



CONTROL PREDICTIVO MULTIVARIADO PARA EL SISTEMA DE PÉNDULO INVERTIDO.

María Camila Báez Pedraza

Universidad Santo Tomás

Facultad de Ingeniería Electrónica

Bogotá D.C., Colombia

2018

**CONTROL PREDICTIVO MULTIVARIADO PARA EL SISTEMA DE PÉNDULO
INVERTIDO.**

María Camila Báez Pedraza

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Ingeniero Electrónico

Director:

Eduard Galvis Restrepo, PhD

Universidad Santo Tomás

Facultad de Ingeniería Electrónica

Bogotá D.C., Colombia

2018

NOTA DE ACEPTACIÓN



Firma del tutor

Firma del jurado

Firma del jurado

BOGOTÁ D.C. DICIEMBRE DE 2018

AGRADECIMIENTOS

Dedico este proyecto a mis padres, Enrique Báez y Aydee Pedraza, que siempre han sido un apoyo incondicional durante toda mi vida y durante la realización de este proyecto, a mi hermano Nicolás Báez que gracias a su conocimiento y acompañamiento me ayudó a culminar este proyecto, a mis amigos por su compañía y apoyo durante la realización e implementación del controlador, y principalmente a mi tutor Eduard Galvis Restrepo por ser una excelente guía, por brindarme su apoyo incondicional y por ser un buen consejero durante mi etapa universitaria.

RESUMEN

Este proyecto está relacionado con el diseño de un controlador predictivo aplicado a un péndulo invertido. El prototipo experimental del péndulo ha sido fabricado por la empresa Quanser. En este trabajo, se muestra el modelo lineal de la planta representada en el espacio de estados, la programación del algoritmo para el controlador teniendo en cuenta el modelo y además la utilidad de aplicar restricciones al controlador. También se presentan resultados experimentales del control de posición angular del péndulo, considerando diferentes escenarios donde se modifican los parámetros de sintonización del controlador.

KEYWORDS

Péndulo invertido, Control predictivo multivariado, sistema SIMO, restricciones, estabilidad.

ABSTRACT

This project is related to the design of a predictive controller applied to an inverted pendulum. The experimental prototype of the pendulum has been manufactured by the company Quanser. In this work, the linear model of the plant represented in the state space is shown, the algorithm programming for the controller taking into account the model and also the utility of applying restrictions to the controller. Experimental results of the angular position control of the pendulum are also presented, considering different scenarios where the tuning parameters of the controller are modified.

Tabla de contenido

1	PRESENTACIÓN DEL PROYECTO	8
1.1	INTRODUCCIÓN.....	8
1.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
1.1	JUSTIFICACIÓN	9
1.2	OBJETIVOS.....	10
1.2.1	OBJETIVO GENERAL.....	10
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	10
1.3	ANTECEDENTES.....	10
1.4	MARCO CONCEPTUAL.....	11
	CONTROL PREDICTIVO.....	11
	PÉNDULO INVERTIDO SIMPLE	12
2	DISEÑO CONTROLADOR PREDICTIVO MULTIVARIABLE.....	15
2.1	MODELO AUMENTADO	20
2.2	OPTIMIZACIÓN.....	22
2.3	DISEÑO ALGORITMO DE CONTROL PREDICTIVO CON RESTRICCIONES.....	28
	RESTRICCIONES EN EL INCREMENTO DE LA VARIABLE DE CONTROL.....	28
	RESTRICCIONES EN LA AMPLITUD DE LA VARIABLE DE CONTROL	29
	RESTRICCIONES DE SALIDA.....	29
3	RESULTADOS	32
3.1	RESULTADOS DE SIMULACIÓN	32
3.2	RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	32
3.3	ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	40
4	CONCLUSIONES	41
	TRABAJO FUTURO.....	42
	REFERENCIAS	42

TABLA DE ILUSTRACIONES

Figura 1 Esquema básico del Control Predictivo.	12
Figura 2 Componentes péndulo invertido Quanser Inc.....	14
Figura 3 Esquemático de la planta del Péndulo Invertido [13].	15
Figura 4 Diagrama de bloques en MATLAB/Simulink para sistema de primer orden.	16
Figura 5 Control PID para primer sistema.	16
Figura 6 Control MPC para primer sistema.	16
Figura 7 Diagrama de bloques para sistema doble integrador.	17
Figura 8 Control PID segundo sistema.....	18
Figura 9 Control MPC para segundo sistema.....	18
Figura 10 Diagrama de bloques para sistema de tercer orden.	19
Figura 11 Control PID para tercer sistema.	19
Figura 12 Control MPC para tercer sistema.	19
Figura 13 Diagrama de bloques para controlador implementado con función en MATLAB/ Simulink.	26
Figura 14 Controlador con función MPC implementada para sistema de primer orden.	26
Figura 15 Comparación entre controladores para sistema de primer orden.	27
Figura 16 Controlador con algoritmo implementado para sistema con doble integrador.....	27
Figura 17 Comparación entre controladores para el sistema de doble integrador.	28
Figura 18 Respuesta controlador MPC con restricciones al sistema de primer orden.	31
Figura 19 Comparación señal de salida de cada comparador para el sistema de primer orden.	31
Figura 20 Controlador MPC con restricciones para péndulo invertido simple.	32
Figura 21 Respuesta controlador MPC con restricciones para péndulo invertido.	32
Figura 22 Diagrama de bloques para restricción del funcionamiento del controlador.	33
Figura 23 Ángulo del péndulo para el primer experimento	34
Figura 24 Ángulo del servo motor para el primer experimento	34
Figura 25 Velocidad del péndulo para primer experimento	34
Figura 26 Velocidad del servo motor para primer experimento	34
Figura 27 Señal de salida del controlador MPC para el primer experimento	34
Figura 28 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para primer experimento....	34
Figura 29 Ángulo del péndulo para segundo experimento	35
Figura 30 Ángulo del servo motor para el segundo experimento.....	35
Figura 31 Velocidad del péndulo para segundo experimento	35
Figura 32 Velocidad del servo motor para segundo experimento.....	35
Figura 33 Señal del controlador MPC para segundo experimento	35
Figura 34 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para segundo experimento	35
Figura 35 Ángulo del péndulo para tercer experimento	36
Figura 36 Ángulo del servo motor para tercer experimento.....	36
Figura 37 Velocidad del péndulo para tercer experimento	36
Figura 38 Velocidad del servo motor para tercer experimento	36
Figura 39 Señal de salida del controlador MPC para tercer experimento.....	36
Figura 40 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para el tercer experimento.	36
Figura 41 Ángulo del péndulo para cuarto experimento	37
Figura 42 Ángulo del servo motor para el cuarto experimento	37
Figura 43 Velocidad del péndulo para el cuarto experimento	37
Figura 44 Velocidad del servo motor para el cuarto experimento.....	37

Figura 45 Señal de salida del controlador MPC para el cuarto experimento	37
Figura 46 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para el cuarto experimento	37
Figura 47Control por retroalimentación de estados [16]	38
Figura 48 Comparación entre controladores para ángulo del péndulo.	38
Figura 49 Comparación entre controladores para ángulo del servo motor.	39
Figura 50 Comparación entre controladores para la señal de error.....	39

TABLAS

Tabla 1 Parámetros de sintonización controlador PID para sistema primer orden.....	17
Tabla 2 Parámetros de sintonización controlador MPC para sistema primer orden.....	17
Tabla 3 Parámetro de sintonización para controlador PID para sistema de doble integrador.	18
Tabla 4 Algoritmo modelo aumentado de la planta.	21
Tabla 5 Algoritmo para implementación de la optimización en MATLAB.	24
Tabla 6 Algoritmo implementado para controlador MPC.	25
Tabla 7 Algoritmo del controlador MPC con restricciones.	30
Tabla 8 Tabla de valores fijos para experimentos.	33
Tabla 9 Tabla de variación de parámetros para controlador predictivo.	33
Tabla 10 Tabla de cuantificación de errores.....	40

1 PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

1.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección del proyecto se mostrará una breve descripción del proyecto y la propuesta que se tiene para desarrollarlo. Para esto, en primera instancia se muestra una introducción en la que se mostrará el contexto en el que se trabajará el proyecto, seguido de una justificación en donde se explicará el porqué del proyecto y cómo se abordará el tema. Luego de esto, se mostrarán los objetivos con el fin de guiar y delimitar el proyecto, acompañado de los antecedentes, que es la mención de trabajos antes realizados para llegar al mismo fin del proyecto, esto más como una guía para el desarrollo del mismo, y para finalizar, una sección de marco teórico para entender los conceptos claves del control multivariado.

Seguido a esto, se muestra la sección del diseño del controlador. En esta se muestra la estrategia utilizada, la implementación de restricciones y su respectiva optimización, adicionalmente se muestra la creación de la función dentro del ambiente de MATLAB, teniendo en cuenta la teoría vista.

Como sección siguiente se muestra la respectiva toma de datos y resultados obtenidos, tanto en simulación como experimentalmente, seguido de un análisis correspondiente a cada ambiente de prueba realizado. Y por último una sección de conclusiones teniendo en cuenta resultados y vivencias experimentadas durante el proceso de realización del proyecto, acompañado de un trabajo a futuro con el fin de dar pautas para seguir en la investigación del control multivariado.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Actualmente, para los estudiantes de carreras de ingeniería electrónica, mecánica, industrial y automatización de pre-grado de las universidades en cuanto al núcleo de control, se implementan técnicas de control basadas en el modelamiento y diseño de sistemas lineales con el fin de implementarlas y desarrollar diferentes conocimientos en las aplicaciones en controles analógicos, digitales y procesos industriales.

Estas estrategias, aunque son muy efectivas, cuando se trata de sistemas complejos, su implementación se convierte en algo tedioso y de grandes costos, debido a sus varias limitaciones, una de estas y tal vez la más importante, es la dificultad de trabajar con sistemas con variaciones en sus parámetros o con sistemas no lineales. Como ejemplo de sistemas no lineales se tiene el péndulo invertido, modelo con el que se trabaja en este proyecto.

El modelo de péndulo invertido ha captado el reciente interés en el estudio de sistemas dinámicos. Este tipo de sistema implica un control capaz de modelar características dinámicas de los procesos, actualmente tiene una gran aplicación en el sector industrial,

también en la rama aeronáutica por poder manejar correctamente todas las variables externas asociadas al sistema y por su similitud al modelado del sistema a trabajar, además se ven aplicaciones varias en el ámbito automotor para la implementación adecuada de los velocímetros y tacómetros utilizados ya que el sistema del péndulo invertido busca controlar el movimiento de la masa en el otro extremo de la barra.

De manera tradicional se ha aplicado el control proporcional - integral - derivativo (PID), sin embargo existe otros tipos de estrategias de control que evalúan muchas más variables del sistema. Como alternativa está el control predictivo, que es un algoritmo que calcula una secuencia temporal discreta de las variables manipuladas a futuro, con el objetivo de optimizar el comportamiento de la planta a trabajar [1]. Dentro de las ventajas del control predictivo se puede mencionar, a diferencia del control PID, la habilidad para manejar las restricciones en las entradas, estados y salidas del sistema de forma sistemática [2].

Como objeto de aplicación del control predictivo, se busca controlar un sistema de péndulo invertido simple utilizando esta técnica de control avanzado. Para lograr la implementación del controlador predictivo es necesario realizar un modelo matemático del sistema, empezando por la linealización a partir de un punto de equilibrio del mismo, manejándolo como una linealización local ya que se toma un rango en específico para la operación del controlador y así aplicar el método lineal del algoritmo. Se requiere además de la validación numérica del modelo, la validación experimental usando plataformas desarrolladas para tal objetivo, las cuales están disponible es los laboratorios de Ingeniería de la Universidad Santo Tomás-Bogotá.

1.3 JUSTIFICACIÓN

En el ámbito industrial el control más utilizado es el control PID, este control se centra en hacer coincidir los estados del sistema con una referencia determinada, utilizando para ello información únicamente de instantes pasados. Sin embargo, existen otras técnicas de control avanzado, como la técnica Control Predictivo basado en Modelo (MPC, por sus siglas en inglés), el cual no sólo tiene en cuenta la referencia que se pretende que alcance el sistema en el instante actual, sino también las referencias futuras que se pretenden alcanzar. Otro punto a destacar es el tratamiento de restricciones físicas en la formulación matemática [3]. La estrategia de control predictivo está tomando significativa importancia en el ámbito industrial ya que muchas aplicaciones en este sector son multivariantes y poseen restricciones, lo que significa que dichos sistemas deban ser considerados como sistemas no lineales, esto incentiva a la implementación del MPC [4].

Este proyecto de tesis es una alternativa de solución al desafío de implementar una estrategia de control predictivo de forma práctica en aras de apoyar el desarrollo de estrategias avanzadas de control en la industrial actual. El reto de implementar un controlador MPC a un sistema SIMO (Single Input Multiple Output) con un algoritmo escalable para el manejo de sistemas más complejos a partir del modelo linealizado del sistema a controlar, no es una labor fácil desde la perspectiva de la implementación del algoritmo matemático a nivel computacional, he aquí la importancia del trabajo.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar un control predictivo multivariable para un sistema de péndulo invertido.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Modelar y linealizar localmente el sistema de péndulo invertido.
- Simular numéricamente el sistema de péndulo invertido.
- Diseñar el controlador predictivo para el sistema.
- Simular en el entorno Matlab/Simulink® el control retroalimentado del sistema.
- Implementar algoritmo de control predictivo para el sistema de péndulo invertido simple desarrollado por la empresa Quanser®.

1.5 ANTECEDENTES

El control predictivo se ha desarrollado significativamente en las últimas décadas tanto en el ámbito industrial como en el ámbito investigativo, debido a que este tipo de control es la forma más general de controlar un sistema en el dominio del tiempo, este control integra tiempos muertos, procesos multivariables y predice de forma aproximada el comportamiento del sistema cuando se es posible [2].

La aplicación del control predictivo se extiende desde procesos como robots a la anestesia clínica. Aplicaciones en la industria de cemento, desecadoras, brazos robóticos se pueden encontrar descritas por Clarke en 1988, mientras que desarrollos para columnas de destilación, plantas de pvc, generadores de vapor y servos se presentan por Richalet en 1993 [2].

Una metodología básica de control predictivo fue introducida por Sánchez en 1974, quien la patentó en 1976. Esta realización evoluciona en 1977 para una formulación extendida que considera la optimización de una señal de control, usando la predicción del modelo y la acción de control a lo largo de un horizonte de predicción, unificándolos con conceptos de control adaptativo [3].

Aunque existen varias aplicaciones de este tipo de control es importante revisar antecedentes aplicados al sistema no lineal del péndulo invertido, ya que es uno de los sistemas más usados. En [5] realizaron un control predictivo basado en modelos difusos para luego implementarlo en un péndulo invertido, en este caso se comparó la común técnica de control predictivo y la propuesta por Yakamawa, un experto en control predictivo difuso, que propone por medio de siete reglas simples de control resolver el problema de la planta.

En [6] implementaron el control predictivo en el sistema dinámico del péndulo invertido con la intención de comparar técnicas de control aplicadas a este sistema anteriormente con el control ya mencionado, como resultado, pudieron observar que permite tener cuidado de muchos aspectos de puesta en práctica significativos y principalmente evita tener que discretizar aproximadamente el sistema de planta que se tenga en tiempo.

En [7] se realizó la implementación de un control predictivo a un doble péndulo invertido impulsado por un motor lineal ratificando el comportamiento del MPC. Como conclusión a este proyecto observaron que tiene la ventaja de ajustar parámetros con facilidad y conceptos intuitivos que lo hacen atractivo para la implementación.

En [8], desarrollaron un control predictivo basado en modelo para un péndulo invertido para una planta Quanser. En este artículo modelan las ecuaciones de la planta para linealizarlas y con esto hacer el modelo en el espacio de estados para aplicar las restricciones al sistema. En conclusión se demostró cómo este modelo desafiante puede controlarse y rechazar cualquier tipo de perturbación por el MPC.

En [9] realizaron una implementación del control multivariable basado en modelo para un doble péndulo invertido, este algoritmo lo hicieron basándose en la matemática de series de Laguerre lo que permite el control y la optimización de la señal. Como conclusión se resalta la importancia del integrador que posee el control, ya que gracias a él, cuando el sistema se encuentra en tiempo real, rechaza más fácilmente el ruido del sistema y errores en medidas por causa de los sensores.

En [10] se realizó un estudio con un péndulo invertido rotatorio con el método de diseño de un robusto controlador predictivo basado en modelo con el fin de mostrar que esta estrategia puede implementarse a futuro con mayor efectividad que otras en sistemas similares no lineales. Como conclusión a este artículo se dice que la nueva estrategia implementada es eficiente pero que se puede obtener una solución de mayor calidad, para esto proponen un trabajo a futuro de investigación para disminuir la influencia del ruido blanco en los controladores.

En [11] se aplicó un controlador predictivo basado en modelo a un péndulo invertido implementado en dos procesadores diferentes con el fin de probar su buen funcionamiento y que tan complicado es su implementación. Teniendo en cuenta el procesador a utilizar, se eligieron diferentes horizontes de predicción y que respuesta tenía el actuador la cual era medida en segundos, en sus conclusiones resaltan la facilidad para resolver los problemas de restricciones y proponen un trabajo a futuro de implementar este tipo de controlador en procesadores más complejos.

En [12] se realizó una comparación entre tres tipos de estrategias aplicadas al péndulo invertido con el fin de comprar la estabilidad que proporciona cada uno a la planta. Como conclusión se evidenció el notable rendimiento del MPC debido a su aplicación por partes para una evaluación rápida de la ley de control.

1.6 MARCO CONCEPTUAL

CONTROL PREDICTIVO

El control predictivo no es como tal una estrategia de control sino un conjunto de métodos de control que hacen uso de modelos para obtener una señal de minimización y con esta una función objetivo. Estos controladores tienen la característica de contar con un horizonte

de control finito, lo que implica el cálculo de la secuencia de control para todo el horizonte con la aplicación de la primera señal de la secuencia y la repetición de todo el proceso en los siguientes instantes de muestreo. Cada ley de control difiere tanto en el modelo a utilizar para representar cada proceso, como en las perturbaciones y la función objetivo [2].

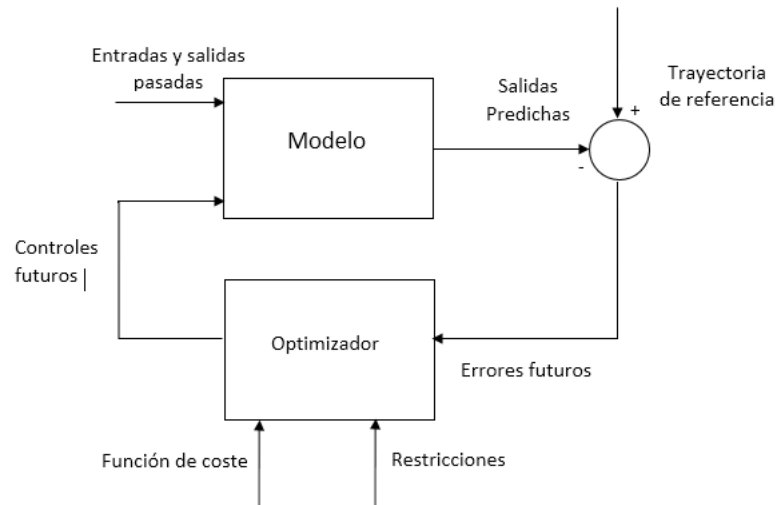


Figura 1 Esquema básico del Control Predictivo.

El procedimiento de optimización se realiza para un intervalo de tiempo que se extiende desde un tiempo actual hasta un tiempo actual más un horizonte de predicción, para cada intervalo de muestreo y con las mediciones actualizadas de la planta, en donde sólo la primera acción de la secuencia de control optimizada es realimentada a la planta, actualizando el problema de optimización que es resuelto para el siguiente instante de muestreo con las nuevas mediciones hechas de la planta, desplazando en una unidad al horizonte de predicción [3].

La descripción del modelo en espacio de estados es mayormente utilizada para sistemas no lineales, sistemas que poseen varias restricciones en el control de sus estados y cuando poseen varias salidas o entradas.

Es importante mencionar que el optimizador es la parte fundamental de esta estrategia, ya que nos proporciona las acciones de control. El tamaño del problema de optimización depende del número de variables, tanto de salida como de entrada, y del horizonte de predicción usado.

PÉNDULO INVERTIDO SIMPLE

Los péndulos invertidos son sistemas lo suficientemente completos e interesantes para la aplicación de controles no lineales. La demostración de este sistema consiste en situar inicialmente de forma manual el péndulo en la posición vertical invertida, soltarlo luego y que de forma autónoma, retroalimentando su posición, el péndulo continuase en la posición vertical. El problema de control es local, el cual se resuelve de manera lineal con un bucle cerrado [13].

En los años 70 se comenzó a trabajar con un modelo de planta diseñado por Katsuhisa Furuta que consistía en un péndulo invertido rotatorio, en este modelo, el péndulo cuelga de una varilla que está sujeta a un motor. En este sistema los problemas de dinámica se complican ya que se tiene en cuenta fuerzas externas como la centrífuga [13].

Para el modelado no lineal de la planta Quanser, tenemos [14]:

$$\begin{aligned} \left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} \\ + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} L_p g \sin(\alpha) = -B_p \dot{\alpha} \quad (2)$$

La función de linealización teniendo en cuenta la ecuación (1) es de la forma:

$$\begin{aligned} f_{lin}(z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} \ddot{\theta} + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} \ddot{\alpha} + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} \dot{\theta} + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} \dot{\alpha} \\ + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_0} \theta + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{z=z_0} \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Linealizando $f(z)$ con respecto a $\ddot{\theta}$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} = m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(0) + J_r = m_p L_r^2 + J_r$$

Linealizando $f(z)$ con respecto a $\ddot{\alpha}$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(0) = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r$$

Evaluando la ecuación (3) e incorporándola en la ecuación original, se obtiene el siguiente modelo lineal:

$$(m_p L_r^2 + J_r) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (4)$$

Para la siguiente ecuación se tiene en cuenta la linealización dada en (3) y la solución para $\ddot{\theta}$, $\ddot{\alpha}$ y α son:

$$\left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r ,$$

$$\left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}}\right)\bigg|_{z=z_0} = J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 y$$

$$\left(\frac{\partial f(z)}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{z=z_0} = -\frac{1}{2}m_p L_p g.$$

Evaluando e incorporando a la ecuación original, se tiene:

$$-\frac{1}{2}m_p L_p L_r \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2\right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{2}m_p L_p g \alpha = -B_p \dot{\alpha} \quad (5)$$

Teniendo en cuenta el modelo descrito en las ecuaciones anteriores se desarrolla el proyecto utilizando la planta de péndulo invertido, la cual consta de un módulo servo motor, unido a esto, un brazo rotario el cual cuenta con un sensor de posición en la parte inferior, para controlar la posición del motor, otro sensor de posición en la parte superior, para controlar la posición del péndulo y por último, una varilla conectada con el brazo.

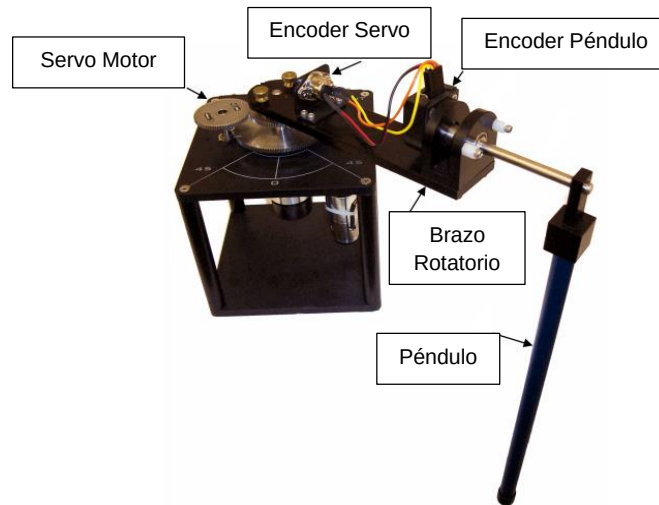


Figura 2 Componentes péndulo invertido Quanser Inc.

Esta planta, al poseer dos sensores como receptores de información pero solo un actuador, que en este caso es el motor, se modela como un sistema SIMO (Simple Input Multiple Output).

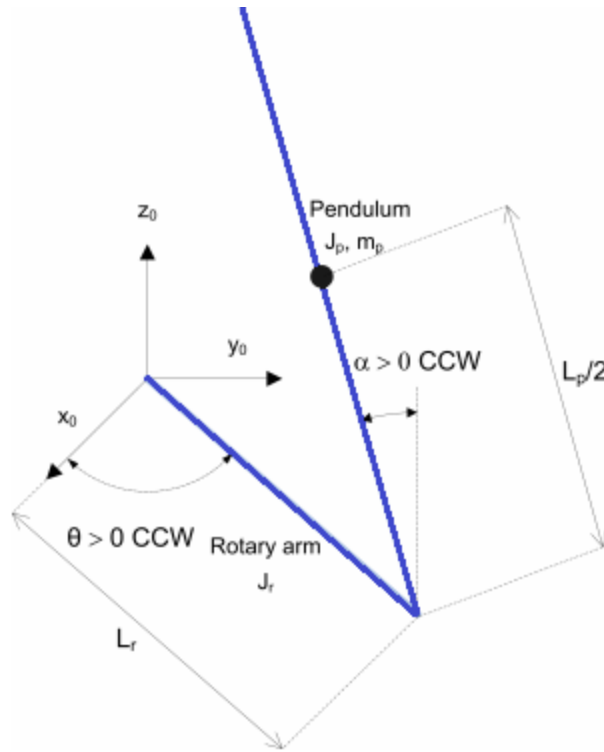


Figura 3 Esquemático de la planta del Péndulo Invertido [13].

2 DISEÑO CONTROLADOR PREDICTIVO MULTIVARIABLE

Para diseñar el controlador de la planta, se ha planteado seguir una estrategia didáctica inductiva conformada por etapas. En la primera etapa se realiza una introducción del control predictivo, su aplicación y conceptos básicos para el manejo de éste. Para aplicar estos conceptos se realizan pruebas en MATLAB/Simulink comparando el control tradicional PID y el control predictivo por medio de la herramienta de MPC toolbox con la que cuenta MATLAB. Para estas pruebas se utilizan sistemas que cumplen la condición de tener uno o más polos y se observa su comportamiento según el tiempo de muestreo y perturbaciones.

Es importante mencionar que la ley de control que se utiliza para el controlador PID está dada por:

$$G_{PID}(z) = K_p + K_I T_s \frac{1}{z-1} + K_D \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z} \quad (6)$$

Sistema de primer orden

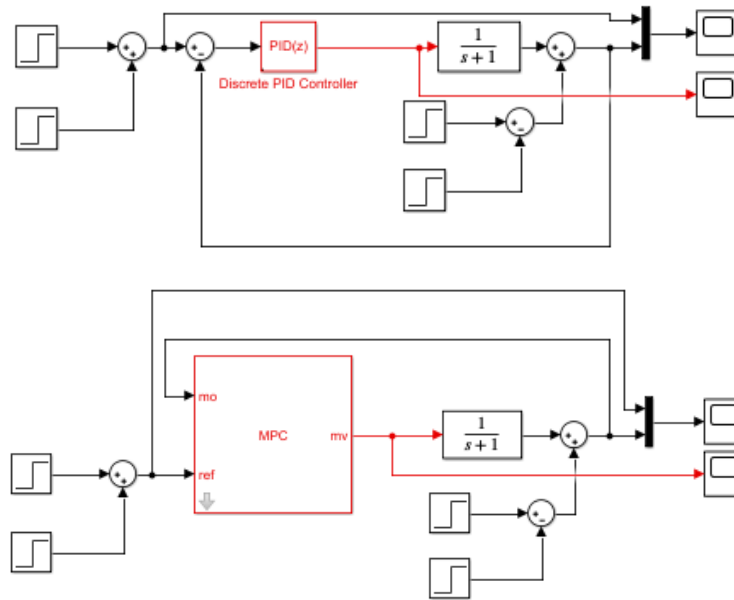


Figura 4 Diagrama de bloques en MATLAB/Simulink para sistema de primer orden.

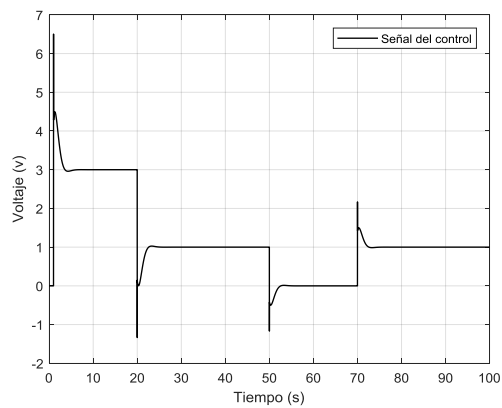
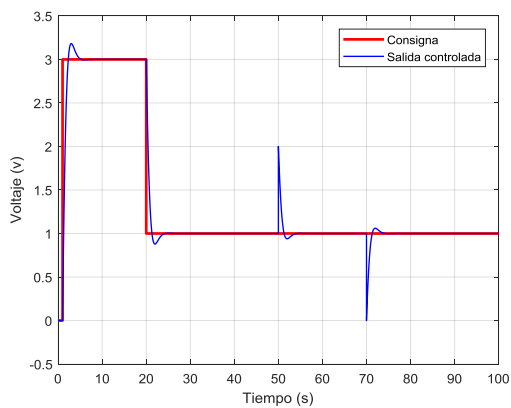


Figura 5 Control PID para primer sistema.

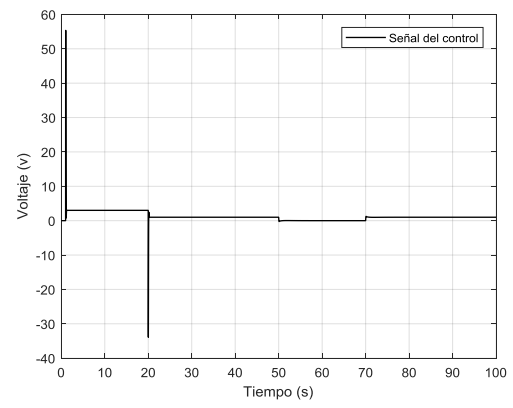
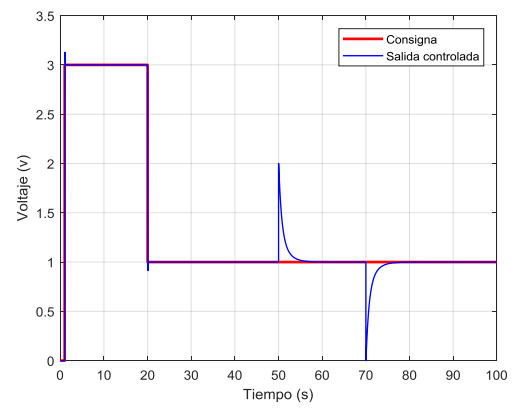


Figura 6 Control MPC para primer sistema.

En este caso se evidencia, que aunque los dos controlan la planta en un tiempo muy corto, el control predictivo debe hacer mayor esfuerzo para alcanzar la posición que se desea.

Esto teniendo en cuenta los parámetros de sintonización de cada controlador, los cuales se muestran a continuación.

	Ki	Kd	Kp
PID	2.57772	0.00718284	1.449456

Tabla 1 Parámetros de sintonización controlador PID para sistema primer orden.

	Hp	Hc	Ts
MPC	50	4	0.01s

Tabla 2 Parámetros de sintonización controlador MPC para sistema primer orden.

Sistema de segundo orden

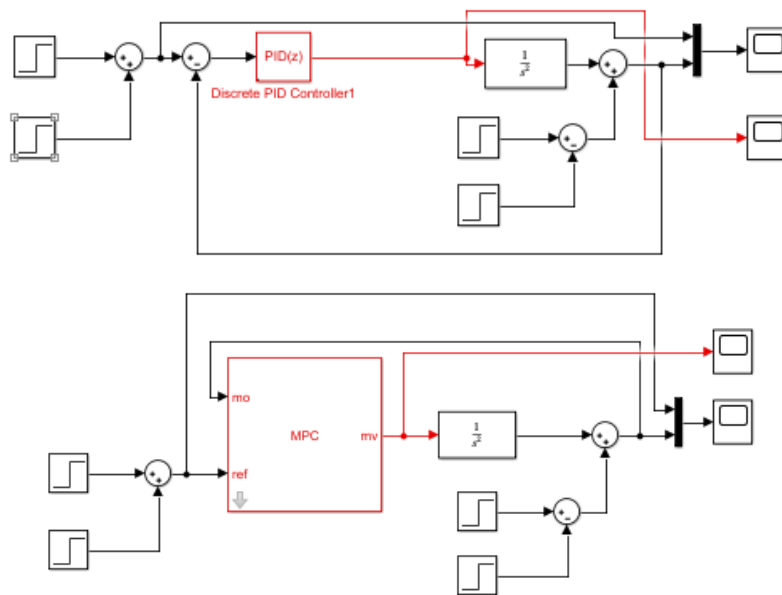


Figura 7 Diagrama de bloques para sistema doble integrador.

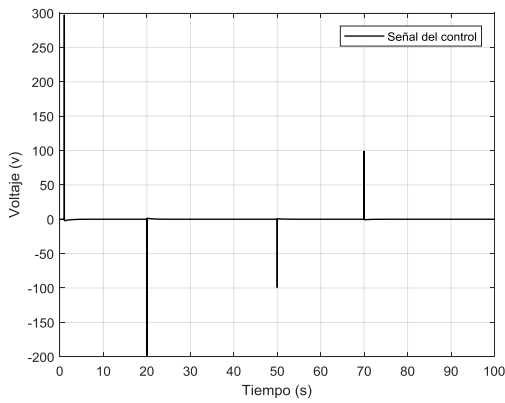
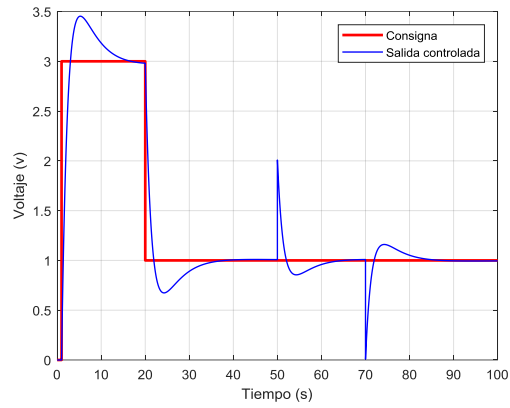


Figura 8 Control PID segundo sistema.

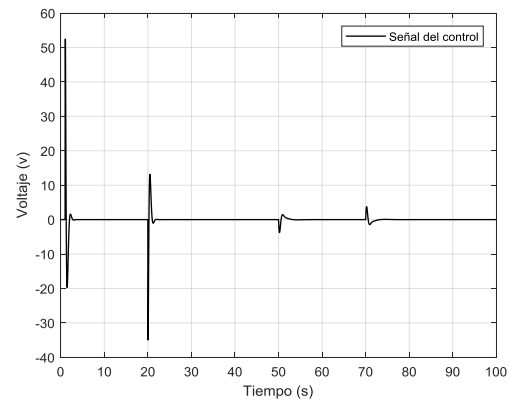
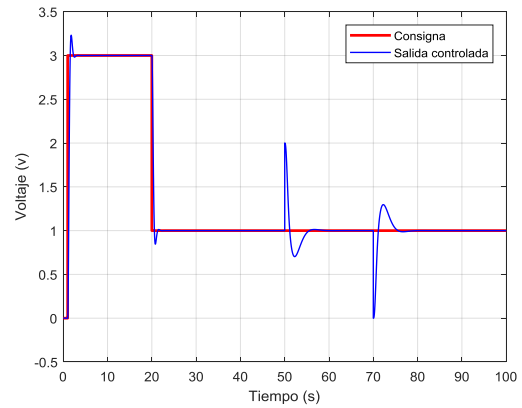


Figura 9 Control MPC para segundo sistema.

En este caso se ve mayor efectividad en el control predictivo ya que logra estabilizar al sistema con mayor rapidez y menor esfuerzo para alcanzarlo, sin embargo, el control PID muestra una respuesta rápida frente a cambios de consigna y perturbaciones. Para la sintonización de los controladores se tuvo en cuenta la misma sintonización de parámetros para el controlador MPC mostrados en la tabla 2, para el controlador PID se muestran a continuación:

	Ki	Kd	Kp
PID	0.0132172791718439	0.987933651185359	0.228541417455484

Tabla 3 Parámetro de sintonización para controlador PID para sistema de doble integrador.

Sistema de tercer orden

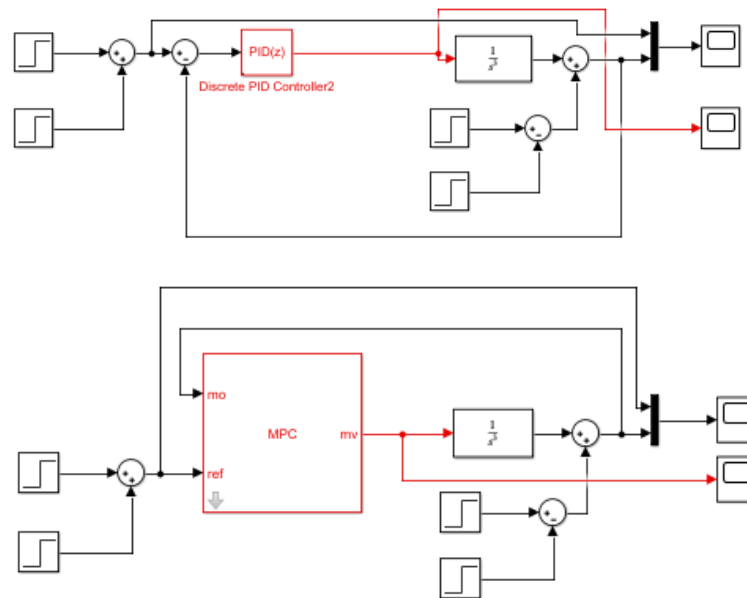


Figura 10 Diagrama de bloques para sistema de tercer orden.

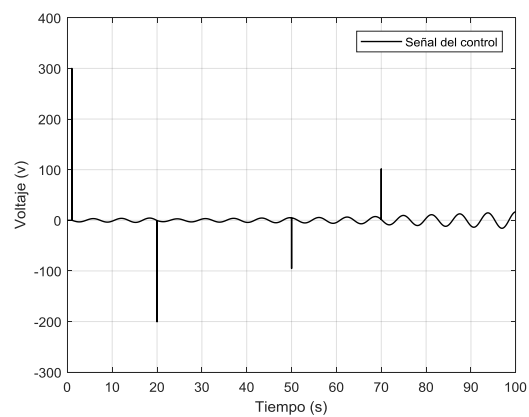
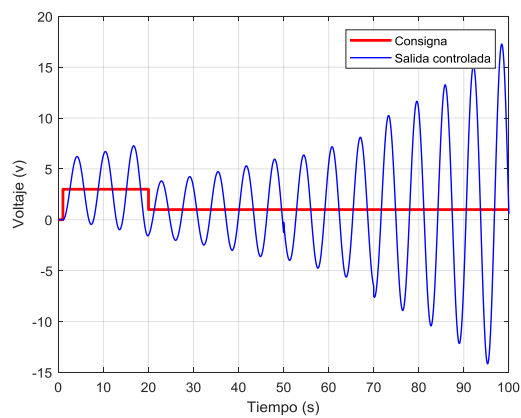


Figura 11 Control PID para tercer sistema.

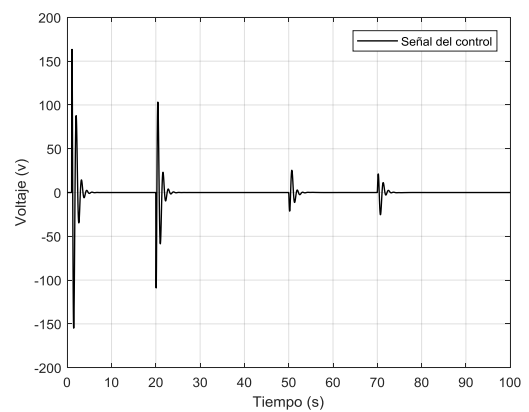
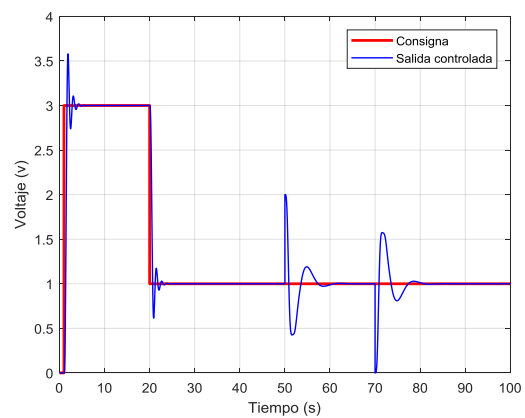


Figura 12 Control MPC para tercer sistema.

En este caso se ve la marcada diferencia entre las estrategias, ya que la planta al tener un polo adicional, es necesario un segundo integrador, algo que el control PID no lo ofrece con

este tipo de implementación, por su parte, el controlador MPC logra controlar la planta con relativa facilidad sin importar sus cambios de consigna o perturbaciones que pueda tener.

Seguidamente se realiza una etapa de familiarización con la planta Quanser del péndulo invertido, reconociendo cada bloque y su funcionamiento dentro de la implementación.

Para la siguiente etapa se añadieron los conceptos acerca de restricciones y se realizan pruebas con los mismos sistemas utilizados anteriormente para mirar el comportamiento de cada una variando las restricciones a la variable de salida del controlador.

En la siguiente sección se muestra de forma teórica el controlador MPC y como es su implementación en el ambiente MATLAB con el fin de implementar el algoritmo en una función y aplicarlo al péndulo invertido.

2.1 MODELO AUMENTADO

Para el diseño del algoritmo del controlador, se utiliza la estrategia de Control Predictivo basado en Modelo (MPC), para esto, el modelo matemático de la planta es tomado en espacio de estados. La formulación general de este modelo asume que el sistema cuenta con m entradas, q salidas y n estados. Al ser general, se deben tener en cuenta el ruido y las perturbaciones, tal como se muestra en las ecuaciones (7) y (8).

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) + B_d \omega(k) \quad (7)$$

$$y(k) = C_m x_m(k) \quad (8)$$

Donde A_m , B_m y C_m son las matrices del espacio de estados del sistema en tiempo discreto, B_d es la matriz que contiene las perturbaciones aplicadas al sistema, x_m es el vector de estados que tiene dimensiones n , y es la salida del sistema y u la variable de entrada. Para efectos de predicción del modelo, la salida no puede verse afectada por la entrada, por tal motivo la matriz $D_m = 0$. Adicionalmente, se debe aplicar una operación de diferencias para tener información del estado actual y el estado pasado del sistema, con esta operación se tiene una variable incremental, así:

$$\Delta x_m = x_m(k) - x_m(k-1) \quad (9)$$

$$\Delta u = u(k) - u(k-1) \quad (10)$$

Al relacionar la salida $y(k)$ con el vector de estados $\Delta x_m(k)$, tenemos:

$$\Delta y(k+1) = C_m \Delta x_m(k+1) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) + C_m B_d \epsilon(k+1) \quad (11)$$

donde:

$$\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k) \quad (12)$$

$$\omega(k) - \omega(k-1) = \epsilon(k) \quad (13)$$

Con un nuevo vector de estados, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} B_d \\ C_m B_d \end{bmatrix} \epsilon(k) \quad (14)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0_m & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde $I_{q \times q}$ es una matriz identidad de dimensiones $q \times q$ y 0_m es una matriz de ceros de dimensiones $q \times n$, A_m con dimensiones de $n \times n$, B_m con dimensiones de $n \times m$ y C_m con dimensiones $q \times n$.

Para implementar este método complejo de aumentar matrices, se toma como referencia el algoritmo propuesto en [15] que consiste en una función que cuenta con parámetros de entrada, que en este caso son las matrices de espacio de estados de la planta, y sus salidas son las matrices aumentadas correspondientes. A continuación, en la tabla 4 se muestra el algoritmo implementando en MATLAB para calcular el modelo aumentado.

```
function [A_e,B_e,C_e]=mpcgainSIMO (Ap,Bp,Cp,Nc,Np)

%Calculates the augmented model for MIMO system
m1,n1=size(Cp);
n1,n_in=size(Bp);
A_e=eye(n1+m1,n1+m1);
A_e(1:n1,1:n1)=Ap;
A_e(n1+1:n1+m1,1:n1)=Cp*Ap;
B_e=zeros(n1+m1,n_in);
B_e(1:n1,:)=Bp;
B_e(n1+1:n1+m1,:)=Cp*Bp;
C_e=zeros(m1,n1+m1);
C_e(:,n1+1:n1+m1)=eye(m1,m1);

End
```

Tabla 4 Algoritmo modelo aumentado de la planta.

Para aplicar el anterior algoritmo al sistema con el que se trabaja, se toma el modelo que ofrece la empresa Quanser, en donde se relaciona todas las variables mecánicas involucradas, teniendo en cuenta que se debe linealizar el modelo y expresarlo en matrices de espacio de estados, de lo que resulta [16]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 81.4033 & -45.8259 & -0.9319 \\ 0 & 122.0500 & -44.0966 & -1.3972 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 83.4659 \\ 80.3162 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Es importante mencionar que para aplicar el algoritmo las matrices de entrada a la función deben ser discretizadas, en este caso se utiliza un tiempo de muestreo de 0.002 segundos. De lo que resulta:

$$Ae = \begin{bmatrix} 1 & 0.0002 & 0.0019 & -0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0002 & -0.0001 & 0.0020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1554 & 0.9125 & -0.0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2368 & -0.0842 & 0.9975 & 0 & 0 \\ 1 & 0.0002 & 0.0019 & -0.0000 & 1 & 0 \\ 0 & 1.0002 & -0.0001 & 0.0020 & 0 & 1 \end{bmatrix}; Be = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0002 \\ 0.1594 \\ 0.1533 \\ 0.0002 \\ 0.0002 \end{bmatrix}; Ce = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

2.2 OPTIMIZACIÓN

La optimización del controlador predictivo es el cálculo de la variable de salida óptima para las salidas predichas del sistema. En esta ventana de predicción se asume que el tiempo actual es k_i y su longitud está determinada por N_p , es decir el horizonte de predicción, el cuál es el número de predicciones de la variable de la salida. Asumiendo que $k_i > 0$ y que $x(k_i)$ es el vector que provee la información actual de la planta, se tiene que:

$$\Delta u(k_i), \Delta u(k_i + 1), \dots, \Delta u(k_i + N_c - 1) \quad (18)$$

donde N_c es el horizonte de control el cual dicta el número de parámetros para la trayectoria futura de control. Teniendo en cuenta el modelo en espacio de estados, las futuras variables de estado estarían dadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (k_i+1|k_i) &= (k_i) + B\Delta u(k_i) \\ (k_i+2|k_i) &= (k_i+1|k_i) + B\Delta u(k_i+1) = A^2x(k_i) + AB\Delta u(k_i) + B\Delta u(k_i+1) \\ &\vdots \\ (k_i+N_p|k_i) &= A^{N_p}x(k_i) + A^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + A^{N_p-2}B\Delta u(k_i+1) + \\ &\quad \dots + A^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i+N_c-1) \end{aligned} \quad (19)$$

Para las variables de salida se realiza la misma sustitución

$$y(k_i + 1 | k_i) = CAx(k_i) + CB\Delta u(k_i) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} y(k_i + 2 | k_i) &= CA^2x(k_i) + CAB\Delta u(k_i) + CB\Delta u(k_i + 1) \\ y(k_i + 3 | k_i) &= CA^3x(k_i) + CA^2B\Delta u(k_i) + CAB\Delta u(k_i + 1) + CB\Delta u(k_i + 2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y(k_i + N_p | k_i) = CA^{N_p}x(k_i) + CA^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + CA^{N_p-2}B\Delta u(k_i + 1) + \dots + CA^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i + N_c - 1) \quad (21)$$

Todas las variables predichas están en función del vector de estado en tiempo real $x(k_i)$ y la trayectoria de control futura está dada por $\Delta u(k_i + j)$, donde $j = 0, 1, \dots, N_c - 1$. Con esto se define los vectores.

$$Y = [y(k_i + 1 | k_i) y(k_i + 2 | k_i) y(k_i + 3 | k_i) \dots y(k_i + N_p | k_i)]^T \quad (22)$$

$$\Delta U = [\Delta u(k_i) \Delta u(k_i + 1) \Delta u(k_i + 2) \dots \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T \quad (23)$$

Reuniendo (22) y (23) en una matriz compacta tenemos:

$$Y = Fx(k_i) + \Phi\Delta U \quad (24)$$

donde:

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix} \quad (25)$$

Teniendo en cuenta la señal de referencia $r(k_i)$ y que el objetivo del horizonte de predicción es predecir la señal de salida para que el error entre la señal de referencia y ΔU sea la más mínima posible se tiene:

$$R_s^T = \overbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1]}^{N_p} r(k_i) \quad (26)$$

En este trabajo se ha definido la función de coste propuesta en [15]

$$J = (R_s - Y)^T(R_s - Y) - \Delta U^T \bar{R} \Delta U \quad (27)$$

donde $\bar{R}$ es un vector de dimensiones $r_w I_{N_c \times N_c}$ siendo $r_w > 0$ que es usado como parámetro de ajuste en el rendimiento de lazo cerrado del sistema. Para encontrar el ΔU óptimo se minimiza la función de coste J teniendo en cuenta (27), de esta forma es expresada:

$$J = (R_s - Fx(k_i))^T(R_s - Fx(k_i)) - 2\Delta U^T \Phi^T(R_s - Fx(k_i)) + \Delta U^T(\Phi^T \Phi + \bar{R})\Delta U \quad (28)$$

Obteniendo la primera derivada de la función de coste y diciendo que la condición mínima de ésta es $\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0$ se obtiene que:

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - Fx(k_i)) \quad (29)$$

Para implementar la optimización del controlador, es necesario adicionar a la función del modelo aumentado el algoritmo para crear las matrices (25), para estas es necesario definir como parámetro de entrada adicional el horizonte de predicción y el horizonte de control a trabajar, tal y como se muestra en la tabla 5.

```
function [Phi,F,BarRs,Phi_Phi,Phi_F,Phi_R,A_e,B_e,C_e]
=mpcgainSIMO(Ap,Bp,Cp,Nc,Np)

    %Calculates the augmented model for SIMO system
    [m1,n1]=size(Cp);
    [n1,n_in]=size(Bp);
    A_e=eye(n1+m1,n1+m1);
    A_e(1:n1,1:n1)=Ap;
    A_e(n1+1:n1+m1,1:n1)=Cp*Ap;
    B_e=zeros(n1+m1,n_in);
    B_e(1:n1,:)=Bp;
    B_e(n1+1:n1+m1,:)=Cp*Bp;
    C_e=zeros(m1,n1+m1);
    C_e(:,n1+1:n1+m1)=eye(m1,m1);

    % Calculates the F and Phi matrices,taking account its special form
    %Phi its a Toeplitz matrix
    n=n1+m1;
    h(1:m1,:)=C_e;
    F(1:m1,:)=C_e*A_e;

    for kk=2:m1*(Np-1)
        h(kk+m1-1:kk+m1,:)= h(kk+m1-3:kk+m1-2,:)*A_e;
        F(kk+m1-1:kk+m1,:)= F(kk+m1-3:kk+m1-2,:)*A_e;
    end

    v=h*B_e;
    [m2,n2]=size(v);
    Phi=zeros(m1*Np,Nc*n2);
    Phi(:,1:n2)=v;
    for ii=n2+1:(Nc)
        Phi(:,ii)=[zeros(2*(ii-n2),n2);v(1:Np*m1-(2*(ii-n2)),n2)];
    end
    BarRs=ones(m1*Np,m1);
    Phi_Phi= Phi'*Phi;
    Phi_F= Phi'*F;
    Phi_R=Phi'*BarRs;
    Phi_R=Phi_F(:,end-(m1-1):end);
end
```

Tabla 5 Algoritmo para implementación de la optimización en MATLAB.

En este caso se escoge un $N_p = 10$ y un $N_c = 4$ dando como resultado las matrices expresadas a continuación:

$$\Phi^T_F = \begin{bmatrix} 0.3968 & 0.3850 & 0.0021 & 0.0035 & 0.0513 & 0.0492 \\ 0.3101 & 0.3010 & 0.0016 & 0.0028 & 0.0387 & 0.0372 \\ 0.2341 & 0.2273 & 0.0012 & 0.0021 & 0.0283 & 0.0272 \\ 0.1693 & 0.1644 & 0.0009 & 0.0016 & 0.0198 & 0.0190 \end{bmatrix} \quad \Phi^T_R = \begin{bmatrix} 0.0513 & 0.0492 \\ 0.0387 & 0.0372 \\ 0.0283 & 0.0272 \\ 0.0198 & 0.0190 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T_\Phi = \begin{bmatrix} 0.0008235 & 0.0006535 & 0.0005014 & 0.0003688 \\ 0.0006535 & 0.0005211 & 0.0004020 & 0.0002973 \\ 0.0005014 & 0.0004020 & 0.0003119 & 0.0002322 \\ 0.0003688 & 0.0002973 & 0.0002322 & 0.0001741 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Para la finalización de la implementación del algoritmo del controlador se crea una función de MATLAB para realizar la optimización de la variable de salida ΔU la cual cuenta como variables de entrada la referencia a la que se quiere llegar y una variable de retroalimentación del sistema y solo una salida que será el ΔU correspondiente. En esta función se tiene en cuenta las matrices de optimización calculadas anteriormente para completar el cálculo de la variable de salida, tal y como se muestra en el algoritmo implementado en MATLAB en la tabla 6.

```
function UK = Mpc_Function(ref,mo)
sp = ref;
Yk = mo;
persistent uK_1 xK_1
    if isempty(uK_1), uK_1=0; end
    if isempty(xK_1), xK_1=[0]; end

var = load('predictive');
Phi_Phi = var.Phi_Phi;
Phi_R = var.Phi_R;
Phi_F = var.Phi_F;
Ad = var.Ad;
Bd = var.Bd;
I = eye(4);

x_K = (Ad*xK_1)+(Bd*uK_1);
Xi = [(x_K - xK_1); Yk];

Delta_U= inv(Phi_Phi+I)*((sp*Phi_R)-(Phi_F*(Xi)));
DeltaU= Delta_U(1,1);

xK_1= x_K;
UK = uK_1 + DeltaU;
uK_1= UK;
end
```

Tabla 6 Algoritmo implementado para controlador MPC.

En la figura 13 se evidencia el diagrama de bloques implementado en Simulink para cada prueba realizada, seguido a ésta se muestra las respuestas del controlador MPC implementado con la estructura vista en la tabla 6 y por último, se muestra una comparación

entre las respuestas del controlador PID, el MPC toolbox y el controlador MPC implementado para cada prueba.

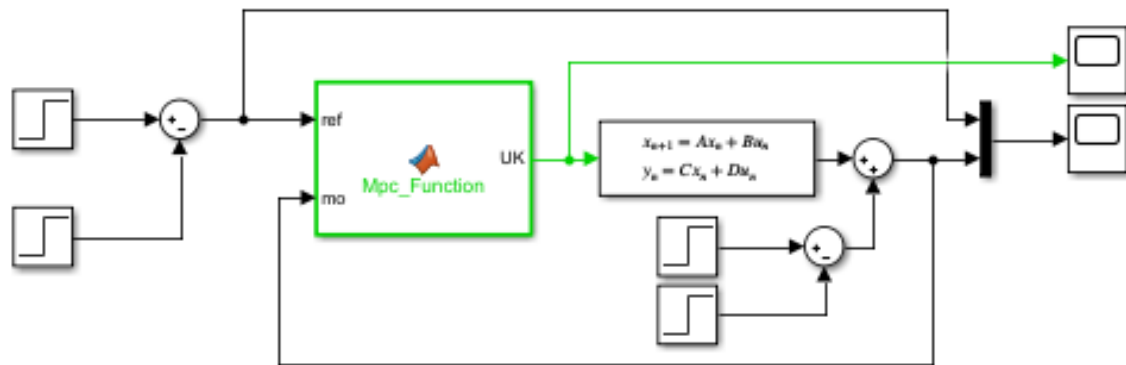


Figura 13 Diagrama de bloques para controlador implementado con función en MATLAB/ Simulink.

Sistema de primer orden

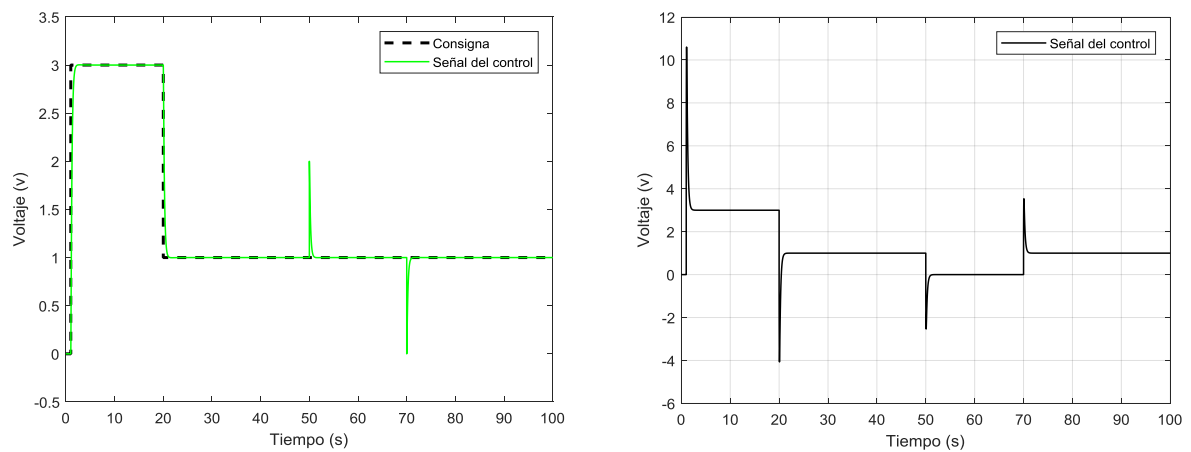


Figura 14 Controlador con función MPC implementada para sistema de primer orden.

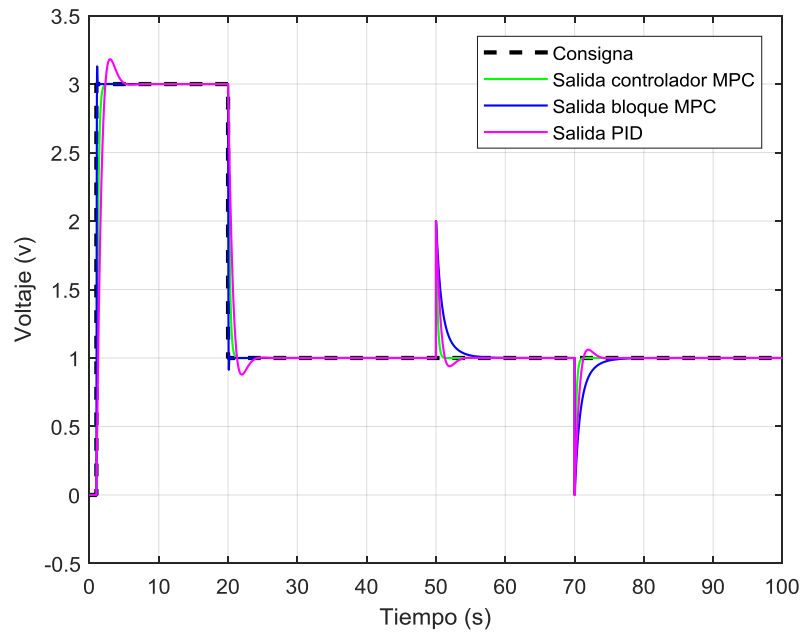


Figura 15 Comparación entre controladores para sistema de primer orden.

En este caso en la figura 14 se ve la efectividad del algoritmo de control puesto que su respuesta logra una estabilización en un tiempo relativamente corto, sin embargo se ve una amplitud significativa en la señal del controlador para poder alcanzar el objetivo. En la figura 15 se evidencia que el controlador MPC con el algoritmo implementado tiene una mejor respuesta frente al controlador PID y MPC toolbox.

Sistema segundo orden

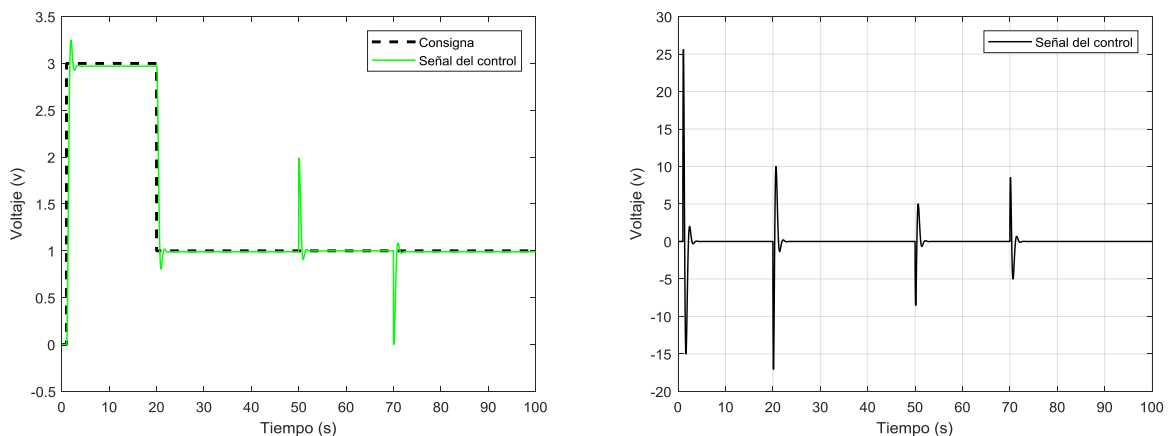


Figura 16 Controlador con algoritmo implementado para sistema con doble integrador.

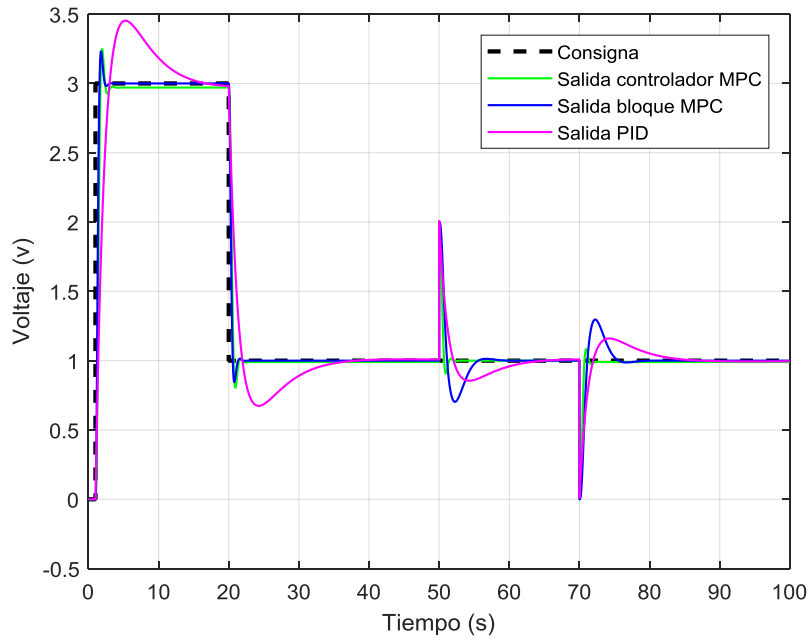


Figura 17 Comparación entre controladores para el sistema de doble integrador.

En la figura 17 se evidencia que hay una diferencia muy marcada entre controladores, sin embargo en la figura 16 se ve una gran amplitud en la señal del controlador lo que refleja un esfuerzo muy grande por alcanzar la señal de referencia.

2.3 DISEÑO ALGORITMO DE CONTROL PREDICTIVO CON RESTRICCIONES

Como se ha evidenciado en las simulaciones anteriores el controlador predictivo hace un gran esfuerzo para alcanzar la señal de referencia, esto puede convertirse en un deterioro significativo para el rendimiento de la planta, sobre todo cuando la señal de salida está expuesta a unas restricciones operativas, para esto, el control predictivo cuenta con la implementación de diferentes restricciones que serán implementadas como desigualdades lineales para las variables de control.

Hay tres tipos de restricciones que comúnmente se aplican, las dos primeras son restricciones impuestas a la variable $u(k)$ y la tercera es impuesta a la variable de salida $y(k)$ o la variable de estados $x(k)$.

RESTRICCIONES EN EL INCREMENTO DE LA VARIABLE DE CONTROL

Éstas son restricciones aplicadas al tamaño en los movimientos o razón de cambio de la variable de control $\Delta u(k)$. Asumiendo que para un sistema con una sola entrada el límite superior es Δu_{max} y el límite inferior es Δu_{min} , las restricciones se especifican de la siguiente forma:

$$\Delta u_{max} \leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{min} \quad (31)$$

La restricción de $\Delta u(k)$ se utiliza para hacer frente a los casos en que la razón de cambio de la amplitud de control está restringida o limitada en valor, un ejemplo de esto es cuando la variable de control solo puede aumentar o disminuir en magnitudes no mayores a 0.1, en este caso se expresaría:

$$-0.1 \leq \Delta u(k) \leq 0.1$$

RESTRICCIONES EN LA AMPLITUD DE LA VARIABLE DE CONTROL

Este tipo de restricción es la más común ya que están ligadas a las limitaciones físicas del sistema, este tipo se expresa:

$$u^{min} \leq u(k) \leq u^{max}$$

Se debe tener en cuenta que la variable $u(k)$ es una variable incremental y no la variable física de salida, esta última es igual a la variable incremental u más su valor de estado estable.

RESTRICCIONES DE SALIDA

Estas restricciones, como su nombre lo indica, son aplicadas a la salida del controlador, suponiendo que la salida $y(k)$ tiene un límite superior y^{max} y un límite inferior y^{min} , las restricciones de las salida se expresan:

$$y^{min} \leq y(k) \leq y^{max} \quad (32)$$

En la mayoría de los casos este tipo de restricciones se implementan acompañadas de una variable de holgura $sv < 0$, de tal forma que las restricciones se expresan:

$$y^{min} - sv \leq y(k) \leq y^{max} - sv \quad (33)$$

La principal razón para usar esta variable de holgura es para controlar que las variables de salida o las variables de control incremental violen sus propias restricciones y así generar problemas de conflicto de restricciones [15].

Para aplicar las restricciones al controlador se resolvió un problema de programación cuadrática en donde por medio de una ecuación de minimización se incorporan las restricciones expresadas en desigualdades, en este caso se usó restricciones para el cambio de la variable de control y en su magnitud. La ecuación de minimización se expresa así:

$$J = \frac{1}{2} \eta^T H \eta + \eta^T f \quad (34)$$

$$A_{cons} \eta \leq b \quad (35)$$

Donde H y f son matrices que parten de la función de optimización, η es la variable de optimización, es decir ΔU , y su tamaño estará dado por el horizonte de control. $A\eta$ y b son las matrices que contienen las restricciones que se aplican al sistema [17].

Para la creación de la función en MATLAB se utiliza el algoritmo de Hildreth propuesto en [15] que tiene como variables de entrada, las matrices planteadas anteriormente y como salida la variable de optimización que es la salida del controlador, tal y como se evidencia en el algoritmo implementado en MATLAB que muestra la tabla 7.

```
function UK = Mpc_Function(ref,mo)
sp = ref;
Yk = mo;
persistent uK_1 xK_1
persistent Nc Np R Ad Bd Phi_F
Phi_Phi Phi_R carga
    if isempty(uK_1), uK_1=0; end
    if isempty(xK_1), xK_1=[0]; end

if isempty(carga)
carga=0; Nc=4;
var = load('predictive');
Phi_Phi = var.Phi_Phi;
Phi_R = var.Phi_R;
Phi_F = var.Phi_F;
Ad = var.Ad;
Bd = var.Bd;
end

Nc=4; Np=50;
rw=500;

%%Restricciones
dU_max=5; dU_min=dU_max;%slew rate
constraints
Umax=5; Umin=-Umax; % putting limits
to the output signal
Ai=0*ones(4,Nc);Ai(1,1)=1; Ai(2,1)=-1; Ai(3,1)=1; Ai(4,1)=-1; %2
constraint of deltaU
b=[dU_max; dU_min; Umax-uK_1; -
Umin+uK_1];

x_K = (Ad*xK_1)+(Bd*uK_1);
Xi = [(x_K - xK_1); Yk];

f=-(Phi_R*sp-(Phi_F*Xi));
H= Phi_Phi+rw*eye(Nc,Nc);
DeltaU2=QPhild(H,f,Ai,b);
DeltaU= DeltaU2(1,1);

xK_1= x_K;
UK = uK_1 + DeltaU;
uK_1= UK;
carga = carga+1;
end

function eta=QPhild(H,f,A_cons,b);
[nl,ml]=size(A_cons);
eta=-H\f;
kk=0;
for i=1:nl
if (A_cons(i,:)*eta>b(i))
kk=kk+1;
else
kk=kk+0;
end
end
if (kk==0) return; end
P=A_cons*(H\A_cons');
d=(A_cons*(H\f)+b);
[n,m]=size(d);
x_ini=zeros(n,m);
lambda=x_ini;
al=10;
for km=1:38
lambda_p=lambda;
for i=1:n
w= P(i,:)*lambda-P(i,i)*lambda(i,1);
w=w+d(i,1);
la=-w/P(i,i);
lambda(i,1)=max(0,la);
end
al=(lambda-lambda_p)'*(lambda-
lambda_p);
if (al<10e-8); break; end
end
eta=-H\f -H\A_cons'*lambda;
end
```

Tabla 7 Algoritmo del controlador MPC con restricciones.

A continuación se muestra las pruebas realizadas del controlador MPC con restricciones a las plantas utilizadas en pruebas anteriores, además se muestra la comparación con el controlador PID, la herramienta de Toolbox de MATLAB y el controlador MPC sin restricciones.

Sistema primer orden

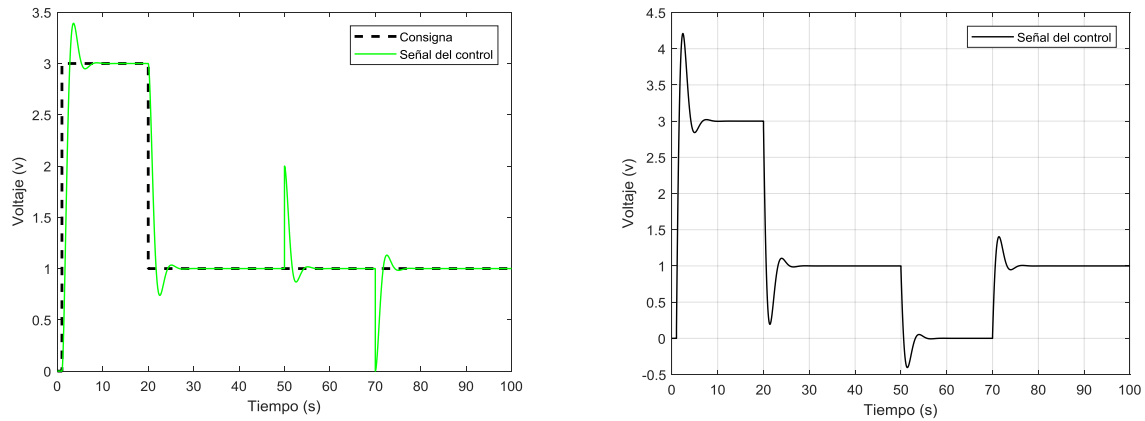


Figura 18 Respuesta controlador MPC con restricciones al sistema de primer orden.

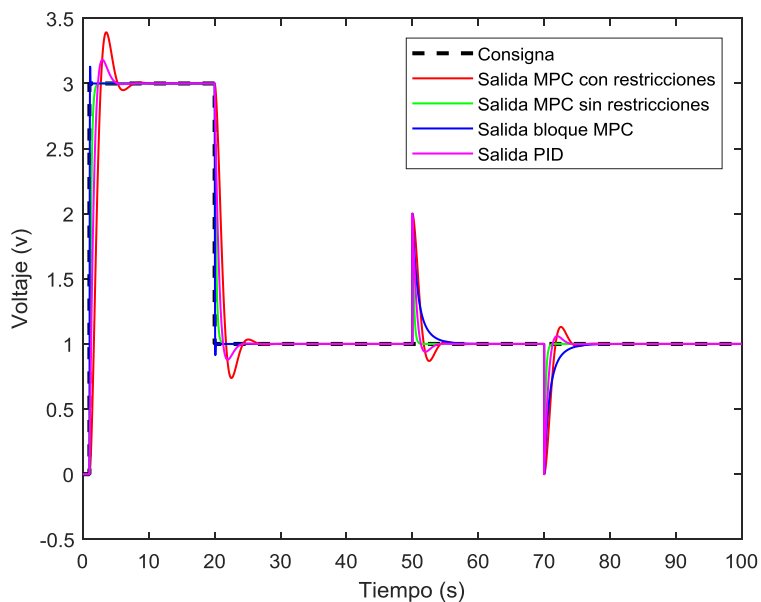


Figura 19 Comparación señal de salida de cada comparador para el sistema de primer orden.

3 RESULTADOS

3.1 RESULTADOS DE SIMULACIÓN

El bloque desarrollado en la sección anterior es implementado al sistema del péndulo invertido con un tiempo de muestreo de 0.1 segundos, un horizonte de control de 4 y un horizonte de predicción de 10. Como restricciones se maneja un $R_w = 1$ y las restricción de para ΔU y en la señal de salida de la siguiente manera:

$$-1.2 \leq \Delta U \leq 1.2$$

$$-\pi \leq u(k) \leq \pi$$

El diagrama de bloques para MATLAB/Simulink se muestra a continuación.

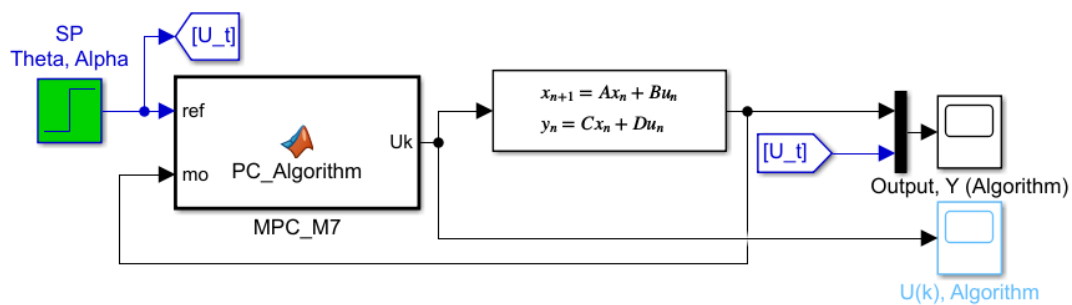


Figura 20 Controlador MPC con restricciones para péndulo invertido simple.

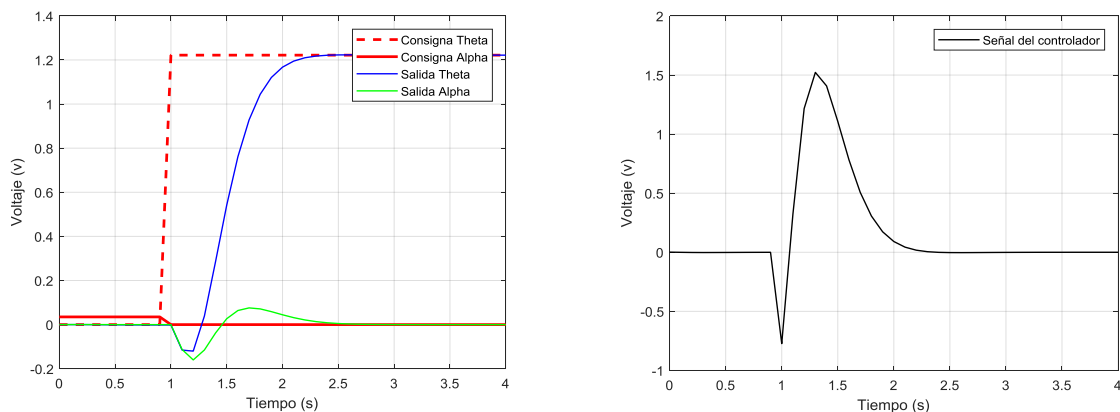


Figura 21 Respuesta controlador MPC con restricciones para péndulo invertido.

3.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para realizar los realizar la parte experimental en la planta del péndulo invertido de Quanser es necesario modificar la implementación inicial que brinda la empresa para trabajar la planta, esta modificación se realiza para obligar al controlador a funcionar dentro de un rango específico, esto principalmente porque el tipo de sistema con el que se trabaja requiere un control local alrededor de un punto de operación puesto que es un sistema no lineal y muy inestable. La restricción es implementada por medio de interruptores, tal y como muestra la figura 22, este bloque cuenta con un rango de operación como señal de entrada, interpretada en radianes, y una toma de decisión como señal de salida. Esta toma

[illegible]

Para los experimentos se evalúan varios escenarios variando dos factores importantes en el algoritmo planteado, el horizonte de predicción y el R_w , como se muestra en la tabla 9. En cada experimento se trabaja con los valores de sintonización que se muestran en la tabla 8:

Tabla 8 Tabla de valores fijos para experimentos.

Tabla 9 Tabla de variación de parámetros para controlador predictivo.

Experimento 1

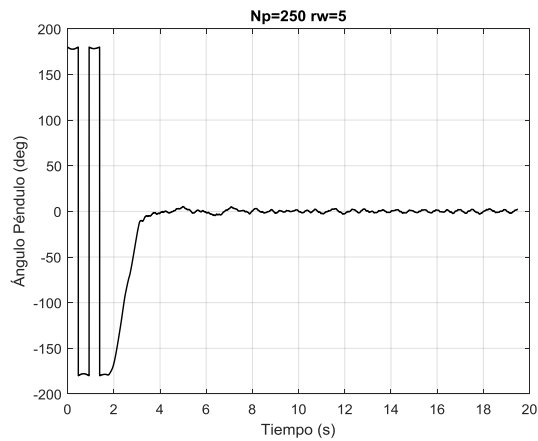


Figura 23 Ángulo del péndulo para el primer experimento

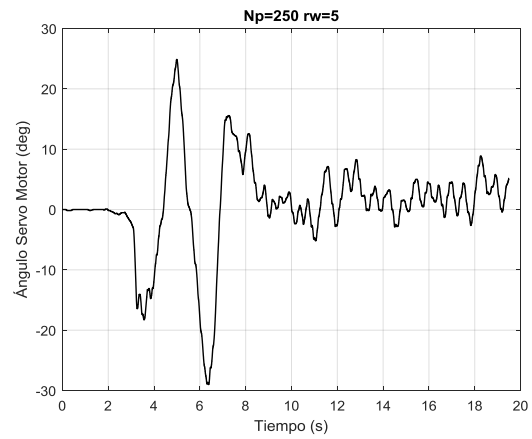


Figura 24 Ángulo del servo motor para el primer experimento

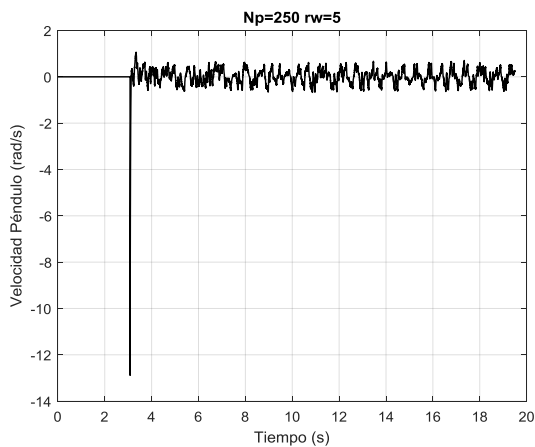


Figura 25 Velocidad del péndulo para primer experimento

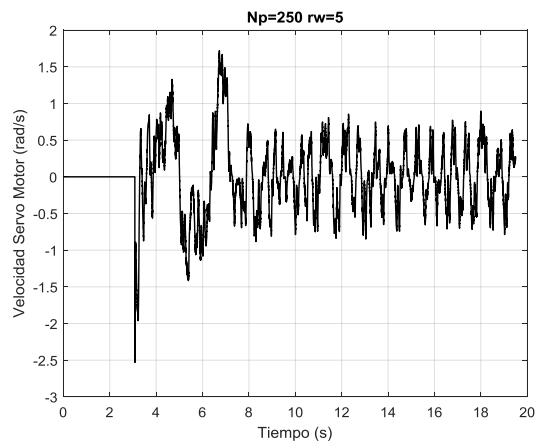


Figura 26 Velocidad del servo motor para primer experimento

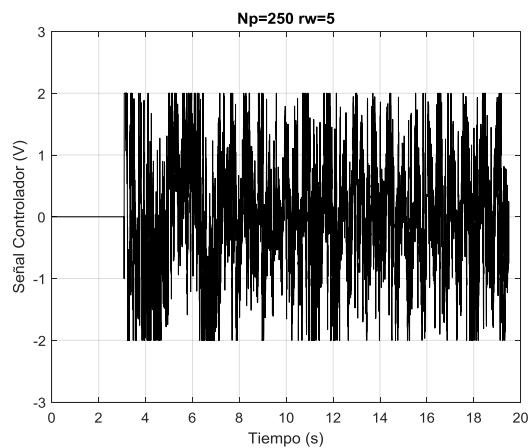


Figura 27 Señal de salida del controlador MPC para el primer experimento

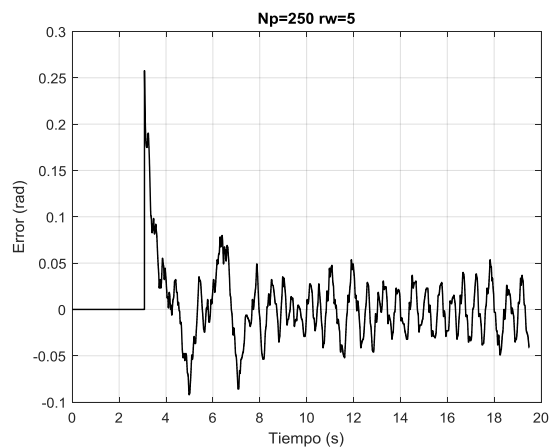


Figura 28 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para primer experimento

Experimento 2

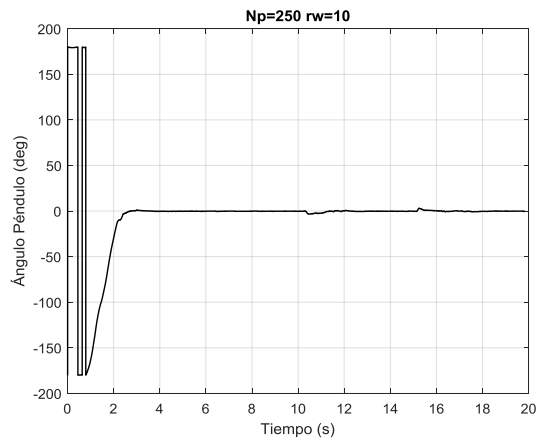


Figura 29 Ángulo del péndulo para segundo experimento

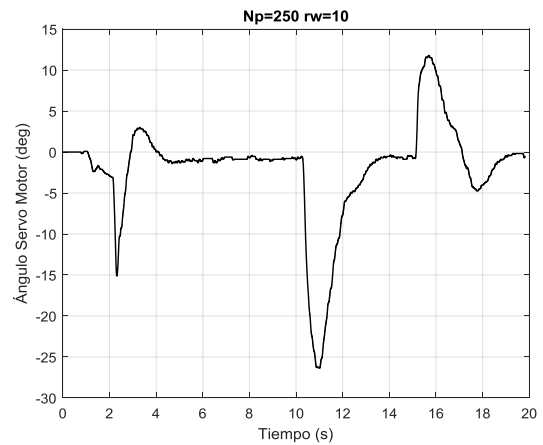


Figura 30 Ángulo del servo motor para el segundo experimento

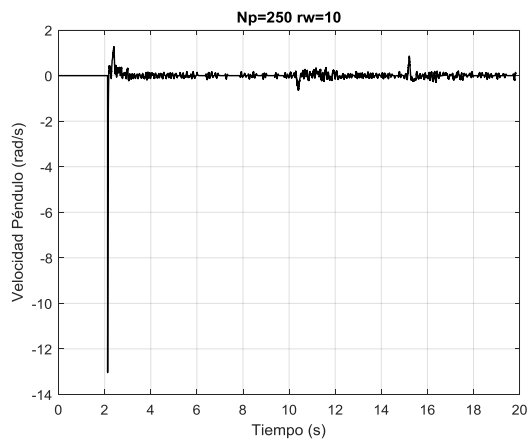


Figura 31 Velocidad del péndulo para segundo experimento

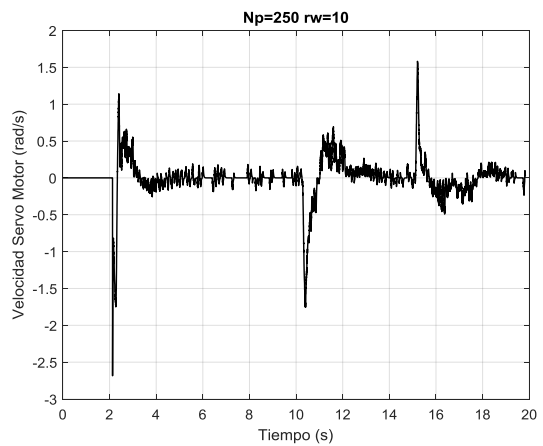


Figura 32 Velocidad del servo motor para segundo experimento

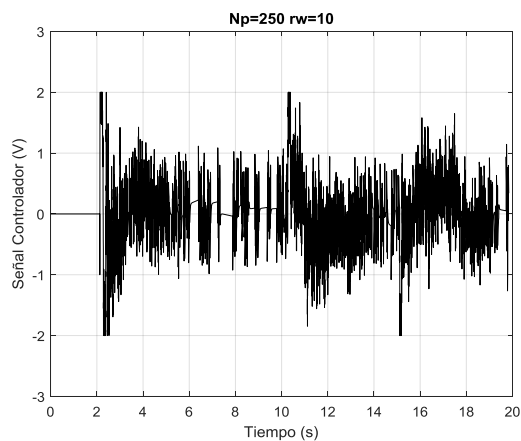


Figura 33 Señal del controlador MPC para segundo experimento

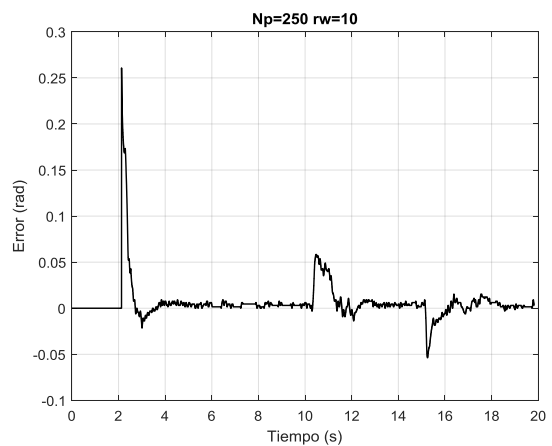


Figura 34 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para segundo experimento

Experimento 3

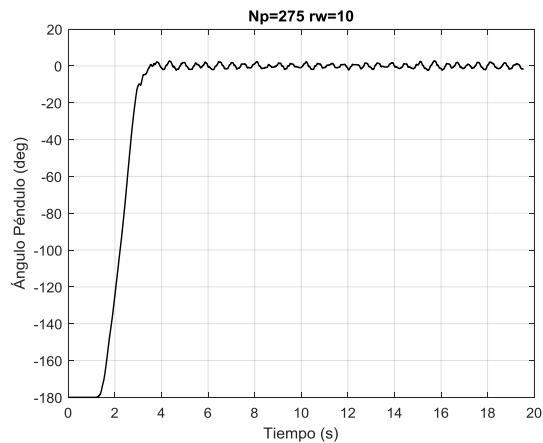


Figura 35 Ángulo del péndulo para tercer experimento

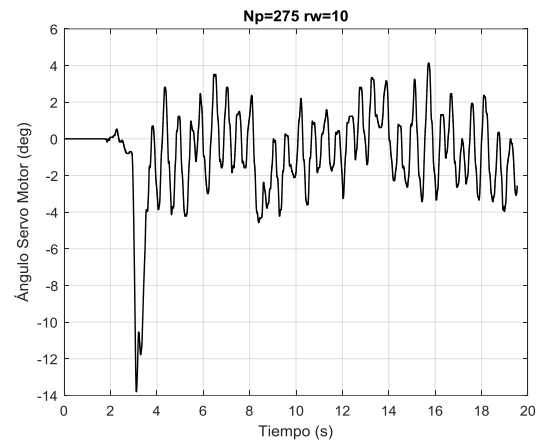


Figura 36 Ángulo del servo motor para tercer experimento

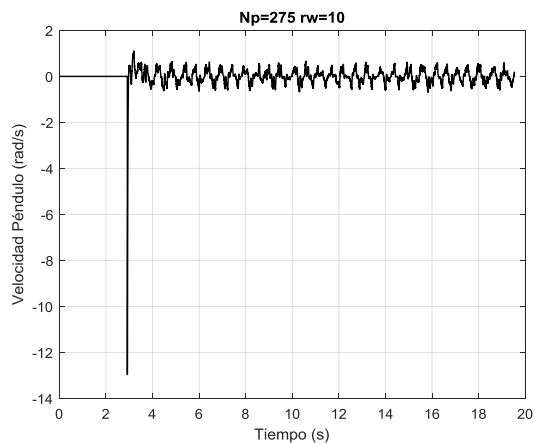


Figura 37 Velocidad del péndulo para tercer experimento

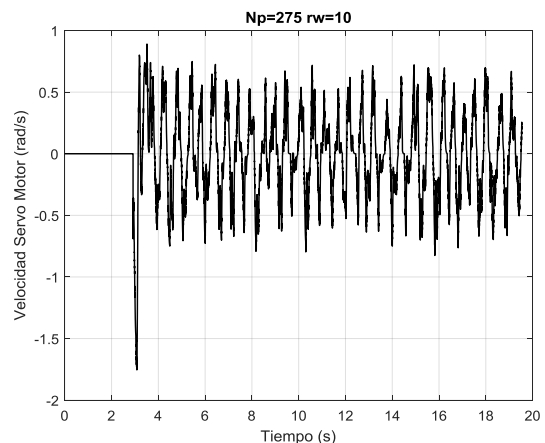


Figura 38 Velocidad del servo motor para tercer experimento

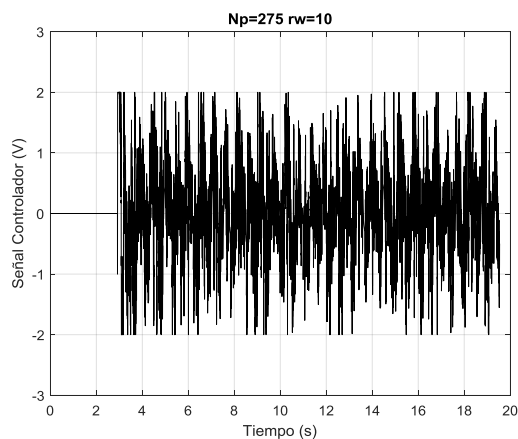


Figura 39 Señal de salida del controlador MPC para tercer experimento

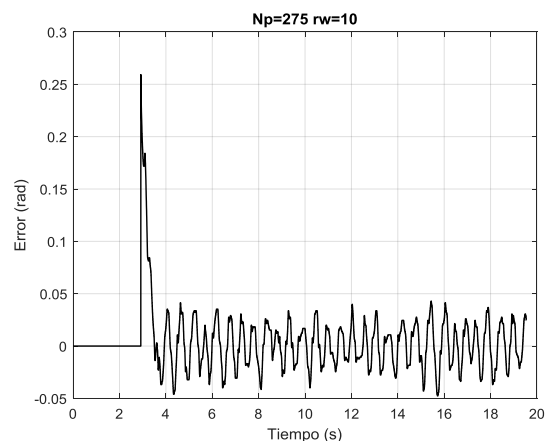


Figura 40 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para el tercer experimento

Experimento 4

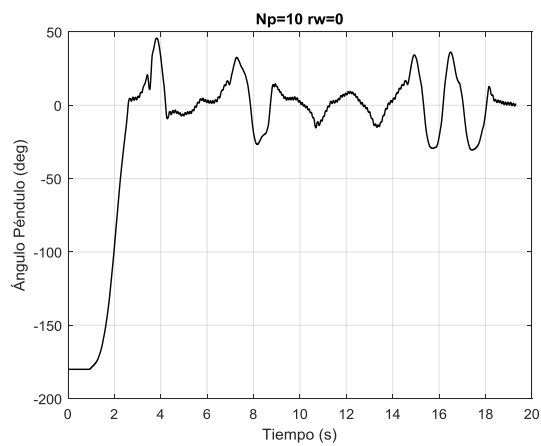


Figura 41 Ángulo del péndulo para cuarto experimento

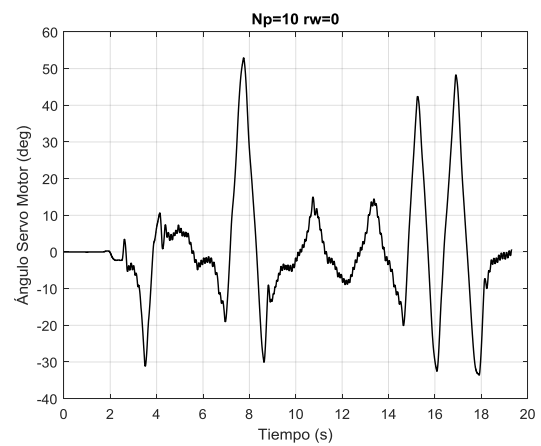


Figura 42 Ángulo del servo motor para el cuarto experimento

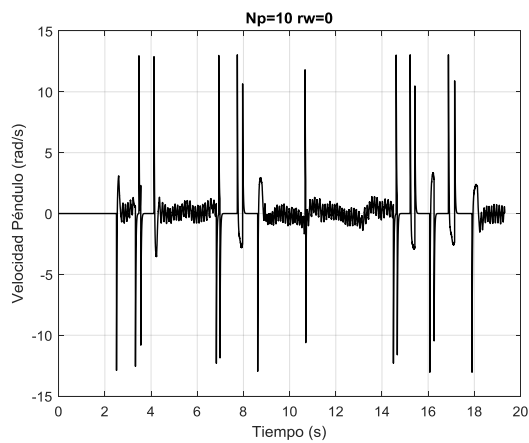


Figura 43 Velocidad del péndulo para el cuarto experimento

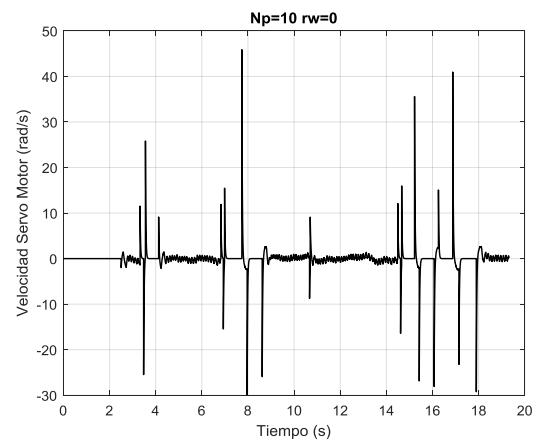


Figura 44 Velocidad del servo motor para el cuarto experimento

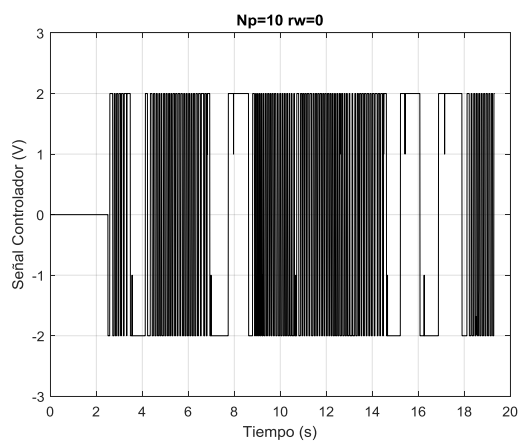


Figura 45 Señal de salida del controlador MPC para el cuarto experimento

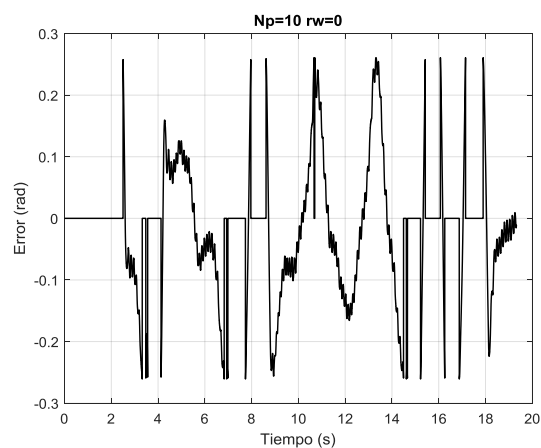


Figura 46 Error del ángulo del péndulo respecto a la consigna para el cuarto experimento

A modo de comparación se realiza una toma de datos con el control implementando por la empresa Quanser, el cual es un control por retroalimentación de estados que se muestra en la figura 47. Se define un estado de referencia [16]:

$$x_d = [\theta_d \ 0 \ 0 \ 0]$$

donde θ_d es el ángulo del servo motor deseado, el controlador es:

$$u = K(x_d - x) \quad (36)$$

Siendo K:

$$K = [-5.2612, 30.0353, -2.6407, 3.5405] \quad (37)$$

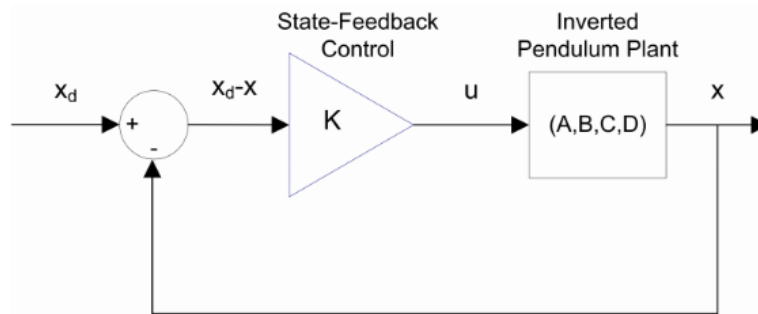


Figura 47 Control por retroalimentación de estados [16]

Controlador por Retroalimentación de estados VS Controlador MPC

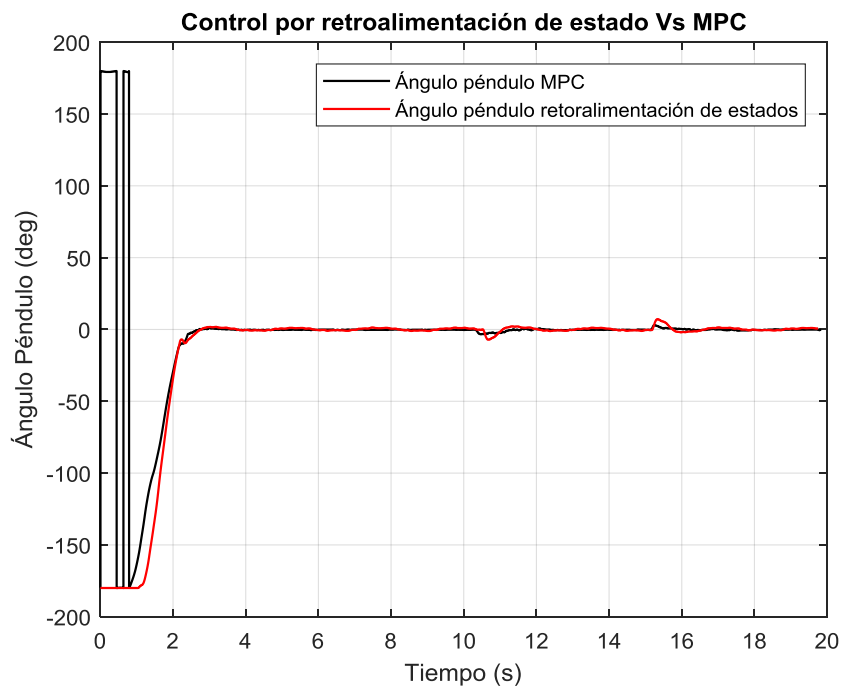


Figura 48 Comparación entre controladores para ángulo del péndulo.

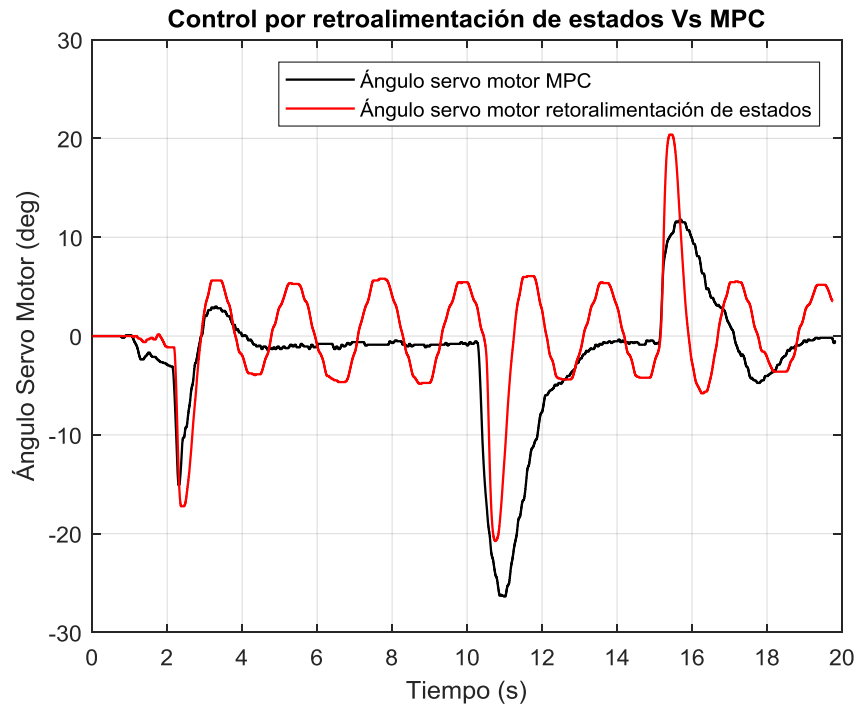


Figura 49 Comparación entre controladores para ángulo del servo motor.

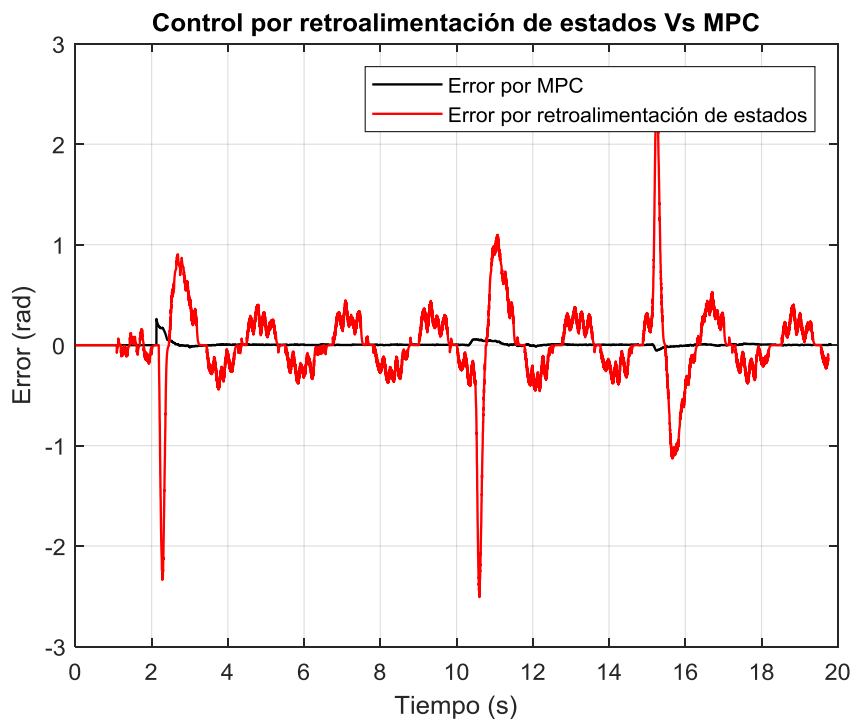


Figura 50 Comparación entre controladores para la señal de error.

3.3 ANALISIS DE RESULTADOS

Como método de cuantificación del error se utiliza la herramienta estadística RMSE (Root Mean Square Error) el cual cuantifica el error por medio de la raíz cuadrada de la diferencia entre la señal de referencia y la señal medida. La ecuación que describe este método está definida en [17] de la siguiente manera:

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Y_k - \hat{Y}_k)^2}$$

donde N es la cantidad muestras, Y_k es el valor teórico, es decir, la consigna y $\hat{Y}_k$ es el valor medido.

	Ángulo Péndulo	Ángulo Servo motor
Experimento 1	2.1124	8.0566
Experimento 2	1.3004	6.4827
Experimento 3	1.5030	2.4906
Experimento 4	14.6892	15.1272
Retroalimentación de estados	1.8731	5.6200

Tabla 10 Tabla de cuantificación de errores.

En el primer experimento se puede ver en las gráficas 23 y 25 que el controlador mantiene la posición de la variable principal, es decir el ángulo del péndulo, logrando así un error mínimo visto en la gráfica 28, pero en las gráficas 24 y 26 se nota una inestabilidad en el control de la variable del servo motor generando un gran esfuerzo para el controlador reflejado en la gráfica 27, esto debido al número elevado de predicciones y la libertad de razón de cambio por un valor pequeño en el parámetro de R_w .

En el segundo experimento se logran los mejores resultados con respecto a los demás experimentos realizados, esto reflejado en la tabla 10 y en la gráfica 34 donde se evidencia un error mínimo en la variable principal. Al tener control completo de la planta, el esfuerzo del controlador disminuye, como se ve en la gráfica 33 y su estabilidad se logra completamente para las dos variables, esto evidenciado en las gráficas 29 y 30.

En el tercer experimento se identifica un comportamiento similar al primer experimento pues logra un control óptimo en la variable principal, esto identificado en la gráfica 35 y comprobado al revisar la gráfica 40, puesto que su error es mínimo, pero al analizar las gráficas 36 y 38 se evidencia el poco control sobre la variable del servo motor y el esfuerzo del controlador reflejado en la gráfica 39, esto por la relación expuesta para el primer experimento, a gran número de predicciones mayor valor para el parámetro de penalización R_w .

En el cuarto experimento se realizó una prueba con un valor pequeño en el horizonte de predicción y anulando el R_w , en las gráficas 41 y 42 se puede observar que no tiene ningún control sobre la planta por la falta de predicción en su comportamiento. En la gráfica 45 se identifica el gran esfuerzo que hace el controlador para encontrar la posición deseada. Según el modelado que se obtuvo del sistema, el controlador predictivo, para su buen

funcionamiento, necesita un horizonte de predicción muy alto, con esto asegura el instante inmediatamente siguiente hasta la nueva toma de datos.

En cuanto a la comparación entre el controlador por retroalimentación de estados y el controlador MPC, se puede ver en la gráfica 48 que los dos cumplen el objetivo de mantener controlada la planta en el punto de referencia deseado, pero la diferencia se marca en las gráficas 49 y 50, en donde el controlador por retroalimentación mantiene una oscilación constante para la variable del servo motor, lo que genera un error elevado a comparación con el controlador MPC, el cual posee un error mínimo, esto también evidenciado en la tabla 10.

4 CONCLUSIONES

- Se evidencia que la implementación práctica del algoritmo del controlador predictivo es más compleja que la del controlador PID debido a la implementación numérica del modelo de predicción y la función de coste a minimizar. Tanto el modelo como la función de coste son partes esenciales para el algoritmo de solución del problema de optimización de la ley de control.
- Para incorporar las restricciones al controlador y obtener la salida deseada es necesario resolver un problema de programación cuadrática, lo que hace más complejo de implementar este tipo de estrategias, pero que es una solución para el manejo de sistemas complejos como el péndulo invertido.
- Para trabajar simulaciones en el ambiente de MATLAB el bloque del MPC Toolbox es bastante útil para el manejo de plantas con una complejidad mayor, a diferencia del controlador PID, puesto que cuando el sistema consta de tres o más polos, se deben implementar varios bloques PID para lograr el objetivo, proceso que resulta tedioso cuando se tiene una herramienta como SISOTOOL de Matlab que cumple el objetivo con solo un bloque de configuración monovariable.
- Al implementar el controlador MPC con restricciones se evidencia que su comportamiento es mejor respecto al controlador MPC sin restricciones, puesto que este último limita su funcionamiento a la sintonización de los parámetros de horizonte de control y horizonte de predicción, desventaja frente al controlador MPC con restricciones el cual tiene más control de la planta mediante la sintonización de rangos máximos y mínimos en la salida o la razón de cambio de la variable.
- Para el análisis de desempeño de la planta ante la presencia de una estrategia avanzada de control, se utilizó una metodología que buscaba ver el comportamiento del controlador predictivo variando los parámetros de sintonización que tuvieran mayor impacto en el funcionamiento de la planta en lazo cerrado.
- En la toma de datos se evidenció una relación entre el horizonte de predicción y el parámetro de penalización R_w , en la cual, a mayor valor del horizonte de predicción, mayor valor en el parámetro R_w en aras de disminuir el rizado de la señal de la variable controlada. También se evidenció, una relación entre el horizonte de control y el horizonte de predicción para asegurar el buen funcionamiento del controlador, en donde el horizonte de predicción debe ser por lo menos 4 veces mayor al horizonte de control.

- En la comparación entre el controlador MPC con restricciones y el controlador por retroalimentación de estados se realizaron pruebas con perturbaciones al sistema, se evidenció una buena respuesta por ambos controladores frente a estos cambios y en la disminución del error en el estado estacionario. En este caso se ve la efectividad del controlador predictivo ya que logra una estabilidad total del péndulo en un tiempo muy corto (___ s), a diferencia del controlador por retroalimentación de estados que permanece en oscilación constante.

TRABAJO FUTURO

- Evaluar desde la función de coste inicial una optimización de manera que sea posible implementar el controlador con horizontes de predicción más pequeños, ya que, al trabajar con matrices de optimización tan grandes, en este caso matrices de dimensiones 500x6, es posible que al implementarlo en otro tipo de dispositivo electrónico, éste no sea capaz de procesar tal cantidad de datos.
- Escalar el controlador para una implementación con el doble péndulo invertido.
- Mejorar el algoritmo para la creación de las matrices del modelo aumentado y las matrices de optimización, ya que en el momento no es una formulación general que sirva para sistemas MIMO de más de tres variables de entradas y salida.

REFERENCIAS

- [1] “Modelo de control predictivo.” [Online]. Available: <https://es.slideshare.net/sergioluissanchezbarrios/modelo-de-control-predictivo>. [Accessed: 29-Oct-2018].
- [2] E. Camacho and C. Bordons, “Control predictivo: Pasado, presente y futuro,” *Riaii*, vol. 1, no. 3, pp. 5–28, 2010.
- [3] Alejandro Muños Cueva, “Control Predictivo. Una técnica de control que mira al futuro | Fundación Ayesa,” *Mar 6, 2017*. [Online]. Available: <https://www.fundacionayesa.org/control-predictivo-una-tecnica-de-control-que-mira-al-futuro/>. [Accessed: 29-Oct-2018].
- [4] J. M. Vargas Lara, “Control predictivo multivariable: evolución histórica y conceptos.”
- [5] D. Saez and A. Cipriano, “Design of Fuzzy Model based Predictive Controllers and its Application to an Inverted Pendulum,” *Proc. 6th Int. Fuzzy Syst. Conf.*, pp. 915–919, 1997.
- [6] L. Magni, R. Scattolini, and K. J. Åström, “GLOBAL STABILIZATION OF THE INVERTED PENDULUM USING MODEL PREDICTIVE CONTROL,” *IFAC Proc. Vol.*, vol. 35, no. 1, pp. 141–146, Jan. 2002.
- [7] C.-N. Lu, C.-C. Tsai, M.-C. Tsai, K. V. Ling, and W.-S. Yao, “Application of Model Predictive Control to Parallel-Type Double Inverted Pendulum Driven by a Linear Motor,” in *IECON 2007 - 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2007, pp. 2904–2909.
- [8] M. Askari, H. A. F. Mohamed, M. Moghavvemi, and S. S. Yang, “Model predictive control of an inverted pendulum,” in *2009 International Conference for Technical Postgraduates (TECHPOS)*, 2009, pp. 1–4.
- [9] Q. Qian, D. Dongmei, L. Feng, and T. Yongchuan, “Stabilization of the double inverted pendulum based on discrete-time model predictive control,” in *2011 IEEE International Conference on Automation and Logistics (ICAL)*, 2011, pp. 243–247.

- [10] M. Ghanavati, V. J. Majd, and M. Ghanavati, "Control of Inverted Pendulum system by using a new robust model predictive control strategy," *2011 Int. Sib. Conf. Control Commun. SIBCON 2011 - Proc.*, vol. 201, pp. 27–32, 2011.
- [11] C. Ekaputri and A. Syaichu-Rohman, "Implementation model predictive control (MPC) algorithm-3 for inverted pendulum," *Proc. - 2012 IEEE Control Syst. Grad. Res. Colloquium, ICSGRC 2012*, no. Icsgrc, pp. 116–122, 2012.
- [12] P. Bakarac, M. Klauco, and M. Fikar, "Comparison of inverted pendulum stabilization with PID, LQ, and MPC control," in *2018 Cybernetics & Informatics (K&I)*, 2018, pp. 1–6.
- [13] J. Aracil and F. Gordillo, "El Péndulo Invertido: Un Desafío Para El Control No Lineal," *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind.*, vol. 2, no. figura 2, p. 12, 2005.
- [14] "Rotary Inverted Pendulum - User Manual | Electronic Waste | Amplifier." [Online]. Available: <https://es.scribd.com/document/250111287/Rotary-Inverted-Pendulum-User-Manual>. [Accessed: 29-Oct-2018].
- [15] L. Wang, *Model predictive control system design and implementation using MATLAB®*. Springer, 2009.
- [16] Quanser Inc., "Workbook: Rotary Pendulum, Instructor Version," p. 60, 2011.
- [17] D. Dissertation and E. G. Restrepo, "Universitat politècnica de catalunya," 2015.