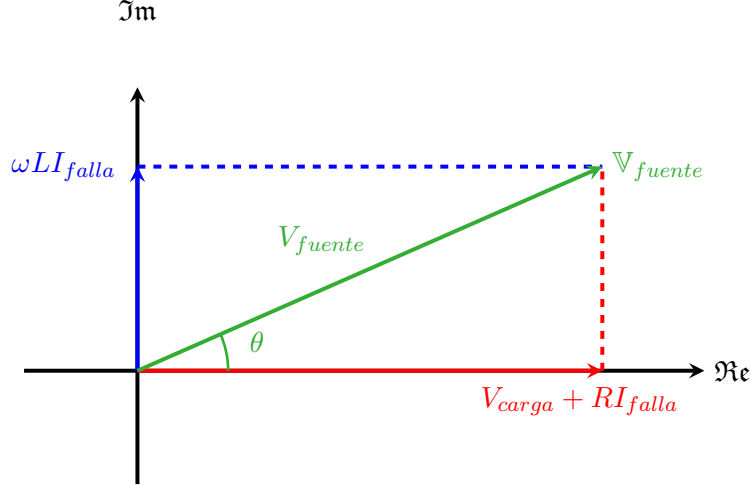


Figura 1.24: Representación gráfica de la ecuación (1.97).

De la figura 1.24 se observa que, para el caso específico del problema planteado la resultante (V_{fuente}) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, lo cual permite calcular directamente el valor de V_{carga} por medio del *teorema de Pitágoras*.

$$V_{carga} + RI_{falla} = \sqrt{V_{fuente}^2 - (\omega LI_{falla})^2}$$

$$\Rightarrow V_{carga} = \sqrt{V_{fuente}^2 - (\omega LI_{falla})^2} - RI_{falla} = \sqrt{120^2 - (120\pi \cdot 0.65\text{m} \cdot 200)^2} - 0.48 \cdot 200$$

$$\therefore V_{carga} = 13.54 \text{ V } \checkmark$$

Puede notarse que en ambos casos la amplitud de la tensión de régimen permanente recibida por la carga durante el evento de falla (V_{carga}) presentó el mismo resultado, pero con el método alternativo se logró resolver el problema de forma más directa.

En conclusión, el método gráfico es de gran ayuda para resolver problemas con una mayor combinación de variables.

1.4. Ejercicios propuestos

1. Obtener la función $f(t) = g(t) + h(t)$ para las siguientes operaciones. Tenga en cuenta que el resultado debe mostrarse como una función coseno o seno, según se solicite.

a.

$$g(t) = 4 \sin(t), \quad h(t) = 3 \cos(t), \quad f(t) : \text{coseno}$$

Respuesta: $f(t) = 5 \cos(t - 53.1^\circ)$

b.

$$g(t) = 2 \sin(5t - 60^\circ), \quad h(t) = -\sqrt{3} \sin(5t - 90^\circ), \quad f(t) : \text{seno}$$

Respuesta: $f(t) = \sin(5t)$

c.

$$g(t) = \cos(2t + \frac{\pi}{4}), \quad h(t) = -\sin(2t + \frac{\pi}{4}), \quad f(t) : \text{coseno}$$

Respuesta: $f(t) = \sqrt{2} \cos(2t + \frac{\pi}{2})$

d.

$$g(t) = -5 \cos(3t), \quad h(t) = 5 \cos(3t + \frac{\pi}{2}), \quad f(t) : \text{seno}$$

Respuesta: $f(t) = 5\sqrt{2} \sin(3t - \frac{3\pi}{4})$

2. Aplicando identidades trigonométricas, obtener una función seno o coseno que represente la respuesta del elemento de circuito eléctrico solicitado para las figuras 1.25, 1.26, 1.27 o 1.28, según corresponda. Aplique las *leyes de Kirchhoff* para su solución.

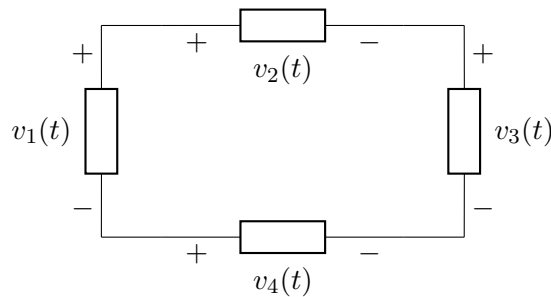


Figura 1.25: Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 2, literal a.

a. Señales conocidas:

$$v_1(t) = 20.0 \cos(\omega t - 60^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 10.0 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$v_4(t) = 20.0 \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$$

Obtener $v_3(t)$ para $f = 1 \text{ kHz}$.

Respuesta: $v_3(t) = 10.0 \sin(2000\pi t + 90^\circ) \text{ V} = 10.0 \cos(2000\pi t) \text{ V}$

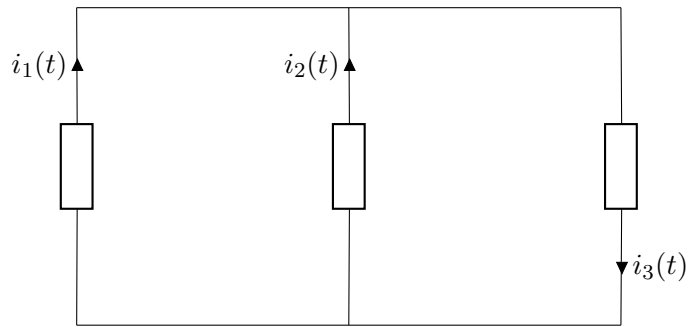


Figura 1.26: Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 2, literal **b**.

b. Señales conocidas:

$$i_1(t) = 5.0 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ mA}$$

$$i_3(t) = 5.0 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ mA}$$

Obtener $i_2(t)$ para $\omega = 1000 \text{ rad/s}$.

Respuesta: $i_2(t) = 5.0 \sin(1000t) \text{ mA} = 5.0 \cos(1000t - 90^\circ) \text{ mA}$

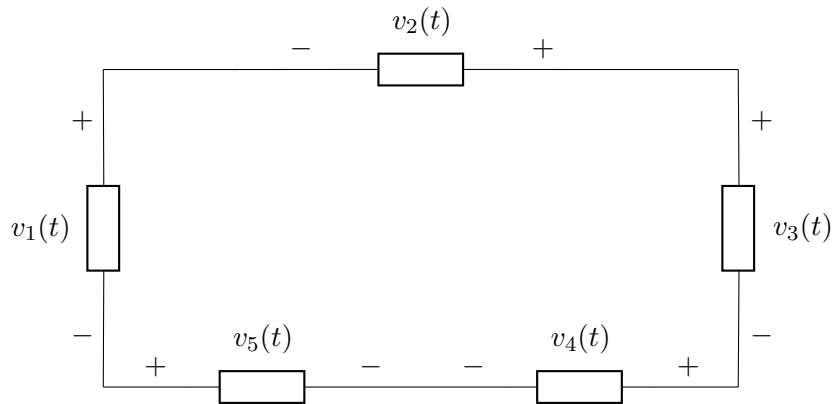


Figura 1.27: Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 1.26, literal **c**.

c. Señales conocidas:

$$v_2(t) = 8.2 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ kV}$$

$$v_3(t) = 4.5 \cos(\omega t + 32^\circ) \text{ kV}$$

$$v_4(t) = 3.8 \sin(\omega t - 100^\circ) \text{ kV}$$

$$v_5(t) = 7.0 \cos(\omega t + 84^\circ) \text{ kV}$$

Obtener $v_1(t)$ para $\omega = 377 \text{ rad/s}$.

Respuesta: $v_1(t) = 14.7 \sin(377t + 170.2) \text{ kV} = 14.7 \cos(377t + 80.2^\circ) \text{ kV}$

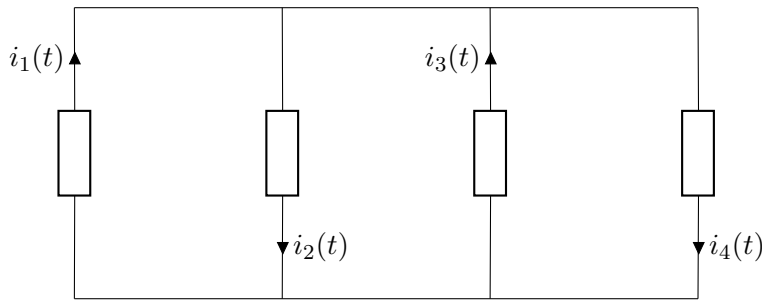


Figura 1.28: Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 2, literal **d**.

d. Señales conocidas:

$$i_1(t) = 1.2 \sin(\omega t + 16^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 3.2 \sin(\omega t + 28^\circ) \text{ A}$$

$$i_4(t) = 2.6 \cos(\omega t + 104^\circ) \text{ A}$$

Obtener $i_3(t)$ para $f = 50 \text{ Hz}$.

Respuesta: $i_3(t) = 1.0 \sin(100\pi t + 147.5^\circ) \text{ A} = 1.0 \cos(100\pi t + 57.5^\circ) \text{ A}$

3. Desarrolle *paso a paso* las operaciones indicadas a continuación y exprese los resultados en forma de par ordenado (a, b) , rectangular $(a + j \cdot b)$, polar $(r \angle \theta)$, exponencial $(r \cdot e^{j\theta})$ y trigonométrica $(r \cos \theta + j \cdot r \sin \theta)$.

a.

$$(7, 2) + (3, 6) - (4, 7)(6, 4)$$

Respuesta: $14 - j50$

b.

$$\left[\frac{(3+j9)(5+j10)(9-j7)}{5(3+j6)} \right]^*$$

Respuesta: $(30, 20)$

c.

$$10 \angle 30^\circ - 3e^{j135^\circ} + (4, -7)(3 + j8)$$

Respuesta: $80 \cos(10^\circ) + j80 \sin(10^\circ)$

d.

$$\left(3 \angle \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sqrt{2} \text{conj}(3+j4)}{(1-j)(3-j4)}$$

Respuesta: $2 \angle \pi/4$

4. Encontrar las incógnitas que se muestran en las ecuaciones complejas, utilizando los dos métodos vistos en este capítulo.

a.

$$50 \angle \theta = I \angle 30^\circ + 20 \angle 60^\circ$$

Respuesta: $I = 31.7, \theta = 41.5^\circ$

b.

$$100\angle 0^\circ + A\angle 60^\circ = 173\angle \phi$$

Respuesta: $A = 100, \phi = 30^\circ$

c.

$$25\angle \alpha + 15\angle \beta = 30\angle 0^\circ$$

Respuesta: $\alpha = -30^\circ, \beta = 56.3^\circ$

d.

$$X\angle \frac{\pi}{6} - Y\angle \frac{\pi}{2} = 80\angle -\frac{\pi}{6}$$

Respuesta: $X = Y = 80$

5. Para el circuito que se muestra en la figura 1.29, encontrar los valores de V_1 y θ .

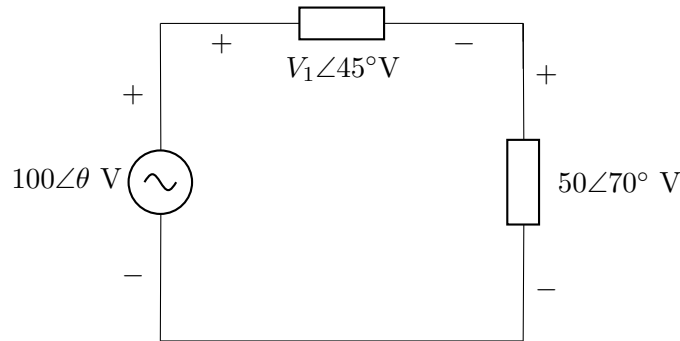


Figura 1.29: Circuito eléctrico propuesto para el Ejercicio 1.4.

Respuesta: $V_1 = 52.4 \text{ V}, \theta = 57.2^\circ$

6. A partir del procedimiento presentado en el Ejemplo 1.1.2, obtenga una expresión para calcular la tensión $v(t)$ en el circuito de la figura 1.30. Considere que $i_L(t_0) = 0$, para la solución que debe ser planteada en régimen permanente.

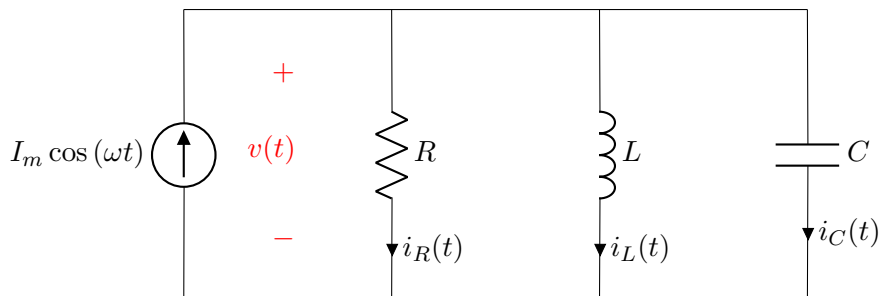


Figura 1.30: Circuito eléctrico RLC paralelo.

Luego, calcular la señal resultante de v_t para los valores asignados: $i_S(t) = 4 \cos(200t) \text{ A}$, $R = 5 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, y $C = 500 \mu\text{F}$.

Respuesta: $v(t) = 19.4 \cos(200t - 14^\circ) \text{ V}$

1.5. Ejercicios de introducción al diseño

1. Observar el circuito eléctrico de la figura 1.25, de la sección 1.4. Se solicita establecer las funciones para $v_1(t)$, $v_3(t)$ y $v_4(t)$, tales que la respuesta de $v_2(t)$ sea igual a $12 \sin(100t + 30^\circ)$ voltios. Para el establecimiento de las funciones para las tensiones solicitadas debe considerar que ninguna de las amplitudes supera los 5 voltios.
2. Observar el circuito eléctrico de la figura 1.28, de la sección 1.4. Se solicita establecer las funciones para $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$, tales que la respuesta de $i_4(t)$ sea igual a 0 amperios. Para el establecimiento de las funciones para las corrientes solicitadas debe considerar que todas las fases son diferentes.
3. Diseñar un circuito eléctrico con configuración mixta, tal que emule el comportamiento representado en la figura 1.7, de la sección 1.1.

Capítulo 2

Método Fasorial

2.1. Definición del método fasorial

El método fasorial se usa para el análisis de circuitos lineales invariantes con el tiempo, excitados a partir de fuentes sinusoidales de la misma frecuencia. El método prácticamente es una transformación que implica trabajar con cantidades complejas en el dominio de la frecuencia, el cual es más fácil que trabajar en el dominio del tiempo.

La palabra *fasor* se incluyó deliberadamente en ingeniería para reemplazar la palabra *vector*, con la finalidad de reservar esta última palabra para campos electromagnéticos [14]. Es importante aclarar que el fasor es una construcción mental, algo conceptual, donde la correspondiente cantidad física a medir corresponde a una señal en régimen sinusoidal permanente ¹.

Lema 2.1.1. Sean $\mathbb{F}_1(t)$ y $\mathbb{F}_2(t)$ dos funciones complejas del tiempo, K_1 y K_2 dos constantes reales, se tiene que:

$$\Re [K_1\mathbb{F}_1(t) + K_2\mathbb{F}_2(t)] = K_1\Re [\mathbb{F}_1(t)] + K_2\Re [\mathbb{F}_2(t)] \quad (2.1)$$

donde $\Re [\mathbb{F}(t)]$ indica “parte real de” $\mathbb{F}(t)$, e $\Im [\mathbb{F}(t)]$ indica “parte imaginaria de” $\mathbb{F}(t)$.

La demostración de este lema es inmediato y resulta de la representación rectangular de $\mathbb{F}_1(t)$ y $\mathbb{F}_2(t)$ y la aplicación de la propiedad de suma de complejos establecida en el Capítulo 1.

El lema 2.1.1 permite ver la aplicación de dos principios de los circuitos eléctricos en régimen permanente: la *linealidad* y la *superposición*.

También, a modo de simplificación, la tabla 2.1 muestra la relación entre ambos dominios tratados en este libro basado en lo mostrado en el lema 2.1.2 para diferentes representaciones.

Representación temporal	Representación fasorial
$a(t) = A \cos(\omega t + \phi)$	$\mathbb{A} = A \angle \phi$
$\frac{da(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$	$j\omega \mathbb{A} = \omega A \angle (\phi + \frac{\pi}{2})$
$\int_{-\infty}^t a(t) dt = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \phi)$	$\frac{1}{j\omega} \mathbb{A} = \frac{1}{\omega} A \angle (\phi - \frac{\pi}{2})$

Tabla 2.1: Representaciones entre dominios de una señal eléctrica sinusoidal.

Nótese de la tabla 2.1 que en $\mathbb{A}$ el factor de la función $e^{j\omega t}$ es suprimido y la frecuencia no se muestra explícitamente. Esto se debe a que el fasor $\mathbb{A}$ depende de la frecuencia ω , cuyo valor es constante en régimen permanente, y por tal razón el dominio fasorial también es conocido como el dominio de la frecuencia.

¹Para una mayor comprensión del término *fasor* y sus orígenes, se recomienda revisar las referencias [8, 14, 15].

Lema 2.1.2. Sea $\mathbb{A}$ un número complejo con representación exponencial $\mathbb{A} = Ae^{j\phi}$.
Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Re [\mathbb{A}e^{j\omega t}] &= \frac{d}{dt} \Re [Ae^{j\phi}e^{j\omega t}] \\
&= \frac{d}{dt} \Re [Ae^{j(\omega t + \phi)}] \\
&= \frac{d}{dt} (A \cos(\omega t + \phi)) \\
&= -\omega A \sin(\omega t + \phi) \\
&= \omega A \cos(\omega t + \phi + \pi/2) \\
&= \omega A \Re [e^{j\pi/2}e^{j(\omega t + \phi)}] \\
&= \Re [j\omega Ae^{j(\omega t + \phi)}] \\
&= \Re [j\omega \mathbb{A}e^{j\omega t}] \\
&= \Re \left[\frac{d}{dt} \mathbb{A}e^{j\omega t} \right]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^t \Re [\mathbb{A}e^{j\omega t}] dt &= \int_{-\infty}^t \Re [Ae^{j\phi}e^{j\omega t}] dt \\
&= \int_{-\infty}^t \Re [Ae^{j(\omega t + \phi)}] dt \\
&= \int_{-\infty}^t (A \cos(\omega t + \phi)) dt \\
&= \frac{1}{\omega} A \sin(\omega t + \phi) \\
&= \frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \phi - \pi/2) \\
&= \frac{A}{\omega} \Re [e^{-j\pi/2}e^{j(\omega t + \phi)}] \\
&= \Re \left[\frac{-j}{\omega} Ae^{j(\omega t + \phi)} \right] \\
&= \Re \left[\frac{1}{j\omega} \mathbb{A}e^{j\omega t} \right] \\
&= \Re \left[\int_{-\infty}^t \mathbb{A}e^{j\omega t} dt \right]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

En resumen, a partir de las ecuaciones (2.2) y (2.3), se puede notar que:

$$\frac{d}{dt} \Re [\mathbb{A}e^{j\omega t}] = \Re \left[\frac{d}{dt} \mathbb{A}e^{j\omega t} \right] = \Re [j\omega \mathbb{A}e^{j\omega t}] \tag{2.4}$$

$$\int_{-\infty}^t \Re [\mathbb{A}e^{j\omega t}] dt = \Re \left[\int_{-\infty}^t \mathbb{A}e^{j\omega t} dt \right] = \Re \left[\frac{\mathbb{A}}{j\omega} e^{j\omega t} \right] \tag{2.5}$$

De igual manera, es importante considerar que estos número complejos satisfacen diversas propiedades, como la igualdad, que corresponde al lema 2.1.3, que facilita la solución por separación de variables.

Lema 2.1.3. Dados dos números complejos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, si cumplen la igualdad expresada en la ecuación (2.6):

$$\begin{aligned}
\Re [\mathbb{A}e^{j\omega t}] &= \Re [\mathbb{B}e^{j\omega t}] \\
\Im [\mathbb{A}e^{j\omega t}] &= \Im [\mathbb{B}e^{j\omega t}]
\end{aligned} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Entonces $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ y viceversa^a.

^aEsta propiedad de igualdad también puede ser demostrada usando los módulos y los argumentos de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.

Sea:

$$v(t) = v_1(t) + K_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + v_2(t) + K_2 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} \quad (2.7)$$

Donde K_1 y K_2 son valores reales constantes en la ecuación (2.7), $v_1(t) = V_{m_1} \sin(\omega t + \phi_1)$ y $v_2(t) = V_{m_2} \sin(\omega t + \phi_2)$.

Aplicando los lemas 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3, se tiene la ecuación (2.8):

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \Im [V_{m_1} e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \Im [\mathbb{V}_1 e^{j\omega t}] \\ \frac{dv_1(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \Im [\mathbb{V}_1 e^{j\omega t}] = \Im [j\omega \mathbb{V}_1 e^{j\omega t}] \\ \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} \Im [\mathbb{V}_2 e^{j\omega t}] = \Im [(j\omega)^2 \mathbb{V}_2 e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Reemplazando las expresiones de la ecuación (2.8) en la ecuación de $v(t)$ en (2.7), se tiene la ecuación (2.9):

$$v(t) = \Im [\mathbb{V}_1 e^{j\omega t}] + K_1 \Im [j\omega \mathbb{V}_1 e^{j\omega t}] + \Im [\mathbb{V}_2 e^{j\omega t}] + K_2 \Im [(j\omega)^2 \mathbb{V}_2 e^{j\omega t}] \quad (2.9)$$

Usando el Lemma 2.1.2, se obtiene la ecuación (2.10), lo cual se puede expresar también como la ecuación (2.11):

$$v(t) = \Im [(\mathbb{V}_1 + K_1 j\omega \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + K_2 (j\omega)^2 \mathbb{V}_2) e^{j\omega t}] = \Im [\mathbb{V} e^{j\omega t}] = \Im [V_m e^{j\phi}] \quad (2.10)$$

$$\mathbb{V} = (1 + j\omega K_1) \mathbb{V}_1 + (1 - \omega^2 K_2) \mathbb{V}_2 = V_m e^{j\phi}$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (2.11)$$

Por lo anterior, puede confirmarse el teorema 2.1.4.

Teorema 2.1.4. *La suma de cualquier número de sinusoides de la misma frecuencia y de cualquier número de sus derivadas de cualquier orden es también una senoide de la misma frecuencia.*

Ejemplo 2.1.1.

Sea el circuito que se muestra en la figura 2.1, calcular la tensión $v_1(t)$.

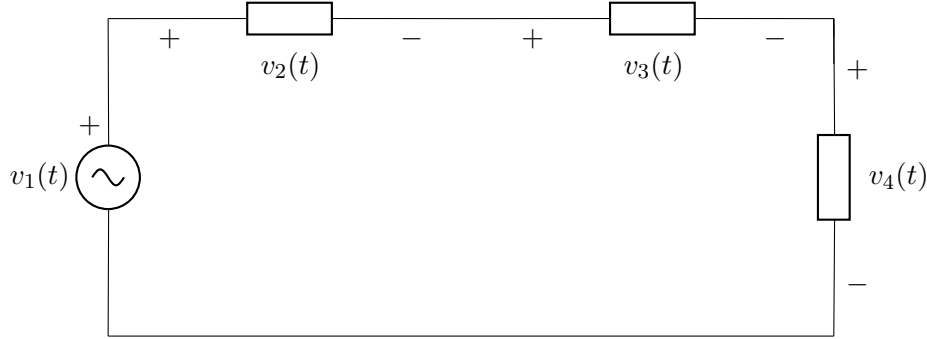


Figura 2.1: Circuito eléctrico ejemplo 2.1.1.

Donde:

$$\begin{aligned} v_2(t) &= 5 \cos(\omega t + 20^\circ) \\ v_3(t) &= 8 \sin(\omega t - 30^\circ) \\ v_4(t) &= 10 \sin(\omega t + 40^\circ) \end{aligned}$$

Solución.

Aplicando la *Segunda ley de Kirchhoff*, se obtiene la ecuación (2.12):

$$v_1(t) = v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) \quad (2.12)$$

Reemplazando los valores de $v_2(t)$, $v_3(t)$ y $v_4(t)$, se tiene la ecuación (2.14):

$$\begin{aligned} V_{m1} \cos(\omega t + \alpha) &= 5 \cos(\omega t + 20^\circ) + 8 \cos(\omega t - 30^\circ - 90^\circ) + 10 \cos(\omega t + 40^\circ - 90^\circ) \\ \Re[V_{m1} e^{j\alpha} e^{j\omega t}] &= \Re[5e^{j20^\circ} e^{j\omega t}] + \Re[8e^{-j120^\circ} e^{j\omega t}] + \Re[10e^{-j50^\circ} e^{j\omega t}] \\ \Re[V_1 e^{j\omega t}] &= \Re[V_2 e^{j\omega t}] + \Re[V_3 e^{j\omega t}] + \Re[V_4 e^{j\omega t}] \\ V_1 = V_2 + V_3 + V_4 &= 5\angle 20^\circ + 8\angle -120^\circ + 10\angle -50^\circ = 14.72\angle -61.04^\circ \text{ V} \\ \Rightarrow v_1(t) &= 14.72 \cos(\omega t - 61.04^\circ) \text{ V} \quad \checkmark \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cabe resaltar que el ejemplo también se puede desarrollar usando la función seno, el cual debe dar el mismo resultado con un desfase de $+90^\circ$, es decir:

$$v_1(t) = 14.72 \sin(\omega t + 28.96^\circ) \text{ V}$$

Ejemplo 2.1.2.

Considérese el circuito eléctrico de la figura 2.2, donde $v_S(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$. Calcular $i(t)$.

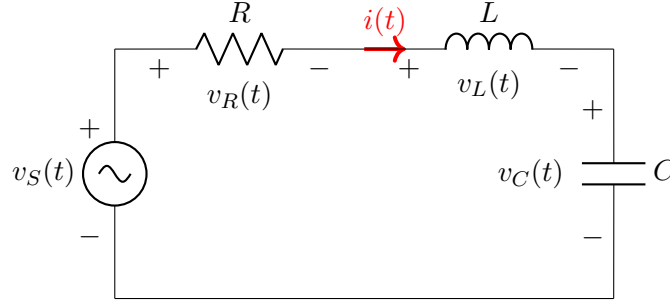


Figura 2.2: Circuito RLC serie del Ejemplo 2.1.2.

Luego, sustituya en la expresión obtenida los valores asignados: $v_S(t) = 50 \cos(100t)$ V, $R = 4 \Omega$, $L = 80$ mH, $C = 2000 \mu\text{F}$, y calcule la corriente para el circuito eléctrico RLC serie propuesto. Compare con la expresión de la corriente eléctrica obtenida en el Ejemplo 1.1.2.

Solución.

Aplicando la *Segunda ley de Kirchhoff*, la ecuación diferencial que describe el circuito con $V_C(t_0) = 0$ se muestra en la ecuación (2.14):

$$v_S(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt \quad (2.14)$$

Considerando el valor en régimen permanente de $i(t)$ como el que se muestra en la ecuación (2.15), se obtiene la ecuación (2.16):

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (2.15)$$

$$\Re [V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}] = \Re [RI_m e^{j(\omega t + \theta_i)}] + \frac{d}{dt} \left(\Re [LI_m e^{j(\omega t + \theta_i)}] \right) + \int \left(\Re \left[\frac{1}{C} I_m e^{j(\omega t + \theta_i)} \right] \right) dt$$

$$\Re [\mathbb{V} e^{j\omega t}] = \Re [R\mathbb{I} e^{j\omega t}] + \Re [j\omega L\mathbb{I} e^{j\omega t}] + \Re \left[\frac{1}{j\omega C} \mathbb{I} e^{j\omega t} \right]$$

$$\Re [\mathbb{V} e^{j\omega t}] = \Re \left[\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \mathbb{I} e^{j\omega t} \right]$$

$$\mathbb{V} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \mathbb{I} = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) \mathbb{I}$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{V_m \angle \theta_v}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{V_m \angle \theta_v}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \tan^{-1}\left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R\right)}$$

$$\therefore \mathbb{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle \left(\theta_v - \tan^{-1} \left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right) \right) \quad (2.16)$$

Ahora si, al sustituir los valores asignados: $V_m = 50$ V, $\theta_v = 0^\circ$, $\omega = 100$ rad/s, $R = 4 \Omega$, $L = 80$ mH, $C = 2000 \mu\text{F}$, en la en la expresión anterior, se obtiene que la ecuación (2.17):

$$\mathbb{I} = \frac{50}{\sqrt{4^2 + \left(100 \cdot 80\text{m} - \frac{1}{100 \cdot 2000\mu}\right)^2}} \angle \left(0^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{100 \cdot 80\text{m} - \frac{1}{100 \cdot 2000\mu}}{4} \right) \right) = 10 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

$$\Rightarrow i(t) = 10 \cos(100t - 36.87^\circ) \text{ A} \checkmark \quad (2.17)$$

Puede notarse que la respuesta de la corriente eléctrica es la misma a la obtenida en el Ejemplo 1.1.2, pero el procedimiento usando el método fasorial es más directo.

2.2. Elementos básicos

En esta sección, se presentan los *diagramas fasoriales*² y las relaciones de los elementos básicos de un circuito pasivo, así como algunas combinaciones RLC serie-paralelo. Considerando las señales de tensión y corriente $v(t)$ e $i(t)$, con representaciones fasoriales $\mathbb{V}$ e $\mathbb{I}$ en un circuito eléctrico, sus relaciones son conocidas como inmitancias³, donde su relación directa se conoce como impedancia⁴ $\mathbb{Z}$ y su recíproco corresponde a la admitancia $\mathbb{Y}$ [18, 19].

2.2.1. Resistencia

Considérese una resistencia⁵, tanto en el dominio del tiempo, como como su correspondiente impedancia en el dominio de la frecuencia, tal como se muestra en la figura 2.3 y ecuación (2.18):

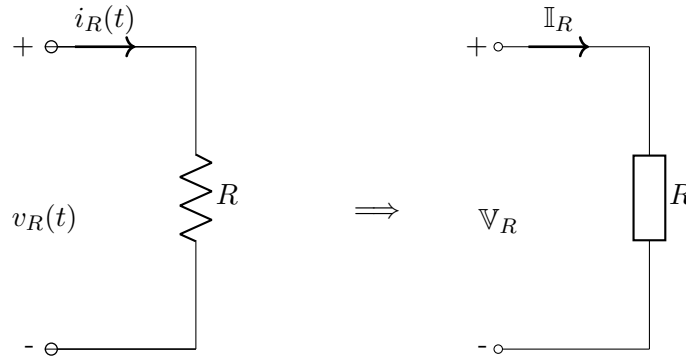


Figura 2.3: Resistencia en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R i_R(t) & \mathbb{V}_R &= R \mathbb{I}_R \\ \mathbb{Z}_R &= \frac{\mathbb{V}_R}{\mathbb{I}_R} = Z_R \angle 0^\circ = R & \Rightarrow & \mathbb{Y}_R = \frac{\mathbb{I}_R}{\mathbb{V}_R} = Y_R \angle 0^\circ = G \end{aligned} \quad (2.18)$$

²Es un diagrama donde se muestran las relaciones entre fasores para las cantidades de tensión y corriente sobre un plano complejo. Como complemento, en [16] se presentan algunas definiciones y teoremas que permiten entender las convenciones que se utilizan en la actualidad para la representación de fuerzas electromotrices (y corrientes) armónicas.

³El sufijo *-ncia* se emplea en electricidad por cualquiera de sus dos significados: “cualidad de” que forma sustantivos a partir de adjetivos, como impedante o capaz (capacidad de); o “acción y resultado de” que forma sustantivos a partir de verbos como ganar, conducir o inducir.

⁴El ingeniero Arthur Kennelly presententa en [17] una definición de este término para un conductor eléctrico, pero esta hoy en día se extiende a fuentes, cargas, y otros.

⁵Aunque en este libro no se hará énfasis en los parámetros de circuitos, se sugiere revisar los fenómenos asociados e interpretaciones para cada uno de ellos en [20]. En adición, aunque sigue siendo relativamente novedoso y no se cuenta con información contundente sobre la *memristencia* para aplicaciones en CA sinusoidal (enfoque de este libro), en [5, 7, 21] se puede encontrar más información sobre este parámetro de circuito.

Donde:

Z_R : es la magnitud de la *impedancia resistiva* $[\Omega]$ (medida de oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica una tensión).

Y_R : es la *admitancia resistiva* $[\mathcal{U}]$ (inversa de la impedancia).

G_R : es la *conductancia resistiva* $[\mathcal{U}]$ (parte real de la admitancia).

Dado que la tensión en la resistencia es su corriente multiplicada por un escalar (valor del parámetro R de la resistencia) éstas dos variables se encuentran en fase, tal como se muestra en el diagrama fasorial de la figura 2.4.

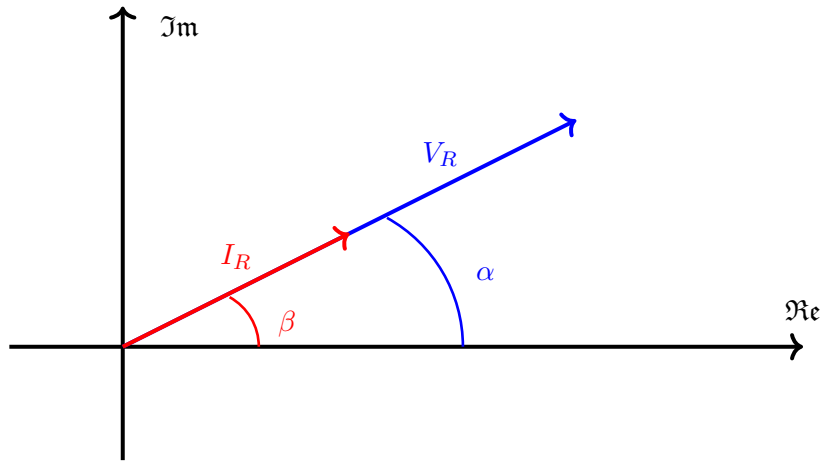


Figura 2.4: Diagrama fasorial que representa las variables $\mathbb{V}_R$ e $\mathbb{I}_R$ para una resistencia.

2.2.2. Inductancia

Considérese una inductancia, tanto en el dominio del tiempo, como su correspondiente impedancia en el dominio de la frecuencia, tal como se muestra en la figura 2.5 y ecuación (2.5):

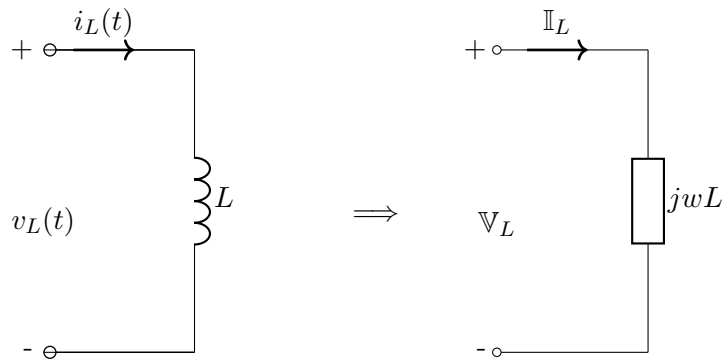


Figura 2.5: Inductancia en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

$$\begin{aligned}
v_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow \mathbb{V}_L = j\omega L \mathbb{I}_L \\
\mathbb{Z}_L &= j\omega L = \omega L \angle 90^\circ = X_L \angle 90^\circ \\
\mathbb{Y}_L &= \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} \angle -90^\circ = B_L \angle -90^\circ \\
\mathbb{I}_L &= I_L \angle \alpha \Rightarrow \mathbb{V}_L = \omega L I_L \angle (\alpha + 90^\circ)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Donde:

Z_L : es la magnitud de la *impedancia inductiva* $[\Omega]$.

X_L : es la *reactancia inductiva*⁶ $[\Omega]$ (parte imaginaria de la impedancia).

B_L : es la *susceptancia inductancia* $[\mathcal{U}]$ (parte imaginaria de la admitancia).

Como puede observarse en la ecuación (2.19), la corriente atrasa 90° a la tensión. Así mismo, su correspondiente diagrama fasorial se muestra en la figura 2.6:

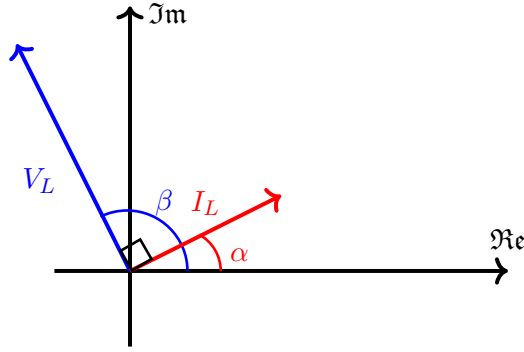


Figura 2.6: Diagrama fasorial que representa las variables $\mathbb{V}_L$ e $\mathbb{I}_L$ para una inductancia.

2.2.3. Capacitancia

Considere una capacitancia, tanto en el dominio del tiempo como como su correspondiente impedancia en el dominio del frecuencia, tal como se muestra en la figura 2.7 y ecuación (2.8):

$$\begin{aligned}
i_C(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \mathbb{I}_C = j\omega C \cdot \mathbb{V}_C \\
\mathbb{Z}_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = X_C \angle -90^\circ \\
\mathbb{Y}_C &= j\omega C = \omega C \angle 90^\circ = B_C \angle 90^\circ \\
\mathbb{I}_C &= I_C \angle \alpha \Rightarrow \mathbb{V}_C = \frac{I_C}{\omega C} \angle \alpha - 90^\circ
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Donde:

Z_C : es la magnitud de la *impedancia capacitiva* $[\Omega]$.

⁶Parte de la historia sobre cómo de adoptó oficialmente el término de *reactancia* por la AIEE (*American Institute of Electrical Engineers*) se presenta en [22].

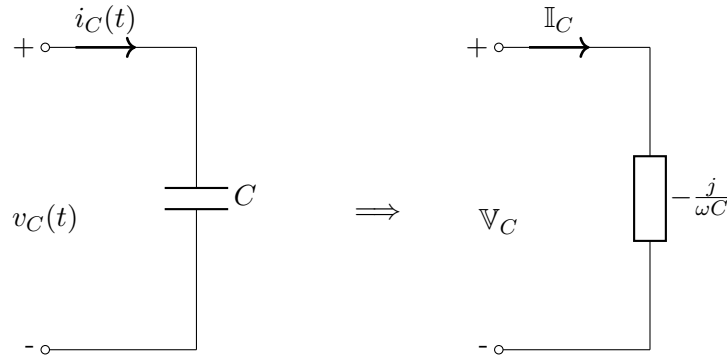


Figura 2.7: Capacitancia en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

X_C : es la *reactancia capacitiva* [Ω] (parte imaginaria de la impedancia).
 B_C : es la *susceptancia capacitiva* [$\mathcal{U}$] (parte imaginaria de la admitancia).

Como puede observarse en la ecuación 2.20, la corriente adelanta 90° a la tensión. Así mismo, su correspondiente diagrama fasorial se muestra en la figura 2.8:

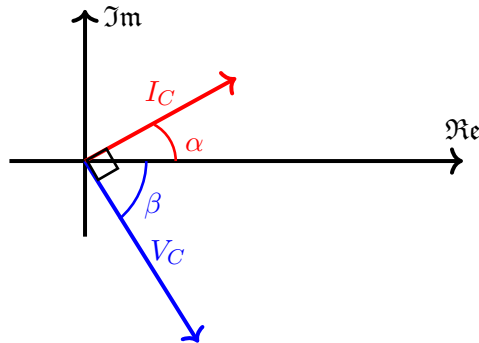


Figura 2.8: Diagrama fasorial que representa las variables V_C e I_C para una capacitancia.

2.2.4. Combinación serie RL

Para la construcción de los diagramas fasoriales del circuito de la figura 2.9, se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Aplicar las *leyes de Kirchhoff*.
2. Seleccionar una referencia para el circuito⁷, bien sea una tensión o una corriente a cero grados sexagesimales⁸.
3. Construir los diagramas fasoriales⁹ teniendo cuenta los ítems anteriores, así como los diagramas fasoriales de los elementos pasivos de las subsecciones 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3.

De esta manera, siguiendo los pasos anteriores se tiene:

⁷Solo se realiza una vez.

⁸En la mayoría de los casos se selecciona aquella que comparte la misma tensión o la misma corriente en varios elementos.

⁹El número de diagramas fasoriales corresponde al número de ecuaciones deducidas en el ítem 1.

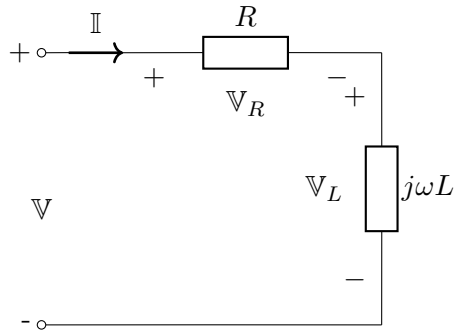


Figura 2.9: Circuito serie RL.

1. Aplicando la *Segunda ley de Kirchhoff* al circuito de la figura 2.9, se obtiene la ecuación (2.21):

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_R + \mathbb{V}_L \quad (2.21)$$

2. Dado que la corriente es la misma en todos los elementos del circuito, se puede establecer como referencia, tal como se muestra en la ecuación (2.22):

$$\mathbb{I} = I\angle 0^\circ = \mathbb{I}_R = \mathbb{I}_L \quad (2.22)$$

3. Ya que se definió una sola ecuación en el ítem 1, solo existirá un diagrama fasorial para el circuito serie RL, el cual se muestra en la figura 2.10.

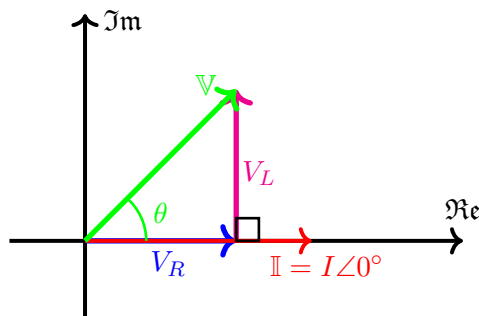


Figura 2.10: Diagrama fasorial de un circuito serie RL (Referencia $\mathbb{I}$).

Cabe resaltar que aunque se recomienda la corriente como referencia para la construcción del diagrama fasorial, se puede seleccionar otra variable, tal como se muestra en la figura 2.11.

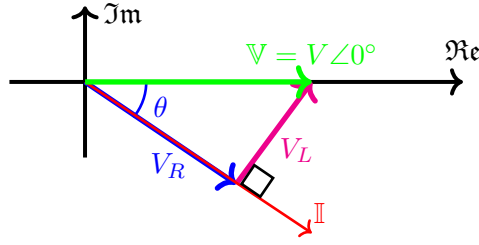


Figura 2.11: Diagrama fasorial de un circuito serie RL (Referencia $\mathbb{V}$).

2.2.5. Combinación serie RC

Al igual que para el caso anterior, se tienen en cuenta los pasos para la construcción de diagramas fasoriales.

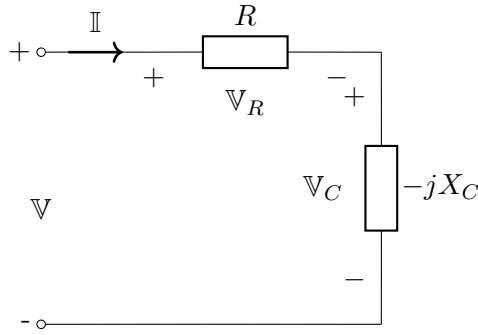


Figura 2.12: Circuito serie RC.

1. Aplicando también la *segunda ley de Kirchhoff* al circuito de la figura 2.12, se obtiene la Ecuación (2.23):

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_R + \mathbb{V}_C \quad (2.23)$$

2. Dado que la corriente es la misma en todos los elementos del circuito, se puede establecer como referencia, obteniéndose la ecuación (2.24):

$$\mathbb{I} = I\angle 0^\circ = \mathbb{I}_R = \mathbb{I}_C \quad (2.24)$$

3. Solo existirá un diagrama fasorial para el circuito serie RC, el cual se muestra en la figura 2.13.

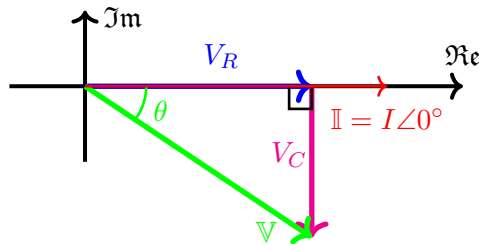


Figura 2.13: Diagrama fasorial de un circuito serie RC (referencia $\mathbb{I}$).

2.2.6. Combinación serie RLC

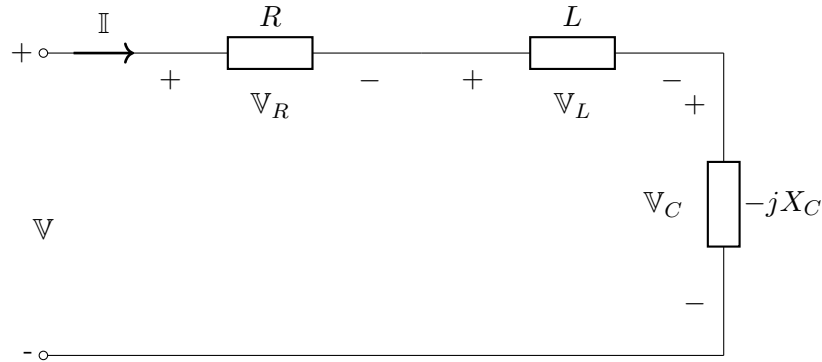


Figura 2.14: Circuito serie RLC.

1. Aplicando la *segunda ley de Kirchhoff* al circuito de la figura 2.14, se obtiene la ecuación (2.25):

$$V = V_R + V_C + V_L \quad (2.25)$$

2. Dado que la corriente es la misma en todos los elementos del circuito, se puede establecer como referencia, tal como se muestra en la ecuación (2.26):

$$I = I \angle 0^\circ = I_R = I_C = I_L \quad (2.26)$$

3. El diagrama fasorial para el circuito serie RLC, se muestra en la figura 2.15. Cabe resaltar que para este diagrama se consideró $X_L > X_C$.

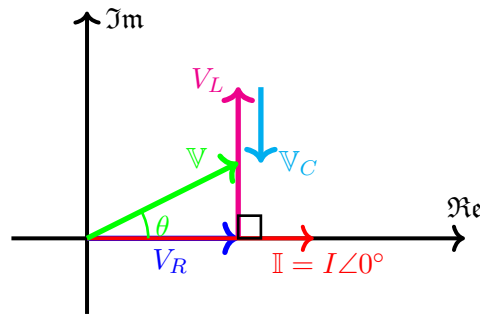


Figura 2.15: Diagrama fasorial de un circuito serie RLC (referencia I).

2.2.7. Combinación paralelo RL

1. Aplicando la *primera ley de Kirchhoff*, se obtiene la ecuación (2.27):

$$I = I_R + I_L \quad (2.27)$$

2. Considerando como referencia el voltaje se tiene la ecuación (2.28):

$$V = V \angle 0^\circ = V_R = V_L \quad (2.28)$$

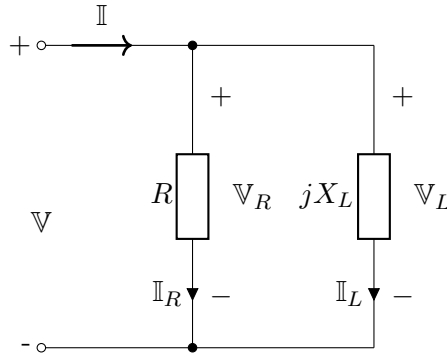


Figura 2.16: Circuito paralelo RL.

3. El diagrama fasorial correspondiente se muestra en la figura 2.17:

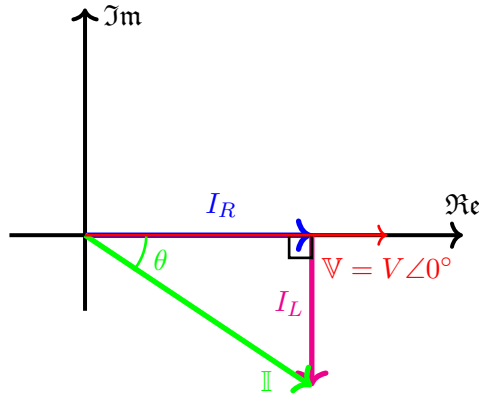


Figura 2.17: Diagrama fasorial de un circuito paralelo RL (referencia $\mathbb{V}$).

2.2.8. Combinación serie-paralelo

1. Aplicando las *leyes de Kirchhoff* al circuito de la figura 2.18, se obtiene la ecuación (2.29):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_Z &= \mathbb{V}_{R_1} + \mathbb{V}_L \\ \mathbb{V} &= \mathbb{V}_Z + \mathbb{V}_C \\ \mathbb{I} &= \mathbb{I}_{R_2} + \mathbb{I}_C = \mathbb{I}_{R_1} = \mathbb{I}_L\end{aligned}\tag{2.29}$$

2. Para este caso se establecerá la tensión de salida como la referencia, tal como se muestra en la ecuación (2.30):

$$\mathbb{V}_C = V_C \angle 0^\circ = \mathbb{V}_{R_2}\tag{2.30}$$

3. Graficando de las *leyes de Kirchhoff* del ítem 1, se obtienen 3 Diagramas fasoriales, los cuales se muestran en la figura 2.19.

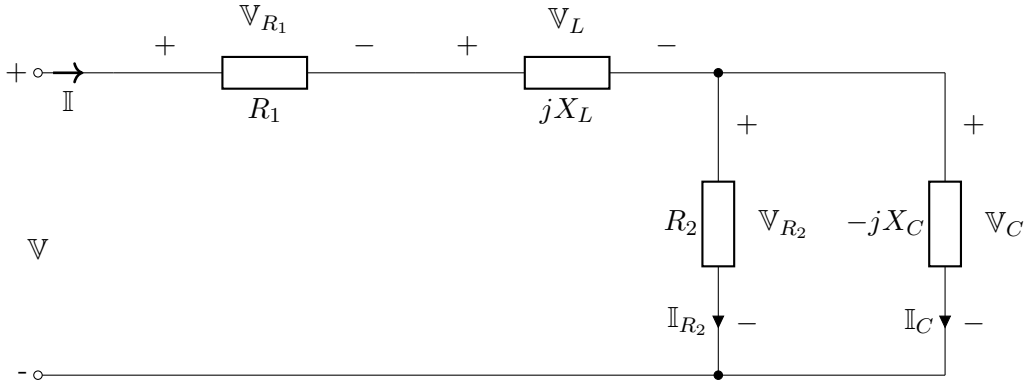


Figura 2.18: Circuito serie-paralelo.

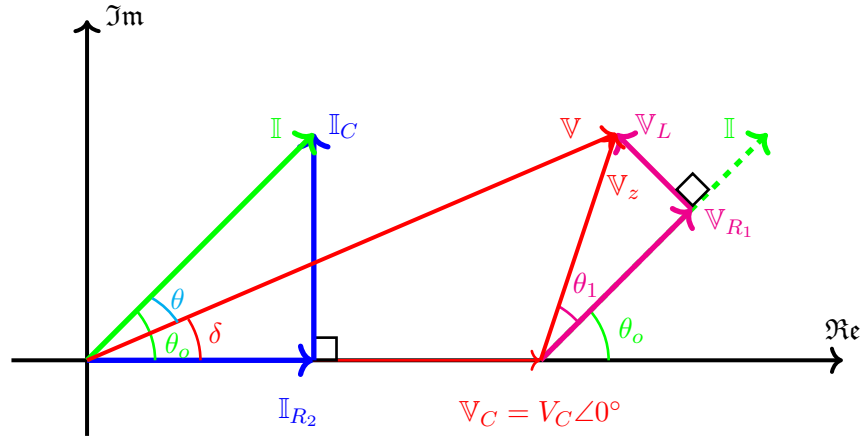


Figura 2.19: Diagramas fasoriales de un circuito serie-paralelo.

2.2.9. Dipolo general

Considere una combinación de elementos RLC, tanto en el dominio del tiempo como su correspondiente impedancia en el dominio de la frecuencia, según la ecuación (2.31) y se muestra en la figura 2.20:

$$v(t) = f[i(t)] \Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{I}$$

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \frac{V \angle \alpha}{I \angle \beta} = \frac{V}{I} \angle \alpha - \beta = Z \angle \theta \text{ } [\Omega]$$

$$\mathbb{Z} = (R_{eq} + jX_{eq}) \text{ } [\Omega] \quad (2.31)$$

$$\mathbb{Y} = \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{Z} \angle -\theta \text{ } [\mathcal{U}]$$

$$\mathbb{Y} = Y \angle -\theta = (G_{eq} - jB_{eq}) \text{ } [\mathcal{U}]$$

A partir de la diferencia de los ángulos α y β , se muestra a continuación su relación con el *factor de potencia (FP)*:

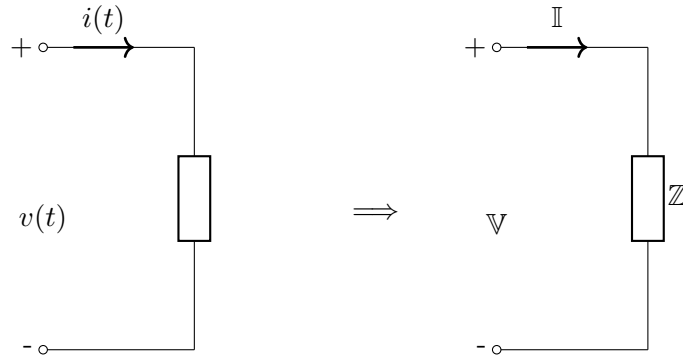


Figura 2.20: Dipolo general en el dominio del tiempo y transformado al de la frecuencia.

- Si $\theta = \alpha - \beta > 0 \Rightarrow \cos(\theta) = FP \downarrow$ (en atraso, es decir, I atrasa a V un ángulo θ).
- Si $\theta = \alpha - \beta < 0 \Rightarrow \cos(\theta) = FP \uparrow$ (en adelanto, es decir, I adelanta a V un ángulo θ).

A continuación, se considerarán n dipolos conectados en paralelo en la figura 2.21. Aplicando la *Primera ley de kirchhoff*, se obtienen las ecuaciones (2.32) y (2.33):

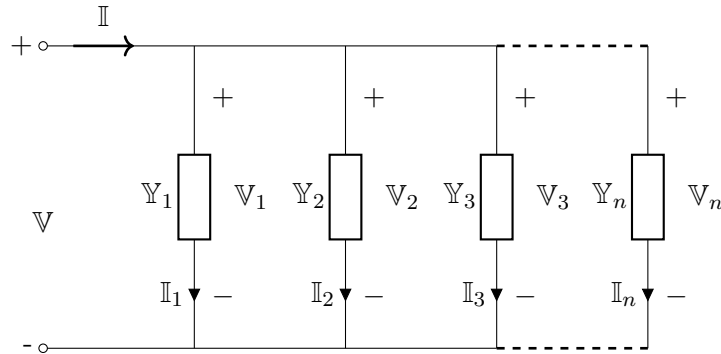


Figura 2.21: Conexión de n admitancias en paralelo.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I = Y_1 V_1 + Y_2 V_2 + Y_3 V_3 + \dots + Y_n V_n$$

$$I = V(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n) \quad (2.32)$$

$$I = V \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$Y_{eq} = \frac{I}{V} = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.33)$$

La representación circuital de Y_{eq} , se muestra en la figura 2.22.

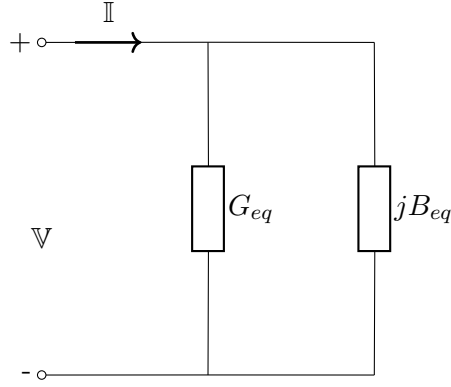


Figura 2.22: Admitancia equivalente de los cuadripolos de la figura 2.21.

Donde su partes real e imaginaria se concen como *conductancia* y *susceptancia* equivalentes, las cuales se muestran en las ecuaciones (2.34) y (2.36), respectivamente:

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i \quad (2.34)$$

$$B_{eq} = \sum_{i=1}^n B_i \quad (2.35)$$

La corriente en el dipolo k -ésimo de la conexión en paralelo viene dada por la Expresión (2.36):

$$I_k = Y_k V_k = I \frac{Y_k}{Y_{eq}} = I \frac{Y_k}{\sum_{i=1}^n Y_i} \quad (2.36)$$

De la ecuación (2.36), la expresión $Y_k / \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)$ corresponde al *divisor de corriente complejo*. Indicando que la corriente que entra a una conexión en paralelo se divide proporcionalmente a cada admitancia. Así mismo, en la figura 2.23 se consideran n dipolos conectados en serie, se utiliza la *Segunda ley de Kirchhoff*, se obtienen las ecuaciones (2.37) y (2.38).

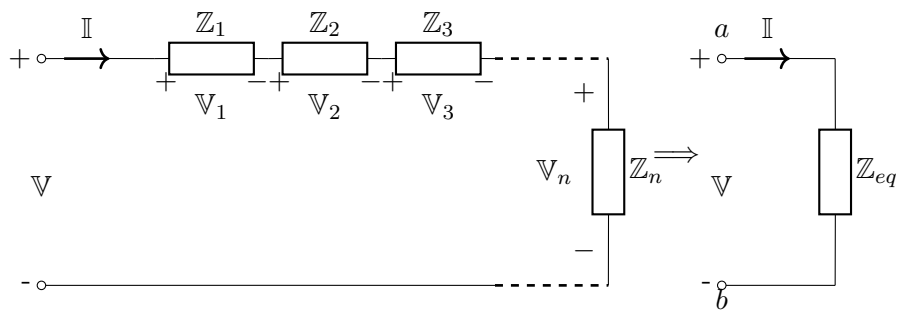


Figura 2.23: Conexión de n cuadripolos en serie, junto a su impedancia equivalente en los terminales a y b .

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} &= \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_3 + \dots + \mathbb{V}_n \\
\mathbb{V} &= \mathbb{I}_1 \mathbb{Z}_1 + \mathbb{I}_2 \mathbb{Z}_2 + \mathbb{I}_3 \mathbb{Z}_3 + \dots + \mathbb{I}_n \mathbb{Z}_n \\
\mathbb{V} &= \mathbb{I}(\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_3 + \dots + \mathbb{Z}_n)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\mathbb{Z}_{eq} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_i = R_{eq} + jX_{eq} \tag{2.38}$$

Así mismo, la impedancia equivalente se puede representar como se muestra en la figura 2.24, donde sus partes real e imaginaria corresponden a la *resistencia* y *reactancia* equivalentes, las cuales se muestran en las ecuaciones (2.39) y (2.40), respectivamente:

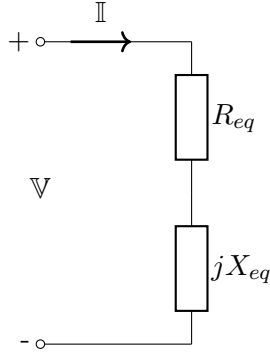


Figura 2.24: Parte real R_{eq} e imaginaria R_{eq} de la impedancia equivalente $\mathbb{Z}_{eq}$.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \tag{2.39}$$

$$X_{eq} = \sum_{i=1}^n X_i \tag{2.40}$$

La tensión del dipolo k -ésimo de la conexión serie viene dada por la ecuación (2.41):

$$\mathbb{V}_k = \mathbb{I}_k \mathbb{Z}_k = \mathbb{V} \frac{\mathbb{Z}_k}{\mathbb{Z}_{eq}} = \mathbb{V} \frac{\mathbb{Z}_k}{\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_i} \tag{2.41}$$

De la ecuación (2.41), el factor $\mathbb{Z}_k / \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_i$ corresponde al *divisor de tensión complejo*, indicando que la tensión aplicada en una conexión serie se divide proporcionalmente a cada impedancia.

2.3. Representación de una función compleja $\mathbb{V}(t)$

Se tiene una función compleja $\mathbb{V}(t)$, tal como se muestra en la ecuación (2.42):

$$\mathbb{V}(t) = V_m e^{j\theta} e^{j\omega t} = \mathbb{V} e^{j\omega t} \quad (2.42)$$

Si se evalúa esta función en $t = 0$, se obtiene la ecuación (2.43):

$$\mathbb{V}(0) = V_m e^{j\theta} \quad (2.43)$$

En matemáticas, θ debe estrictamente estar en radianes, especialmente si se ejecutan cálculos instantáneos, pero como representación se puede aceptar θ en grados sexagesimales. En un instante de $t = t_1$ se tiene la ecuación (2.44):

$$\mathbb{V}(t_1) = V_m e^{j\theta} e^{j\omega t_1} = \mathbb{V} e^{j(\theta + \omega t_1)} \quad (2.44)$$

La posición de $\mathbb{V}(t)$ en el instante $t = t_1$, se obtiene girando el fasor en la posición $t = 0$ un ángulo ωt_1 . De la misma manera se procede para los demás instantes como se indica en la figura 2.25.

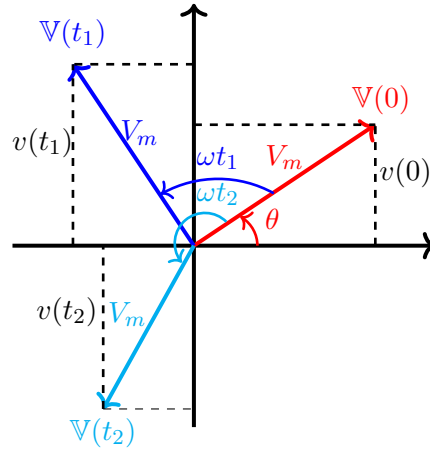


Figura 2.25: Posición en el plano complejo de fasor $\mathbb{V}(t)$ en los instantes 0, t_1 y t_2 .

Por lo tanto, se tiene un vector de módulo V_m que gira con una velocidad angular ω en el sentido positivo trigonométrico. A este "vector giratorio" $\mathbb{V}(t)$ se le conoce con el nombre de *fasor*. Se acostumbra llamar *fasor* al complejo $\mathbb{V}$ que corresponde a $\mathbb{V}(t)$ evaluado en el instante $t = 0$. Obsérvese que para $t_3 = 2\pi/\omega$, tal como se muestra en la ecuación (2.45).

$$\mathbb{V}(t_3) = V_m e^{j(\theta + 2\pi)} = V_m e^{j\theta} = \mathbb{V}(0) \quad (2.45)$$

Si para un número suficiente de instantes se grafica la componente vertical de $\mathbb{V}(t)$ contra el tiempo (en la figura 2.25 se indican tres puntos: $v(0)$, $v(t_1)$, $v(t_2)$), se obtendrá la figura 2.26:

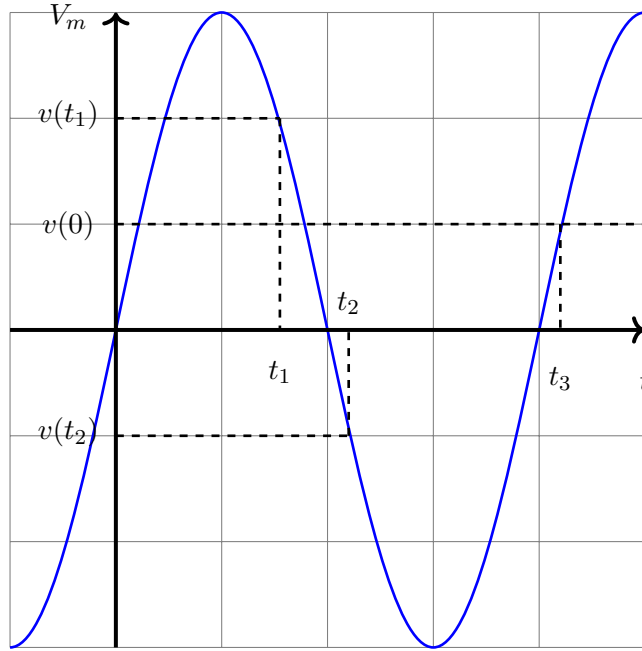


Figura 2.26: Representación instantánea de $\mathbb{V}(t)$.

A partir de t_3 , la señal se repite indefinidamente, por lo que a t_3 se le denomina *periodo* de la señal, y que corresponde a T , tal como se muestra en la ecuación (2.46).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f} \quad (2.46)$$

Claramente la función de la figura 2.26 corresponde a la ecuación (2.47), cuyo procedimiento de obtención se muestra en la ecuación (2.48):

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (2.47)$$

$$v(t) = \Im[\mathbb{V}(t)] = \Im[V_m e^{j(\omega t + \theta)}]$$

$$v(t) = \Im[V_m \cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)] \quad (2.48)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

La representación de las funciones complejas que intervienen en un análisis determinado es lo que se conoce como *diagrama fasorial*; por lo tanto, el instante escogido para representarlas es $t = 0$. Con el fin de ampliar lo explicado en las subsecciones anteriores, a continuación se presentan algunos ejemplos:

Ejemplo 2.3.1.

Considérese el circuito de la figura 2.27, calcular $\mathbb{V}_R$.

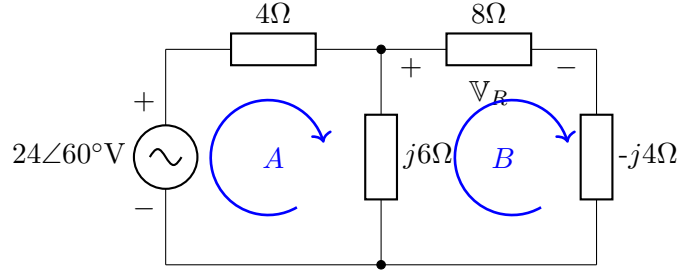


Figura 2.27: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.1.

Solución

Para la solución del circuito 2.3.1 se utilizarán los siguientes dos métodos circuitales.

- **Corrientes de malla.**

$$\sum \mathbb{V}_{MallaA} = 0$$

$$\begin{aligned} -24\angle 60^\circ + 4\mathbb{I}_A + j6(\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B) &= 0 \\ (4 + j6)\mathbb{I}_A - j6\mathbb{I}_B &= 24\angle 60^\circ \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\sum \mathbb{V}_{MallaB} = 0$$

$$\begin{aligned} 8\mathbb{I}_B + (-j4)\mathbb{I}_B + j6(\mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A) &= 0 \\ -j6\mathbb{I}_A + (8 + j2)\mathbb{I}_B &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Las ecuaciones (2.49) y (2.50) pueden expresarse en la forma matricial de la ecuación (2.51):

$$\begin{bmatrix} (4 + j6) & -j6 \\ -j6 & (8 + j2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_A \\ \mathbb{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24\angle 60^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Donde su solución se muestra en la ecuación (2.52):

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_A \\ \mathbb{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.499\angle 29.04^\circ \\ 1.818\angle 105^\circ \end{bmatrix} \text{ A} \quad (2.52)$$

Además, la tensión solicitada $\mathbb{V}_R$ se muestra en la ecuación (2.53):

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_R &= 8\mathbb{I}_B \\ \mathbb{V}_R &= 14.544\angle 105^\circ \text{ V} \checkmark \end{aligned} \quad (2.53)$$

■ **Teorema de Thévenin.**

Para el cálculo de la tensión de Thévenin $\mathbb{V}_{Th}$, considérese el circuito de la figura 2.28. Esta tensión se obtiene mediante un divisor de tensión y se muestra en la ecuación (2.54):

$$\mathbb{V}_{Th} = 24\angle 60^\circ \frac{j6}{4+j6} \Rightarrow \mathbb{V}_{Th} = 19.97\angle 93.69^\circ \text{ V} \checkmark \quad (2.54)$$

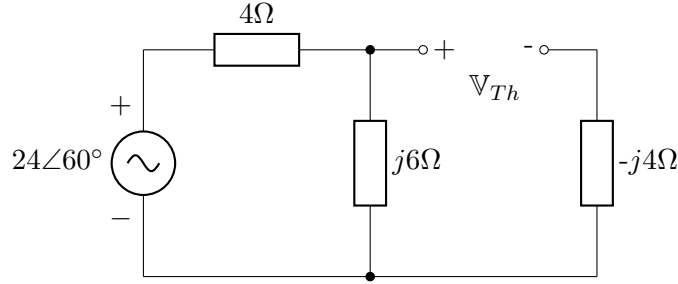


Figura 2.28: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.1 para el cálculo de $\mathbb{V}_{Th}$.

Para el cálculo de la impedancia de Thévenin $\mathbb{Z}_{Th}$, considérese ahora el circuito de la figura 2.29. El valor de esta impedancia se muestra en la ecuación (2.55):

$$\mathbb{Z}_{Th} = -j4 + \frac{4 \cdot j6}{4+j6} \Rightarrow \mathbb{Z}_{Th} = 3.51\angle -37.87^\circ \Omega \checkmark \quad (2.55)$$

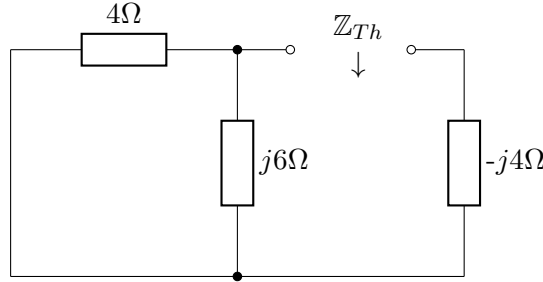


Figura 2.29: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.1 para el cálculo de $\mathbb{Z}_{Th}$.

Para el cálculo de la tensión $\mathbb{V}_R$ se aplica el divisor de tensión de la ecuación (2.56) al circuito de la figura 2.30, el cual corresponde al *circuito equivalente de Thévenin*.

$$\mathbb{V}_R = \mathbb{V}_{Th} \frac{8}{\mathbb{Z}_{Th} + 8} \Rightarrow \mathbb{V}_R = 14.544\angle 105^\circ \text{ V} \checkmark \quad (2.56)$$

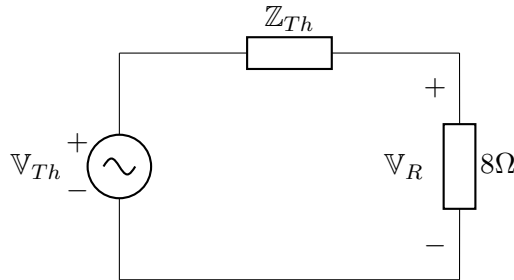


Figura 2.30: Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.1.

Ejemplo 2.3.2.

Considérese el circuito de la figura 2.31, calcular $v_1(t)$.

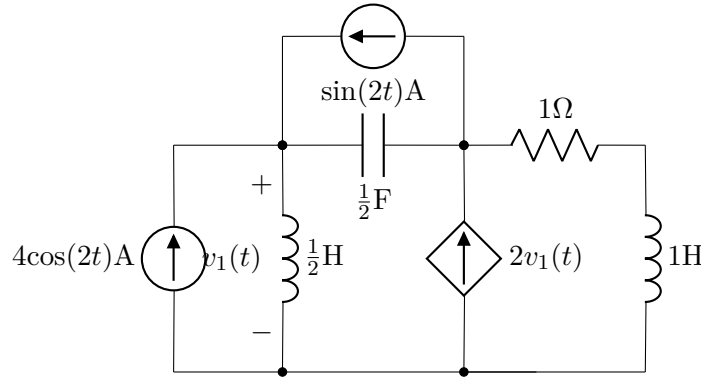


Figura 2.31: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.2.

Solución.

Transformado el circuito al dominio de la frecuencia se obtiene la figura 2.32.

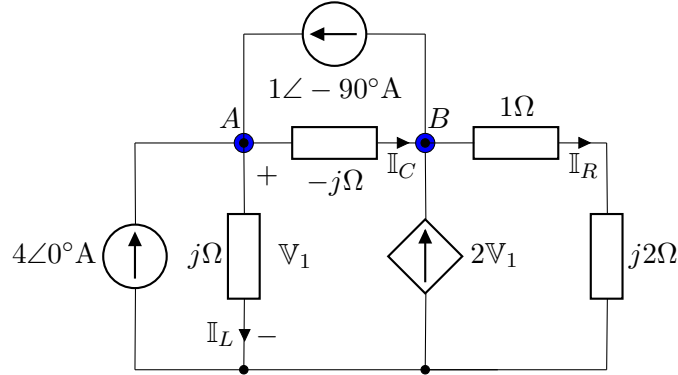


Figura 2.32: Circuito eléctrico de la figura 2.31 transformado al dominio de la frecuencia.

Se utilizarán los siguientes dos métodos circuitales:

■ Potenciales nodales.

Aplicando la *Primera ley de Kirchhoff* en los nodos A y B, obteniéndose las ecuaciones (2.57) y (2.58), respectivamente:

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_A} = 0$$

$$\begin{aligned} -4\angle 0^\circ + \frac{V_A}{j} + \frac{(V_A - V_B)}{-j} - 1\angle -90^\circ &= 0 \\ V_B = 1 + j4 = 4.123\angle 75.96^\circ \text{ V} \checkmark \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_B} = 0$$

$$-\frac{(V_A - V_B)}{-j} + 1\angle -90^\circ + \frac{V_B}{1+j2} - 2V_1 = 0 \quad (2.58)$$

$$-jV_A + jV_B + \frac{V_B}{1+j2} - 2V_A = 1\angle 90^\circ$$

$$-(2+j)V_A + \frac{(-1+j)}{(1+j2)}V_B = 1\angle 90^\circ$$

Reemplazando el valor de $\mathbb{V}_B$ de la ecuación (2.57) en la ecuación (2.58), se obtiene $\mathbb{V}_1$ y $v_1(t)$ en las ecuaciones (2.59) y (2.60), respectivamente:

$$\mathbb{V}_A = \mathbb{V}_1 = 1\angle 143.13^\circ \text{ V} \checkmark \quad (2.59)$$

$$v_1(t) = \cos(2t + 143.13^\circ) \text{ V} \checkmark \quad (2.60)$$

■ **Teorema de Thévenin.**

Para el cálculo de $\mathbb{V}_{Th}$, se tiene el circuito de la figura 2.33:

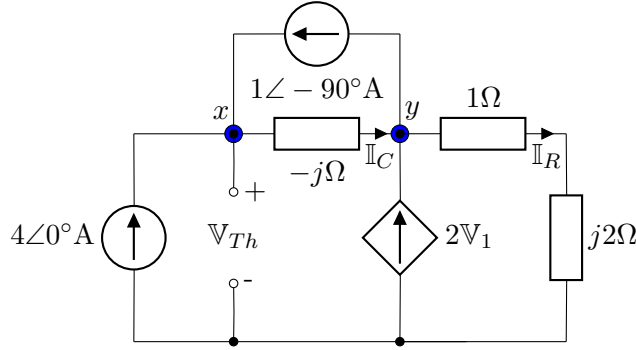


Figura 2.33: Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.2.

Para la solución de este nuevo circuito, también se aplicará el método de potenciales nodales, tal como se muestra en las ecuaciones (2.61) y (2.62):

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_x} = 0$$

$$-4\angle 0^\circ + \frac{(\mathbb{V}_x - \mathbb{V}_y)}{-j} - 1\angle -90^\circ = 0 \quad (2.61)$$

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_y} = 0$$

$$-\frac{(\mathbb{V}_x - \mathbb{V}_y)}{-j} + 1\angle -90^\circ + \frac{\mathbb{V}_y}{1+j2} - 2\mathbb{V}_1 = 0 \quad (2.62)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_x$, las ecuaciones (2.61) y (2.62) pueden expresarse en forma matricial en la ecuación (2.63):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -(2+j) & (0.2+j0.6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}_x \\ \mathbb{V}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+j4) \\ j \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

De donde se obtiene su solución y se muestra en la ecuación (2.64):

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_x \\ \mathbb{V}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2126\angle 157.1663^\circ \\ 4.4721\angle 91.5074^\circ \end{bmatrix} \text{ V} \quad (2.64)$$

La tensión $\mathbb{V}_{Th}$ se muestra en la ecuación (2.65):

$$\mathbb{V}_{Th} = 1.2126\angle 157.1663^\circ \text{ V} \checkmark \quad (2.65)$$

Normalmente, para obtener la impedancia de Thévenin $\mathbb{Z}_{Th}$ se hacen cero las fuentes independientes y se obtiene la impedancia equivalente a partir de los terminales indicados; sin embargo, dado que el circuito de este ejemplo tiene una fuente dependiente, se requiere encontrar la corriente de cortocircuito^a $\mathbb{I}_{sc}$ en el circuito de la figura 2.34.

^aA esta corriente también se le conoce como *corriente de Norton*.

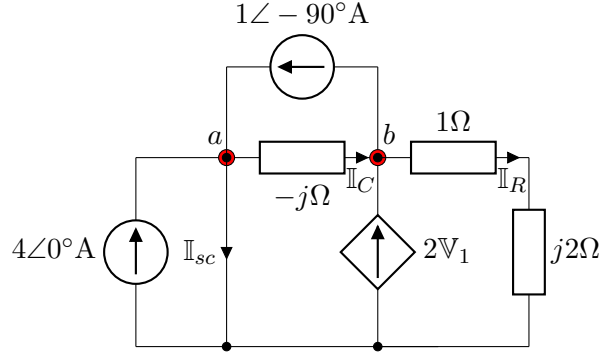


Figura 2.34: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.2 para el cálculo de $\mathbb{Z}_{Th}$.

Para la solución del circuito de la figura 2.34, también se aplicará el método de potenciales nodales, tal como se muestran en las ecuaciones (2.66) y (2.67).

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_a} = 0$$

$$-4\angle 0^\circ + \mathbb{I}_{sc} + \frac{(\mathbb{V}_a - \mathbb{V}_b)}{-j} - 1\angle -90^\circ = 0 \quad (2.66)$$

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_b} = 0$$

$$-\frac{(\mathbb{V}_a - \mathbb{V}_b)}{-j} + 1\angle -90^\circ + \frac{\mathbb{V}_b}{1+j2} - 2\mathbb{V}_a = 0 \quad (2.67)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{V}_a = 0$, se tiene $\mathbb{I}_{sc}$ en la ecuación (2.68):

$$\mathbb{V}_b = 1.5 + 0.5j = 1.5811\angle 18.4349^\circ \text{ V} \quad (2.68)$$

$$\mathbb{I}_{sc} = 3.5 + j0.5 = 3.5355\angle 8.13^\circ \text{ A} \checkmark$$

Para obtener $\mathbb{Z}_{Th}$, se tiene en cuenta el $\mathbb{V}_{Th}$ y $\mathbb{I}_{sc}$ en la ecuación (2.69):

$$\mathbb{Z}_{Th} = \frac{\mathbb{V}_{Th}}{\mathbb{I}_{sc}} = \frac{1.2126\angle 157.1663^\circ}{3.5355\angle 8.13^\circ} = 0.3439\angle 149.036^\circ \Omega \checkmark \quad (2.69)$$

Con el fin de determinar $\mathbb{V}_1$, se obtiene el circuito equivalente de Thévenin que se muestra en la figura 2.35.

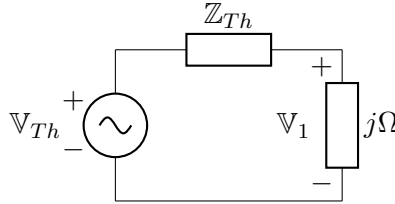


Figura 2.35: Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.2.

Aplicando un divisor de tensión, la tensión $v_1(t)$ viene dada por la ecuación (2.70):

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_{Th} \frac{j}{\mathbb{Z}_{Th} + j} = 1\angle 143.1^\circ \text{ V}$$

$$v_1(t) = \cos(2t + 143.1^\circ) \text{ V} \checkmark \quad (2.70)$$

Ejemplo 2.3.3.

Para el circuito de la figura 2.36, determinar la tensión $v_C(t)$ usando el método de corrientes de malla y el teorema de Thévenin.

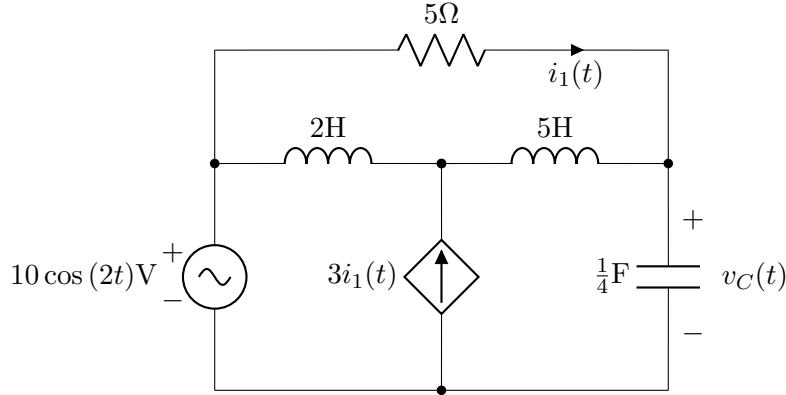


Figura 2.36: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.3.

Solución.

Para la solución del ejemplo 2.3.3, se transforma el circuito al dominio de la frecuencia, tal como se muestra en la figura 2.37.

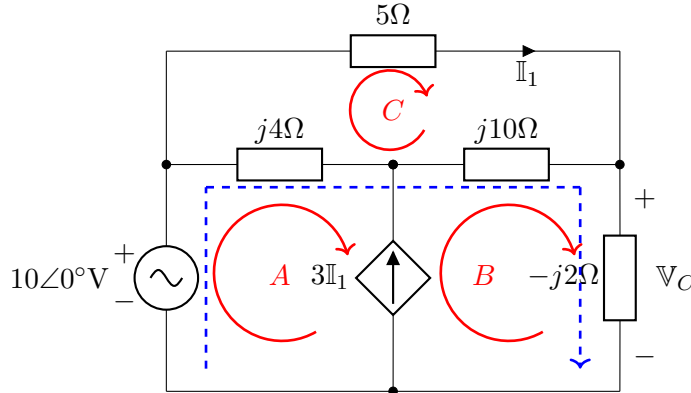


Figura 2.37: Circuito eléctrico en el dominio de la frecuencia para el Ejemplo 2.3.3.

Dado que entre la malla A y B hay en común una fuente de corriente, se tendrá en cuenta una supermalla, tal como se muestra en la ecuación (2.71):

■ Corrientes de malla:

$$\sum \mathbb{V}_{Supermalla} = 0$$

$$\begin{aligned} -10\angle 0^\circ + j4(\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_C) + j10(\mathbb{I}_B - \mathbb{I}_C) - j2\mathbb{I}_B &= 0 \\ j4\mathbb{I}_A + j8\mathbb{I}_B - j14\mathbb{I}_C &= 10\angle 0^\circ \end{aligned} \quad (2.71)$$

$\sum \mathbb{V}_{MallaC} = 0$. Esta trayectoria cerrada se muestra en la ecuación (2.72):

$$\begin{aligned} 5\mathbb{I}_C + j10(\mathbb{I}_C - \mathbb{I}_B) + j4(\mathbb{I}_C - \mathbb{I}_A) &= 0 \\ -j4\mathbb{I}_A - j10\mathbb{I}_B + (5 + j14)\mathbb{I}_C &= 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

La ecuación de la fuente de corriente en función de las corrientes de malla $\mathbb{I}_A$ e $\mathbb{I}_B$ se muestra en la ecuación (2.73):

$$\begin{aligned}(\mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A) &= 3\mathbb{I}_1 = 3\mathbb{I}_C \\ -\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 3\mathbb{I}_C &= 0\end{aligned}\tag{2.73}$$

Las ecuaciones (2.71), (2.72) y (2.73) pueden organizarse en forma matricial como se muestra en la ecuación (2.74):

$$\begin{bmatrix} j4 & j8 & -j14 \\ -j4 & -j10 & (5 + j14) \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_A \\ \mathbb{I}_B \\ \mathbb{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{2.74}$$

Donde su solución se muestra en la ecuación (2.75):

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_A \\ \mathbb{I}_B \\ \mathbb{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.11127\angle -121.73^\circ \\ 3.3347\angle 30.03^\circ \\ 1.7633\angle 40.91^\circ \end{bmatrix} \text{ A}\tag{2.75}$$

Entonces, la tensión solicitada $v_C(t)$ se muestra en la ecuación (2.76):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_C &= -j2\mathbb{I}_B \\ \mathbb{V}_C &= 6.669\angle -59.97^\circ \text{ V} \\ \Rightarrow v_C(t) &= 6.669 \cos(2t - 59.97^\circ) \text{ V} \checkmark\end{aligned}\tag{2.76}$$

■ Teorema de Thévenin.

Para la solución del circuito de la figura 2.38, se utilizará el método de potenciales nodales para hallar $\mathbb{V}_{Th}$. Así mismo, se tienen las ecuaciones (2.77) y (2.78), que corresponden a la *Primera ley de Kirchhoff* en los nodos x e y , respectivamente.

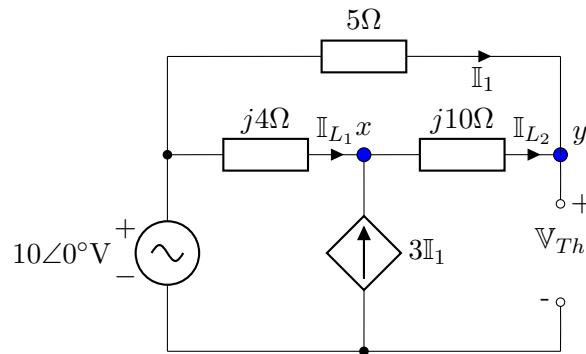


Figura 2.38: Circuito equivalente de Thévenin para el Ejemplo 2.3.3.

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_x} = 0$$

$$-\frac{(10-\mathbb{V}_x)}{j4} - 3\mathbb{I}_1 + \frac{(\mathbb{V}_x-\mathbb{V}_{Th})}{j10} = 0$$

$$\left(\frac{1}{j4} + \frac{1}{j10}\right) \mathbb{V}_x - \frac{\mathbb{V}_{Th}}{j10} - 3\left(\frac{10-\mathbb{V}_{Th}}{5}\right) = \frac{10}{j4} \quad (2.77)$$

$$-j0.35\mathbb{V}_x + (0.6 + j0.1)\mathbb{V}_{Th} = 6 - j2.5$$

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_y} = 0$$

$$-\frac{(10-\mathbb{V}_{Th})}{5} - \frac{(\mathbb{V}_x-\mathbb{V}_{Th})}{j10} = 0$$

$$(2.78)$$

$$(0.2 - j0.1)\mathbb{V}_{Th} + j0.1\mathbb{V}_x = 2$$

A partir de las ecuaciones (2.77) y (2.78), se obtienen $\mathbb{V}_{Th}$ y $\mathbb{V}_x$ en las ecuaciones (2.79) y (2.80):

$$\begin{bmatrix} -j0.35 & (0.6 + j0.1) \\ j0.1 & (0.2 - j0.1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{V}_x \\ \mathbb{V}_{Th} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - j2.5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_x \\ \mathbb{V}_{Th} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \checkmark \end{bmatrix} \text{ V} \quad (2.80)$$

Otra forma para determinar la impedancia de Thévenin $\mathbb{Z}_{Th}$ en presencia de fuente dependientes es utilizando una fuente de prueba de valor $1\angle 0^\circ$ en los terminales indicados y haciendo igual a las fuentes independientes, tal como se muestra en la figura 2.39:

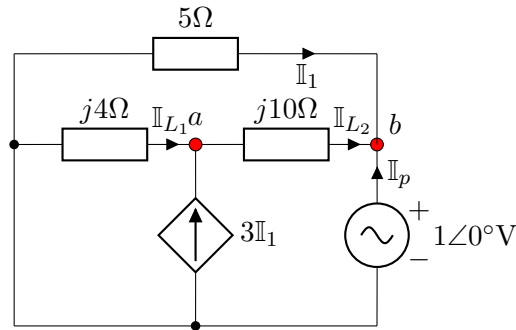


Figura 2.39: Circuito eléctrico ejemplo 2.3.3 para el cálculo de $\mathbb{Z}_{Th}$.

Para la solución del circuito de la figura 2.39, también se aplicará el método de tensiones nodales en las ecuaciones (2.81) y (2.82).

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_a} = 0$$

$$-\frac{(0-\mathbb{V}_a)}{j4} - 3\mathbb{I}_1 + \frac{(\mathbb{V}_a-1)}{j10} = 0$$

$$\left(\frac{1}{j4} + \frac{1}{j10}\right) \mathbb{V}_a - 3\left(\frac{0-1}{5}\right) = \frac{1}{j10} \quad (2.81)$$

$$\mathbb{V}_a = 0.2857 - j1.7143 = 1.7379\angle -80.5376^\circ \text{ V}$$

$$\sum \mathbb{I}_{Nodo_b} = 0$$

$$-\frac{(\mathbb{V}_a-1)}{j10} - \frac{(0-1)}{5} - \mathbb{I}_p = 0 \quad (2.82)$$

$$\mathbb{I}_p = 0.37823 \angle -10.886^\circ \text{ A}$$

Ahora, para obtener $\mathbb{Z}_{Th}$, se divide $\mathbb{V}_p$ y $\mathbb{I}_p$, es decir:

$$\mathbb{Z}_{Th} = \frac{\mathbb{V}_p}{\mathbb{I}_p} = \frac{1 \angle 0^\circ}{0.37823 \angle -10.886^\circ} = 2.6438 \angle 10.886^\circ \Omega \checkmark \quad (2.83)$$

Con el fin de determinar $\mathbb{V}_C$, se obtiene el circuito equivalente de Thévenin que se muestra en la figura 2.40.

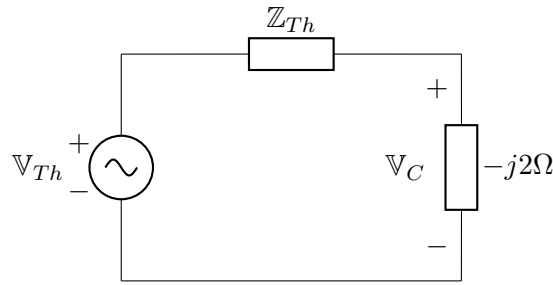


Figura 2.40: Circuito equivalente de Thévenin del Ejemplo 2.3.3.

Finalmente, aplicando un divisor de tensión, se obtiene $v_C(t)$, tal como se muestra en la ecuación (2.84):

$$\mathbb{V}_C = \mathbb{V}_{Th} \frac{-j2}{\mathbb{Z}_{Th} - j2} = 6.669 \angle -59.97^\circ \text{ V}$$

$$v_C(t) = 6.669 \cos(2t - 59.97^\circ) \text{ V} \checkmark \quad (2.84)$$

Ejemplo 2.3.4.

Para el circuito de la figura 2.41, determinar el valor de C para que el desfase entre las tensiones $v_g(t)$ y $v_C(t)$ sea de 40° .

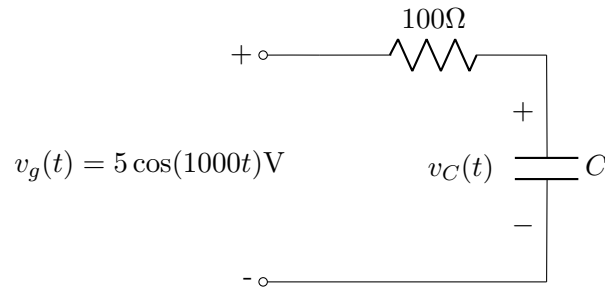


Figura 2.41: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.4.

Solución.

Para la solución del circuito del Ejemplo 2.3.4, se tendrá en cuenta los pasos mencionados en la subsección 2.2.4 para la construcción de diagramas fasoriales.

1. Se aplica la *segunda ley de Kirchhoff* al circuito de la figura 2.41, tal como se muestra en la Ecuación (2.85):

$$\mathbb{V}_g = \mathbb{V}_R + \mathbb{V}_C \quad (2.85)$$

2. Se establece la tensión de entrada como referencia en la ecuación (2.86):

$$\mathbb{V}_g = 5\angle 0^\circ \text{ V} \quad (2.86)$$

3. Ya que se definió una sola ecuación en (2.85), solo existirá un diagrama fasorial para el circuito serie RC, el cual se muestra en la figura 2.42.

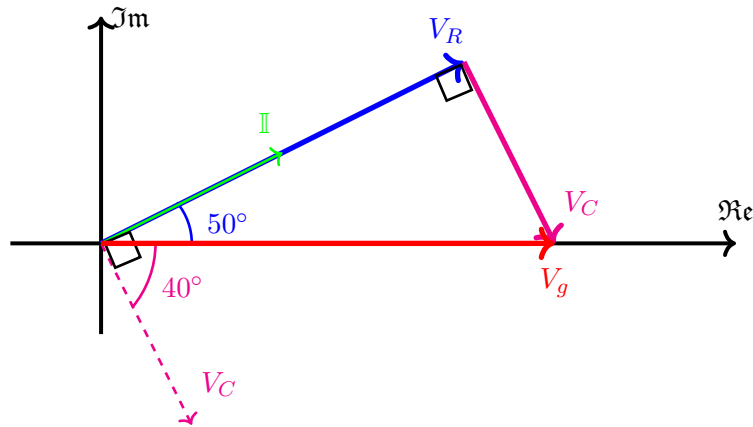


Figura 2.42: Diagrama fasorial del Ejemplo 2.3.4.

A partir del diagrama fasorial de la figura 2.42, es posible obtener la solución en la ecuación (2.87):

$$\cos(50^\circ) = \frac{V_R}{5} \quad I = \frac{V_R}{100} \quad 5^2 = V_R^2 + V_C^2 \quad X_C = \frac{V_C}{I} \quad C = \frac{1}{\omega X_C} \quad (2.87)$$

$$V_R = 3.214 \text{ V} \quad I = 32.214 \text{ mA} \quad V_C = 3.83 \text{ V} \quad X_C = 119.1753 \Omega \quad C \approx 84 \mu\text{F} \checkmark$$

Ejemplo 2.3.5.

Para el circuito de la figura 2.43, determinar el valor de R_1 y X , mediante el uso de los respectivos diagramas fasoriales.

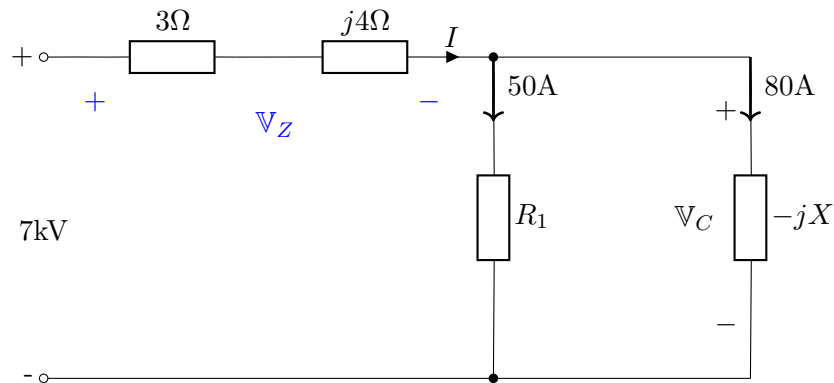


Figura 2.43: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.5.

Solución.

Al igual que para el caso anterior, se tienen en cuenta los pasos para la construcción de diagramas fasoriales.

1. Aplicando las *leyes de Kirchhoff* al circuito de la figura 2.43, se tiene la ecuación (2.88):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_Z &= \mathbb{V}_R + \mathbb{V}_L \\ \mathbb{V} &= \mathbb{V}_Z + \mathbb{V}_C \\ \mathbb{I} &= \mathbb{I}_{R_1} + \mathbb{I}_C\end{aligned}\tag{2.88}$$

2. Se establece la tensión de salida como referencia, según la ecuación (2.89):

$$\mathbb{V}_C = V_C \angle 0^\circ\tag{2.89}$$

3. Como se establecieron la ecuación (2.88), existen tres relaciones en el diagrama fasorial para el circuito de la figura 2.43, los cuales se muestran en la figura 2.44.

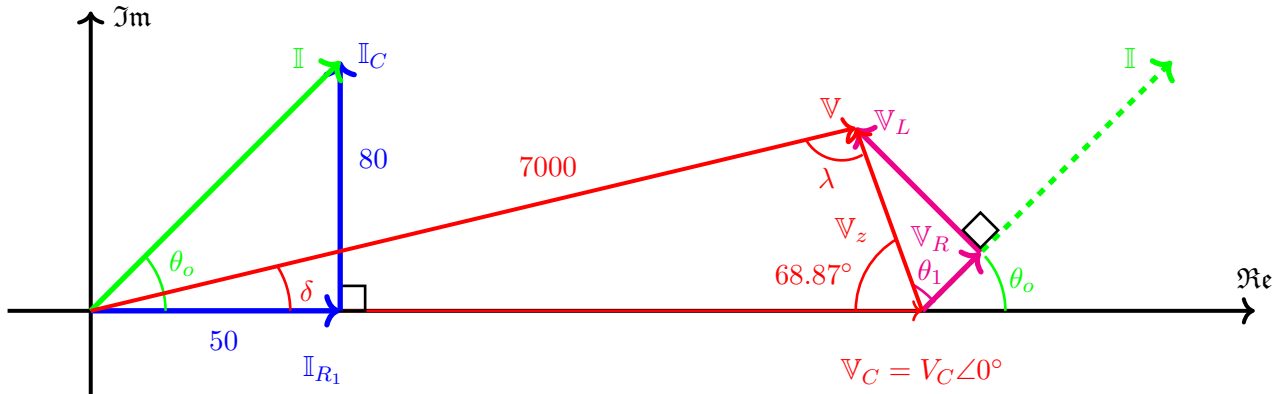


Figura 2.44: Diagramas fasoriales para el Ejemplo 2.3.5.

A partir de diagrama fasorial de las corrientes de la figura 2.44, se obtienen los siguientes resultados de la ecuación (2.90):

$$I = \sqrt{50^2 + 80^2} = 94.34 \text{ A} \quad \theta_o = \arctan\left(\frac{80}{50}\right) = 57.99^\circ \approx 58^\circ\tag{2.90}$$

Ya que se conoce la dirección de la corriente $\mathbb{I}$, se puede construir el segundo diagrama fasorial ($\mathbb{V}_Z = \mathbb{V}_R + \mathbb{V}_L$). A partir de este diagrama fasorial, se pueden obtener los resultados de la ecuación (2.91):

$$\mathbb{V}_Z = (3 + j4)(94.34 \angle 58^\circ) = 471.7 \angle 111.13^\circ \text{ V} \quad \theta_1 = 111.13^\circ - \theta_o = 53.13^\circ\tag{2.91}$$

$$V_L = V_Z \sin(\theta_1) = 377.36 \text{ V}$$

$$V_R = V_Z \cos(\theta_1) = 283.02 \text{ V}$$

Con el valor de V_Z calculado, se puede completar el tercer diagrama fasorial ($V = V_Z + V_C$). De esta manera, a partir de algunas relaciones trigonométricas, se logra deducir el valor de la tensión de salida V_C , tal como se muestra en la ecuación (2.92):

$$\frac{7000}{\sin(68.87^\circ)} = \frac{V_Z}{\sin(\delta)} \quad \frac{7000}{\sin(68.87^\circ)} = \frac{V_C}{\sin(\underbrace{180^\circ - 68.87^\circ - \delta}_\lambda)} \quad (2.92)$$

$$\delta = 3.603^\circ \quad V_C = 7156.2 \text{ V}$$

Finalmente, con el resultado de V_C , se obtienen los valores de R_1 y X , en la ecuación (2.93).

$$R_1 = \frac{V_C}{50} = 143.123 \Omega \checkmark \quad X = \frac{V_C}{80} = 89.452 \Omega \checkmark \quad (2.93)$$

Ejemplo 2.3.6.

Para el circuito de la figura 2.45, determinar el valor de R y X_L , mediante el uso de los respectivos diagramas fasoriales.

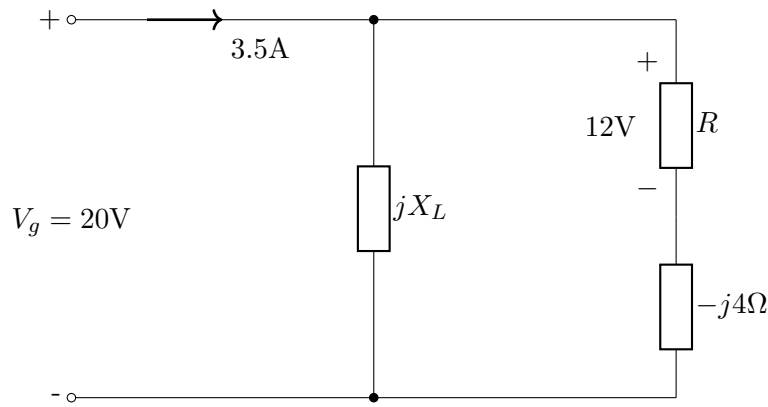


Figura 2.45: Circuito eléctrico del Ejemplo 2.3.6.

Solución.

1. Aplicando las *leyes de Kirchhoff* al circuito de la figura 2.45, se tiene la ecuación (2.94):

$$\begin{aligned} V_g &= V_R + V_C \\ I_g &= I_L + I_C \end{aligned} \quad (2.94)$$

2. Se establece la tensión de salida como referencia, tal como se muestra en la ecuación (2.95):

$$V_g = 20\angle 0^\circ \text{ V} \quad (2.95)$$

3. En la figura 2.46 se muestran los correspondientes diagramas fasoriales de la ecuación (2.94):

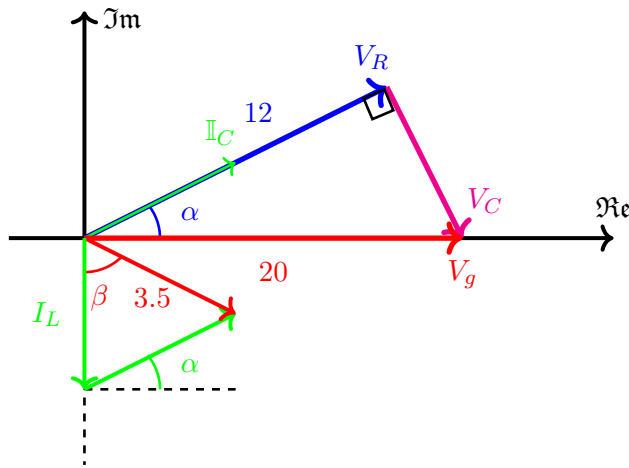


Figura 2.46: Diagramas fasoriales del Ejemplo 2.3.6.

Del diagrama fasorial de las tensiones, se obtienen los resultados de la ecuación (2.96):

$$V_C = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ V} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{12}{20}\right) = 53.13^\circ \quad I_C = \frac{V_C}{4} = 4 \text{ A} \quad R = \frac{12}{I_C} = 3 \Omega \quad (2.96)$$

Los resultados anteriores son utilizados en el diagrama de corrientes, con el fin de encontrar I_L con la ayuda de algunas relaciones trigonométricas, tal como se muestra en la ecuación (2.97)

$$\begin{aligned} \frac{3.5}{\sin(90^\circ - \alpha)} &= \frac{4}{\sin(\beta)} & \frac{I_L}{\sin(90^\circ + \alpha - \beta)} &= \frac{3.5}{\sin(36.87^\circ)} \\ : & & & \\ \beta &= 43.3^\circ & I_L &= 5.7477 \text{ A} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Con el resultado de I_L , se obtiene el valor de X_L en la ecuación (2.98):

$$X_L = \frac{V_g}{I_L} = 3.5 \Omega \quad (2.98)$$

2.4. Ejercicios propuestos

1. Hallar $v_R(t)$ en el circuito de la figura 2.47, usando el *teorema de Thévenin*, teniendo en cuenta $v_g(t) = 10 \cos(80t)$ V, $R = 2 \Omega$, $L = 50$ mH y $C = 6250$ μ F.

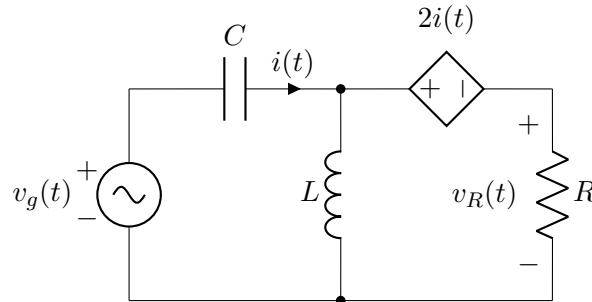


Figura 2.47: Ejercicio 1 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $v_R(t) = 6.20 \cos(80t + 60.26^\circ)$ V

2. Determinar la tensión $v_o(t)$ en el circuito de la figura 2.48, con $v_g(t) = 4 \cos(500t)$ V, usando potenciales nodales y el *teorema de Thévenin*.

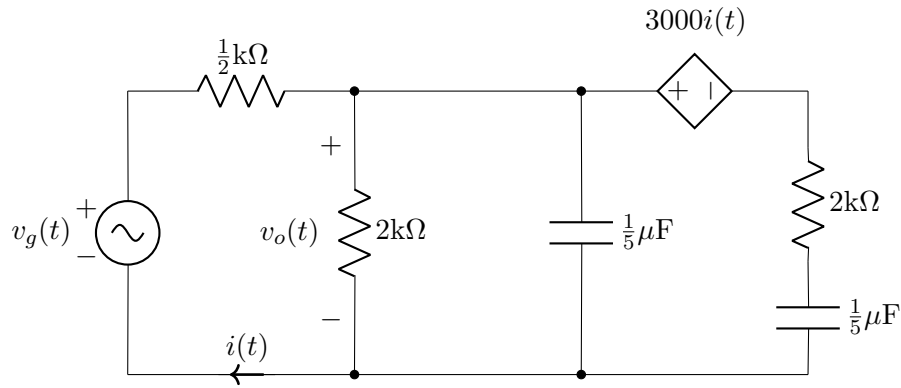


Figura 2.48: Ejercicio 2 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $v_o(t) = 3.24 \cos(500t - 8.02^\circ)$ V

3. Hallar la tensión $\mathbb{V}_o$ en el circuito de figura 2.49, usando potenciales nodales, corrientes de malla y el *teorema de Thévenin*.

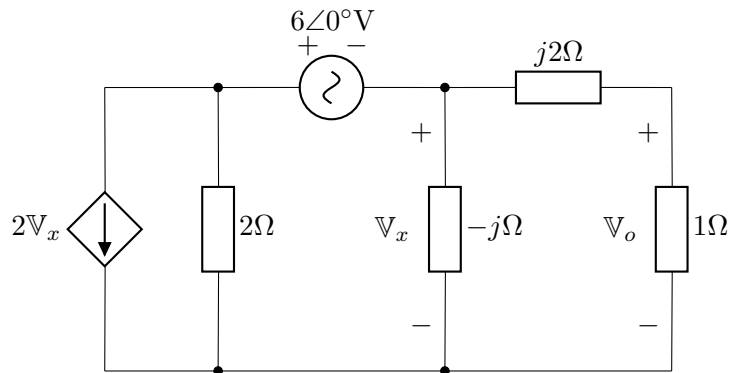


Figura 2.49: Ejercicio 3 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $\mathbb{V}_o = 0.485 \angle 104^\circ$ V

4. Determinar la tensión $v_o(t)$ en el circuito que se muestra en la figura 2.50, mediante el uso de cualquier método. Considere que $v_1(t) = 6 \cos(4t)$ V, y $v_2(t) = 2 \cos(4t)$ V.

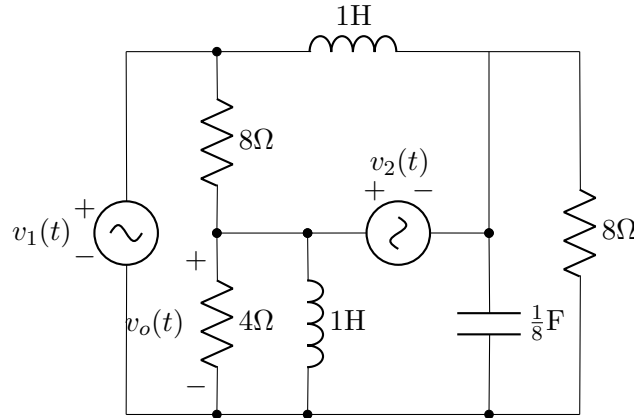


Figura 2.50: Ejercicio 4 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $v_o(t) = 2.83 \cos(4t - 45^\circ)$ V

5. En la red de la figura 2.51 la relación entre las tensiones mostradas es $\sqrt{5}V_C = V_g$. Sea la impedancia de la red $\mathbb{Z} = \frac{V_g}{I} = Z\angle\theta$, calcular θ .

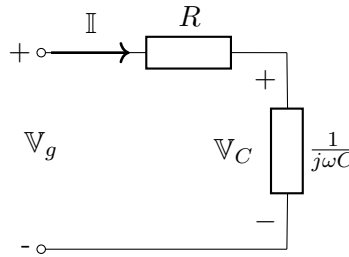


Figura 2.51: Ejercicio 5 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $\theta = -26.57^\circ$

6. Para el circuito de la figura 2.52, determinar el valor de $\mathbb{Z}$, mediante el uso de los respectivos diagramas fasoriales, teniendo en cuenta que $V_g = 8$ kV, $V_o = 8$ kV y que V_g adelanta 18.195° a I .

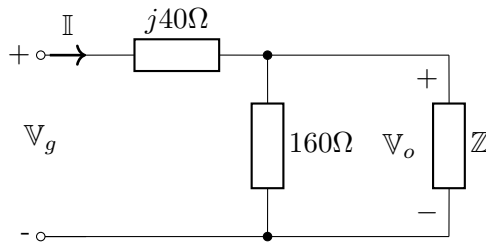


Figura 2.52: Ejercicio 6 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $\mathbb{Z} = 95.1\angle-30.1^\circ \Omega$

7. Para el circuito de la figura 2.53, determinar el valor de R y X , mediante el uso de los respectivos diagramas fasoriales, teniendo en cuenta que $I = 30$ A, $I_1 = 15$ A, e $I_2 = 18$ A.

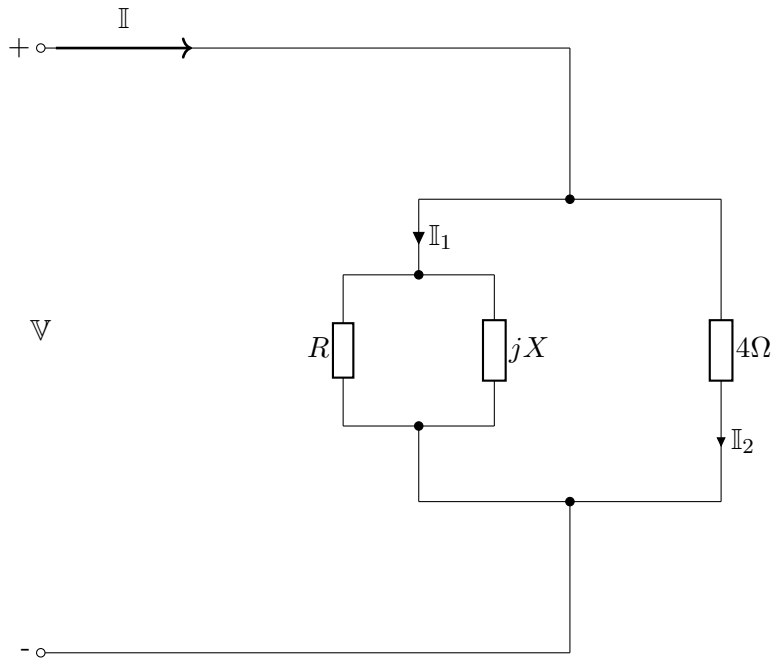


Figura 2.53: Ejercicio 7 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $R = 7.38 \Omega$, $X = 6.32 \Omega$

8. Para el circuito de la figura 2.54, encontrar V_2 mediante el uso de los respectivos diagramas fasoriales.

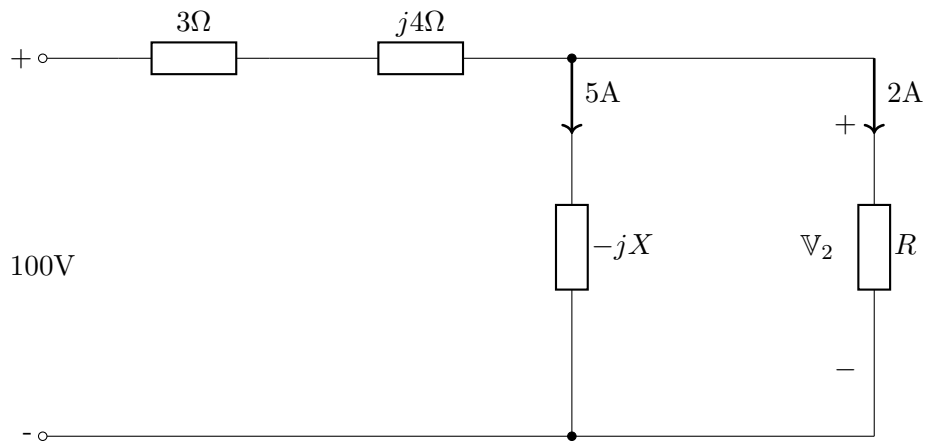


Figura 2.54: Ejercicio 8 - Ejercicios propuestos 2.4.

Respuesta: $V_2 = 111.32\angle 0^\circ V$

2.5. Ejercicios de introducción al diseño

1. Diseñar un arreglo que contenga tres ramas y siete elementos pasivos, para un circuito eléctrico, tal que la impedancia de Thevenin vista entre los bornes a y b sea $\mathbb{Z}_{eq} = 150\angle 25^\circ \Omega$, tal como se muestra en la figura 2.55:

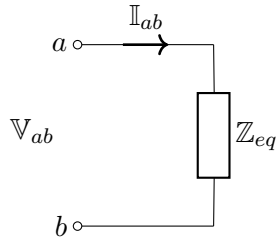


Figura 2.55: Impedancia equivalente de un circuito eléctrico pasivo.

2. Para el circuito eléctrico de la figura 2.54, de la sección 2.4, se solicita dimensionar un elemento pasivo conectado en paralelo cuya capacitancia en μF o inductancia en mH permita que la tensión y la corriente vistos en bornes de la alimentación de 100 V estén en fase.
3. Para el circuito eléctrico de la figura 2.47, de la sección 2.4, se solicita un conjunto de valores para R , L y C , tales que la respuesta de la tensión en la resistencia sea $v_R(t) = 5 \cos(80t + 30^\circ)$ voltios. Asuma para la tensión en la fuente de alimentación que $v_g(t) = 10 \cos(80t)$ V.

Capítulo 3

Análisis de Potencia en Régimen Sinusoidal Permanente

3.1. Potencia instantánea

Se tienen en el dominio del tiempo la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$, tal como se muestra en la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned}v(t) &= V_m \cos(\omega t + \alpha) \\i(t) &= I_m \cos(\omega t + \beta)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Por otro lado, utilizando identidades trigonométricas, se obtiene en la ecuación (3.2) la *potencia activa instantánea* y *potencia reactiva instantánea*, donde $\theta = \alpha - \beta$ corresponde al ángulo de la impedancia.

$$P(t) = v(t)i(t) = \underbrace{\frac{V_m I_m}{2} \cos \theta [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]}_{\text{Potencia activa instantánea}} + \underbrace{\frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \sin(2\omega t + 2\alpha)}_{\text{Potencia reactiva instantánea}}\tag{3.2}$$

Por otro lado, la potencia instantánea para los diferentes elementos pasivos se muestra en las subsecciones 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3.

3.1.1. Resistencia

Considerando $\theta = 0^\circ$ (dipolo resistivo puro), y reemplazando en la ecuación (3.2) se tiene que:

$$P_R(t) = \frac{V_m I_m}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)]\tag{3.3}$$

Graficando la ecuación (3.3), se obtiene:

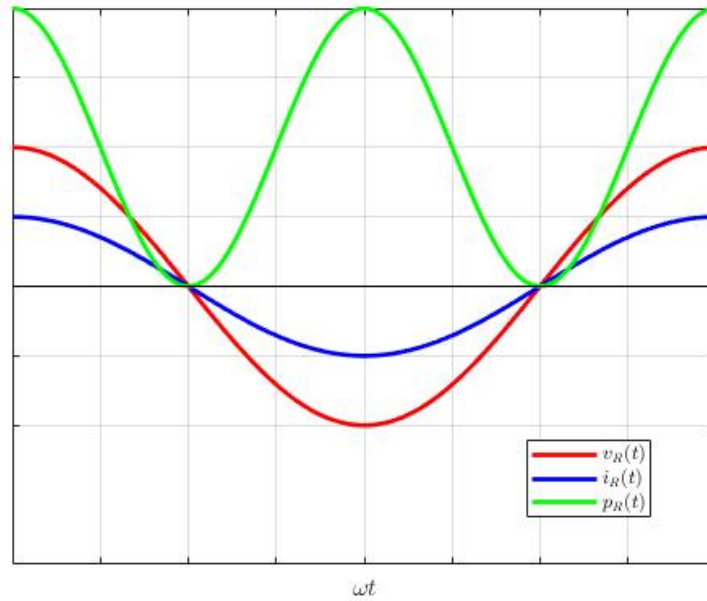


Figura 3.1: Potencia activa instantánea de una resistencia.

De la figura 3.1 se observa que las señales de tensión y de corriente están en fase, lo que resulta en una señal de potencia positiva para cualquier instante t , y cuyo valor medio (*potencia media*) corresponde a $\frac{V_m I_m}{2}$.

3.1.2. Inductancia

Considerando $\theta = 90^\circ$ (dipolo inductivo puro), y reemplazando en la ecuación (3.2) se tiene que:

$$P_L(t) = \frac{V_m I_m}{2} \sin(2\omega t + 2\alpha) \quad (3.4)$$

Graficando la ecuación 3.4, se obtiene:

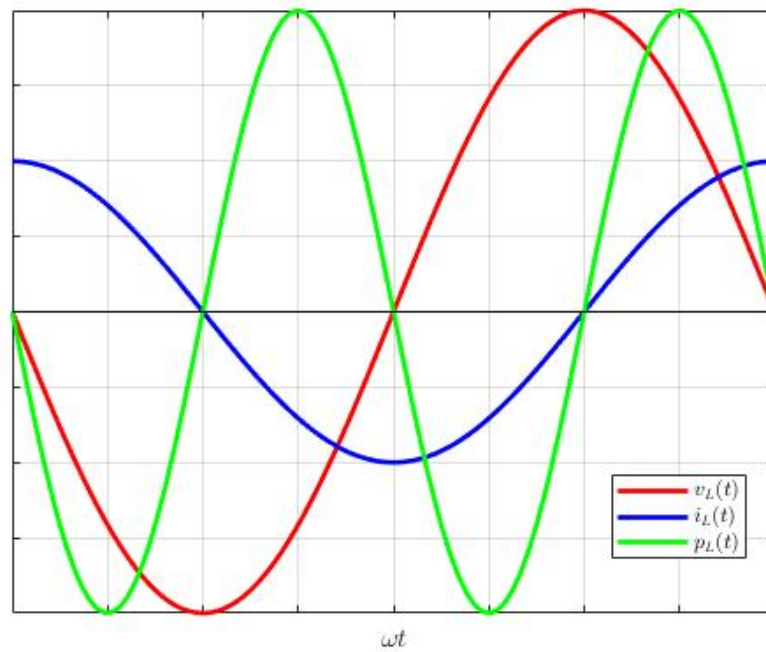


Figura 3.2: Potencia reactiva instantánea de una inductancia.

De la figura 3.2 se observa que la señal de tensión adelanta en 90° a la señal de corriente, lo que resulta en una señal de potencia cuyo semiciclos positivos y negativos son iguales para cualquier periodo completo T , y cuyo valor medio (*potencia media*) corresponde a 0 vatios.

3.1.3. Capacitancia

Considerando $\theta = -90^\circ$ (Dipolo capacitivo puro), y reemplazando en la ecuación (3.2) se tiene que:

$$P_C(t) = -\frac{V_m I_m}{2} \sin(2\omega t + 2\alpha) \quad (3.5)$$

Graficando la ecuación (3.5), se obtiene:

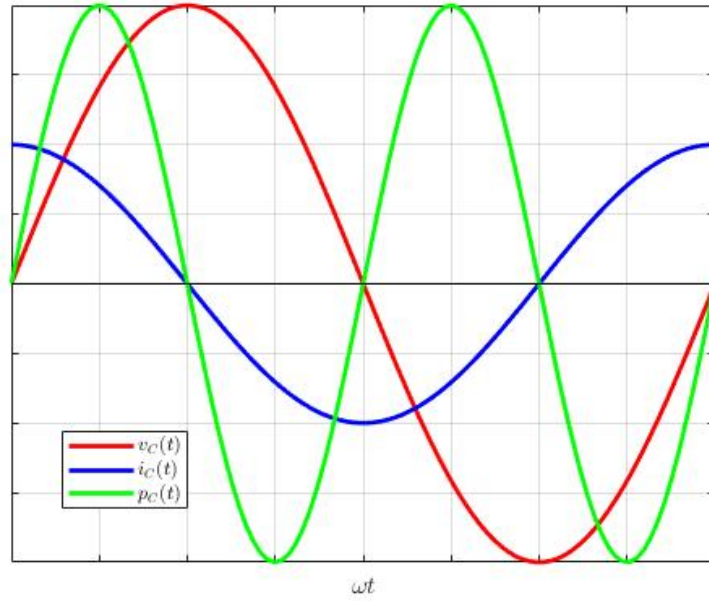


Figura 3.3: Potencia reactiva instantánea de una capacitancia.

De la figura 3.3 se observa que la señal de tensión atrasa en 90° a la señal de corriente, lo que resulta, al igual que en el caso de la inductancia, en una señal de potencia cuyos semiciclos positivos y negativos son iguales para cualquier periodo completo T , y cuyo valor medio (*potencia media*) corresponde a 0 vatios.

3.2. Potencia promedio

La *potencia promedio* (P_{avg}) se define mediante la ecuación (3.6):

$$P_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} p(t) dt \quad (3.6)$$

Como el valor medio de una senoide en un período o múltiplo del período es cero (áreas positivas iguales a las áreas negativas), reemplazando la ecuación (3.2) en la (3.6) se tiene la ecuación (3.7):

$$P_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m I_m \cos \theta}{2} dt = \frac{V_m I_m \cos \theta}{2} \quad (3.7)$$

La potencia promedio se designa con el símbolo de P y se conoce también con los nombres de *potencia media*, *activa*, *real* o *útil* y se muestra en la ecuación (3.8):

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \quad (3.8)$$

Es importante recordar que θ es el ángulo entre la tensión y la corriente, o sea la fase de la impedancia compleja. De la expresión para las potencias instantáneas para el condensador y la inductancia, se concluye

que la potencia promedio para estos elementos es cero, por lo que se tiene en cuenta su existencia a través de su valor máximo mediante la ecuación (3.9):

$$p(t)_{real} = \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \sin(2\omega t) \quad (3.9)$$

El valor máximo corresponde a $\frac{V_m I_m}{2} \sin \theta$, el cual se representa con el símbolo Q , se denomina *potencia reactiva* y se muestra en la ecuación (3.10):

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \quad (3.10)$$

Las unidades de medida se expresan en voltiamperios reactivos (var¹).

3.3. Valor eficaz de una corriente o de una tensión

Supóngase una resistencia alimentada por una fuente de tensión de corriente alterna y una fuente de tensión de corriente continua, tal como se muestra en la figura 3.4.

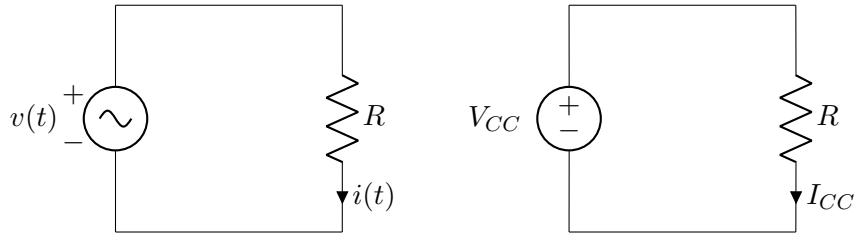


Figura 3.4: Circuito resistivo en AC Vs circuito resistivo en CC.

La potencia disipada en la resistencia con la alimentación de corriente continua viene dada por la ecuación (3.11):

$$P_{CC} = \frac{V_{CC}^2}{R} = I_{CC}^2 R \quad (3.11)$$

La potencia media en un intervalo dado Δt , consumida por la resistencia alimentada con $v(t)$ estará dada por la ecuación (3.12):

$$P_{avg} = P = \frac{1}{\Delta t} \int_0^t \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (3.12)$$

Si se igualan (3.11) y (3.12), el valor obtenido para V_{CC} se define como el valor eficaz o valor efectivo de $v(t)$, tal como se muestra en la ecuación (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{V_{CC}^2}{R} &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^t \frac{v^2(t)}{R} dt \\ V_{eficaz} &= \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \int_0^t v^2(t) dt} \end{aligned} \quad (3.13)$$

¹En algunos textos de ingeniería eléctrica se puede encontrar de forma extendida el VAR como unidad de medida, por mostrar mayor similitud con los VA de la potencia aparente, pero según lo dispuesto en [2] esta unidad se debe escribir con letra minúscula sostenida.

El valor eficaz es la raíz del valor cuadrático medio (*root-mean-square*), por el cual se acostumbra el símbolo V_{rms} para la tensión e I_{rms} para el caso de la corriente. En el caso sinusoidal, si $v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$, se calcula este valor con la ecuación (3.14), junto a su correspondiente resultado en la ecuación (3.15):

$$\begin{aligned} V_{rms}^2 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V_m^2 \cos^2(\omega t + \alpha) dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{V_m^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{V_m^2 \omega}{4\pi} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{V_m^2}{2} \\ V_{rms} &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Similarmente, se realiza para la corriente y se muestra en la ecuación (3.16):

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (3.16)$$

En la práctica, los valores eficaces son los que se miden con los voltímetros y amperímetros en AC. En términos de valores eficaces, las potencias activa y reactiva quedarán expresadas como se muestra en la ecuación (3.17):

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{2} V_{rms} \sqrt{2} I_{rms}}{2} \cos \theta = V_{rms} I_{rms} \cos \theta \\ Q &= \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{2} V_{rms} \sqrt{2} I_{rms}}{2} \sin \theta = V_{rms} I_{rms} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.4. Potencia compleja

Considere el dipolo general de la figura 3.5.

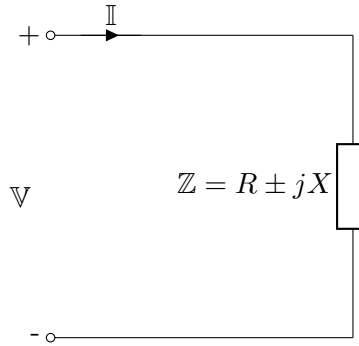


Figura 3.5: Dipolo General.

En el dominio del tiempo, la tensión y corriente del dipolo propuesto, se muestran en la ecuación (3.18):

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t + \alpha) \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Fasorialmente, se obtiene la ecuación (3.19):

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \alpha \\ \mathbb{I} &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \beta \\ \mathbb{Z} &= \frac{V_{rms}}{I_{rms}} \angle (\alpha - \beta) \\ \mathbb{Z} &= Z \angle \theta\end{aligned}\tag{3.19}$$

De ahora en adelante, si no se especifica, los fasores la tensión y de corriente se encuentran en valores eficaces o RMS. Las potencias activa y reactiva se pueden obtener fácilmente a partir de los fasores $\mathbb{V}$ e $\mathbb{I}$. Si se efectúa el producto $\mathbb{V}\mathbb{I}^*$, se tiene la ecuación (3.20):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathbb{I}^* &= (V \angle \alpha)(I \angle \beta)^* = VI \angle (\alpha - \beta) \\ \mathbb{V}\mathbb{I}^* &= VI \cos(\alpha - \beta) + jVI \sin(\alpha - \beta) \\ \mathbb{V}\mathbb{I}^* &= VI \cos(\theta) + jVI \sin(\theta) \\ \mathbb{V}\mathbb{I}^* &= P + jQ\end{aligned}\tag{3.20}$$

Al producto $\mathbb{V}\mathbb{I}^*$ se le denomina *potencia compleja*² y se designa con el símbolo $\mathbb{S}$, tal como se muestra en la ecuación (3.21):

$$\begin{aligned}\mathbb{S} &= \mathbb{V}\mathbb{I}^* = P \pm jQ = S \angle \pm \theta \\ S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)\end{aligned}\tag{3.21}$$

A partir de la ecuación (3.21), se concluye que si $Q > 0$ ($\theta > 0$), la impedancia corresponde a $\mathbb{Z} = R + jX_L$, mientras que si $Q < 0$ ($\theta < 0$), la impedancia corresponde a $\mathbb{Z} = R - jX_C$. Por otro lado, si $Q = 0$ ($\theta = 0$), entonces la impedancia es resistiva pura, es decir, $\mathbb{Z} = R$. A partir de lo anterior, se tienen las representaciones de la cantidad compleja $\mathbb{S}$ de la figura 3.6.

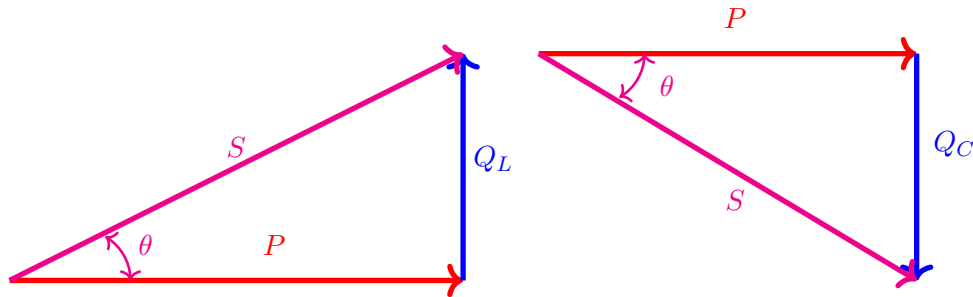


Figura 3.6: Triángulo de potencias para carga inductiva y capacitiva.

²En [23] se presenta uno de los primeros intentos de normalización sobre el sentido de rotación de las fases en los vectores utilizados en la teoría de la corriente alterna, pues hasta entonces no existía una convención de la *potencia compleja* como se conoce en la actualidad. En este sentido, en [24] se encuentra una normalización actualizada de todos los términos de las cantidades de la potencia eléctrica empleadas en ingeniería.

El módulo S se denomina *potencia aparente*, con unidades de medida expresadas en voltiamperios (VA). Cabe resaltar que el ángulo θ de los triángulos de potencia es el mismo θ de los triángulos de impedancia, es decir que $\theta_S = \theta_Z$, y equivale al desfase entre los fasores de tensión y corriente asociados a la carga. De la figura 3.6, se tiene la ecuación (3.22):

$$P = S \cos \theta, \quad Q = P \tan \theta \quad (3.22)$$

A la carga se le suministra S (VA), de los cuales se utilizan $S \cos \theta$ (W), por lo cual $\cos \theta$ es denominado factor de potencia; el máximo aprovechamiento corresponde entonces a $\cos \theta = 1$. Para diferenciar el factor de potencia de las cargas inductivas y capacitivas, se denomina *factor de potencia en atraso al caso inductivo* y *factor de potencia en adelanto para el caso capacitivo*, indicando que la corriente atrasa y adelanta a la tensión, respectivamente. A partir de la ecuación (3.23), es posible obtener las siguientes expresiones útiles, en términos de la impedancia y de la admitancia:

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{V} \mathbb{I}^* = (\mathbb{Z} \mathbb{I}) \mathbb{I}^* = I^2 \mathbb{Z} = \frac{I^2}{\mathbb{Y}} \\ S &= \mathbb{V} \mathbb{I}^* = \mathbb{V} (\mathbb{V} \mathbb{Y})^* = V^2 \mathbb{Y}^* = \frac{V^2}{\mathbb{Z}^*} \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.5. Reducción de potencias

Dada una interconexión arbitraria de dipolos caracterizados por su respectiva potencia compleja, se puede reemplazar por un dipolo equivalente caracterizado por una potencia compleja equivalente.

3.5.1. Dipolos en paralelo

La potencia suministrada en los terminales de la figura 3.7 es:

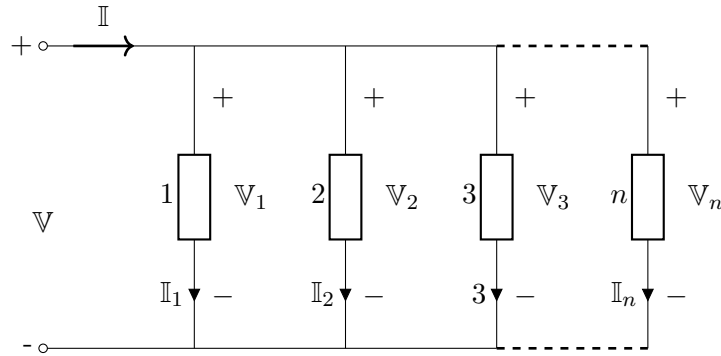


Figura 3.7: Conexión de n cuadripolos generales conectados en paralelo.

$$\begin{aligned}
\mathbb{S} &= \mathbb{V}\mathbb{I}^* = \mathbb{V}(\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \dots + \mathbb{I}_n)^* \\
\mathbb{S} &= \mathbb{V}\mathbb{I}_1^* + \mathbb{V}\mathbb{I}_2^* + \dots + \mathbb{V}\mathbb{I}_n^* \\
\mathbb{S} &= \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \dots + \mathbb{S}_n \\
\mathbb{S}_{eq} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{S}_i
\end{aligned} \tag{3.24}$$

La ecuación (3.24) muestra que la figura 3.7 puede ser reemplazada por la de la figura 3.8:

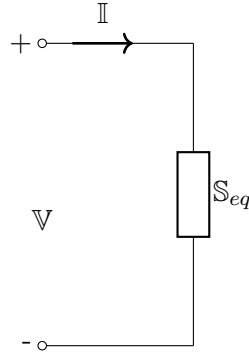


Figura 3.8: Potencia compleja equivalente consumida en la carga $\mathbb{S}_{eq}$ para una conexión paralelo.

3.5.2. Dipolos en serie

A partir de la conexión serie de la figura 3.9, y considerando un razonamiento análogo al apartado anterior, se obtiene a la ecuación (3.25):

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{Fuente} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{S}_i \\
\mathbb{V}\mathbb{I}^* &= \mathbb{V}_1\mathbb{I}_1^* + \mathbb{V}_2\mathbb{I}_2^* + \dots + \mathbb{V}_n\mathbb{I}_n^* \\
\mathbb{V}\mathbb{I}^* &= (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \dots + \mathbb{V}_n)\mathbb{I}^*
\end{aligned} \tag{3.25}$$

De esta manera, es posible demostrar el *teorema de Tellegen* para la conexión serie.

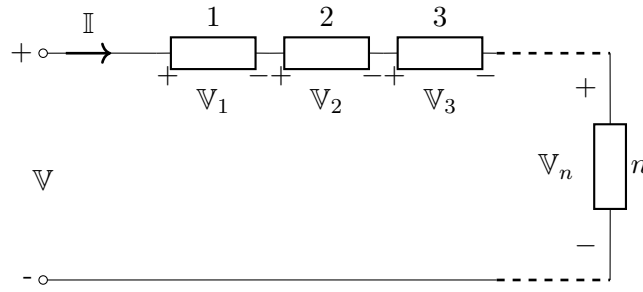


Figura 3.9: Conexión de n cuadripolos generales conectados en serie.

El sistema de la figura 3.9 se puede entonces reemplazar por el de la figura 3.10.

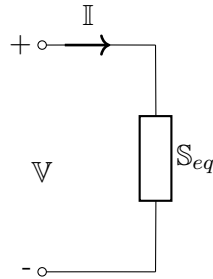


Figura 3.10: Potencia compleja equivalente consumida en la carga para una conexión serie.

3.5.3. Conexión general

Supóngase una red como la de la figura 3.11. Como consecuencia del *teorema de Tellegen*, se pueden establecer las ecuaciones (3.26) y (3.27):

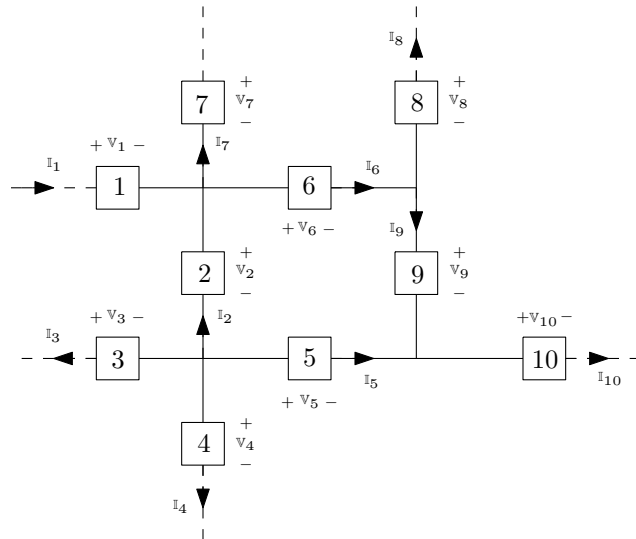


Figura 3.11: Conexión general de dipolos.

$$\mathbb{V}_1\mathbb{I}_1^* - \mathbb{V}_2\mathbb{I}_2^* + \mathbb{V}_3\mathbb{I}_3^* + \mathbb{V}_4\mathbb{I}_4^* + \mathbb{V}_5\mathbb{I}_5^* - \mathbb{V}_6\mathbb{I}_6^* - \mathbb{V}_7\mathbb{I}_7^* + \mathbb{V}_8\mathbb{I}_8^* + \mathbb{V}_9\mathbb{I}_9^* + \mathbb{V}_{10}\mathbb{I}_{10}^* + \dots = 0 \quad (3.26)$$

Es decir:

$$\mathbb{V}_2\mathbb{I}_2^* + \mathbb{V}_6\mathbb{I}_6^* + \mathbb{V}_7\mathbb{I}_7^* + \dots = \mathbb{V}_1\mathbb{I}_1^* + \mathbb{V}_3\mathbb{I}_3^* + \mathbb{V}_4\mathbb{I}_4^* + \mathbb{V}_5\mathbb{I}_5^* + \mathbb{V}_8\mathbb{I}_8^* + \mathbb{V}_9\mathbb{I}_9^* + \mathbb{V}_{10}\mathbb{I}_{10}^* + \dots \quad (3.27)$$

La ecuación (3.26) muestra claramente que los dipolos 2, 6 y 7 están operando como fuentes (corriente entrando por el terminal de polaridad negativa), mientras que los dipolos 1, 3, 4, 5, 8, 9 y 10 actúan como cargas (corriente entrando por el terminal de polaridad positiva), es decir, se encuentran en *referencia no normal y normal*, respectivamente. Es importante aclarar que, para los elementos considerados *activos*, la corriente entra por el terminal negativo, mientras que para los *pasivos* la corriente fluye en sentido contrario. Así mismo, se tiene la ecuación (3.26), la cual se conoce como *balance de potencia*³, tal como se muestra en la ecuación (3.28).

$$\sum \mathbb{S}_{Fuentes} = \sum \mathbb{S}_{Cargas} \quad (3.28)$$

La anterior expresión corresponde al *Principio de conservación de la energía*. Así mismo, a partir de la ecuación (3.28) es posible obtener el correspondiente balance de potencia para las potencias tanto activas como reactivas, lo cual se muestra en la ecuación (3.29):

$$\begin{aligned} \sum P_{Fuentes} &= \sum P_{Cargas} \\ \sum Q_{Fuentes} &= \sum Q_{Cargas} \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.6. Corrección del factor de potencia

Considérese $\mathbb{Z} = R + jX_L$, que presenta un *factor de potencia en atraso* (FP↓). Se conecta un condensador en paralelo, con una reactancia capacitiva X_C , de tal manera que se mejore su FP'. En la figura 3.12 se muestra el correspondiente diagrama fasorial de potencias:

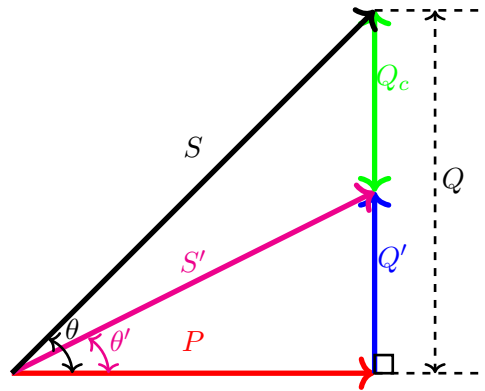


Figura 3.12: Triángulo de potencias.

³Un caso específico del *teorema de Tellegen* para aplicaciones en corriente alterna sinusoidal es el *teorema de Boucherot*, donde se muestra la relación de potencias expresada en (3.29), y que permite observar con claridad que no es posible el balance de potencias aparentes ($\sum_{i=1}^n S_i \neq 0$), a menos que todos los dipolos de la red tengan el mismo factor de potencia.

FP' corresponde al nuevo factor de potencia, o factor de potencia mejorado, que también se encuentra en atraso ($\downarrow$) y viene dado por la ecuación (3.30):

$$\begin{aligned}\theta' &= \tan^{-1}\left(\frac{Q-Q_C}{P}\right) \\ Q_C &= \frac{V^2}{X_C} \\ FP' &= \cos(\theta') \downarrow\end{aligned}\tag{3.30}$$

3.7. Teorema de máxima tranferencia de potencia media

Partiendo del circuito equivalente simplificado de Thévenin, se calcula una expresión para la potencia media como en (3.31).

$$\mathbb{I}_L = \frac{\mathbb{V}_{Th}}{\mathbb{Z}_{Th} + \mathbb{Z}_L} = \frac{\mathbb{V}_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)}\tag{3.31}$$

Luego, a partir del módulo de la corriente $|\mathbb{I}_L| = I_L = \frac{V_{Th}}{\sqrt{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}}$ se obtiene una expresión para la potencia activa en la carga, como se muestra en (3.32).

$$P_L = I_L^2 R_L = V_{Th}^2 \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}\tag{3.32}$$

Luego, se calcula el punto máximo de esta función de potencia para las variables R_L y X_L por medio de las derivadas parciales de esta función e igualándolas a cero, las que se presentan respectivamente en (3.33) y (3.34).

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 : V_{Th}^2 \frac{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2 - 2(R_{Th} + R_L)R_L}{((R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2)^2} = 0\tag{3.33}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 : V_{Th}^2 \frac{-2(X_{Th} + X_L)R_L}{((R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2)^2} = 0\tag{3.34}$$

De (3.34) puede obtenerse que $X_L = -X_{Th}$, y que al ser sustituido en (3.33) resulta en $R_L = R_{Th}$. En otras palabras, estos resultados indican que la máxima potencia activa que puede absorber la carga sin modificar el circuito eléctrico de la alimentación se presenta cuando $\mathbb{Z}_L = \mathbb{Z}_{Th}^*$. Lo anterior puede observarse en la figura 3.13.

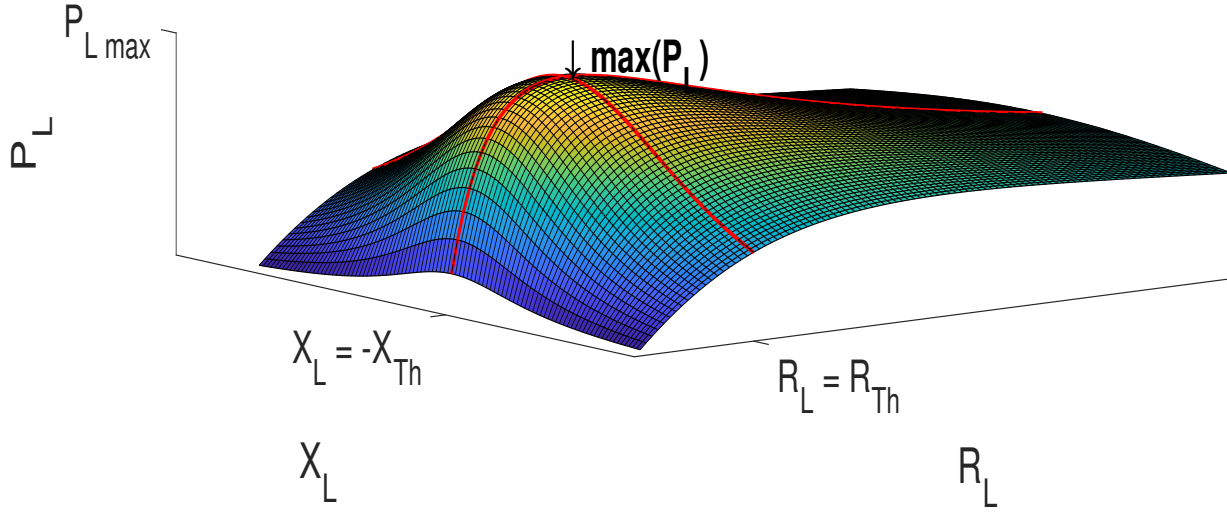


Figura 3.13: Superficie formada por la potencia activa en la carga para diferentes valores de R_L y X_L .

Donde la línea resaltada de la figura 3.13 indica cuando $X_L = -X_{Th}$. El punto de color rojo representa el valor máximo de P_L en la superficie mostrada.

3.8. Sentido del flujo de potencia

Supóngase un dipolo que puede operar como fuente o como carga (como el caso de los motores y generadores). A partir del conocimiento de los fasores $\mathbb{V}$ e $\mathbb{I}$, se puede establecer su comportamiento⁴, por ejemplo el dipolo de la figura 3.14 se ha puesto como carga (corriente entrando por el +), si se efectúa el producto $\mathbb{V}\mathbb{I}^*$, obteniéndose la expresión (3.35):

$$\Re[\mathbb{V}\mathbb{I}^*] > 0 \quad (3.35)$$

Efectivamente opera como *carga*, siempre y cuando se cumpla la condición de la ecuación (3.36):

$$\Re[\mathbb{V}\mathbb{I}^*] < 0 \quad (3.36)$$

Entonces, si se considera como *generador*, las ecuaciones (3.37) y (3.38) indican que *recibe* y *entrega* potencia reactiva, respectivamente.

⁴Si se quiere más información, se sugiere revisar la referencia [25], donde se presentan de forma clara los sentidos del flujo de potencia en un diagrama de cuatro cuadrantes.

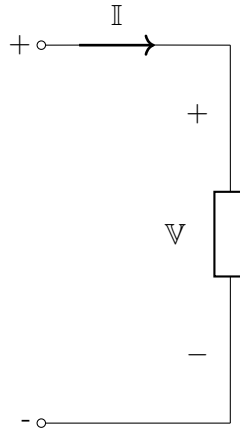


Figura 3.14: Representación Esquemática de un Dipolo.

Ahora, con el mismo supuesto de la figura 3.14, si:

$$\Im [\mathbf{VI}^*] > 0 \quad (3.37)$$

$$\Im [\mathbf{VI}^*] < 0 \quad (3.38)$$

3.9. Ejemplos de aplicación

Ejemplo 3.9.1.

Determine $v_o(t)$ en el circuito de la figura 3.15 y verifique el correspondiente balance de potencias $\mathbb{S}_{generada} = \mathbb{S}_{demandada}$.

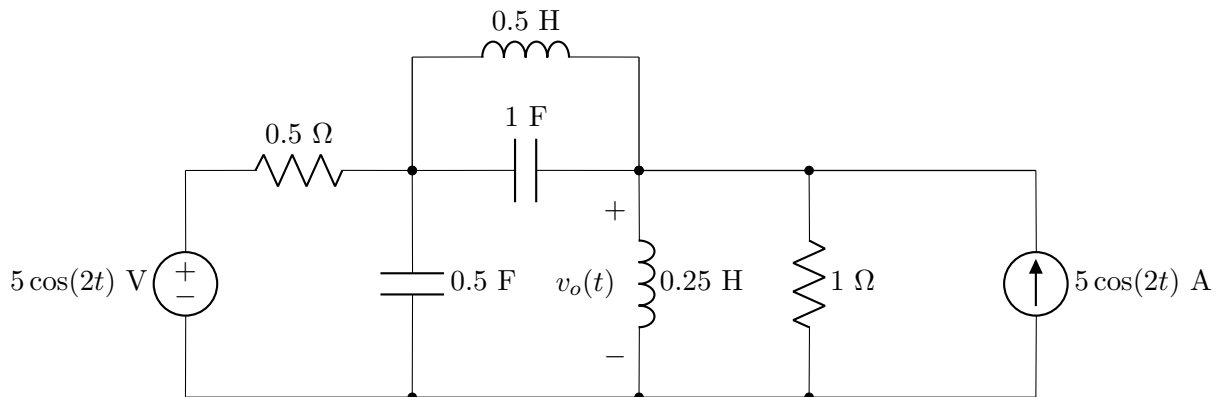


Figura 3.15: Circuito en el dominio del tiempo del Ejemplo 3.9.1.

Solución.

Transformando el circuito, tal como se muestra en la figura 3.16, mediante el *método fasorial* descrito en la sección 2.1 se tiene que:

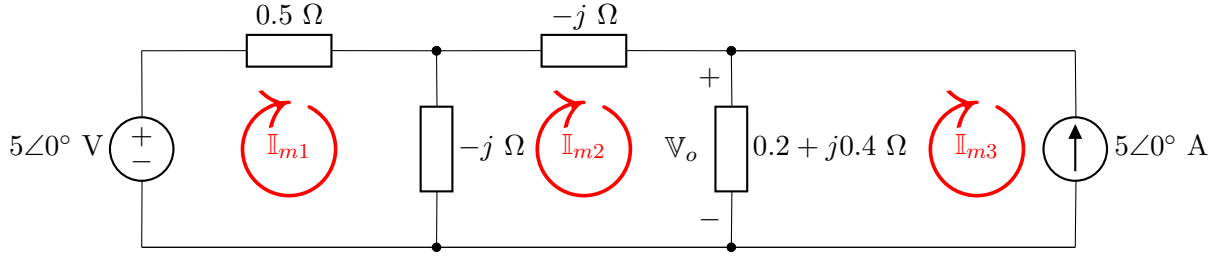


Figura 3.16: Circuito transformado para el Ejemplo 3.9.1.

Planteando el sistema de ecuaciones en forma matricial, mediante el método de corrientes de malla, tal como se muestra en la ecuación (3.39), se obtiene su correspondiente solución en la ecuación (3.40):

$$\begin{bmatrix} 0.5 - j & j & 0 \\ j & 0.2 - j1.6 & -0.2 - j0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \\ \mathbb{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \\ \mathbb{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.3245 \angle 18.4349^\circ \\ 5 \angle 0^\circ \\ 5 \angle 180^\circ \end{bmatrix} \text{ A} \quad (3.40)$$

Para determinar $v_o(t)$, en primera instancia, se obtiene $\mathbb{V}_o$, tal como se muestra en la ecuación (3.41):

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_o &= (0.2 + j0.4)(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m3}) = 4.4721 \angle 63.4349^\circ \text{ V} \\ \therefore v_o(t) &= 4.4721 \cos(2t + 63.4349^\circ) \text{ V} \checkmark \end{aligned} \quad (3.41)$$

Considerando el correspondiente *balance de potencias*, se obtienen los resultados de la ecuación (3.42):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{generada} &= \mathbb{S}_{demandada} \\ \mathbb{S}_{generada} &= \frac{[(5 \angle 0^\circ) \mathbb{I}_{m1}^* + \mathbb{V}_o (5 \angle 0^\circ)^*]}{2} = 20.6155 \angle 14.0362^\circ \text{ VA} = 20 + j5 \text{ VA} \checkmark \\ \mathbb{S}_{demandada} &= \frac{[0.5 I_{m1}^2 + (-j)(|\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}|)^2 + (-j) I_{m2}^2 + \mathbb{V}_o (\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m3})^*]}{2} \text{ VA} \\ \mathbb{S}_{demandada} &= 20.6155 \angle 14.0362^\circ \text{ VA} = 20 + j5 \text{ VA} \checkmark \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ejemplo 3.9.2.

Considere los siguientes elementos de la figura 3.17 conectadas en paralelo:

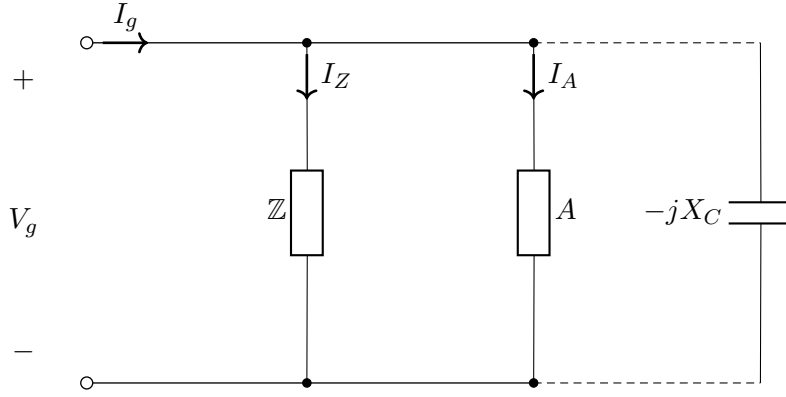


Figura 3.17: Circuito Ejemplo 3.9.2.

Los datos del sistema son los siguientes:

Carga A	Generador	Impedancia
FP= 0.8 ↓, $P_A = 8$ MW	$S_g = 14$ MVA, $P_g = 10$ MW	$Z = 33 \Omega$, $\mathbb{Z} = R_Z + jX_Z$

A partir de la información suministrada determine:

- R_Z , X_Z y V_g .
- EL FP, indicando si es en ↓ o ↑.
- Condensador conectado en paralelo a la fuente tal que el FP= 1.

Solución.

Considerando inicialmente un escenario sin condensador, se la ecuación (3.43):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_g &= V_g \angle 0^\circ \text{ V} \\
 \mathbb{S}_g &= \mathbb{S}_Z + \mathbb{S}_A = (10 + j\sqrt{14^2 - 10^2}) \text{ MVA} = (10 \angle (\arccos(0.8)) + \mathbb{S}_Z) \text{ MVA} \\
 \therefore \mathbb{S}_Z &= 4.29 \angle 62.18^\circ \text{ MVA} \\
 FP_g &= \frac{10}{14} \downarrow = 0.71 \downarrow
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Considerando el correspondiente diagrama fasorial de la figura 3.17, donde se utiliza la *primera ley de Kirchoff* en la ecuación (3.44), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}_g &= \mathbb{I}_Z + \mathbb{I}_A \Rightarrow I_g \angle -(\arccos(\frac{10}{14})) = I_A \angle -(\arccos(0.8)) + I_Z \angle -62.18^\circ \\
 \therefore I_g \angle -44.41^\circ &= I_A \angle -36.87^\circ + I_Z \angle -62.18^\circ
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

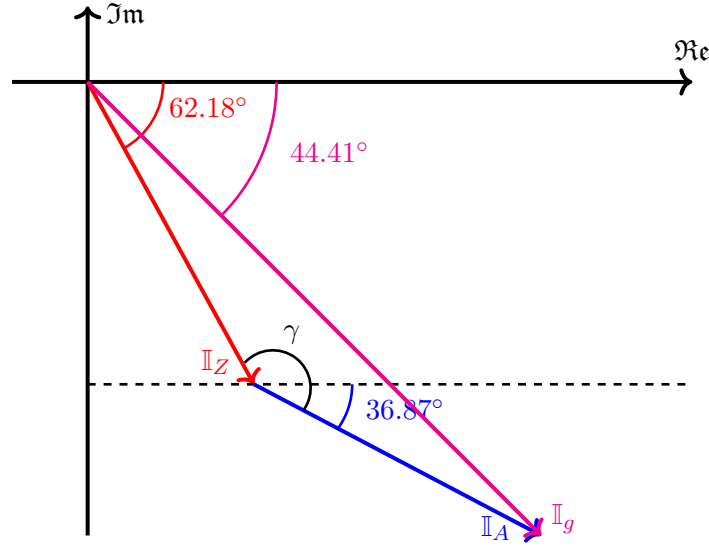


Figura 3.18: Diagramas fasoriales para el Ejemplo 3.9.2.

Utilizando *ley de cosenos* sobre el triángulo que se muestra en la figura 3.18, se obtiene la correspondiente ecuación (3.45) y su solución viene dada en la ecuación (3.46):

$$\begin{aligned}
 I_g^2 &= I_Z^2 + I_A^2 - 2I_Z I_A \cos \gamma \\
 \gamma &= 180^\circ - 62.18^\circ + 36.87^\circ = 154.69^\circ \\
 \Rightarrow \left(\frac{14 \times 10^6}{V_g}\right)^2 &= \left(\frac{V_g}{33}\right)^2 + \left(\frac{10 \times 10^6}{V_g}\right)^2 - 2\left(\frac{V_g}{33}\right)\left(\frac{10 \times 10^6}{V_g}\right) \cos(154.59^\circ)
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$V_g = \begin{cases} -11900 \text{ V} & \text{X} \\ 11900 \text{ V} & \checkmark \\ j27170.8 \text{ V} & \text{X} \\ -j27170.8 \text{ V} & \text{X} \end{cases} \tag{3.46}$$

El cálculo de $Z = R_Z + jX_Z$, se muestra en la ecuación (3.47):

$$\begin{aligned}
 Z &= 33 \angle 62.18^\circ \Omega = 33 \cos(62.18^\circ) \Omega + j33 \sin(62.18^\circ) \Omega \\
 \therefore R_Z &= 15.4 \Omega \text{ y } X_Z = 29.19 \Omega
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Por otro lado, para calcular el condensador requerido para que $FP=1$, se realiza en la ecuación (3.48):

$$Q_C = Q_g = \sqrt{14^2 - 10^2} \text{ MVAR} = \frac{V_g^2}{X_C} = V_g^2 2\pi f C \Rightarrow C = 183.38 \mu\text{F} \tag{3.48}$$

Ejemplo 3.9.3.

Supóngase el sistema de potencia que se muestra en la figura 3.19, que representa una carga alimentada a través de una línea de transmisión, la cual se modela como una resistencia de 0.3Ω en serie con una reactancia inductiva de 0.4Ω . El factor de potencia de la carga es de 0.866; se desea encontrar la tensión de la carga V_o para factor de potencia en atraso y en adelanto.

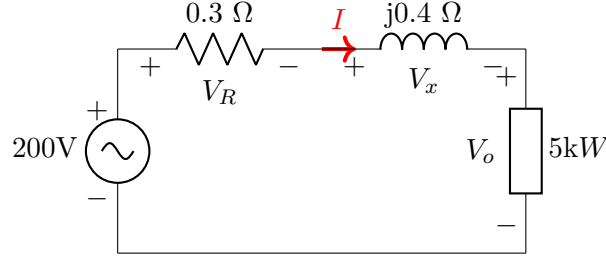


Figura 3.19: Sistema de potencia considerado para el Ejemplo 3.9.3.

- Considerando factor de potencia en atraso: tomando la tensión en la carga como referencia, el diagrama fasorial se indica en la figura 3.20.

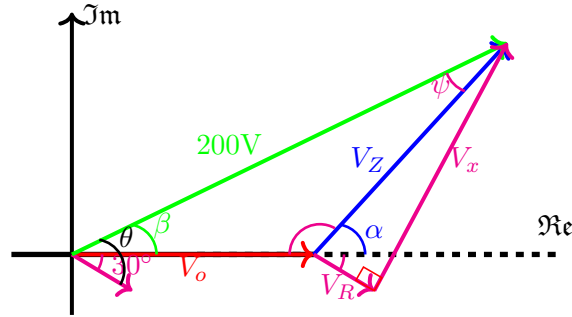


Figura 3.20: Diagramas fasoriales para el ejemplo 3.9.3 con un factor de potencia en atraso.

Aplicando *ley de cosenos*, se tienen las ecuaciones (3.49) y (3.50), así que considerando V_Z en función de V_o de la ecuación (3.51), resultando la ecuación (3.52), donde su solución se muestra en la ecuación (3.53):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{0.4}{0.3} - 30^\circ\right) = 23.13^\circ \quad (3.49)$$

$$200^2 = V_o^2 + V_Z^2 - 2V_oV_Z \cos(180^\circ - 23.13^\circ) \quad (3.50)$$

$$V_Z = I_Z = \frac{5000}{0.866V_o}(0.5) = \frac{2886.84}{V_o} \quad (3.51)$$

$$200^2 = V_o^2 + \frac{(2886.84)^2}{(V_o)^2} + 5309.57 \quad (3.52)$$

$$V_o = 186.2 \text{ V} \checkmark \quad (3.53)$$

En forma analítica, se tiene la ecuación (3.54):

$$200 \angle \beta = \mathbb{I}Z + \mathbb{V}_o \quad (3.54)$$

Si $V_o = V_o \angle 0^\circ = V_o + j0$, se obtiene la ecuación (3.55):

$$\begin{aligned}\mathbb{I} &= \frac{5000}{0.886V_o} \angle -30^\circ \\ 200 \angle \beta &= \left(\frac{5000}{0.886V_o} \angle -30^\circ \right) (0.3 + j0.4) + V_o \\ 200 \angle \beta &= \frac{2886.84}{V_o} \angle 23.13^\circ + V_o\end{aligned}\quad (3.55)$$

Descomponiendo en partes real e imaginaria, se tiene la ecuación (3.56):

$$\begin{aligned}200 \cos(\beta) &= \frac{2654.784}{V_o} + V_o \\ 200 \sin(\beta) &= \frac{1134}{V_o}\end{aligned}\quad (3.56)$$

Elevando al cuadrado, sumando y resolviendo, se obtiene la ecuación (3.57):

$$\begin{aligned}V_o^2 - 34690.43V_o^2 + 1285956 &= 0 \\ V_o &= 186.2 \text{ V} \checkmark\end{aligned}\quad (3.57)$$

Aplicando el *principio de conservación de la energía* en la ecuación (3.58), elevando al cuadrado y sumando, se obtiene la solución en la ecuación (3.59):

$$200I \sin(\theta) = (0.4)I^2 + 5000 \tan(30^\circ) \quad (3.58)$$

$$0.25I^4 - 34690.6I^2 + 333333333 = 0 \quad I = 31.1 \text{ A} \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{5000}{(31.1)(0.866)} = 185.65 \text{ V} \checkmark$$

- Factor de potencia en adelanto: tomando la tensión en la carga como referencia, el diagrama fasorial se indica en la figura 3.22.

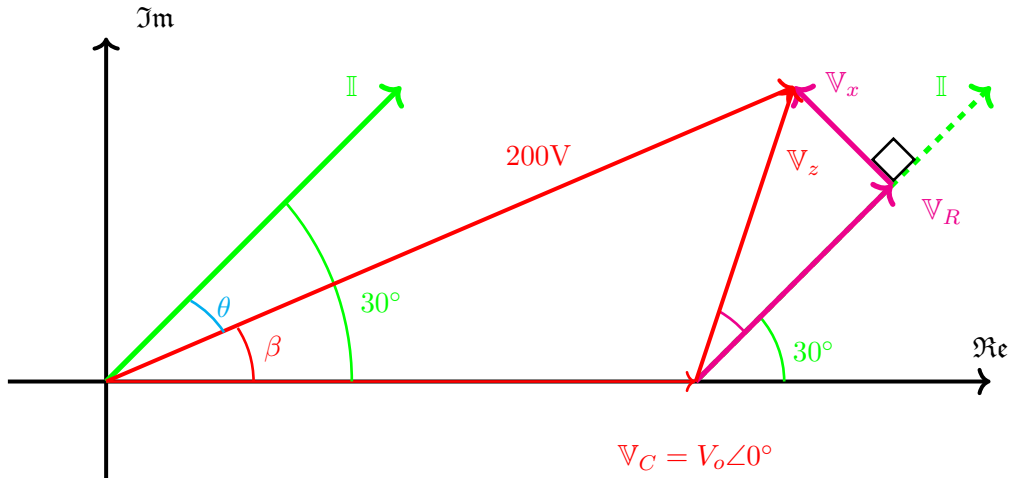


Figura 3.21: Diagramas fasoriales para el ejemplo 3.9.3 para un factor de potencia en adelanto.

Empleando igualdad de potencias activas y reactivas en la ecuación (3.60), se obtiene su correspondiente solución en la ecuación (3.61):

$$200I \cos(\theta) = (0.3)I^2 + 5000 \quad (3.60)$$

$$200I \sin(\theta) = (0.4)I^2 - 2886.75$$

$$I = 24.2 \text{ A} \quad (3.61)$$

$$V_C = 197.7 \text{ V}$$

Ejemplo 3.9.4.

Para ilustrar el sentido del flujo de potencia presentado en la sección 3.8, supóngase los valores de la ecuación (3.62) para el dipolo de la figura 3.14:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= 120\angle 30^\circ \text{ V} \\ \mathbb{I} &= 10\angle 160^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Entonces, como $\mathbb{S} = \mathbb{V}\mathbb{I}^*$, y al separar sus partes real e imaginaria, se tienen los siguientes resultados de la ecuación (3.63):

$$\begin{aligned} \Re[\mathbb{V}\mathbb{I}^*] &= -771.34 \text{ W} \\ \Im[\mathbb{V}\mathbb{I}^*] &= -919.25 \text{ var} \end{aligned} \quad (3.63)$$

A partir de la convención pasiva de la figura 3.14, se puede afirmar que el dipolo opera como generador, suministrando 771.34 W y 919.25 var.

3.10. Ejercicios propuestos

1. Supóngase una instalación como la de la figura 3.22

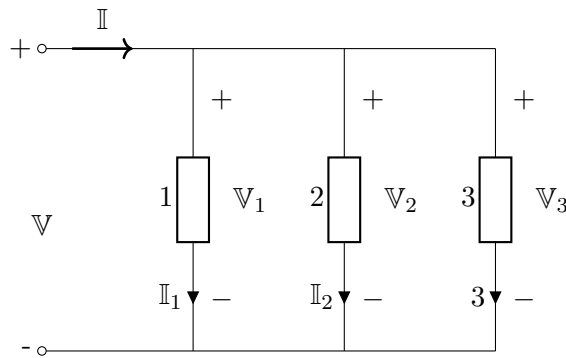


Figura 3.22: Conexión en paralelo de las cargas monofásicas 1, 2 y 3.

La instalación corresponde a tres cargas en paralelo, así:

- Carga 1: estufa, demanda 3.0 kW
- Carga 2: motor, demanda 1.5 kW, $FP = 0.85 \downarrow$
- Carga 3: motor, demanda 3.5 kW, $FP = 0.95 \uparrow$

Todas las cargas presentan tensión nominal (tensión de placa) de 115 voltios, y se encuentran trabajando a dicha tensión; se desea encontrar la corriente de entrada I , el factor de potencia y la potencia reactiva suministrada en los terminales a-b (terminales del generador).

a. Respuesta: $I = 69.59 \text{ A}$

b. Respuesta: $FP = 0.9496 \uparrow$

c. Respuesta: $Q = -2.5086 \text{ kvar}$

2. Muestre si el *teorema de Boucherot* se satisface en el circuito de la figura 3.23. Luego justifique el porqué del resultado obtenido.

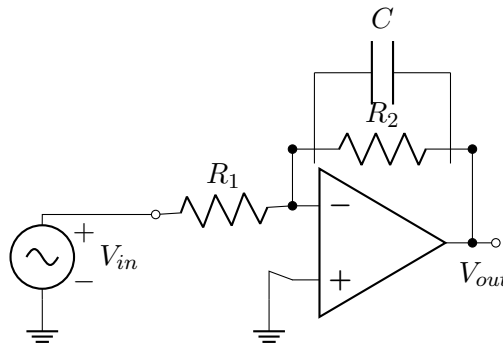


Figura 3.23: Circuito integrador con amplificador operacional.

Asuma para este circuito: $V_{in} = 10 \cos(t) \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ y $C = 500 \text{ mF}$. También asuma que el amplificador operacional es ideal.

Respuesta: Sí se satisface, pero se debe tener cuidado con la potencia del amplificador.

3. Escribir la expresión de potencia instantánea que representa la respuesta de la carga en el circuito eléctrico de la figura 3.24, es decir, la potencia $p_R(t)$ absorbida por la resistencia.

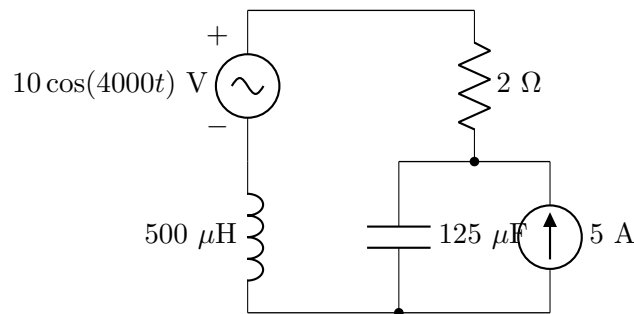


Figura 3.24: Circuito eléctrico lineal propuesto.

También, graficar un periodo de la función $p_R(t)$ indicando sus valores: medio, pico mínimo y pico máximo de la función.

a. Respuesta: $p_R(t) = 50(\cos(4000t) - 1)^2 \text{ W}$

b. Respuesta: $p_{avg} = 75 \text{ W}$, $p_{min} = 0 \text{ W}$, $p_{max} = 200 \text{ W}$

3.11. Ejercicios de introducción al diseño

1. En una instalación monofásica bifilar, se necesita seleccionar el conductor económico para la fase y el neutro, tales que permitan la alimentación de una carga de 5 kW con FP del 83 % inductivo y de una carga de 3.5 kW con FP unitario. Ambas cargas se conectan al mismo nodo de 115 V ubicado a 10 metros del nodo de alimentación.

A partir de esta necesidad, seleccionar el mayor calibre AWG (menor diámetro) de un conductor aislado para baja tensión, de cualquier fabricante de cables eléctricos (buscar una tabla de conductores en la Internet), que cumpla con la restricción de capacidad de corriente dada por el fabricante y de una tensión máxima de 120 V en el nodo de alimentación.

Se recomienda ignorar el efecto de la temperatura para este ejercicio al momento de considerar la resistencia del cable.

2. Una carga de 30 kVA que opera con un FP de $0.96\uparrow$ a 460 V será penalizada por violación a la regulación del factor de potencia. Para solucionar este problema, se le solicita diseñar un reactor (inductancia) que pueda mejorar el factor de potencia a un nuevo valor entre 0.90 y 0.95 en atraso.

Para este diseño recomienda emplear la fórmula para una bobina con núcleo de aire de una capa, es decir:

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$

Donde μ es la permeabilidad del núcleo (con $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-6} \frac{\text{mH}}{\text{cm}}$ para el vacío y $\mu_r = 1$ para el aire), A es el área transversal de las espiras de la bobina en cm^2 , N es el número de espiras o vueltas, y l es la longitud de arrollamiento en cm.

Considerar para el diseño de su reactor que las dimensiones de A y l permitan su construcción y ubicación en el mundo real, es decir, que ocupe el menor espacio posible.

Capítulo 4

Circuitos Eléctricos Trifásicos

4.1. Introducción a los sistemas polifásicos

Los *sistemas polifásicos* son aquellos conformados por m fuentes de tensión de la misma naturaleza. Estas pueden encontrarse conectadas en configuración de estrella (Y) o delta (Δ)¹, tal como se muestra en figura 4.1.

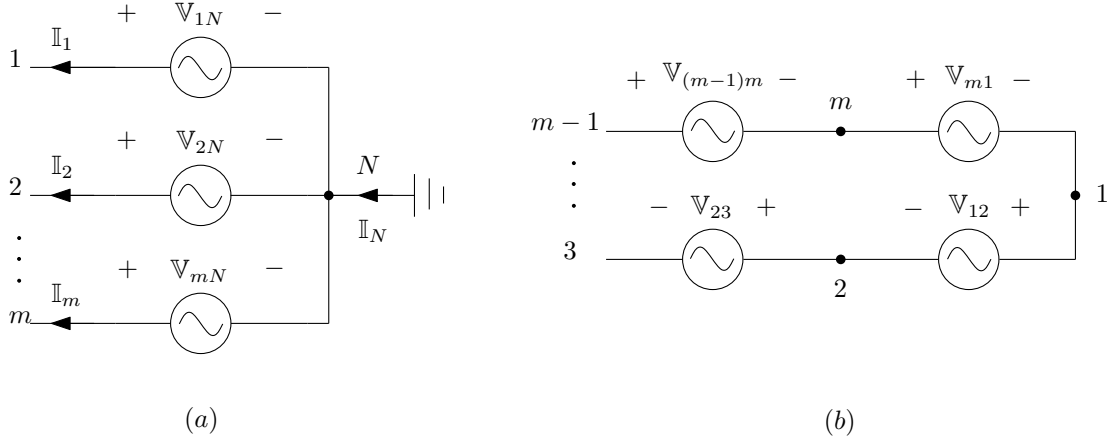


Figura 4.1: Fuente m -fásica conectada en (a) Y y (b) Δ .

Considerando la configuración de estrella (Y) m -fásica, y aplicando la *primera ley de Kirchhoff* en la ecuación (4.1), se tiene que:

$$I_1 + I_2 + \dots + I_m = I_N \quad (4.1)$$

Por otro lado, al aplicar la *segunda ley de Kirchhoff* en conexión delta (Δ) m -fásica, se tiene que la ecuación (4.2):

$$V_{12} + V_{23} + \dots + V_{(m-1)m} + V_{m1} = 0 \quad (4.2)$$

En caso de considerar una fuente m -fásica equilibrada, se tiene que todas las tensiones de fase V_F son de igual magnitud, tal como se muestra en la ecuación (4.3):

$$|V_{1N}| = |V_{2N}| = \dots = |V_{mN}| = V_F \quad (4.3)$$

Se obtiene como diagrama fasorial un polígono regular de m lados, tal como se muestra en la figura 4.2.

¹El *teorema de Kennelly* [26], también conocido como transformación estrella-triángulo, o transformación T-Π, es una reducción para tres nodos del *teorema de Rosen*, también conocido como el teorema de la transformación nodo-malla [27].

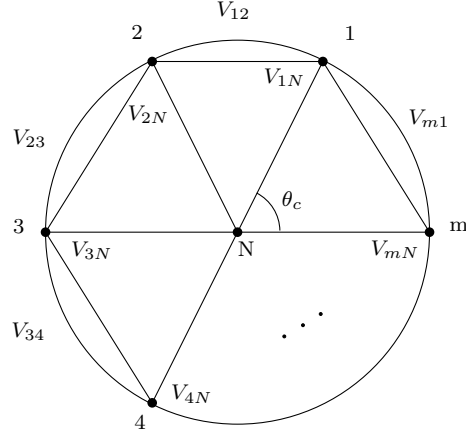


Figura 4.2: Polígono regular con fuentes m -fásicas equilibradas.

Así mismo, el ángulo central $\theta_c = 360^\circ/m$. Como consecuencia de ser un polígono regular se tiene que las magnitudes de sus tensiones de línea V_L son iguales, tal como se muestra en la ecuación (4.4):

$$|V_{12}| = |V_{23}| = \dots = |V_{(m-1)m}| = |V_{m1}| = V_L \quad (4.4)$$

Aplicando *ley de senos*, se obtiene la relación entre V_F y V_L , en la figura 4.2, en función de θ_c y α , tal como se muestra en la ecuación (4.5).

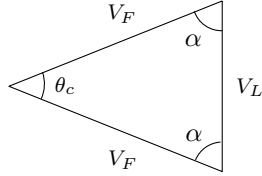


Figura 4.3: Relación entre tensiones de fase V_F y de línea V_L para una fuente m -fásica.

$$\frac{V_L}{\text{sen}(\theta_c)} = \frac{V_F}{\text{sen}(\alpha)} \quad (4.5)$$

Así mismo, la relacion existente entre α y θ_c se muestra en la ecuación (4.6) y su seno se muestra en la ecuación (4.7):

$$\alpha = \frac{\pi - \theta_c}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_c}{2} \quad (4.6)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_c}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \quad (4.7)$$

$$V_L = \frac{\text{sen}(\theta_c)}{\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right)} \cdot V_F \quad (4.8)$$

La relación existente para V_F e V_L en una fuente m-fásica equilibrada se obtiene mediante la aplicación de identidades de seno y coseno de ángulo medio en las ecuaciones (4.8) y (4.9), obteniéndose la ecuación (4.10):

$$V_L = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_c}{2}\right)} V_F \quad (4.9)$$

Por lo tanto:

$$V_L = 2V_F \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \quad (4.10)$$

4.2. Teorema de Millman

En esta sección, se presenta el *teorema de Millman*, el cual permite simplificar el cálculo de tensiones en los nodos X e Y de un circuito con N ramas, tal como se muestra en la figura 4.4:

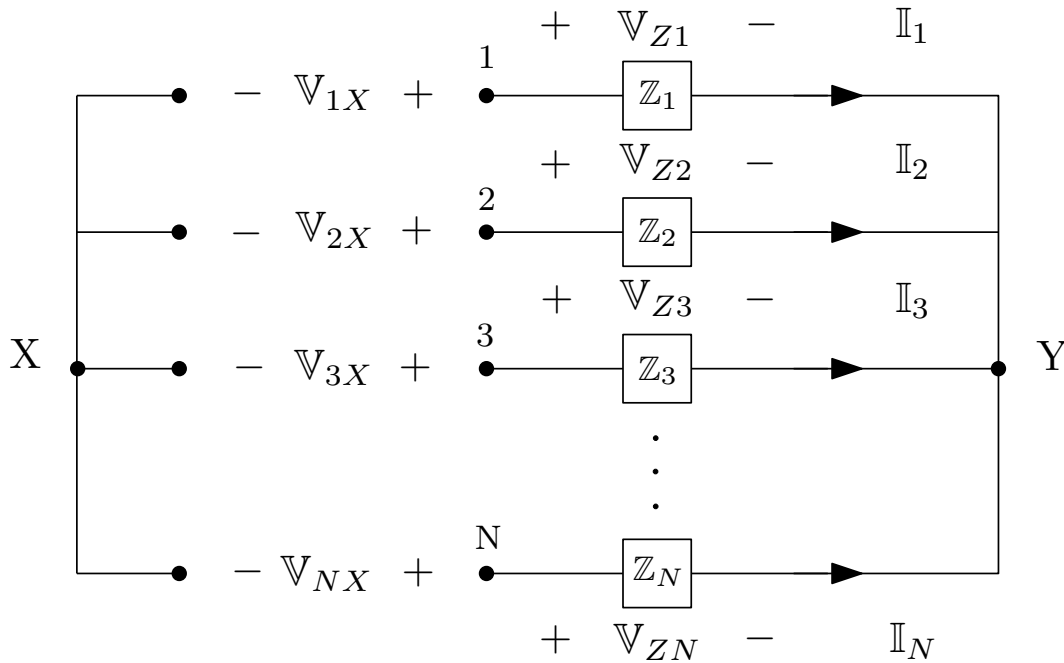


Figura 4.4: Circuito de aplicación del *teorema de Millman*.

Aplicando la *primera ley de Kirchhoff* en el nodo Y , se tiene la ecuación (4.11):

$$I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0 \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.12) se expresan cada una de las corrientes en términos de las admitancias conectadas al nodo Y , junto a sus correspondientes tensiones. Así mismo, estas tensiones se pueden expresar en términos de las tensiones considerando el nodo común X y la tensión V_{YX} , tal como se muestra en la ecuación

(4.13):

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{Z_j} \right) \cdot \mathbb{V}_{Z_j} = \sum_{j=1}^n \mathbb{Y}_j \cdot \mathbb{V}_{Z_j} = 0 \quad (4.12)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_j = \sum_{j=1}^n \mathbb{Y}_j \cdot (\mathbb{V}_{jX} - \mathbb{V}_{YX}) = 0 \quad (4.13)$$

La tensión $\mathbb{V}_{YX}$ se obtiene mediante las ecuaciones (4.14) y (4.15):

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{Y}_j \cdot \mathbb{V}_{jX} = \sum_{j=1}^n \mathbb{Y}_j \cdot \mathbb{V}_{YX} \quad (4.14)$$

$$\mathbb{V}_{YX} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{Y}_j \cdot \mathbb{V}_{jX}}{\sum_{j=1}^n \mathbb{Y}_j} \quad (4.15)$$

4.3. Sistema monofásico trifilar

El sistema monofásico trifilar de la figura 4.5 es un tipo de configuración eléctrica que utiliza tres conductores: dos fases y un neutro. Este sistema es común en aplicaciones residenciales y comerciales donde se requiere una distribución equilibrada de cargas.

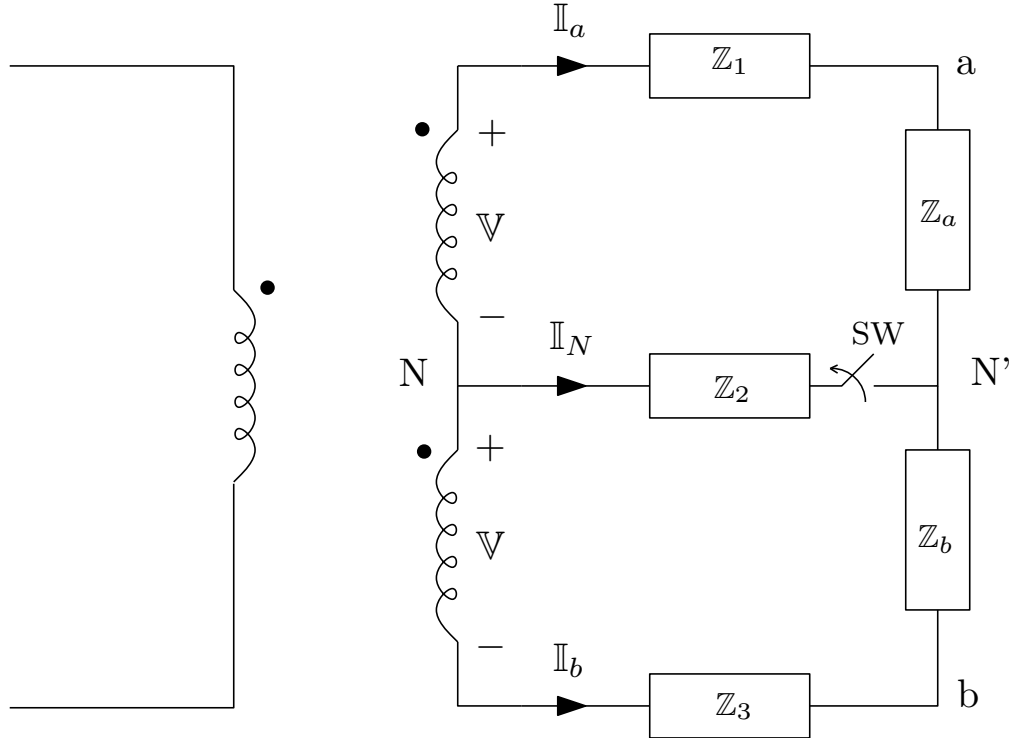


Figura 4.5: Circuito monofásico trifilar.

Donde:

$\mathbb{I}_a, \mathbb{I}_b$: son las corrientes de las fases a y b , respectivamente.

$\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_3$: son las impedancias de las fases a y b , respectivamente.

$\mathbb{Z}_a, \mathbb{Z}_b$: cargas conectadas entre fase y neutro.

N : neutro de la fuente.

N' : neutro de la carga.

$\mathbb{I}_N$: corriente de neutro.

$\mathbb{Z}_2$: impedancia de neutro.

Ante condiciones de equilibrio se tienen iguales las impedancias de las fases y cargas, tal como se muestran en las ecuaciones (4.16) y (4.17), respectivamente:

$$\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_3 \quad (4.16)$$

$$\mathbb{Z}_a = \mathbb{Z}_b \quad (4.17)$$

Aplicando el *teorema de Millman* considerando el interruptor abierto (SW), se tiene que $\mathbb{I}_N = 0$ y $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \infty$, obteniéndose la ecuación (4.18):

$$\mathbb{V}_{N'N} = \frac{\mathbb{V}\left(\frac{1}{\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_a}\right) - \mathbb{V}\left(\frac{1}{\mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_b}\right) + 0}{\frac{1}{\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_a} + \frac{1}{\mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_b} + 0} = 0 \quad (4.18)$$

Así mismo, considerando interruptor (SW) cerrado, se obtiene la ecuación (4.19):

$$\mathbb{V}_{N'N} = \frac{\mathbb{V}\left(\frac{1}{\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_a}\right) - \mathbb{V}\left(\frac{1}{\mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_b}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\mathbb{Z}_2}}{\frac{1}{\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_a} + \frac{1}{\mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_b} + \frac{1}{\mathbb{Z}_2}} = 0 \quad (4.19)$$

A partir de lo anterior se tiene que $\mathbb{V}_{N'N} = \mathbb{I}_N \cdot \mathbb{Z}_2 = 0 \Rightarrow \mathbb{I}_N = 0$

A partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones (4.18) y (4.19), se concluye que bajo condiciones de equilibrio la corriente del conductor neutro $\mathbb{I}_N$ es igual a cero.

4.4. Sistemas bifásicos

El sistema de la figura 4.6 se encuentra conformado por dos fuentes conectadas mediante un nodo en común. Por otro lado, si se desprecia la impedancia de los conductores se tiene que $\mathbb{V}_{12} \approx \mathbb{V}_{1'2'}$, $\mathbb{E}_{1N} \approx \mathbb{E}_{1'N'}$ y $\mathbb{E}_{2N} \approx \mathbb{E}_{2'N'}$. Así mismo, las estas tensiones de fase corresponden a $\mathbb{E}_{1N} = E \angle 0^\circ$, $\mathbb{E}_{2N} = E \angle 90^\circ$ y su tensión de línea $\mathbb{V}_{12} = \sqrt{2} \cdot E \angle -45^\circ$, las cuales diagrama fasorial de la figura 4.7.

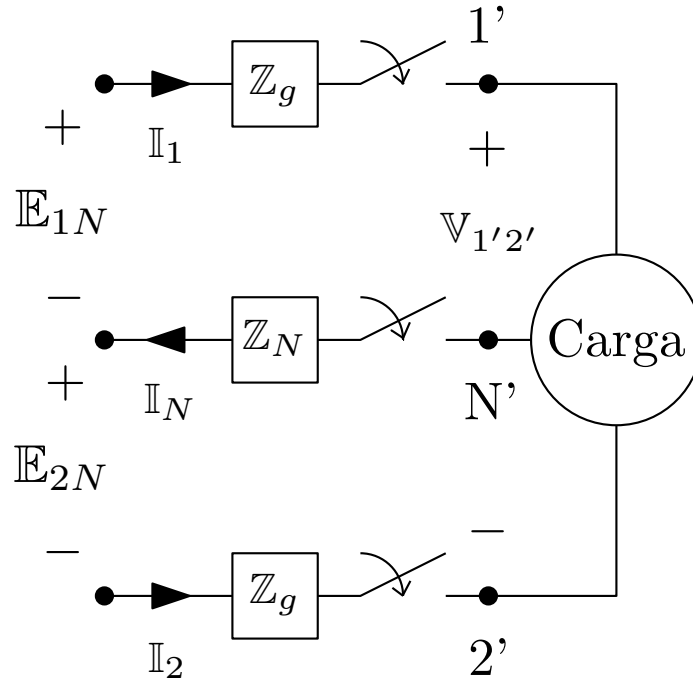


Figura 4.6: Sistema bifásico considerado.

4.5. Sistemas trifásicos

Los sistemas trifásicos son fundamentales en las etapas de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, debido a su alta eficiencia en comparación con los sistemas monofásicos. Un sistema trifásico equilibrado, donde $m = 3$, se caracteriza por tener tres tensiones o corrientes de igual magnitud y desfasadas entre sí en 120° . Según el número de conductores utilizados, el sistema general de la figura 4.33 se puede clasificar en:

- **Trifásico trifilar ($3\phi - 3h$):** se tienen únicamente tres conductores, sin conductor neutro.
- **Trifásico tetrafilar ($3\phi - 4h$):** se tienen cuatro conductores, con conductor neutro.

4.5.1. Secuencia de fases

En los sistemas trifásicos, su secuencia de fases puede ser positiva $\text{Sec}(+)$ o negativa $\text{Sec}(-)$, dependiendo de la rotación de las fases. En la secuencia positiva, las fases siguen el orden $A \rightarrow B \rightarrow C$, mientras que en la secuencia negativa, el orden es $A \rightarrow C \rightarrow B$. Esta secuencia no solo afecta la operación de los equipos trifásicos, como el sentido de giro motores y generadores, sino que también influye en el análisis de tensiones de línea y fase. En esta sección, se analizan ambas secuencias, se obtienen las relaciones matemáticas entre tensiones de fase y de línea, y se presentan métodos gráficos para visualizar dichas relaciones.

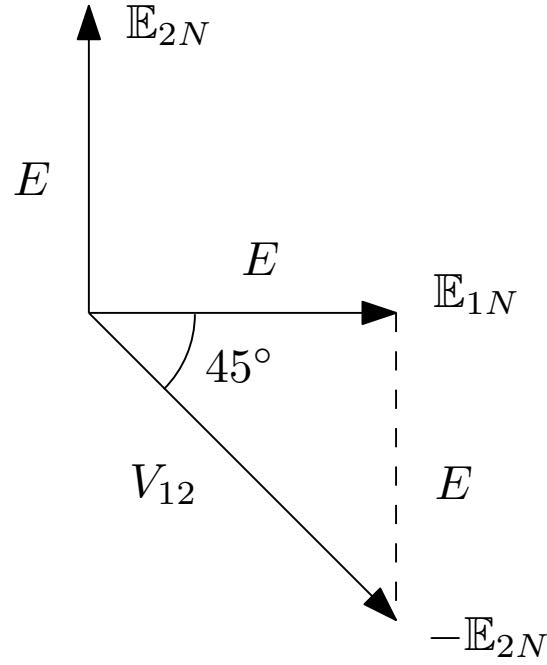


Figura 4.7: Relación entre tensiones de fase y de línea para el sistema bifásico.

- **Secuencia positiva o Sec(+):** a continuación se muestran los correspondientes voltajes de fase $\mathbb{V}_{AN} = V_F \angle 0^\circ$, $\mathbb{V}_{BN} = V_F \angle -120^\circ$ y $\mathbb{V}_{CN} = V_F \angle 120^\circ$, junto a su correspondiente diagrama fasorial, tal como se muestra en la ecuación (4.20) y figura 4.9, respectivamente.

$$\mathbb{V}_{AN} = V_F \angle 0^\circ$$

$$\mathbb{V}_{BN} = V_F \angle -120^\circ \quad (4.20)$$

$$\mathbb{V}_{CN} = V_F \angle 120^\circ$$

- **Secuencia negativa o Sec(-):** a continuación se muestran los correspondientes voltajes de fase $\mathbb{V}_{AN} = V_F \angle 0^\circ$, $\mathbb{V}_{BN} = V_F \angle 120^\circ$ y $\mathbb{V}_{CN} = V_F \angle -120^\circ$, junto a su correspondiente diagrama fasorial, tal como se muestra en la ecuación (4.21) y figura 4.10, respectivamente.

$$\mathbb{V}_{AN} = V_F \angle 0^\circ$$

$$\mathbb{V}_{BN} = V_F \angle 120^\circ \quad (4.21)$$

$$\mathbb{V}_{CN} = V_F \angle -120^\circ$$

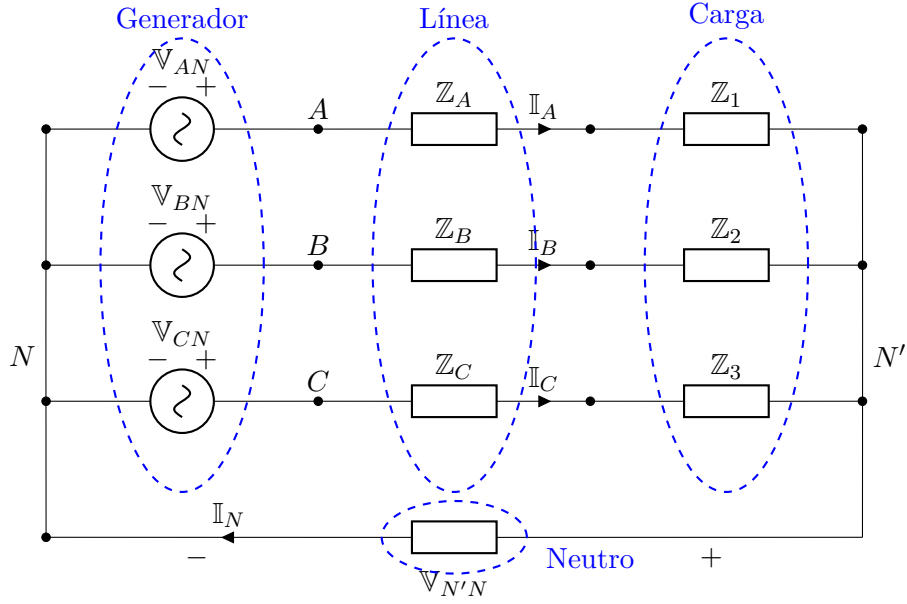


Figura 4.8: Esquema de un sistema trifásico general.

Para obtener las tensiones de línea a partir de las tensiones de fase, considérese Sec(+), tal como se muestran en la ecuación (4.20) y figura 4.9. Las tensiones de línea obtenidas tanto analítica como gráficamente se muestran en la ecuación (4.22) y figura 4.11, respectivamente:

$$\mathbb{V}_{AB} = \mathbb{V}_{AN} - \mathbb{V}_{BN}$$

$$\mathbb{V}_{AB} = V_f(1\angle 0^\circ - 1\angle -120^\circ)$$

$$\mathbb{V}_{AB} = \sqrt{3} \cdot V_f \angle 30^\circ = V_L \angle 30^\circ \quad (4.22)$$

$$\mathbb{V}_{BC} = V_L \angle (30^\circ - 120^\circ) = V_L \angle -90^\circ$$

$$\mathbb{V}_{CA} = V_L \angle (30^\circ + 120^\circ) = V_L \angle 120^\circ$$

Ahora bien, para obtener las tensiones de fase a partir de las tensiones de línea, considerando Sec(+), es decir, $\mathbb{V}_{AB} = V_L \angle 0^\circ$, $\mathbb{V}_{BC} = V_L \angle -120^\circ$ y $\mathbb{V}_{CA} = V_L \angle 120^\circ$, se realiza tanto analítica como gráficamente, tal como se ilustra en las ecuaciones (4.23) y (4.24) y en la figura 4.12, respectivamente.

$$\mathbb{V}_{AB} = \mathbb{V}_{AN} - \mathbb{V}_{BN}$$

$$\mathbb{V}_{BC} = \mathbb{V}_{BN} - \mathbb{V}_{CN} \quad (4.23)$$

$$\mathbb{V}_{AN} + \mathbb{V}_{BN} + \mathbb{V}_{CN} = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es la siguiente:

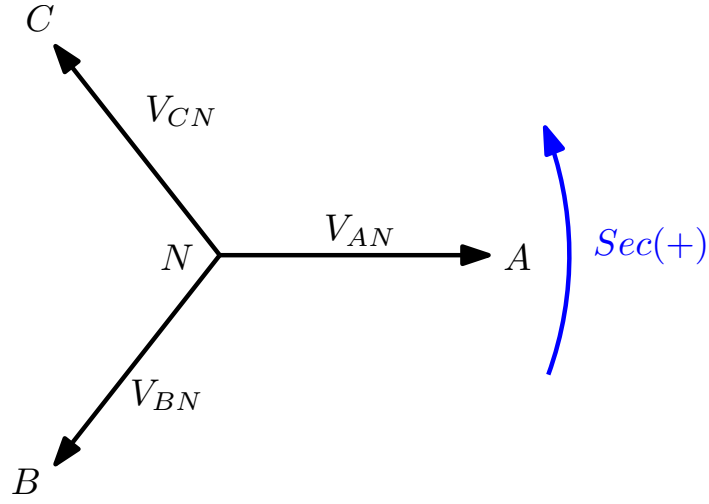


Figura 4.9: Tensiones de fase de secuencia positiva.

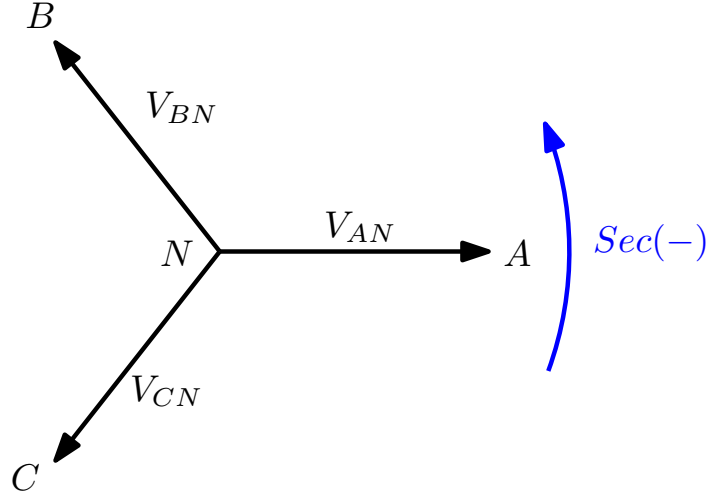


Figura 4.10: Tensiones de fase de secuencia negativa.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_{AN} \\ \mathbb{V}_{BN} \\ \mathbb{V}_{CN} \end{bmatrix} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \angle -30^\circ \\ 1 \angle -150^\circ \\ 1 \angle 90^\circ \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

4.5.2. Relación de corrientes en una delta y estrella equilibradas

En primera instancia, es importante considerar las diferentes expresiones requeridas para las conversiones $\delta - Y$ y $Y - \delta$, las cuales se obtienen en las ecuaciones (4.25) y (4.26) y relacionan las impedancias

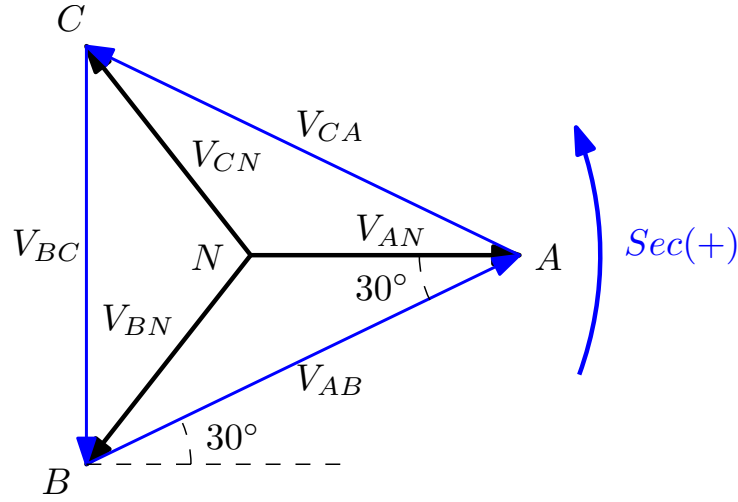


Figura 4.11: Método gráfico para la obtención de la tensiones de línea a partir de las tensiones de fase.

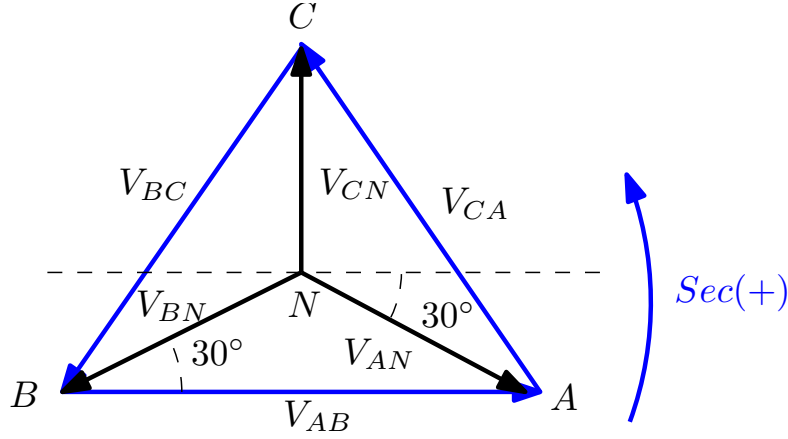


Figura 4.12: Método gráfico para la obtención de la tensiones de fase a partir de la tensiones de línea.

de la delta (Δ) Z_A , Z_B y Z_C con las impedancias de la estrella (Y) Z_1 , Z_2 y Z_3 , tal como se muestra en la figura 4.13.

- **Conversión $\delta - Y$:** En este apartado se muestra cómo obtener las impedancias de la Y a partir de las impedancias de la Δ .

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_A \cdot Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \\ Z_2 &= \frac{Z_A \cdot Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \\ Z_3 &= \frac{Z_B \cdot Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \end{aligned} \quad (4.25)$$

- **Conversión $Y - \delta$:** En este apartado se muestra cómo obtener las impedancias de la Δ a partir de

las impedancias de la Y .

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_A &= \frac{\mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}_3}{\mathbb{Z}_3} \\ \mathbb{Z}_B &= \frac{\mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}_3}{\mathbb{Z}_2} \\ \mathbb{Z}_C &= \frac{\mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}_3}{\mathbb{Z}_1}\end{aligned}\tag{4.26}$$

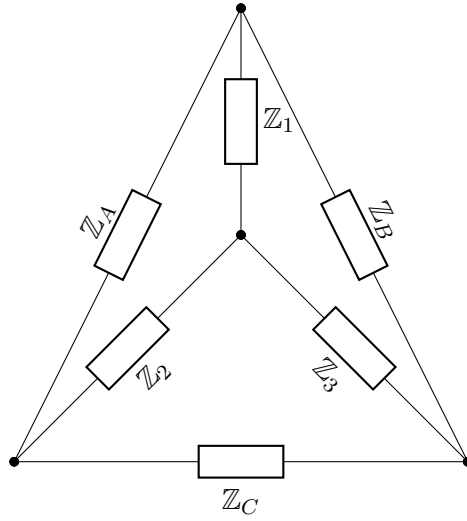


Figura 4.13: Relación de impedancias conectadas en una delta (Δ) y estrella (Y) general.

Considerando el caso particular de una delta y/o estrella equilibrada, se obtiene que $\mathbb{Z}_Y = \mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_3 = \frac{\mathbb{Z}_\delta}{3}$, donde $\mathbb{Z}_\delta = \mathbb{Z}_A = \mathbb{Z}_B = \mathbb{Z}_C$. Así mismo, considerando $\text{Sec}(+)$ en las corrientes de la delta equilibrada, es decir, $\mathbb{I}_1 = I_\delta \angle 0^\circ$, $\mathbb{I}_2 = I_\delta \angle -120^\circ$ e $\mathbb{I}_3 = I_\delta \angle 120^\circ$, tal como se ilustra en la figura 4.14, se obtienen las corrientes de la estrella equivalente de la ecuación (4.27).

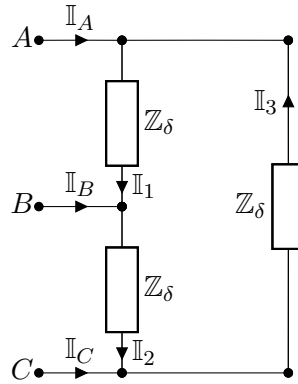


Figura 4.14: Relación de corrientes en una delta (Δ) y estrella (Y) balanceadas.

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_A &= \mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_3 = \sqrt{3}I_\delta \angle -30^\circ \\
\mathbb{I}_A &= I_Y \angle -30^\circ \\
\mathbb{I}_B &= \mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_1 = I_Y \angle -150^\circ \\
\mathbb{I}_C &= \mathbb{I}_3 - \mathbb{I}_2 = I_Y \angle 90^\circ
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Adicionalmente, es posible obtener la correspondiente relación en diagrama fasorial de estas corrientes en la ecuación (4.28), la cual se representa gráficamente en la figura 4.15. En esta ecuación se muestra la relación analítica entre las corrientes de fase $\mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_B$ e $\mathbb{I}_C$, en función de las corrientes de la delta $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$ e $\mathbb{I}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B &= \sqrt{3}I_\delta(1\angle -30^\circ - 1\angle -150^\circ) \\
\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B &= 3(I_\delta \angle 0^\circ) = 3\mathbb{I}_1 \\
\mathbb{I}_B - \mathbb{I}_C &= 3\mathbb{I}_2 \\
\mathbb{I}_C - \mathbb{I}_A &= 3\mathbb{I}_3
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Finalmente, esta relación puede ser ilustrada mediante el diagrama fasorial de la figura 4.15:

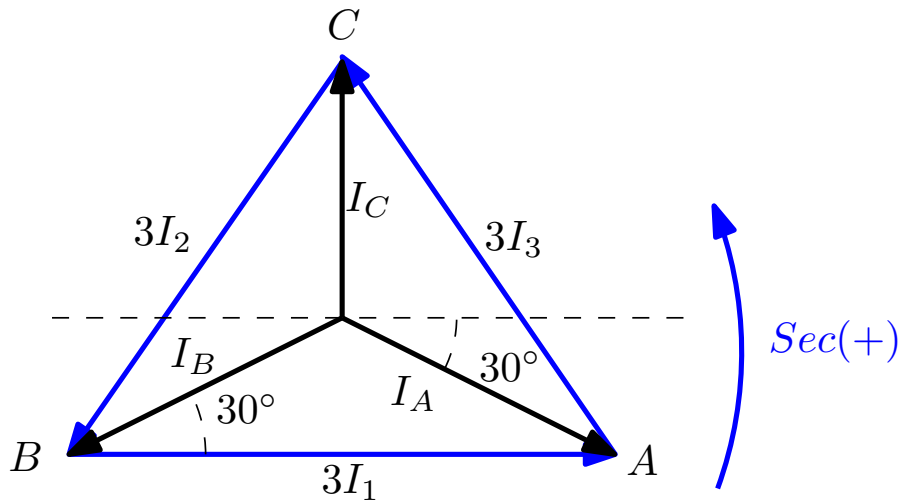


Figura 4.15: Relación fasorial de corrientes en una delta y estrella equilibradas.

Ejemplo 4.5.1.

Sean $\mathbb{V}_{R'T'} = 33\angle 0^\circ$ kV, sec(+) e $\mathbb{I}_1 = 150\angle -30^\circ$ A. Determine las tensiones y corrientes del generador del sistema de la figura 4.16:

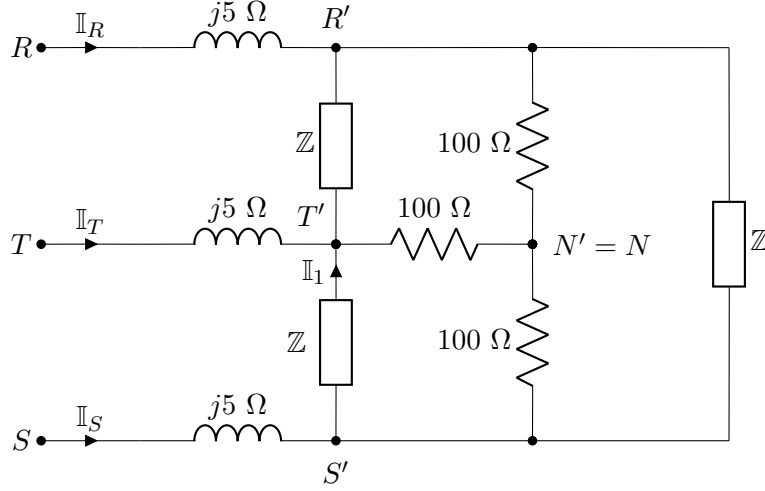


Figura 4.16: Sistema trifásico equilibrado ejemplo 4.5.1.

Solución:

En primera instancia, es importante determinar las demás tensiones de línea y de fase, considerando la sec(+) $R'T' - S'T' - T'S'$, los cuales se muestran en las ecuaciones 4.29 y 4.30, que se observan en la figura 4.17:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{R'T'} &= 33\angle 0^\circ \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{S'R'} &= 33\angle -120^\circ \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{T'S'} &= 33\angle 120^\circ \text{ kV}\end{aligned}\tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{R'N} &= \frac{33}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{S'N} &= \frac{33}{\sqrt{3}}\angle -90^\circ \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{T'N} &= \frac{33}{\sqrt{3}}\angle 150^\circ \text{ kV}\end{aligned}\tag{4.30}$$

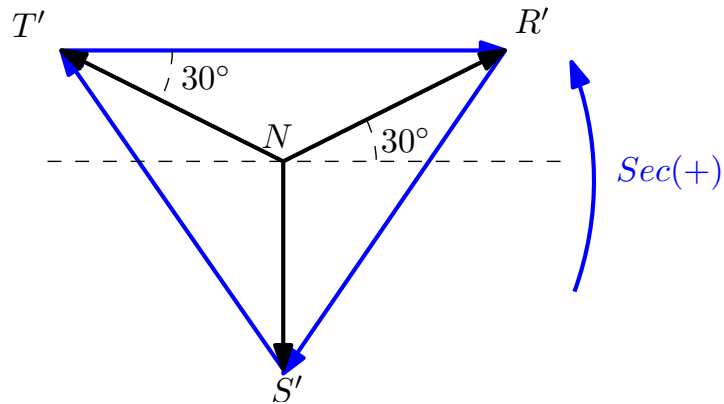


Figura 4.17: Diagrama fasorial de la tensión de línea y de fase para los nodos $R'S'T'$.

Para calcular la impedancia de la delta equilibrada $\mathbb{Z}$, se emplea la ecuación (4.31):

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \frac{\mathbb{V}_{S'T'}}{\mathbb{I}_1} = \frac{-\mathbb{V}_{T'S'}}{\mathbb{I}_1} \\ \mathbb{Z} &= \frac{-33000\angle 120^\circ}{150\angle -30^\circ} \Omega = 220\angle -30^\circ \Omega\end{aligned}\tag{4.31}$$

El correspondiente circuito monofásico obtenido se muestra en figura 4.18:

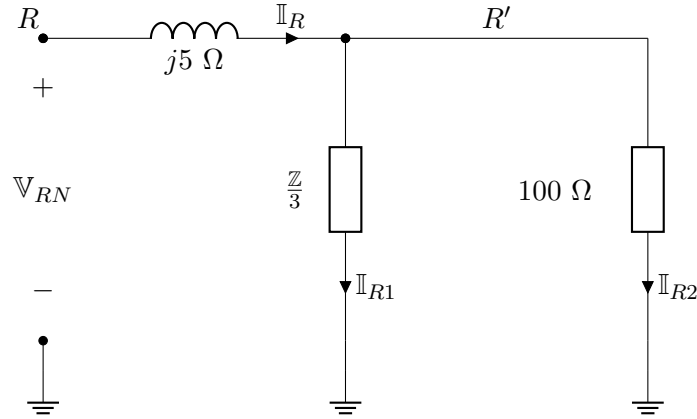


Figura 4.18: Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.5.1.

En la ecuación (4.32) se realizan los correspondientes cálculos para obtener la corriente y tensión del generador en la fase R .

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{R1} &= \frac{\mathbb{V}_{R'N}}{\mathbb{Z}/3} = 259.81\angle 60^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_{R2} &= \frac{\mathbb{V}_{R'N}}{100} = \frac{33000}{100\sqrt{3}}\angle 30^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_R &= \mathbb{I}_{R1} + \mathbb{I}_{R2} = 435.36\angle 47.36^\circ \text{ A} \\ \mathbb{V}_{RN} &= j5\mathbb{I}_R + \mathbb{V}_{R'N} = 18.52\angle 36.44^\circ \text{ kV}\end{aligned}\tag{4.32}$$

Aplicando el concepto de Sec(+) en las tensiones y corrientes del generador trifásico equilibrado, se obtienen las ecuaciones (4.33) y (4.34), respectivamente.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{RN} &= 18.52\angle 36.44^\circ \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{SN} &= 18.52\angle (36.44^\circ - 120^\circ) \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{TN} &= 18.52\angle (36.44^\circ + 120^\circ) \text{ kV}\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_R &= 435.36\angle 47.36^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_S &= 435.36\angle (47.36^\circ - 120^\circ) \text{ A} \\ \mathbb{I}_T &= 435.36\angle (47.36^\circ + 120^\circ) \text{ A}\end{aligned}\tag{4.34}$$

4.6. Potencia aparente en sistemas trifásicos

En los sistemas trifásicos, el análisis de la potencia es fundamental para comprender el comportamiento energético de las cargas y determinar la eficiencia del sistema. La potencia aparente, que combina la potencia activa y reactiva, es una métrica que determina la capacidad de transferencia de energía en un sistema trifásico. En esta sección, se estudia la potencia instantánea y la potencia compleja en sistemas trifásicos equilibrados, considerando tanto las tensiones de fase como las corrientes en secuencia positiva. A partir de estas relaciones, se derivan expresiones para la potencia activa, reactiva y aparente, así como su representación en forma compleja. Además, se analizan casos prácticos, como la conexión de bancos de condensadores en estrella y delta, y su impacto en el factor de potencia del sistema.

4.6.1. Potencia instantánea

Considérese el siguiente sistema trifásico balanceado de tres hilos ($3\phi - 3h$), tal como se muestra en la figura 4.19:

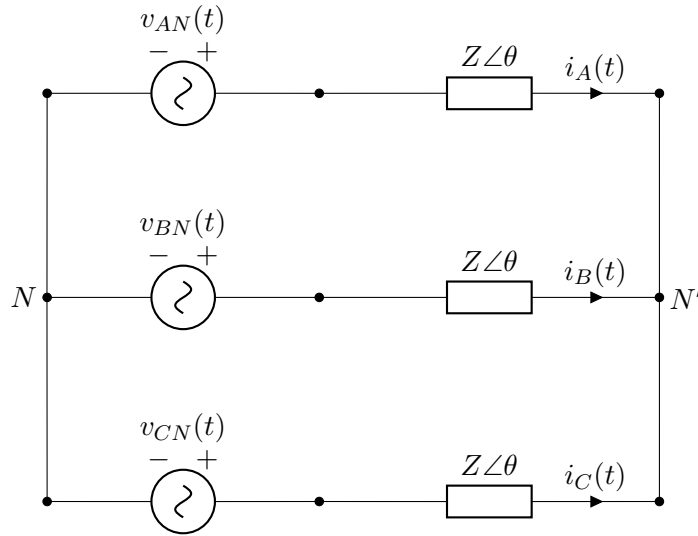


Figura 4.19: Sistema trifásico trifilar.

Asumiendo que las tensiones y corrientes se encuentran en Sec(+), se tiene las siguientes expresiones de la ecuación (4.35):

$$\begin{aligned} v_{AN}(t) &= V_m \cos(\omega t) & i_A(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta) \\ v_{BN}(t) &= V_m \cos(\omega t - 120^\circ) & i_B(t) &= I_m \cos(\omega t - 120^\circ - \theta) \\ v_{CN}(t) &= V_m \cos(\omega t + 120^\circ) & i_C(t) &= I_m \cos(\omega t + 120^\circ - \theta) \end{aligned} \quad (4.35)$$

La potencia activa trifásica instantánea viene dada por la ecuación (4.36):

$$P_{3\phi}(t) = v_{AN}(t) \cdot i_A(t) + v_{BN}(t) \cdot i_B(t) + v_{CN}(t) \cdot i_C(t) \quad (4.36)$$

4.6.2. Potencia compleja

Empleando identidades trigonométricas en la ecuación (4.36) se obtiene la ecuación (4.37):

$$P_{3\phi}(t) = \frac{3V_m \cdot I_m}{2} \cos \theta = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot FP = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_F \cdot \cos \theta \quad (4.37)$$

Donde $FP = \cos \theta$ corresponde al *factor de potencia* de la carga, el cual se puede encontrar en adelanto ($\uparrow$) o en atraso ($\downarrow$), según el signo de su potencia reactiva. Análogamente, se pueden obtener las expresiones para las potencias reactiva y aparente, en conjunto a sus correspondientes unidades, tal como se ilustra en la ecuación (4.38):

$$\begin{aligned} P_{3\phi} &= \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_F \cdot FP & [\text{W, kW, MW}] \\ Q_{3\phi} &= \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_F \cdot \sin \theta & [\text{var, kvar, Mvar}] \\ S_{3\phi} &= \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_F & [\text{VA, kVA, MVA}] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Así mismo, la potencia trifásica aparente compleja se obtiene de forma general en la ecuación (4.39).

$$\mathbb{S}_{3\phi} = \mathbb{V}_{AN} \cdot \mathbb{I}_A^* + \mathbb{V}_{BN} \cdot \mathbb{I}_B^* + \mathbb{V}_{CN} \cdot \mathbb{I}_C^* = P_{3\phi} + jQ_{3\phi} \quad (4.39)$$

Considerando un sistema trifásico equilibrado se tiene que $\mathbb{S}_{3\phi} = 3\mathbb{V}_{AN} \cdot \mathbb{I}_A^*$. Por otro lado, para el caso de sistema trifásico general, es decir, equilibrado o desequilibrado, sin conductor de neutro, es posible calcular la potencia aparente trifásica mediante las tensiones de línea utilizando cualquiera de las expresiones de la ecuación (4.40)².

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{3\phi} &= \mathbb{V}_{AC} \cdot \mathbb{I}_A^* + \mathbb{V}_{BC} \cdot \mathbb{I}_B^* \\ \mathbb{S}_{3\phi} &= \mathbb{V}_{AB} \cdot \mathbb{I}_A^* + \mathbb{V}_{CB} \cdot \mathbb{I}_C^* \\ \mathbb{S}_{3\phi} &= \mathbb{V}_{BA} \cdot \mathbb{I}_B^* + \mathbb{V}_{CA} \cdot \mathbb{I}_C^* \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para un banco de condensadores conectado en estrella o delta, se tienen las siguientes expresiones, en las que se relacionan sus potencias reactivas, tal como se muestra en las ecuaciones (4.41) y (4.42):

$$Q_{3\phi Y} = 3 \frac{V_F^2}{X_C}, \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad (4.41)$$

$$Q_{3\phi \delta} = 3 \frac{V_L^2}{X_C} = 3 \cdot 3 \frac{V_F^2}{X_C} \Rightarrow Q_{3\phi \delta} = 3Q_{3\phi Y} \quad (4.42)$$

²Estas expresiones son utilizadas para la medición de potencia por medio de dos vatímetros, conocida también como *conexión Aron*. Para más detalles, se puede consultar la referencia [28].

4.7. ejemplos de aplicación

Ejemplo 4.7.1.

Si $V_{RN} = \frac{440}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ$ V, $Sec(-)$, $Z_2 = 20 + j30 \Omega$ y la carga trifásica 1 es de 12 kW, $PF = 0.886 \downarrow$, 440 V, hallar la potencia aparente suministrada por la fuente, el PF del generador cuando se le conecta en paralelo un banco de condensadores de $40 \mu\text{F}$ en estrella y en delta para el sistema trifásico de la figura 4.20:

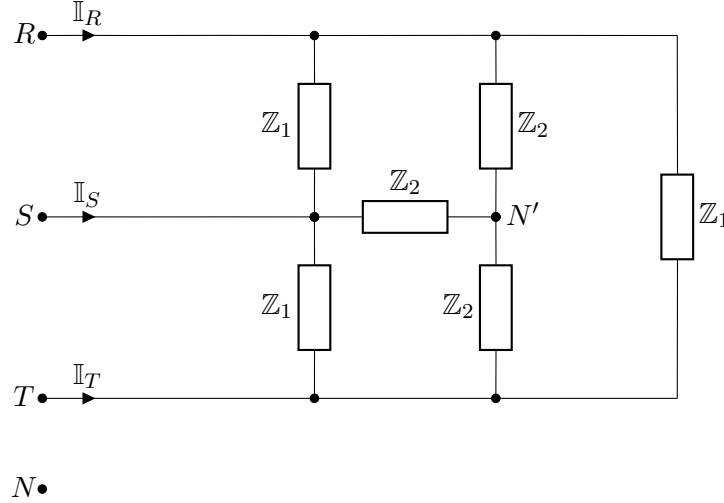


Figura 4.20: Sistema trifásico equilibrado ejemplo 4.7.1.

Solución.

El diagrama fasorial de las tensiones del generador se muestra en la figura 4.21:

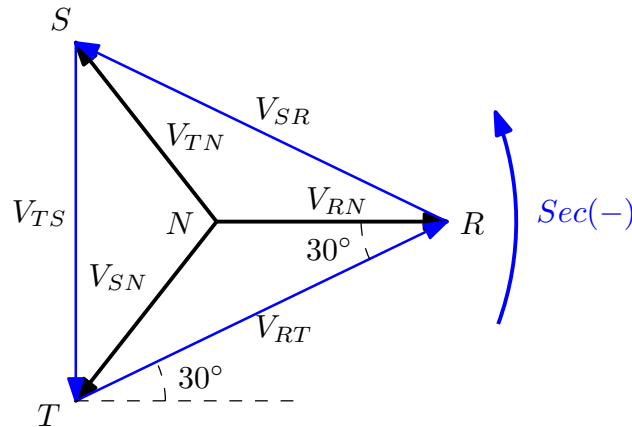


Figura 4.21: Diagrama fasorial de la tensión de línea y de fase para los nodos RST .

El circuito monofásico equivalente se muestra en la figura 4.22:

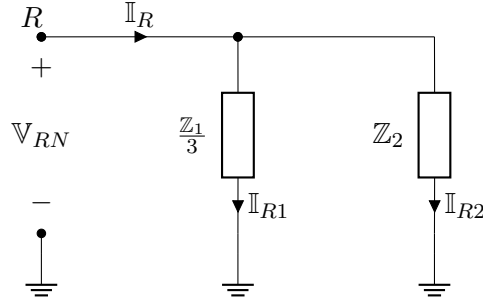


Figura 4.22: Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.7.1.

Los cálculos requeridos para obtener las corrientes $\mathbb{I}_R$, $\mathbb{I}_{R1}$ y $\mathbb{I}_{R2}$ se muestran en las ecuaciones (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) y (4.47).

$$\begin{aligned} P_{3\phi} &= \sqrt{3}V_L \cdot I_L \cdot FP \\ I_L = I_{R1} &= \frac{12000}{\sqrt{3} \cdot 440 \cdot 0.886} \text{ A} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} P_{1\phi} &= V_f \cdot I_L \cdot FP \\ I_L = I_{R1} &= \frac{4000}{\frac{440}{\sqrt{3}} \cdot 0.886} \text{ A} \\ I_{R1} &= 17.17 \text{ A} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{R1} &= 17.17 \angle (0^\circ - \cos^{-1}(0.886)) \text{ A} \\ \mathbb{I}_{R1} &= 17.17 \angle -30^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{R2} &= \frac{V_{RN}}{Z_2} = \frac{440 \angle 0^\circ}{\sqrt{3}(20 + j30)} \text{ A} \\ \mathbb{I}_{R2} &= 7.046 \angle -56.3^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\mathbb{I}_R = \mathbb{I}_{R1} + \mathbb{I}_{R2} = 24.2894 \angle -37.39^\circ \text{ A} \quad (4.47)$$

Considerando $\text{Sec}(-)$ en corrientes, se tiene la ecuación (4.48):

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_R &= 24.2894 \angle -37.39^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_S &= 24.2894 \angle (-37.39^\circ + 120^\circ) \text{ A} \\ \mathbb{I}_T &= 24.2894 \angle (-37.39^\circ - 120^\circ) \text{ A} \end{aligned} \quad (4.48)$$

La potencia suministrada por la fuente trifásica y su FP se muestra en la Ecuación (4.49):

$$\begin{aligned} S_{3\phi} &= V_{AN} \cdot \mathbb{I}_A^* + V_{BN} \cdot \mathbb{I}_B^* + V_{CN} \cdot \mathbb{I}_C^* \\ S_{3\phi} &= 3V_{AN} \cdot \mathbb{I}_A^* \\ S_{3\phi} &= \mathbb{I}_S^* \cdot V_{SR} + \mathbb{I}_T^* \cdot V_{TR} \\ S_{3\phi} &= 18.511 \angle 37.39^\circ \text{ kVA} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$FP = \cos(37.39^\circ) \downarrow = 0.795 \downarrow$$

Para el dimensionamiento de los bancos de condensadores conectados en Δ y Y , se requiere del cálculo la reactancia capacitiva X_C , tal como se muestra en la ecuación (4.50):

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 40 \times 10^{-6}} \Omega \quad (4.50)$$

$$X_C = 66.31 \Omega$$

Las potencias reactivas para los bancos de condensadores conectados en Y y Δ , se muestran en las ecuaciones (4.51) y (4.52), respectivamente:

$$Q_{3\phi Y} = 3 \frac{V_f^2}{X_C} = 3 \frac{(440/\sqrt{3})^2}{66.31} = 2.92 \text{ kvar}$$

$$\mathbb{S}'_{3\phi} = \mathbb{S}_{3\phi} - j2.92 \text{ kvar} = 16.89 \angle 29.5^\circ \text{ kVA} \quad (4.51)$$

$$FP = \cos(29.5^\circ) \downarrow = 0.8703 \downarrow$$

$$Q_{3\phi \delta} = 3 \frac{V_L^2}{X_C} = 3 \frac{(440)^2}{66.31} = 8.76 \text{ kvar}$$

$$\mathbb{S}''_{3\phi} = \mathbb{S}_{3\phi} - j8.76 \text{ kvar} = 14.92 \angle 9.57^\circ \text{ kVA} \quad (4.52)$$

$$FP = \cos(9.57^\circ) \downarrow = 0.986 \downarrow$$

El correspondiente diagrama de potencias de la fuente trifásica se muestra en la figura 4.23:

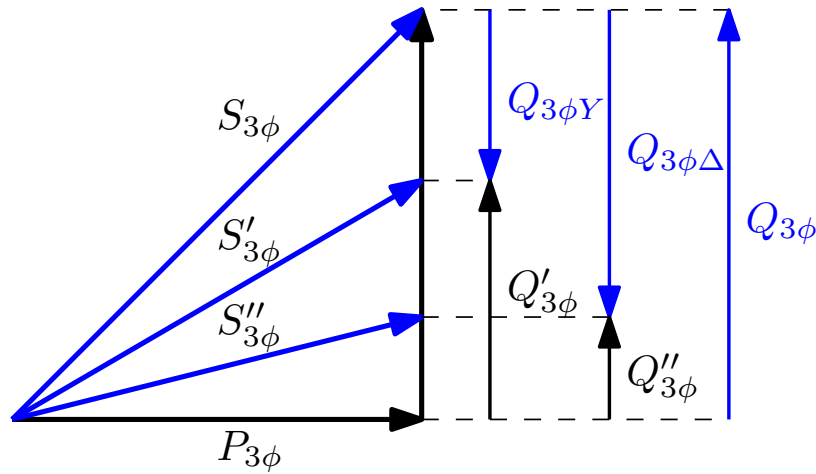


Figura 4.23: Diagrama fasorial de potencias del generador trifásico.

4.8. Sistemas Trifásicos con Desequilibrio

Ejemplo 4.8.1.

Considerar el sistema de la figura 4.24:

1. Hallar I_{xg} , I_{yg} , I_{zg} , $I_{N''}$, $V_{N'N}$, Z , R_x , X .
2. Determinar el banco de condensadores conectado en Δ paralelo al generador, tal que $FP_g = 0.9 \downarrow$.

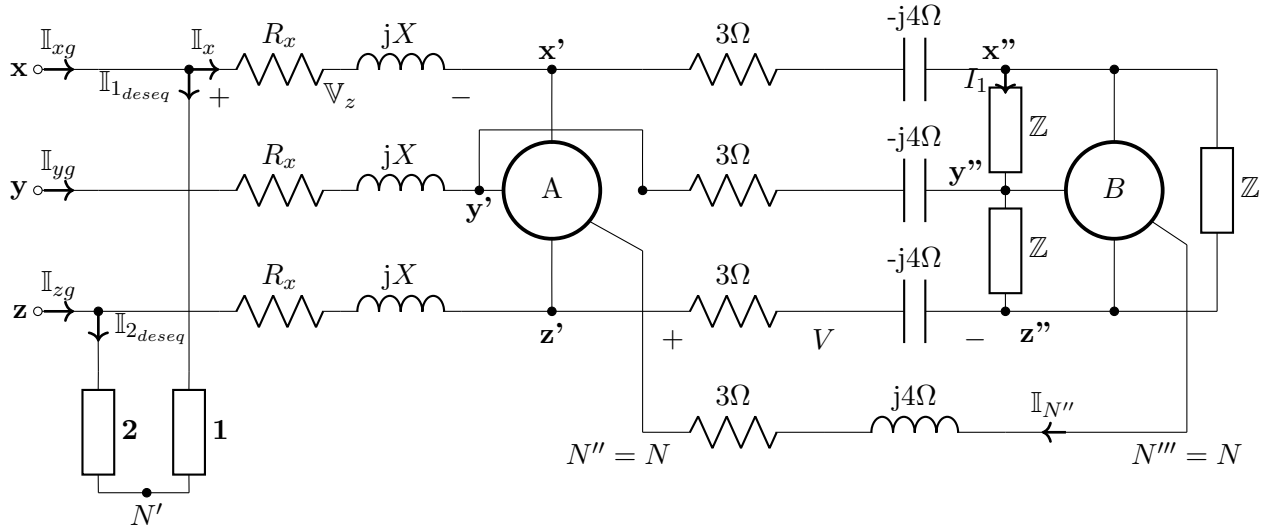


Figura 4.24: Sistema trifásico ejemplo 4.8.1.

Los datos del sistema son los siguientes:

$$V = 440 \text{ V}$$

$$I_1 = 16.4583 \text{ A}$$

$$Z = Z \angle 40^\circ \Omega$$

$$V_{x''N} = V_{x''N} \angle 0^\circ, \text{ Sec}(-)$$

$$\text{Carga A: } 1350 \text{ kW}, FP = 0.8 \downarrow$$

$$\text{Carga B : } 900 \text{ kvar}, FP = 0.6 \downarrow$$

$$\text{Carga 1 : } 350 \text{ kW}, FP = 0.8 \downarrow$$

$$\text{Carga 2 : } 500 \text{ kVA}, FP = 0.707 \downarrow$$

$$S_{3\phi g} = 4.5351 \angle 41.8373^\circ \text{ MVA}$$

Solución.

Como $V_{N''N''} = 0$, se puede remover el conductor neutro por estar conectado a los terminales neutro de dos cargas balanceadas. Además, $I_{N''} = 0$.

El circuito monofásico equivalente para la fase x se muestra en la figura 4.25:

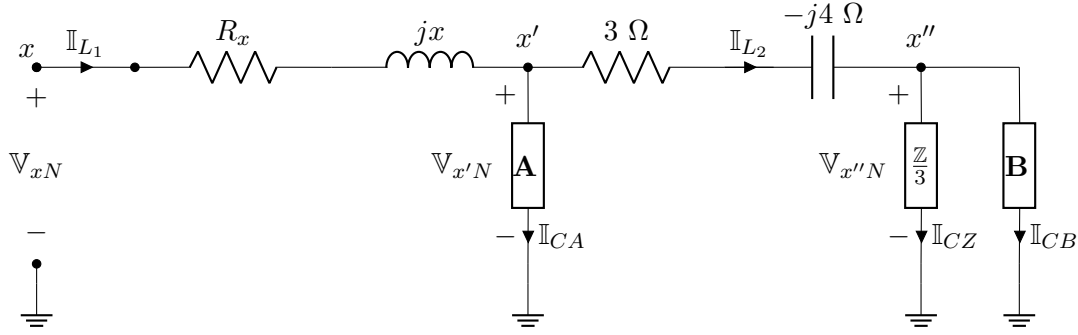


Figura 4.25: Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.8.1.

Se consideran las potencias aparentes, tanto trifásicas como monofásicas en las cargas A y B, las cuales se muestran en las ecuaciones (4.53) y (4.54), respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{A3\phi} &= \frac{1350}{0.8} \angle \cos^{-1}(0.8) \text{ kVA} \\ \mathbb{S}_{A3\phi} &= 1687.5 \angle 36.8698^\circ \text{ kVA} \\ \mathbb{S}_{A1\phi} &= \frac{\mathbb{S}_{A3\phi}}{3} = 562.5 \angle 36.8698^\circ \text{ kVA} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{B3\phi} &= \frac{900}{\sin(\cos^{-1}(0.6))} \angle \cos^{-1}(0.6) \text{ kVA} \\ \mathbb{S}_{B3\phi} &= 1125 \angle 53.13^\circ \text{ kVA} \\ \mathbb{S}_{B1\phi} &= 375 \angle 53.13^\circ \text{ kVA} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Posteriormente, se utiliza la *primera ley de Kirchhoff* en el nodo x'' en la ecuación (4.55) y en el diagrama fasorial de la figura 4.26. La solución se obtiene aplicando *ley de cosenos* de la ecuación (4.56) y se obtiene en la ecuación (4.57).

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{L2} &= \mathbb{I}_{CZ} + \mathbb{I}_{CB} \\ \frac{440}{\sqrt{3^2+4^2}} \angle \alpha &= 88 \angle \alpha = 28.5066 \angle -40^\circ + I_{CB} \angle -53.13^\circ \\ \mathbb{I}_{L2} &= 88 \angle -48.9094^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad (4.55)$$

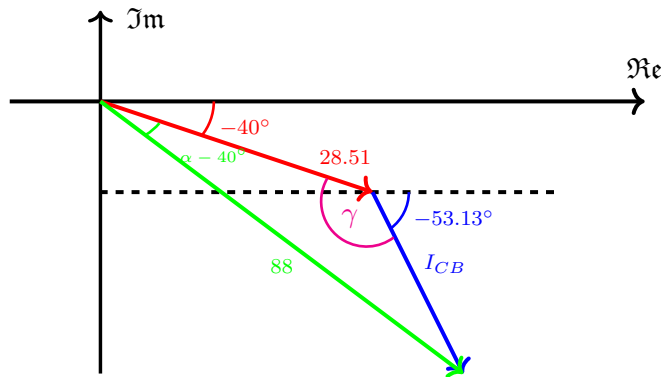


Figura 4.26: Diagrama fasorial de la *primera ley de Kirchhoff* en el nodo x'' del ejemplo 4.8.1.

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - 53.13^\circ + 40^\circ = 166.87^\circ \\ 88^2 &= 28.5066^2 + I_{CB}^2 - 2 \cdot 28.5066 \cdot I_{CB} \cdot \cos(166.87^\circ)\end{aligned}\quad (4.56)$$

$$I_{CB} = \begin{cases} 60 \text{ A} & \checkmark \\ -115.5227 \text{ A} & \times \end{cases}\quad (4.57)$$

Con el valor seleccionado para I_{CB} , se determina el ángulo α en la ecuación (4.58), considerando el diagrama fasorial de la figura 4.26.

$$\begin{aligned}60^2 &= 88^2 + 28.5066^2 - 2 \cdot 88 \cdot 28.5066 \cdot \cos(\alpha - 40^\circ) \\ \alpha &= -48.9094^\circ\end{aligned}\quad (4.58)$$

Posteriormente, se obtiene la potencia monofásica de la carga B en la ecuación (4.59), se aplica posteriormente la *segunda ley de Kirchoff* en la ecuación (4.60).

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{B1\phi} &= \mathbb{V}_{x''N} \cdot \mathbb{I}_B^* \\ \mathbb{V}_{x''N} &= \frac{\mathbb{S}_{B1\phi}}{\mathbb{I}_{CB}^*} \\ \mathbb{V}_{x''N} &= 6250 \angle 0^\circ \text{ V}\end{aligned}\quad (4.59)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{x'N} &= (3 - 4j) \cdot \mathbb{I}_{L2} + \mathbb{V}_{x''N} \\ \mathbb{V}_{x'N} &= 6173.2349 \angle 3.9971^\circ \text{ V}\end{aligned}\quad (4.60)$$

La corriente que circula por el equivalente monofásico de la carga A y la corriente total de la fase A se obtienen mediante la ecuación (4.61) y (4.62), respectivamente.

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{A1\phi} &= \mathbb{V}_{x'N} \cdot \mathbb{I}_{CA}^* \\ \mathbb{I}_{CA} &= \left(\frac{\mathbb{S}_{A1\phi}}{\mathbb{V}_{x'N}} \right)^* \\ \mathbb{I}_{CA} &= 91.1192 \angle -40.808669^\circ \text{ A}\end{aligned}\quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{L1} &= \mathbb{I}_{CA} + \mathbb{I}_{L2} \\ \mathbb{I}_{L1} &= 178.6803 \angle -44.8189^\circ \text{ A}\end{aligned}\quad (4.62)$$

La impedancia $\mathbb{Z}$, viene dada por la ecuación (4.63):

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{Z}}{3} &= \frac{\mathbb{V}_{x''N}}{\mathbb{I}_{CZ}} \\ \mathbb{Z} &= 3 \cdot \frac{\mathbb{V}_{x''N}}{\mathbb{I}_{CZ}}\end{aligned}\quad (4.63)$$

$$\mathbb{Z} = 657.7424 \angle 40^\circ \Omega$$

Se determina la potencia trifásica desequilibrada del sistema, posteriormente se obtiene la potencia trifásica equilibrada para obtener la tensión de fase del generador $\mathbb{V}_{xN}$ en las ecuaciones (4.64), (4.65) y (4.66), respectivamente:

$$\mathbb{S}_{Desequilibrio} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

$$\mathbb{S}_1 = \frac{350}{0.8} \angle \cos^{-1}(0.8) = 437.5 \angle 36.8698^\circ \text{ kVA}\quad (4.64)$$

$$\mathbb{S}_2 = 500 \angle \cos^{-1}(0.707) = 500 \angle 45^\circ \text{ kVA}$$

$$\mathbb{S}_{Desequilibrio} = 437.5 \angle 36.8698^\circ + 500 \angle 45^\circ = 935.1518 \angle 41.2063^\circ \text{ kVA}$$

$$\begin{aligned}
S_{3\phi g} &= S_{3\phi equilibrada} + S_{3\phi desequilibrada} \\
S_{3\phi equilibrada} &= S_{3\phi g} - S_{3\phi desequilibrada} \\
S_{3\phi equilibrada} &= 4.5351\angle 41.8373^\circ \text{ MVA} - 935.1518\angle 41.2063^\circ \text{ kVA} \\
S_{3\phi equilibrada} &= 3.6\angle 42^\circ \text{ MVA}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
S_{1\phi equilibrada} &= \frac{S_{3\phi equilibrada}}{3} \\
S_{1\phi equilibrada} &= 1.2\angle 42^\circ \text{ MVA} \\
S_{1\phi equilibrada} &= V_{xN} \cdot I_{L1}^* \\
V_{xN} &= \frac{S_{1\phi equilibrada}}{I_{L1}^*} = 6715.9054\angle -2.8279^\circ \text{ V}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

La tensión de la impedancia serie $R_x + jX$, se obtiene en la ecuación (4.67), donde sus correspondientes parámetros se obtienen en (4.68):

$$\begin{aligned}
V_{xN} &= V_Z + V_{xN'} \\
V_Z &= V_{xN} - V_{xN'} \\
V_Z &= 6715.9054\angle -2.8279^\circ \text{ V} - 6173.2349\angle -3.9971^\circ \text{ V} \\
V_Z &= 558.3475\angle 10.2092^\circ \text{ V}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
R_x + jX &= \frac{V_Z}{I_{L1}} = (1.7907 + j2.5608) \Omega \\
R_x &= 1.7907 \Omega \\
X &= 2.5608 \Omega
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Se determina el voltaje V_{zN} empleando el concepto de Sec(-) de la ecuación (4.69). Posteriormente, se determinan las corrientes de las cargas desequilibradas en las ecuaciones (4.70) y (4.71).

$$\begin{aligned}
V_{xN} &= 6715.9054\angle -2.8279^\circ \text{ V} \\
V_{zN} &= 6715.9054\angle (-2.8279^\circ - 120^\circ) \text{ V}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$S_{deseq} = V_{xZ} \cdot I_{2deseq}^* = \frac{S_{deseq}}{V_{xZ}} \cdot I_{2deseq} = \frac{935.1518 \text{ kVA} \angle 41.20^\circ}{(6715.9054\angle -2.8279^\circ) \text{ V} - (6715.9054\angle -122.8279^\circ) \text{ V}} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
I_{1deseq} &= -I_{2deseq} \\
I_{1deseq} &= 80.3927\angle -14.0294^\circ \text{ A} \\
I_{2deseq} &= 80.3927\angle 165.971^\circ \text{ A}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Las corrientes del sistema trifásico equilibrado equivalente, se muestran en la ecuación (4.72):

$$\begin{aligned}
I_{L1x} &= 178.6802\angle -44.8279^\circ \text{ A} \\
I_{L1y} &= 178.6802\angle (-44.8279^\circ + 120^\circ) \text{ A} \\
I_{L1z} &= 178.6802\angle (-44.8279^\circ - 120^\circ) \text{ A}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Las corrientes del generador se muestran en la ecuación (4.73):

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{xg} &= \mathbb{I}_{1deseq} + \mathbb{I}_{L1x} \\
\mathbb{I}_{xg} &= 251.1318 \angle -35.394^\circ \text{ A} \\
\mathbb{I}_{yg} &= \mathbb{I}_{L1y} \\
\mathbb{I}_{yg} &= 178.6802 \angle (-44.8279^\circ + 120^\circ) \text{ A} \\
\mathbb{I}_{zg} &= \mathbb{I}_{2deseq} + \mathbb{I}_{L1z} \\
\mathbb{I}_{zg} &= 251.9872 \angle -173.7844^\circ \text{ A}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Se obtienen las impedancias del desequilibrio $\mathbb{Z}_1$ y $\mathbb{Z}_2$, mediante las ecuaciones (4.74) y (4.75), respectivamente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_1 &= \frac{\mathbb{S}_1}{|\mathbb{I}_{1deseq}|^2} \\
\mathbb{Z}_1 &= \frac{350000 \angle \cos^{-1}(0.8)}{(80.3927)^2} \Omega \\
\mathbb{Z}_1 &= 67.6931 \angle 36.8698^\circ \Omega
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_2 &= \frac{\mathbb{S}_2}{|\mathbb{I}_{2deseq}|^2} \\
\mathbb{Z}_2 &= \frac{500000 \angle 45^\circ}{(80.3927)^2} \Omega \\
\mathbb{Z}_2 &= 77.3636 \angle 45^\circ \Omega
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Aplicando *teorema de Millman*, se obtiene la tensión $\mathbb{V}_{N'N}$ mediante la ecuación (4.76):

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{N'N} &= \frac{\frac{1}{\mathbb{Z}_1} \cdot \mathbb{V}_{xN} + 0 + \frac{1}{\mathbb{Z}_2} \cdot \mathbb{V}_{zN}}{\frac{1}{\mathbb{Z}_1} + 0 + \frac{1}{\mathbb{Z}_2}} \\
\mathbb{V}_{N'N} &= 2972.1129 \angle -55.2936^\circ \text{ V}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

A partir de la potencia trifásica generada de la ecuación (4.77), se obtiene el banco de condensadores conectado en Δ , tal que $FP_g = 0.9 \downarrow$ en la ecuación (4.78), cuyo diagrama de potencias correspondiente se muestra en la figura 4.27.

$$\mathbb{S}_{3\phi g} = 4.5351 \angle 41.8373^\circ \text{ MVA} \tag{4.77}$$

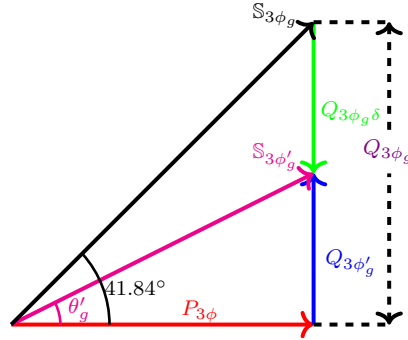


Figura 4.27: Diagrama de potencias trifásicas del generador del ejemplo 4.8.1.

$$\begin{aligned}
\theta_{g'} &= \cos^{-1}(0.9) = 25.84^\circ \\
Q_{3\phi \delta} + Q_{3\phi g'} &= Q_{3\phi g} \\
Q_{3\phi \delta} &= Q_{3\phi g} - P_{3\phi g} \cdot \tan \theta_{g'} \\
\mathbb{S}_{3\phi g} &= P_{3\phi g} + jQ_{3\phi g} \\
\mathbb{S}_{3\phi g} &= (3.378839 + j3.024991) \text{ MVA}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Ejemplo 4.8.2.

Hallar en el sistema de la figura 4.28 $\mathbb{I}_{Rg}, \mathbb{I}_{Sg}, \mathbb{I}_{Tg}, \mathbb{V}_{RN}, \mathbb{V}_{SN}, \mathbb{V}_{TN}, \mathbb{V}_{R'N}$.

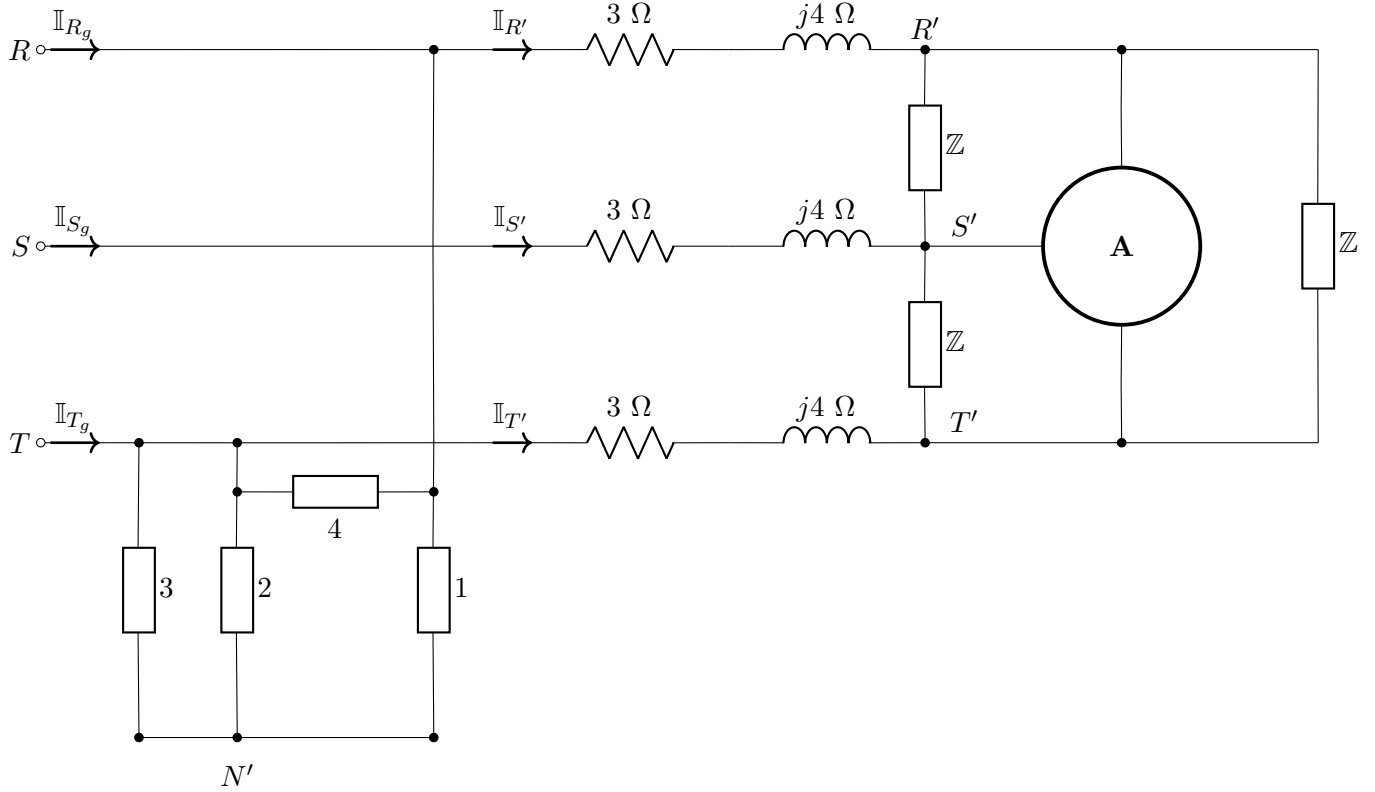


Figura 4.28: Sistema trifásico ejemplo 4.8.2.

Datos:

$$\mathbb{Z} = 600 \angle 50^\circ \Omega$$

$$\mathbb{S}_{3\phi g} = 3.9152 \angle 36.9930^\circ \text{ MVA}$$

$$\mathbb{V}_{R'T'} = V \angle 0^\circ, \text{ sec } (-)$$

$$\mathbb{I}_{R'} = 125.5428 \text{ A}$$

Carga 1: 400 kvar, $FP = 0.7 \uparrow$

Carga 2: 300 kW, $FP = 0.8 \downarrow$

Carga 4: $200 \angle -30^\circ \text{ kVA}$

Carga 3ϕ equilibrada A: 1.2 MVA, $FP = 0.6 \downarrow$

Solución.

En la figura 4.29 se muestra el circuito equivalente monofásico:

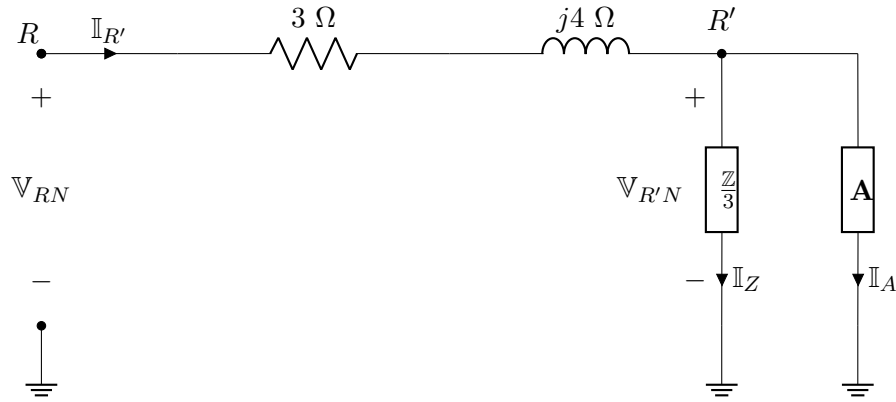


Figura 4.29: Circuito equivalente monofásico del ejemplo 4.8.2.

La corriente $\mathbb{I}_A$ monofásica se calcula en la ecuación (4.79):

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_A^* &= \frac{S_{1\phi A}}{V_{R'N}} = \frac{\frac{1200000}{3 \cdot 0.6} \angle \cos^{-1}(0.6)}{\frac{V}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ} \text{ A} \\ \mathbb{I}_A &= \frac{1154700.538}{V} \angle -83.13^\circ \text{ A}\end{aligned}\tag{4.79}$$

La corriente $\mathbb{I}_Z$ que circula por la impedancia $\mathbb{Z}/3$ se muestra en la ecuación (4.80):

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_Z &= \frac{V_{R'N}}{\frac{\mathbb{Z}}{3}} = \frac{\frac{V}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}{200 \angle 50^\circ} \text{ A} \\ \mathbb{I}_Z &= \frac{V}{200 \cdot \sqrt{3}} \angle -80^\circ \text{ A}\end{aligned}\tag{4.80}$$

A partir de la sumatoria de corrientes en el nodo R' que se muestra en la ecuación (4.81), se obtiene el diagrama fasorial de la figura 4.30 en función de la magnitud del voltaje V :

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{R'} &= 125.5428 \angle \delta \\ \mathbb{I}_{R'} &= \mathbb{I}_Z + \mathbb{I}_A \\ 125.5428 \angle \delta &= \frac{V}{200\sqrt{3}} \angle -80^\circ + \frac{1154700.538}{V} \angle -83.13^\circ \\ 125.5428 \angle \delta &= \frac{V^2}{200\sqrt{3}} \angle -80^\circ + 1154700.538 \angle -83.13^\circ\end{aligned}\tag{4.81}$$

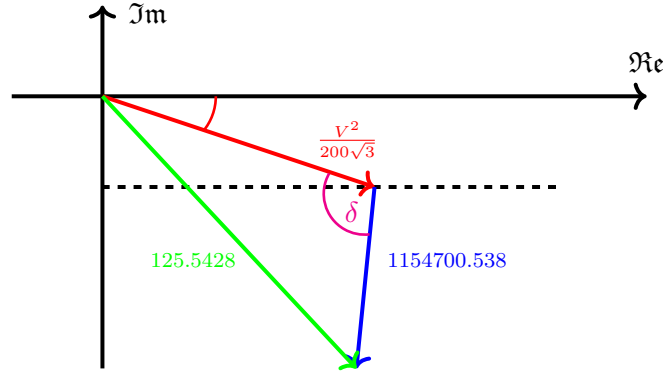


Figura 4.30: Diagrama fasorial de la *primera ley de Kirchoff* en el nodo R' del ejemplo 4.8.2.

Donde el ángulo δ del diagrama fasorial viene dado por la ecuación (4.82):

$$\delta = 80^\circ + (180^\circ - 83.13^\circ) = 176.87^\circ \quad (4.82)$$

Aplicando *ley de cosenos*, se obtiene la ecuación (4.83), que corresponde a una expresión de cuarto grado en V :

$$(125.5428)^2 = \left(\frac{V^2}{200\sqrt{3}}\right)^2 + (1154700.538)^2 - 2 \left(\frac{V^2}{200\sqrt{3}}\right) (1154700.538) \cos \delta \quad (4.83)$$

La soluciones se muestran en la ecuación (4.84):

$$V = \begin{cases} 13200 \text{ V} & \checkmark \\ -13200 \text{ V} & \times \\ -30303 \text{ V} & \times \\ 30303 \text{ V} & \checkmark \end{cases} \quad (4.84)$$

Seleccionando la respuesta positiva de $V = 30303 \text{ V}$, se calcula la potencia aparente consmida por la carga monofásica y trifásica $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_{3\phi}$ en la ecuación (4.85):

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_Z &= \mathbb{V}_{R'N} \cdot \mathbb{I}_Z^* \\ \mathbb{S}_Z &= \left(\frac{30303}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ\right) \cdot \left(\frac{30303}{200\sqrt{3}} \angle -80^\circ\right)^* \text{ VA} \\ \mathbb{S}_Z &= 1.5304 \angle 50^\circ \text{ MVA} \\ \mathbb{S}_{Z3\phi} &= 4.5913 \angle 50^\circ \text{ MVA} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Como puede observarse, la potencia aparente $\mathbb{S}_{Z3\phi}$ que se obtuvo es mayor a la del generador $\mathbb{S}_{3\phi g}$ y, por lo tanto, se descarta $V = 30303 \text{ V}$.

Si se selecciona $V = 13200 \text{ V}$, se obtiene la corriente de fase $\mathbb{I}_{R'}$ en la ecuación (4.86):

$$\begin{aligned} V &= 13200 \text{ V} \\ \delta &= -82.18^\circ \\ \mathbb{V}_{R'T'} &= 13200 \angle 0^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{R'N} &= 7621.023 \angle -30^\circ \text{ V} \\ \mathbb{I}_{R'} &= 125.5428 \angle -82.18^\circ \text{ V} \end{aligned} \quad (4.86)$$

A partir de la sumatoria de voltajes en el equivalente monofásico, se obtienen las tensiones de la fuente y las corrientes de fase equilibradas, consierando $\sec(-)$, tal como se muestra en las ecuaciones (4.87) y (4.88):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{RN} &= (3 + 4j) \cdot \mathbb{I}_{R'} + \mathbb{V}_{R'N} \\ \mathbb{V}_{RN} &= 8248.6574 \angle -30^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{TN} &= 8248.6574 \angle -150^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{SN} &= 8248.6574 \angle 90^\circ \text{ V}\end{aligned}\tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{R'N} &= 8248.6574 \angle -29.93^\circ \text{ V} \\ \mathbb{I}_{R'} &= 125.5428 \angle -82.18^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_{T'} &= 125.5428 \angle 157.82^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_{S'} &= 125.5428 \angle 37.82^\circ \text{ A}\end{aligned}\tag{4.88}$$

Se obtiene la potencia trifásica de desequilibrio $\mathbb{S}_{3\phi\text{desequilibrada}}$ en la ecuación (4.89):

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{3\phi\text{equilibrada}} &= \mathbb{V}_{RN} \cdot \mathbb{I}_{R'}^* + \mathbb{V}_{TN} \cdot \mathbb{I}_{T'}^* + \mathbb{V}_{SN} \cdot \mathbb{I}_{S'}^* \\ \mathbb{S}_{3\phi\text{equilibrada}} &= 3.1067 \angle 52.18^\circ \text{ MVA} \\ \mathbb{S}_{3\phi g} &= \mathbb{S}_{3\phi\text{equilibrada}} + \mathbb{S}_{3\phi\text{desequilibrada}} \\ \mathbb{S}_{3\phi\text{desequilibrada}} &= \mathbb{S}_{3\phi g} - \mathbb{S}_{3\phi\text{equilibrada}} \\ \mathbb{S}_{3\phi\text{desequilibrada}} &= 1.2260 \angle -4.596^\circ \text{ MVA}\end{aligned}\tag{4.89}$$

La potencia desequilibrada $\mathbb{S}_3$ se obtiene en la ecuación (4.90):

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{3\phi\text{desequilibrada}} &= \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_4 \\ \mathbb{S}_3 &= \mathbb{S}_{3\phi\text{desequilibrada}} - \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_4 \\ \mathbb{S}_1 &= \frac{400}{\text{sen}(\cos^{-1}(0.7))} \angle -\cos^{-1}(0.7) \text{ kVA} \\ \mathbb{S}_2 &= \frac{300}{0.8} \angle -\cos^{-1}(0.8) \text{ kVA} \\ \mathbb{S}_4 &= 200 \angle -30^\circ \text{ kVA} \\ \mathbb{S}_3 &= 398.2333 \angle 26.348^\circ \text{ kVA}\end{aligned}\tag{4.90}$$

A partir de las tensiones de fase $\mathbb{V}_{RN}$, $\mathbb{V}_{SN}$ y $\mathbb{V}_{TN}$, se obtienen las correspondientes tensiones de línea $\mathbb{V}_{RT}$, $\mathbb{V}_{ST}$ y $\mathbb{V}_{TS}$, tal como se muestra en la ecuación (4.91):

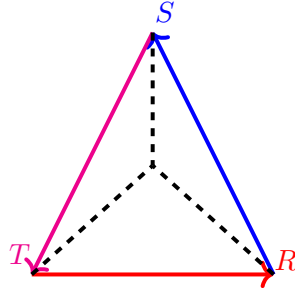


Figura 4.31: Diagrama fasorial correspondiente a $\sec(-)$ para tensiones de línea y fase en el generador del ejemplo 4.8.2.

A partir de la figura 4.31, se obtienen las tensiones de fase de la ecuación (4.91):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{RT} &= 14.287 \angle 0^\circ \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{SR} &= 14.287 \angle 120^\circ \text{ kV} \\ \mathbb{V}_{TS} &= 14.287 \angle -120^\circ \text{ kV}\end{aligned}\tag{4.91}$$

Las corriente obtenida en la carga desequilibrada 1 de la figura 4.32 se muestra en la ecuación (4.92):

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_4^* &= \frac{\mathbb{S}_4}{\mathbb{V}_{RT}} = \frac{200 \angle -30^\circ \text{ kVA}}{14.287 \angle 0^\circ \text{ kV}} \\ \mathbb{I}_4 &= 14 \angle 30^\circ \text{ A}\end{aligned}\tag{4.92}$$

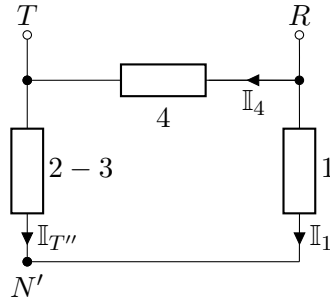


Figura 4.32: Carga trifásica desequilibrada conectada en paralelo con el generador.

Finalmente, se obtienen las corrientes del generador $\mathbb{I}_{Sg}$, $\mathbb{I}_{Rg}$, $\mathbb{I}_{Tg}$ y la tensión $\mathbb{V}_{R'N}$, considerando las cargas 2 y 3 en paralelo en las ecuaciones (4.93) y (4.94):

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{RT} &= \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_{23} \\ \mathbb{V}_{RT} &= \frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{I}_1^*} + \frac{\mathbb{S}_{23}}{\mathbb{I}_1^*} \\ \mathbb{I}_1^* &= \frac{\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_{23}}{\mathbb{V}_{RT}} \\ \mathbb{S}_{23} &= \mathbb{S}_3 \\ \mathbb{I}_1 &= 73.4191 \angle 0^\circ \text{ A}\end{aligned}\tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{R''} &= \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_4 \\ \mathbb{I}_{R''} &= 85.839 \angle 4.7591^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_{Rg} &= \mathbb{I}_{R'} + \mathbb{I}_{R''} \\ \mathbb{I}_{Rg} &= 155.821 \angle -48.81^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_{Tg} &= 205.775 \angle 168.71^\circ \text{ A} \\ \mathbb{I}_{Sg} &= 125.5428 \angle 37.82^\circ \text{ A} \\ \mathbb{V}_{R'N} &= 7621.023 \angle -30^\circ \text{ V}\end{aligned}\tag{4.94}$$

4.9. Ejercicios propuestos

1. Veáse el circuito trifásico de la figura 4.33.

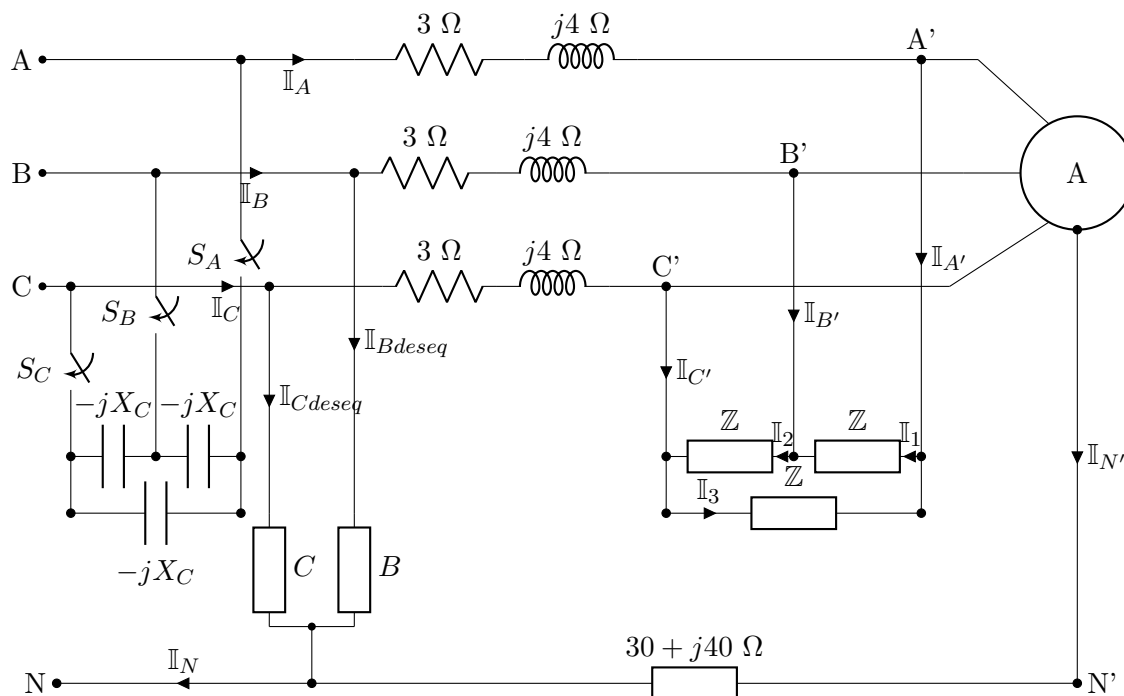


Figura 4.33: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 1.

Datos:

$$\mathbb{V}_{A'B'} = 10 \angle 0^\circ, \text{ sec}(+)$$

A: carga 3ϕ equilibrada, 60 kVA, $FP = 0.868 \downarrow$

B: 10 kW, $FP = 0.5 \downarrow$

C: 5 kVA, $FP = 0.866 \downarrow$

$$Z = 600 \angle 20^\circ \Omega$$

a. Hallar $\mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_B$, $\mathbb{I}_C$, e $\mathbb{I}_N$, con S_A , S_B y S_C abiertos.

Respuesta: $\mathbb{I}_A = 32.28 \angle -51.06^\circ \text{ A}$, $\mathbb{I}_B = 35 \angle -174.4^\circ \text{ A}$

Respuesta: $\mathbb{I}_C = 33.118 \angle 68.77^\circ$ A, $\mathbb{I}_N = 3.48 \angle 136.7^\circ$ A

b. Hallar la potencia aparente entregada por el generador y el FP_g , indicando si es en adelanto o en atraso, con S_A , S_B y S_c abiertos.

Respuesta: $S_{3\phi q} = 593.29 \angle 23.15^\circ$ kVA, $FP_q = 0.9195 \downarrow$

c. Si S_A , S_B y S_C se cierran, hallar C tal que $FP_q = 0.95 \downarrow$.

Respuesta: $C = 454.9 \text{ nF}$

2. Véase el circuito trifásico de la figura 4.34.

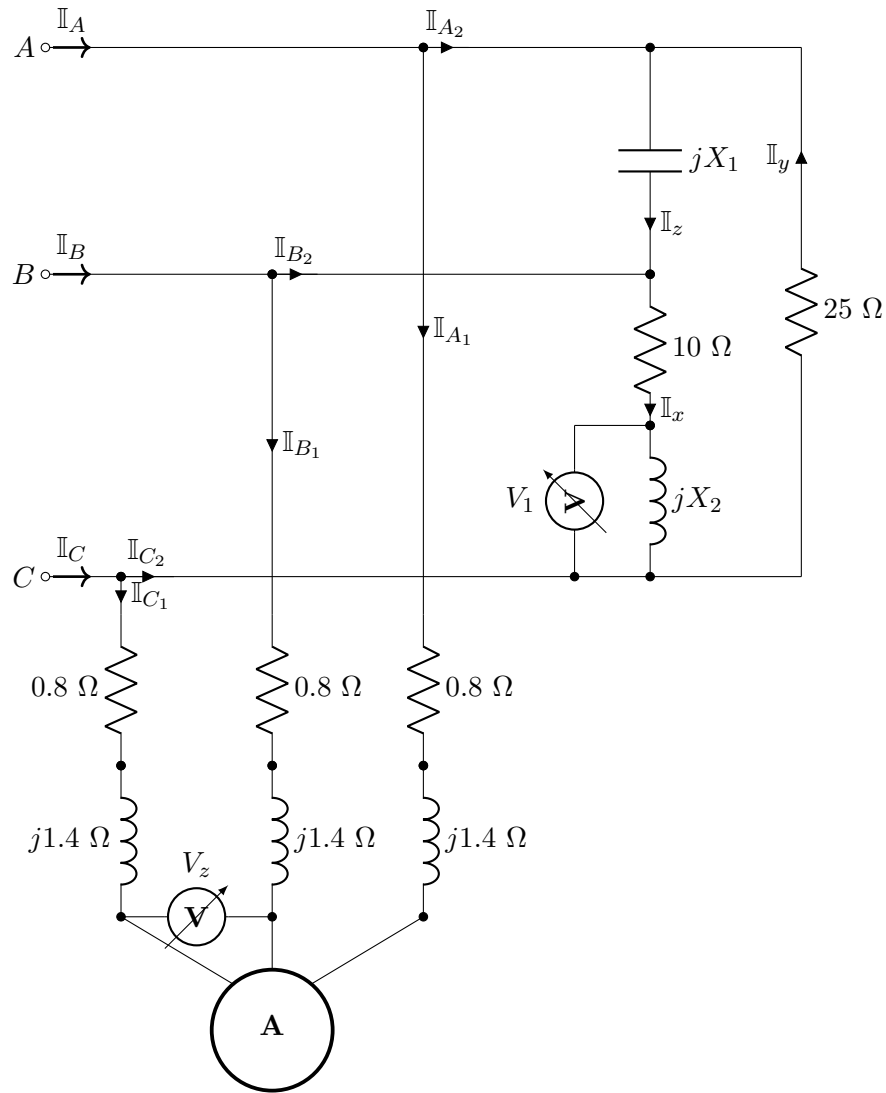


Figura 4.34: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 2.

Datos:

$$\mathbb{V}_{AB} = 440\angle 0^\circ, \text{ sec}(+)$$

$$V_1 = 250 \text{ V}$$

$$I_{B2} = 50 \text{ A}$$

Carga trifásica equilibrada A: 24 kW, $FP = 0.9 \downarrow$

Hallar $\mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_B$, $\mathbb{I}_C$, V_Z , X_1 , X_2 .

$$\text{Respuesta: } \mathbb{I}_A = 47.5\angle -65.65^\circ \text{ A}, \mathbb{I}_B = 86\angle 54^\circ \text{ A}, \mathbb{I}_C = 89\angle 15^\circ \text{ A}$$

$$\text{Respuesta: } V_Z = 324.21 \text{ V}, X_1 = 4.82 \Omega, X_2 = 6.90 \Omega$$

3. Véase el circuito trifásico de la figura 4.35.

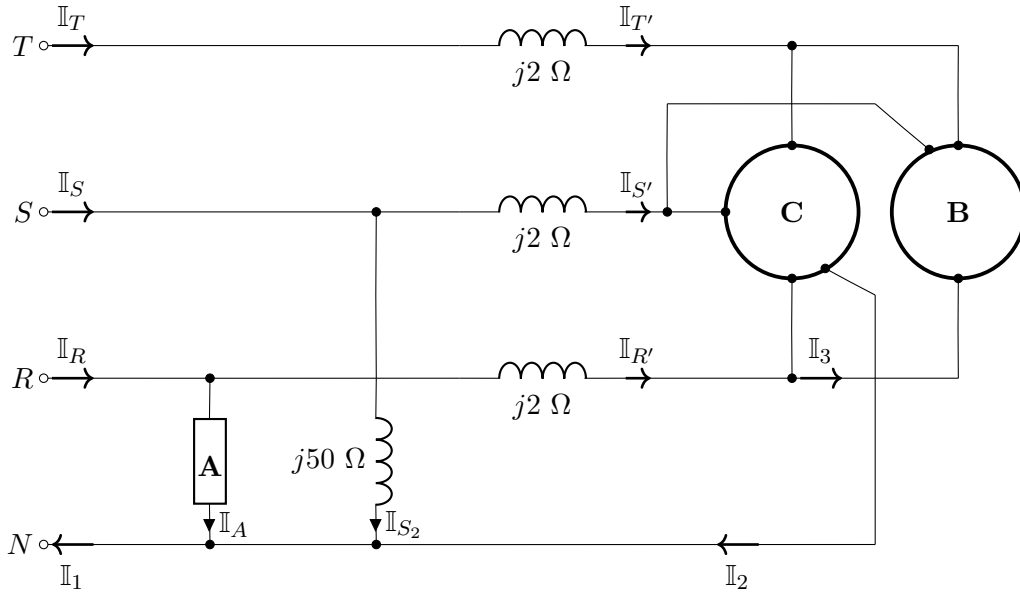


Figura 4.35: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 3.

Datos:

A: 2 kW, $FP = 0.5 \downarrow$

B: carga 3ϕ equilibrada conectada en Δ , consta de tres impedancias de $48.4\angle 30^\circ \Omega$

C: 6 kW, $FP = 0.866 \uparrow$
$$\mathbb{I}_3 = 9.3 \angle 60^\circ \text{ A}$$

En las terminales TSR se aplican tensiones balanceadas de secuencia positiva.

a. Hallar $\mathbb{I}_T, \mathbb{V}_{TS}, \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$.

Respuesta: $\mathbb{I}_T = 21.60 \angle 140.89^\circ$ A, $\mathbb{V}_{TS} = 446.84 \angle 129.54^\circ$ V

Respuesta: $\mathbb{I}_1 = 11.33 \angle -33.61^\circ \text{ A}$, $\mathbb{I}_2 = 0 \text{ A}$

b. Hallar la corriente externa $\mathbb{I}_{\delta T}$ y la potencia compleja de un banco de condensadores conetados en Δ , en paralelo con la fuente, para que el FP_g sea 0.95 $\downarrow$.

Respuesta: $\mathbb{I}_{\delta T} = 15.39 \angle -110.46^\circ$ A, $\mathbb{S}_{\delta 3\phi} = -4.97j$ kVA

c. Si N' se desconecta de N ($I_1 = 0$ A), ¿cuál es la tensión en la carga A?

Respuesta: $V_A = V_{R_N'} = 344.02 \angle 62.18^\circ \text{ V}$

4. Véase el circuito trifásico de la figura 4.36.

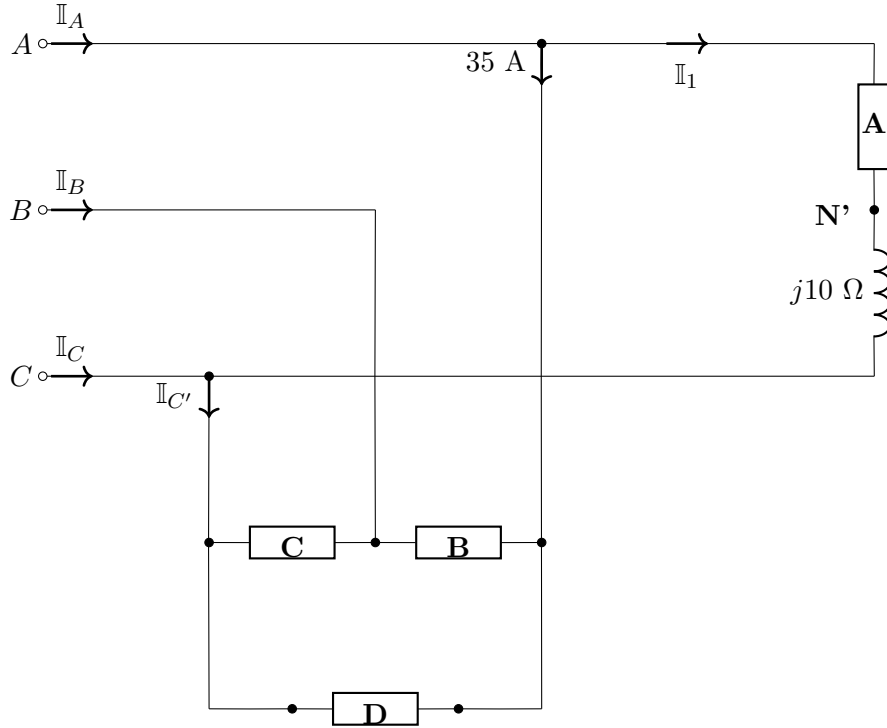


Figura 4.36: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 4.

Datos:

$$\mathbb{V}_{AC} = 440\angle 0^\circ, \text{ Sec (+)}$$

$$\text{A: } 4.84 \text{ kW}, FP = 0.8 \downarrow$$

$$\text{B: } 6 \text{ kW}, FP \downarrow$$

$$\text{C: } 6 \text{ kW}, FP \downarrow$$

$$\text{D: } 6 \text{ kW}, FP \downarrow$$

a. Hallar $\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B, \mathbb{I}_C, \mathbb{I}_1, \mathbb{V}_{N'N}, FP_g$.

$$\text{Respuesta: } \mathbb{I}_A = 55\angle -36.27^\circ \text{ A}, \mathbb{I}_B = 35\angle -137.55^\circ \text{ A}, \mathbb{I}_C = 59\angle 108.25^\circ \text{ A}$$

$$\text{Respuesta: } \mathbb{I}_1 = 24.59\angle -63.43^\circ \text{ A}, \mathbb{V}_{N'N} = 236\angle 90.13^\circ \text{ V}, FP_g = 0.6138 \downarrow$$

b. Hallar el valor de la capacitancia de un banco de condensadores 3ϕ conectado en Δ , en paralelo con el generador, tal que corrija el $FP = 0.9 \downarrow$.

$$\text{Respuesta: } C = 27.85 \mu\text{F}$$

5. Véase el circuito trifásico de la figura 4.37.

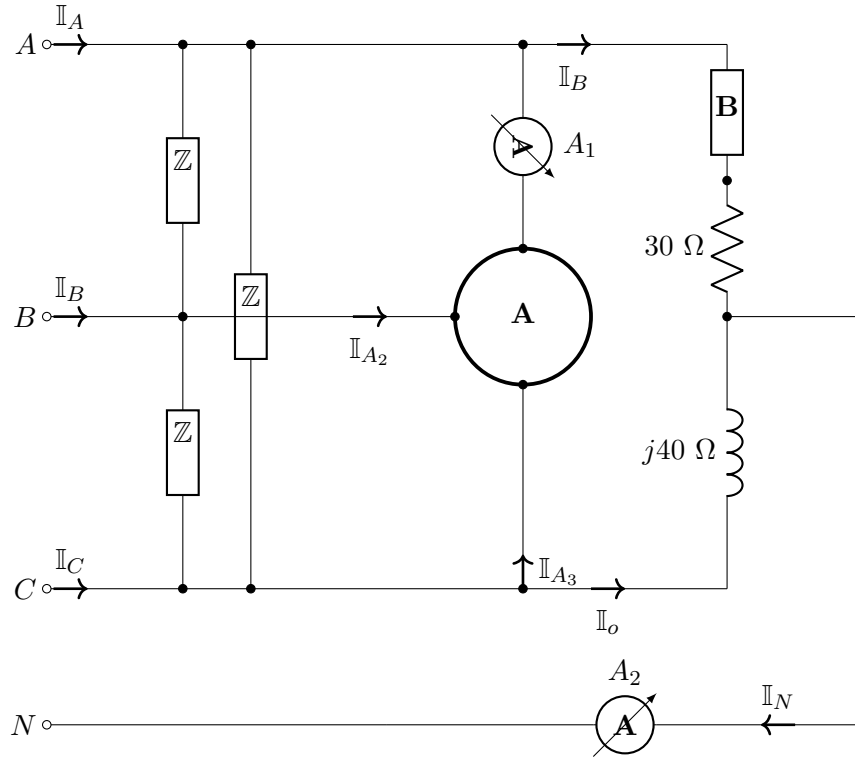


Figura 4.37: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 5.

Datos:

$$\mathbb{V}_{RN} = 230.94 \angle 0^\circ, \text{ Sec } (+)$$

A: carga 3ϕ equilibrada, $FP = 0.866 \downarrow$

B: carga de $FP = 0.94 \uparrow$

El amperímetro A_1 indica 8 A, el amperímetro A_2 indica 10 A

La fuente suministra 16 kW a un $FP = 0.93 \downarrow$

a. Hallar la potencia media de la carga.

$$\text{Respuesta: } \mathbb{S}_{1\phi Z} = 3246.46 \angle 19.13^\circ \text{ VA}$$

b. Hallar $\mathbb{Z}$.

$$\text{Respuesta: } \mathbb{Z} = 5.47 \angle 19.13^\circ \Omega$$

c. Hallar $\mathbb{I}_R$, $\mathbb{I}_S$, e $\mathbb{I}_T$.

$$\text{Respuesta: } \mathbb{I}_R = 26.88 \angle -13.93^\circ \text{ A}, \mathbb{I}_S = 10.42 \angle -171.37^\circ \text{ A}, \mathbb{I}_T = 16.05 \angle 118.92^\circ \text{ A}$$

6. Véase el circuito trifásico de la figura 4.38.

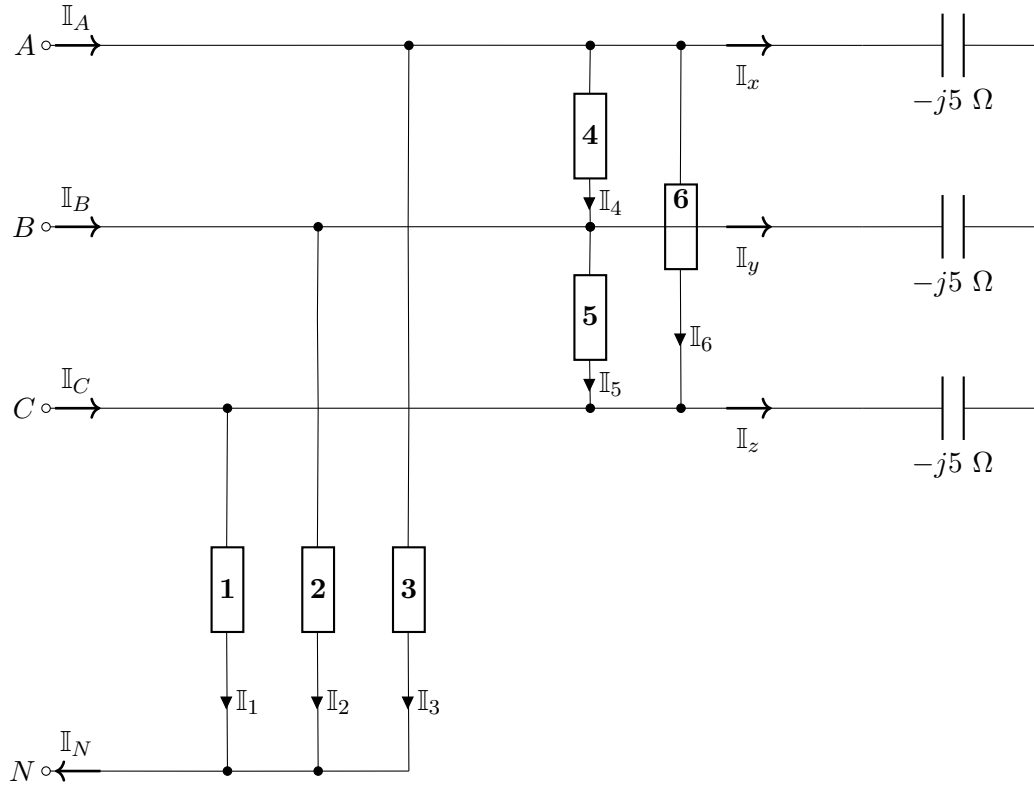


Figura 4.38: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 6.

Datos:

$$\mathbb{V}_{AN} = 250\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_{BN} = 250\angle 120^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_{CN} = 250\angle -120^\circ \text{ V}$$

1: carga 2 kW, $FP = 1$

2: impedancia RL serie, $R = 3 \Omega$, $X_L = 4 \Omega$

3: reactancia capacitiva, $X_C = 6 \Omega$

4: carga 12 kW, $FP = 0.5 \downarrow$

5: carga 10 kVA, $FP = 0.0 \downarrow$

6: carga 8 kVA, $FP = 0.0 \uparrow$

Hallar $\mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_B$, $\mathbb{I}_C$, e $\mathbb{I}_N$.

Respuesta: $\mathbb{I}_A = 53.05\angle 100.02^\circ \text{ A}$, $\mathbb{I}_B = 76.40\angle 90.42^\circ \text{ A}$

Respuesta: $\mathbb{I}_C = 54.26\angle -62.03^\circ \text{ A}$, $\mathbb{I}_N = 82.22\angle 79.02^\circ \text{ A}$

7. Véase el circuito trifásico de la figura 4.39.

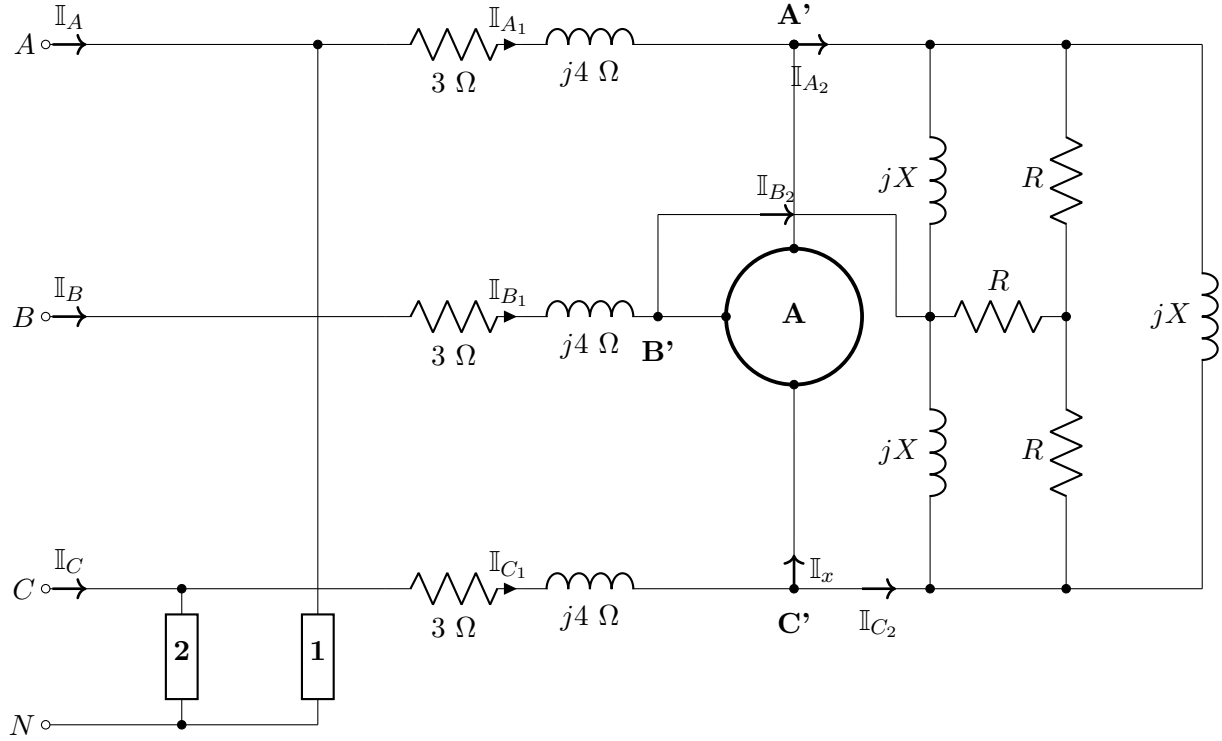


Figura 4.39: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 7.

Datos:

A: carga 3ϕ equilibrada de 450 kW, $FP = 0.75 \downarrow$

1: carga 300 kvar, $FP = 0.55 \downarrow$

2: carga 400 kvar, $FP = 0.6 \downarrow$

Fuente: 1.7 Mvar, $FP = 0.8 \downarrow$

$V_{B'A'}$: $13200\angle 0^\circ$, Sec (-)

V: 440 V

Hallar: I_A , I_B , I_C , I_N , X , R .

Respuesta: $I_A = 129.59\angle 178.69^\circ$ A, $I_B = 88\angle -52.59^\circ$ A

Respuesta: $I_C = 135.25\angle 59.29^\circ$ A, $I_N = 49.84\angle 92.12^\circ$ A

Respuesta: $X = 885.695 \Omega$, $R = 133.071 \Omega$

8. Véase el circuito trifásico de la figura 4.40.

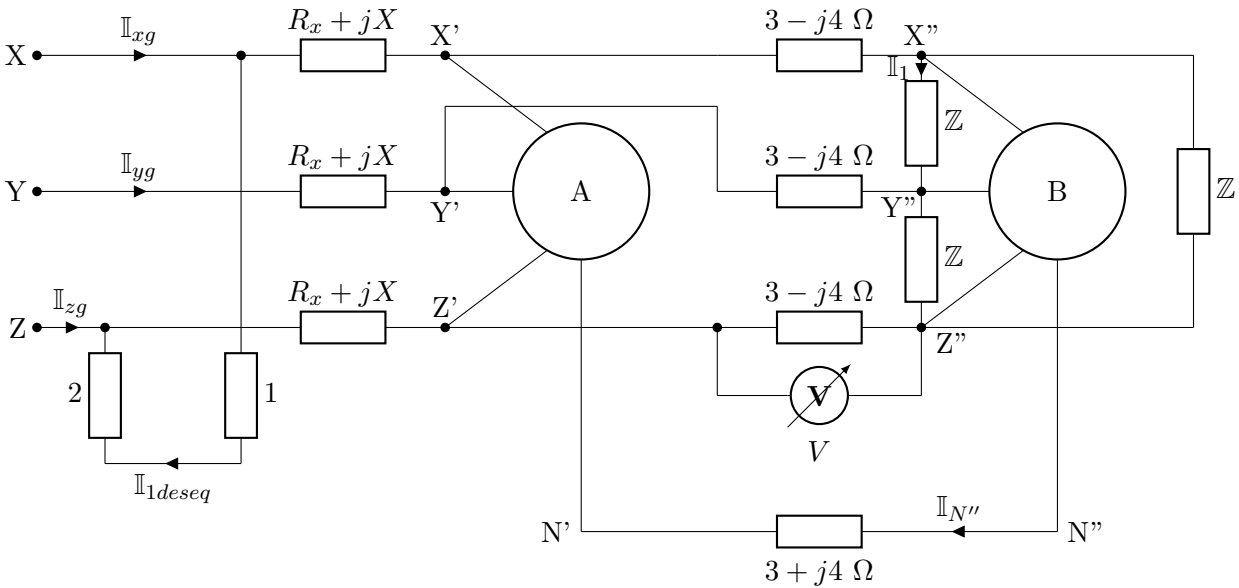


Figura 4.40: Circuito eléctrico trifásico propuesto para el ejercicio 8.

Datos:

$$\mathbb{V}_{X''N} = V_{X''N} \angle 0^\circ, \text{ sec } (-)$$

A: carga 3 ϕ equilibrada de 900 kvar, $FP = 0.6 \downarrow$

B: carga 3 ϕ equilibrada de 1350 kW, $FP = 0.8 \downarrow$

1: carga de 350 kW, $FP = 0.8 \downarrow$

2: carga de 500 kVA, $FP = 0.707 \downarrow$

 $\mathbb{I}_1: 16.4583 \text{ A}$
$$\mathbb{Z}: Z \angle 40^\circ \Omega$$
$$S_{3\phi g}: 4.5351 \angle 41.8373^\circ \text{ MVA}$$

V: 440 V

Hallar $\mathbb{I}_{xg}, \mathbb{I}_{yg}, \mathbb{I}_{zg}, \mathbb{I}_{N''}, \mathbb{V}_{N'N}, Z, R_x, X$.

Respuesta: $\mathbb{I}_{xg} = 251.13 \angle -35.38^\circ$ A, $\mathbb{I}_{yg} = 178.67 \angle 75.18^\circ$ A

Respuesta: $\mathbb{I}_{zg} = 251.92 \angle -173.7^\circ \text{ A}$, $\mathbb{I}_{N''} = 0 \text{ A}$

Respuesta: $\mathbb{V}_{N'N} = 2972.21 \angle -51.28^\circ \text{ V}$, $Z=657.74 \Omega$

Respuesta: $X = 2.56 \, \Omega$, $R_x = 1.78 \, \Omega$

4.10. Ejercicios de introducción al diseño

1. Una planta de producción afronta problemas financieros a raíz de los cobros excesivos en su factura de energía eléctrica mensual por concepto de la energía reactiva inductiva. La planta cuenta con un transformador y sistema de medición trifásico propios. El ingeniero de mantenimiento de la planta realizó una caracterización de las curvas de potencia activa y reactiva aprovechando los equipos de medición con los que cuenta la empresa, las cuales se muestran en la figura 4.41; e indica que la variación diaria en este comportamiento es despreciable, es decir, que puede asumir que este comportamiento diario será el mismo durante todo un año.

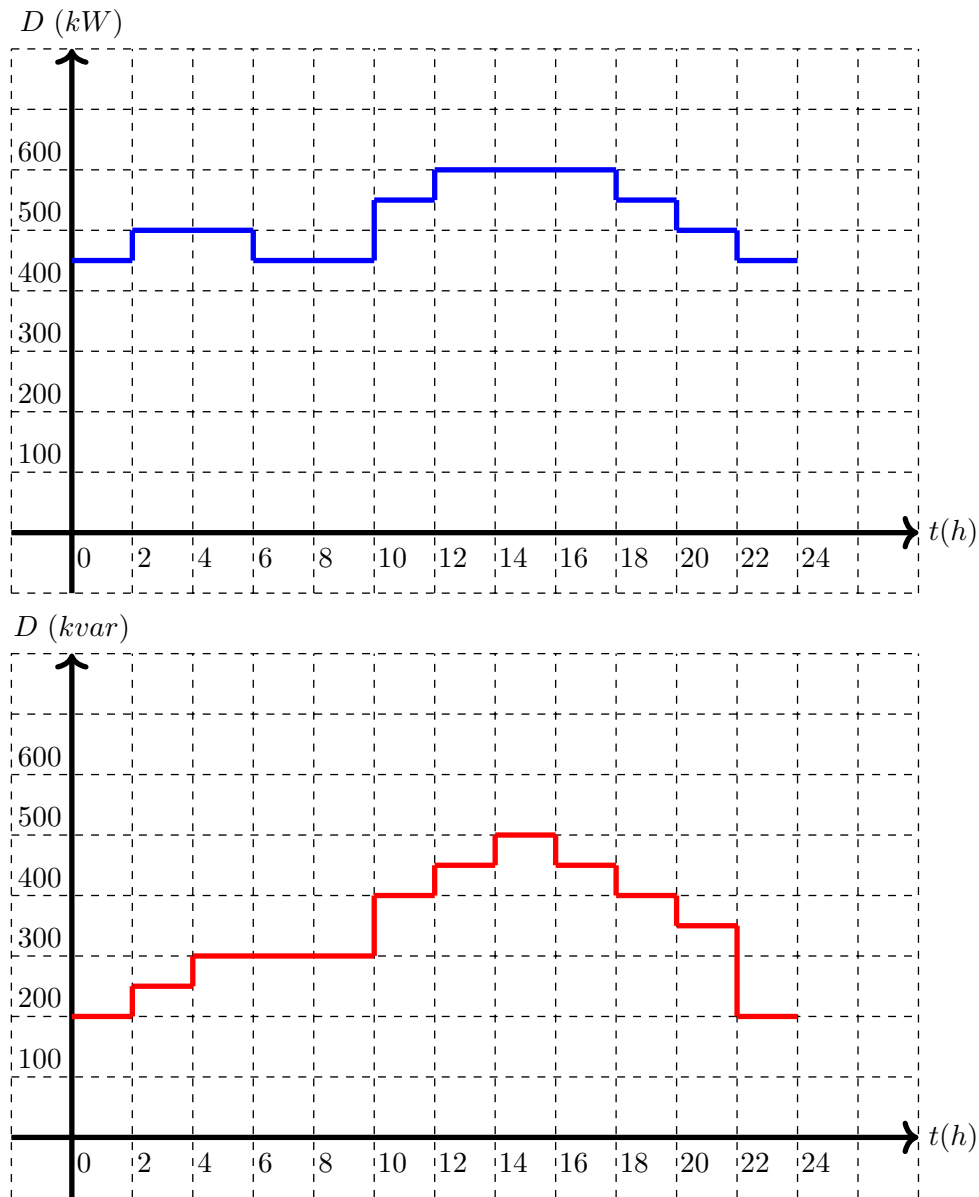


Figura 4.41: Curvas de demanda diaria de potencias activa y reactiva (en kW y kvar).

Se le solicita especificar el valor en kvar del banco de compensación capacitivo que será conectado en bornes del devanado secundario de la unidad de transformación trifásica, de modo que el factor de potencia compensado para cualquier hora del día esté entre 0.92↓ y 0.98↓.

2. Considere una red trifásica tetrafilar balanceada en tensión, donde se tiene la necesidad de instalar las siguientes cargas bifilares:

- Carga 1: 5.0 kW con $FP = 0.89$ ↓ a 127 V
- Carga 2: 3.5 kVA con $FP = 0.96$ ↑ a 127 V
- Carga 3: 7.2 kvar con $FP = 0.87$ ↓ a 220 V
- Carga 4: 6.2 kVA con $FP = 0.76$ ↓ a 127 V
- Carga 5: 11.9 kW con $FP = 0.85$ ↓ a 220 V
- Carga 6: 4.2 kvar con $FP = 0.75$ ↓ a 127 V
- Carga 7: 3.2 kW con $FP = 0.69$ ↓ a 220 V
- Carga 8: 8.0 kVA con $FP = 0.91$ ↓ a 220 V

Se le solicita conectar las cargas a la red de forma que las corrientes de alimentación por fase sean lo más balanceadas posible. Asuma que cada fase es un nodo ideal, que la secuencia de fases es positiva y que el valor nominal de línea de la red es de 220 V.

Bibliografía

- [1] “IEEE Standard for Graphic Symbols for Electrical and Electronics Diagrams (Including Reference Designation Letters),” in IEEE Std 315-1975 (Reaffirmed 1993), pp. 1-176, 29 Dic. 1975, doi: 10.1109/IEEESTD.1975.8996120.
- [2] Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), The International System of Units (SI), 9th edition. 2019. Available on: <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure>.
- [3] Ch. K. Alexander, and M. N. O. Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos. McGraw-Hill Companies, 2013.
- [4] L. Leithold, El cálculo. 7^a edición. México: Oxford University Press, 1998.
- [5] L. Chua, “Memristor-The missing circuit element,” in IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 18, n.º 5, pp. 507-519, Sep. 1971, doi: 10.1109/TCT.1971.1083337.
- [6] D. B. Strukov, G. S. Snider, D. R. Stewart, and R. S. Williams. “Memristor-the missing circuit element,” in Nature, vol. 453, n.º 5, pp. 80-83, May. 2008, doi: 10.1038/nature06932.
- [7] R. S. Williams, “How We Found The Missing Memristor,” in IEEE Spectrum, vol. 45, n.º 12, pp. 28-35, Dic. 2008, doi: 10.1109/MSPEC.2008.4687366.
- [8] J. E. Brittain, “Kennelly uses complex quantities to simplify AC analysis,” in Proceedings of the IEEE, vol. 72, n.º 4, pp. 462-462, Apr. 1984, doi: 10.1109/PROC.1984.12880.
- [9] V. N. Randolph, M. C. Parraguez, “Comprensión del sistema de los números complejos: un estudio de caso a nivel escolar y universitario,” in Formación universitaria, vol. 12, n.º 6, pp. 57-82, 2019, doi: 10.4067/S0718-50062019000600057.
- [10] T. Needham, Visual complex analysis. London: Oxford University Press, 1998.
- [11] C. I. Hubert, Circuitos Eléctricos CA/CC: Un enfoque integrado. Bogotá: Editorial McGraw-Hill Latinoamericana SA. 1985.
- [12] D. Hernández, Fundamentos de análisis de circuitos. Bogotá: Ediciones Unisalle - Universidad de La Salle, 2010.
- [13] Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación - ICONTEC, “NTC 1340:2013 - Electrotecnia. Tensiones y frecuencia nominales en sistemas de energía eléctrica en redes de servicio público,” 4^a edición, 2013.
- [14] H. Kirkham, “75 Years of drift: The changing meaning of phasor [History],” in IEEE Power and Energy Magazine, vol. 18, n.º 1, pp. 76-88, Ene.-Feb. 2020, doi: 10.1109/MPE.2019.2945102.
- [15] A. E. Araújo and D. A. Tonidandel, “Steinmetz and the concept of phasor: A forgotten story,” Journal of Control, Automation and Electrical Systems, vol. 24, n.º 3, pp. 388-395, 2013, doi:10.1007/s40313-013-0030-5.

- [16] W. S. Franklin, "Conventions in Clock-Diagram Representation," in Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, vol. XXX, n.º 1, pp. 581-585, Ene. 1911, doi: 10.1109/T-AIEE.1911.4768282.
- [17] A. E. Kennelly, "Impedance," in Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, vol. X, pp. 172-232, Ene.-Dic. 1893, doi: 10.1109/T-AIEE.1893.4768008.
- [18] Immittance. McGraw-Hill concise encyclopedia of physics. McGraw-Hill Companies, 2005.
- [19] Immittance. "McGraw-Hill Dictionary of Scientific & Technical Terms, 6E.(2003)". Access 11 March 2020.
- [20] M. E. Van Valkenburg, Análisis de redes. 3ª edición en español. México: Editorial Limusa, 1979.
- [21] M. Khalid, "Review on various memristor models, characteristics, potential applications, and future works," Transactions on Electrical and Electronic Materials, n.º 20, pp. 289-298, 2019, doi: 10.1007/s42341-019-00116-8.
- [22] C. P. Steinmetz and F. Bedell, "Reactance," in Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, vol. XI, pp. 640-648, Ene.-Dic. 1894, doi: 10.1109/T-AIEE.1894.4763812.
- [23] A. E. Kennelly, "Vector power in alternating-current circuits," in Proceedings of the American Institute of Electrical Engineers, vol. 29, no. 7, pp. 1023-1057, Jul. 1910, doi: 10.1109/PAIEE.1910.6659879.
- [24] "IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions," in IEEE Std 1459-2010 (Revision of IEEE Std 1459-2000), pp. 1-50, 19 March 2010, doi: 10.1109/IEEESTD.2010.5439063.
- [25] R. H. Stevens, "Power Flow Direction Definitions for Metering of Bidirectional Power," in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-102, n.º 9, pp. 3018-3022, Sep. 1983, doi: 10.1109/TPAS.1983.318107.
- [26] A. E. Kennelly, "The equivalence of triangles and three-pointed stars in conducting networks," Electrical World and Engineer, vol. 34, n.º 12, pp. 413-414, Sep. 1899.
- [27] A. Rosen, "A new network theorem," in Journal of the Institution of Electrical Engineers, vol. 62, n.º 335, pp. 916-918, Nov. 1924, doi: 10.1049/jiee-1.1924.0120.
- [28] B. González and J. C. Toledano, Sistemas Polifásicos. Madrid: Paraninfo, 1995.

Análisis Básico de Circuitos Eléctricos en Régimen Sinusoidal Permanente

Editado por Ediciones USTA

2026

Modular

Análisis Básico de Circuitos Eléctricos en Régimen Sinusoidal Permanente es una herramienta pedagógica esencial para la formación en ingeniería eléctrica y electrónica, diseñada para facilitar la comprensión, el modelado y la resolución de sistemas en corriente alterna.

A lo largo de cuatro capítulos, la obra aborda desde los fundamentos matemáticos y el método fasorial, hasta el análisis de potencia y los sistemas trifásicos. Su enfoque didáctico combina el rigor teórico con ejemplos resueltos, ejercicios propuestos y la introducción a simuladores contemporáneos como LTspice®.

Fruto del esfuerzo interinstitucional de destacados académicos, este libro brinda a estudiantes y profesionales las competencias prácticas necesarias para enfrentar los retos de la ingeniería actual.