



CARTILLA DE EJERCICIOS ESTÁTICA

Óscar Felipe Sáenz Pardo
Juan Sebastián Gutiérrez Salinas
Fabio Orlando Gutiérrez Orjuela



CARTILLA DE EJERCICIOS ESTÁTICA

CARTILLA DE EJERCICIOS ESTÁTICA

Óscar Felipe Sáenz Pardo
Juan Sebastián Gutiérrez Salinas
Fabio Orlando Gutiérrez Orjuela



Sáenz Pardo, Óscar Felipe
Cartilla de ejercicios Estática / Óscar Felipe Sáenz Pardo. [y otros dos autores]. - Villavicencio, Universidad Santo Tomás, 2021.

72 páginas

e-ISBN: 978-958-782-486-5

1. Estática 2. Diseño estructural. 3. Ingeniería Civil. 4. Estructuras. I. Gutiérrez Salinas, Juan Sebastián. II. Gutiérrez Orjuela, Fabio Orlando. III. Universidad Santo Tomás (Colombia)

SCDD edición 23
620.103

CO-ViUST

Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación CRAI, Universidad Santo Tomás, Villavicencio.

© Óscar Felipe Sáenz Pardo, Juan Sebastián Gutiérrez Salinas,
Fabio Orlando Gutiérrez Orjuela, 2021,
© Universidad Santo Tomás, 2021

Ediciones USTA
Bogotá, D. C., Colombia
Carrera 9 n.º 51-11
Teléfono: (+571) 587 8797, ext. 2991
editorial@usantotomas.edu.co
<http://ediciones.usta.edu.co>

Corrección de estilo: Carlos Augusto Jaramillo Parra
Diseño y diagramación: Alexandra Romero Cortina

Hecho el depósito que establece la ley

e-ISBN: 978-958-782-486-5
Primera edición, 2021

Esta obra tiene una versión de acceso abierto disponible en el Repositorio Institucional de la Universidad Santo Tomás: <https://repository.usta.edu.co/>

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin la autorización expresa del titular de los derechos.

Impreso en Colombia • *Printed in Colombia*

Contenido

Presentación	7
Temáticas de los ejercicios resueltos	9
Descomposición de vectores	9
Equilibrio de partículas	15
Equilibrio de cuerpos rígidos	28
Momento con respecto a un punto	28
Momento con respecto a un eje	28
Sistemas de fuerzas equivalentes	29
Centroides	29
Cerchas	29
Momento polar de Inercia	30
Producto de inercia y círculo de Mohr	30

Presentación



En un momento decisivo para la Ingeniería Civil en Colombia y en consecuencia a recientes fallos en las obras civiles originados por deficiencia en el diseño, surge la necesidad de complementar el aprendizaje de los conceptos más básicos de la ingeniería.

De esta motivación surge la primera edición de la *Cartilla de ejercicios Estática*.

Una herramienta de aprendizaje para estudiantes de Ingeniería Civil con ejercicios resueltos paso a paso que contienen el conocimiento básico sobre temas de interés en la materia.

Se entiende la estática como el pilar fundamental del conocimiento en el diseño estructural. El estudio del comportamiento de los cuerpos en estado de reposo y en equilibrio, que permite determinar las fuerzas internas y externas que actúan sobre un elemento y sobre un cuerpo.

La cartilla está dirigida a estudiantes y docentes de las diferentes ingenierías que tengan el deseo de profundizar en las temáticas propuestas.

Organización de los ejercicios

7

Se espera que los estudiantes que empleen el texto hayan cursado cálculo vectorial. Los ejercicios de descomposición de fuerzas y equilibrio de partículas sirven para repasar los conceptos de dicho curso. Para equilibrio de cuerpo rígido y momento respecto a un punto se presentan ejercicios en el plano bidimensional. Hay ejercicios de momento respecto a un eje, también denominado momento torsor; y ejercicios de aplicación de sistemas equivalentes de fuerzas en dos dimensiones y en tres dimensiones.

El docente también podrá utilizar la cartilla como guía de clase con ejercicios resueltos para los temas de centroides de áreas, cerchas, momento polar de inercia y producto de Inercia.

Para finalizar se presenta un ejercicio de Inercia respecto a ejes que rotan utilizando círculo de Mohr.

Contenido de la cartilla

El contenido de la cartilla es inédito y los ejercicios fueron planteados y solucionados por sus autores. Cualquier inquietud, aclaración, consejo o error que quiera comunicar sobre la cartilla puede realizarla al correo oscarsaenz@usantotomas.edu.co

Respecto a los autores

Óscar Felipe Sáenz Pardo

Correo institucional: oscarsaenz@usantotomas.edu.co

Docente del área de Estructuras

USTA Villavicencio

Juan Sebastián Gutiérrez Salinas

Correo institucional: juansgutierrez@usantotomas.edu.co

Estudiante Facultad de Ingeniería Civil

USTA Villavicencio

Fabio Orlando Gutiérrez Orjuela

Correo institucional: fabio.gutierrez@usantotomas.edu.co

Estudiante Facultad de Ingeniería Civil

USTA Villavicencio

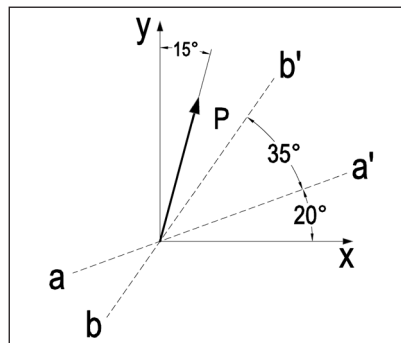
8



Temáticas de los ejercicios resueltos

Problema resuelto n.º 1. Descomposición de vectores

Figura 1



9

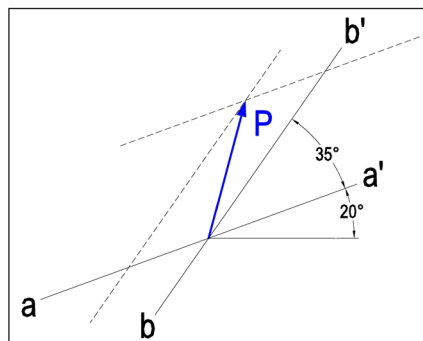
Descomponer la Fuerza P de 50 kN en dos fuerzas dirigidas sobre los ejes $a-a'$ y $b-b'$

Solución

Este problema se puede resolver de distintas formas. Una es mediante la ley del paralelogramo, con la cual se realizará el ejercicio a continuación:

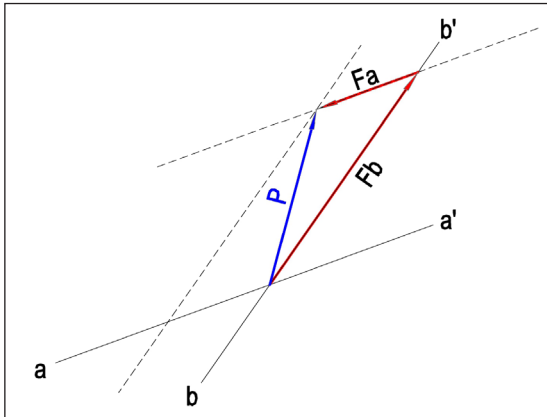
Este método de solución funciona siguiendo este y otro criterio el cual, indica que las fuerzas a lo largo de los ejes establecidos deben estar de tal manera que la cabeza de una de estas fuerzas vectoriales se una en el vértice del paralelogramo con la cola de la otra (Figura 3), así:

Figura 2



Se trazan líneas paralelas a los dos ejes de referencia (Figura 2), consiguiendo una figura de paralelogramo con la magnitud de la fuerza P como valor de una de las diagonales, luego se determina la magnitud de cada uno de los lados del paralelogramo, los cuales representan las fuerzas paralelas a los ejes que sumadas vectorialmente conforman el vector inicial P .

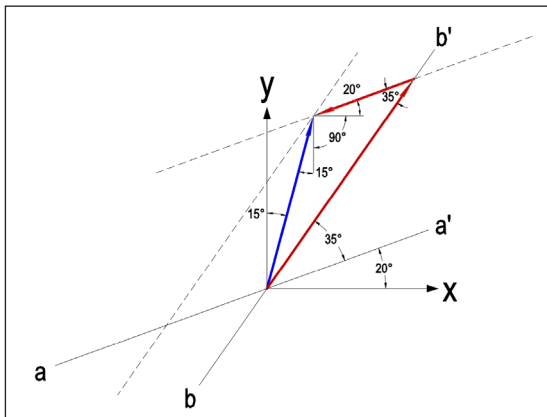
Figura 3



Ahora bien, teniendo estas consideraciones, se puede resolver el ejercicio tanto de manera gráfica como trigonométrica. De cualquier manera, se obtendrá el mismo resultado; sin embargo, la solución trigonométrica brinda un valor exacto a diferencia de la solución gráfica, pero que aun así es importante para chequear el ejercicio si se desarrolla de manera trigonométrica.

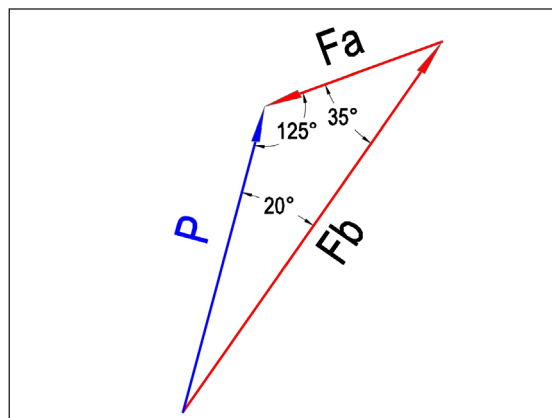
Es necesario entonces tener en cuenta algunos ángulos que mediante semejanzas pueden ser obtenidos para el desarrollo del ejercicio. Los ángulos necesarios (Figura 4) son los ángulos internos del triángulo formado por dos lados del paralelogramo y la diagonal de misma magnitud que la fuerza P .

Figura 4



Con los ángulos, se puede hallar el valor de las fuerzas sobre los ejes mediante la ley de senos:

Figura 5



$$\frac{50 \text{ kN}}{\text{sen}(35^\circ)} = \frac{F_a}{\text{sen}(20^\circ)} = \frac{F_b}{\text{sen}(125^\circ)}$$

$$F_a = \frac{50 \text{ kN} \cdot \text{sen}(20^\circ)}{\text{sen}(35^\circ)} = 29,8 \text{ kN}$$

$$F_b = \frac{50 \text{ kN} \cdot \text{sen}(125^\circ)}{\text{sen}(35^\circ)} = 71,5 \text{ kN}$$

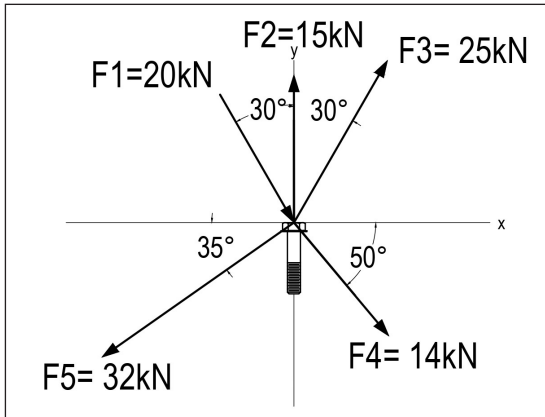
11



Problema resuelto n.º 2.

Descomposición de vectores

Figura 6



Sobre la puntilla actúan 5 fuerzas con diferentes sentidos (Figura 6), determinar las componentes de la fuerza resultante, su magnitud y su dirección.

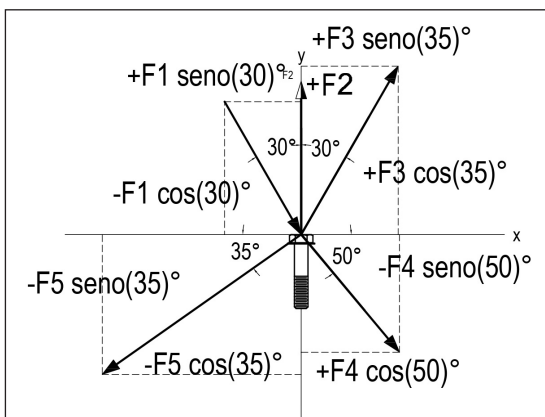
Solución

12

Paso 1. Trigonometría

Las componentes en x y y de cada una de las fuerzas actuantes sobre la puntilla se pueden determinar mediante trigonometría como se representan en la siguiente imagen.

Figura 7



La naturaleza que lleve el número escalar de cada componente irá definido por la dirección que esta tenga con respecto al eje de coordenadas, siendo habitual tomar los sentidos derecha y arriba para denotar las fuerzas positivas en los ejes x y y respectivamente (Figura 7).

Paso 2. Tabla

Mediante una tabla se organizan por columnas las diferentes fuerzas, su magnitud y cada una de sus componentes ortogonales las cuales se sumarán al final.

Tabla 1

FUERZA	MAGNITUD (kN)	COMPONENTE X (kN)	COMPONENTE Y (kN)
F1	20	+10	-17,320
F2	15	0	+15
F3	25	+14,339	+20,478
F4	14	+8,999	+10,724
F5	32	-26,212	-18,354
		+7,125	-10,920

Paso 3. La resultante

Teniendo en cuenta la sumatoria de cada una de las componentes de las 5 fuerzas, las componentes de la fuerza resultante serían igual a:

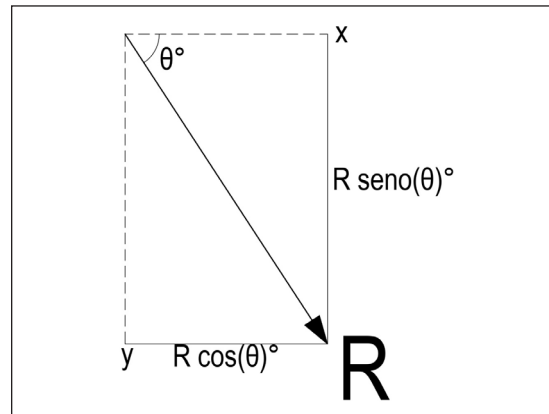
$$\vec{R} = (7,125 \text{ kN})\hat{i} - (10,921 \text{ kN})\hat{j}$$

Su magnitud se halla mediante el uso del teorema de Pitágoras (Figura 8).

$$|\vec{R}| = \sqrt{(7,125 \text{ kN})^2 + (10,921 \text{ kN})^2} \cong 13,040 \text{ kN}$$

13

Figura 8



Y por último la dirección de esta fuerza con respecto a uno de los ejes, séase el eje x o y se calcula mediante el uso del $\text{Arctan}\left(\frac{\text{componente 1}}{\text{componente 2}}\right)$ colocando en el lugar de la componente 2 al valor del eje por el cual se quiere medir el ángulo.

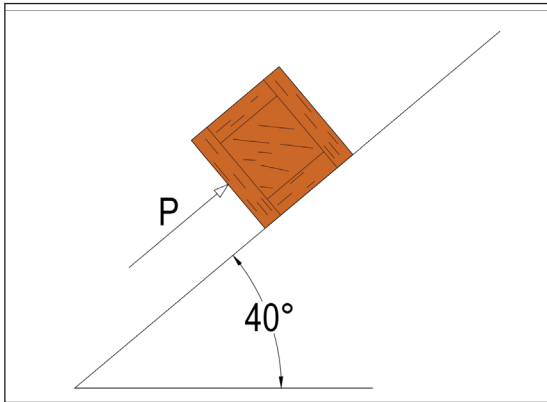
El ángulo con respecto al eje x sería igual a:

$$\text{Arctan}\left(\frac{-10,921 \text{ kN}}{7,125 \text{ kN}}\right) \cong -56,879^\circ \text{ (En)}$$

Problema resuelto n.º 3.

Equilibrio de partículas

Figura 9



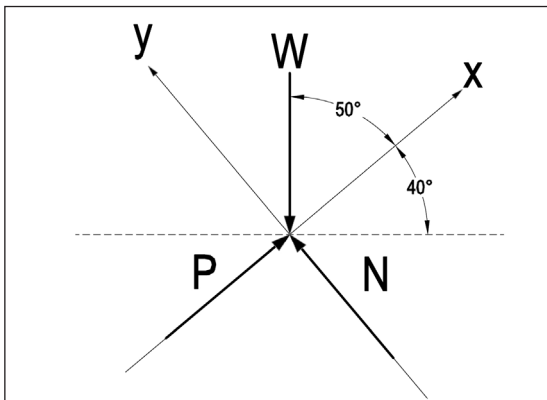
El peso de la caja es igual a $W = 1500 \text{ N}$ (Figura 9). Hallar la fuerza P de tal manera que la caja esté en equilibrio (La superficie inclinada se asume sin fricción).

Solución

14

Para la solución de este ejercicio, se descomponen las fuerzas en sus componentes respecto a un eje conveniente (Figura 10) como lo sería el mostrado a continuación:

Figura 10



Considerando los ejes de esta manera, el cálculo del valor de la fuerza P se realiza de manera sencilla, despejándolo de la sumatoria de fuerzas en x para este caso, en donde para hacer esto primeramente identificaremos los valores de las componentes:

Tabla 2

Ahora sí se realiza el despeje de la fuerza P:

FUERZA	MAGNITUD (N)	COMPONENTE X (N)	COMPONENTE Y (N)
W	1500	-964	-1149
N	$1500 \cdot \text{sen}(50^\circ)$	0	+1149
P	P	$+P$	0
		$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-964 N + P = 0$$

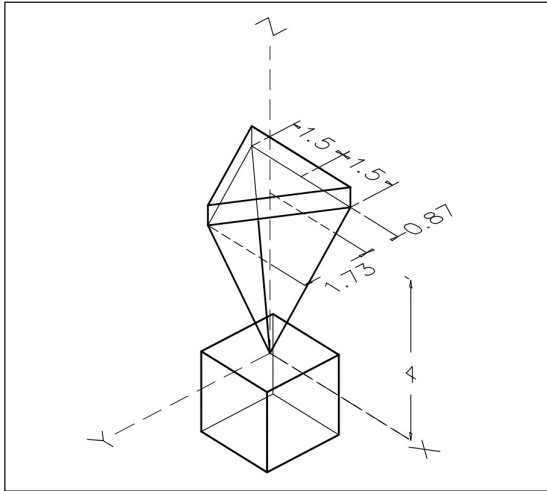
$$P = 964 N$$



Problema resuelto n.º 4.

Equilibrio de partículas

Figura 11



Una caja de peso $W = 500\text{N}$ esta sostenida mediante 3 cables como se muestra (Figura 11), Determine la tensión en cada cable.

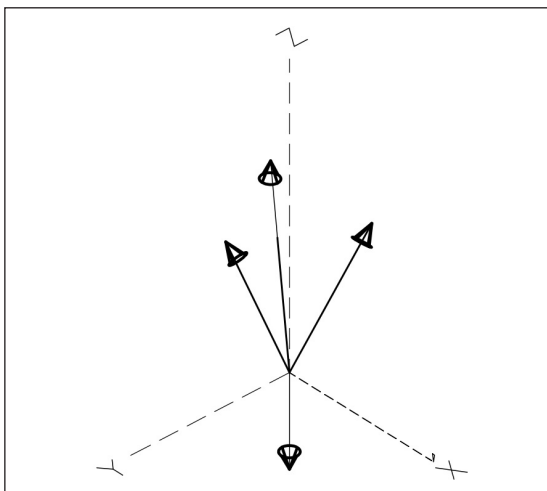
16

Solución

Paso 1. Deducción de las fuerzas presentes

Se elabora un diagrama de modo que se identifiquen las diferentes fuerzas que se están presentando (Figura 12), en este caso, sobre el punto A, siendo estas el peso $W = 500\text{ N}$ de la caja, la tensión F_{AB} , F_{AC} y F_{AD} , representando estas últimas 3 con una dirección contraria al de la caja.

Figura 12



Paso 2. Coordenadas de los vectores

Teniendo en cuenta que el sistema presente esta en equilibrio, ($\Sigma F_x = 0 - \Sigma F_y = 0 - \Sigma F_z = 0$), se separa cada una de las fuerzas del sistema en componentes i, j y k , para esto se identifican las coordenadas de cada uno de los puntos de los vectores que en este caso comparten su origen en el punto A, y finalmente para la identificación de los vectores de cada cable se efectúa la resta del punto de llegada del vector menos el punto de salida.

Vectores:

$$A = (0\text{ m})\hat{i} + (0\text{ m})\hat{j} + (0\text{ m})\hat{k} \quad B = (0\text{ m})\hat{i} + (1,73\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m})\hat{k}$$

$$C = (1,5\text{ m})\hat{i} - (0,87\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m})\hat{k} \quad D = -(1,5\text{ m})\hat{i} - (0,87\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m})\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (0\text{ m} - 0\text{ m})\hat{i} + (1,73\text{ m} - 0\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m} - 0\text{ m})\hat{k} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (0\text{ m})\hat{i} + (1,73\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m})\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1,5\text{ m} - 0\text{ m})\hat{i} + (-0,87\text{ m} - 0\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m} - 0\text{ m})\hat{k} \rightarrow \overrightarrow{AC} = (1,5\text{ m})\hat{i} + (-0,87\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m})\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = (-1,5\text{ m} - 0\text{ m})\hat{i} + (-0,87\text{ m} - 0\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m} - 0\text{ m})\hat{k} \rightarrow \overrightarrow{AD} = (-1,5\text{ m})\hat{i} + (-0,87\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m})\hat{k}$$

Paso 3. Vectores unitarios

Para poder calcular la dirección de los vectores de fuerzas de los cables, se tienen que encontrar mediante vectores unitarios o de magnitud igual a (1) que pasen por la misma línea de acción, que se hallan mediante los vectores definidos anteriormente.

Para el cálculo de los vectores unitarios primero se tiene que calcular la magnitud de cada uno de los vectores y seguido a esto, dividir cada una de las componentes del vector por este valor.

Vectores unitarios.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0\text{ m})^2 + (1,73\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} \cong 4,358\text{ m} \rightarrow \overrightarrow{\lambda_{AB}} = \frac{0}{4,358}\hat{i} + \frac{1,73}{4,358}\hat{j} + \frac{4}{4,358}\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1,5\text{ m})^2 + (-0,87\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} \cong 4,358\text{ m} \rightarrow \overrightarrow{\lambda_{AC}} = \frac{1,5}{4,358}\hat{i} - \frac{0,87}{4,358}\hat{j} + \frac{4}{4,358}\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-1,5\text{ m})^2 + (-0,87\text{ m})^2 + (4\text{ m})^2} \cong 4,358\text{ m} \rightarrow \overrightarrow{\lambda_{AD}} = -\frac{1,5}{4,358}\hat{i} - \frac{0,87}{4,358}\hat{j} + \frac{4}{4,358}\hat{k}$$

Paso 4. Vectores de fuerza

A continuación, se deberán indicar cada uno de los vectores de fuerza para poder efectuar las ecuaciones de equilibrio.

$$\vec{F}_{AB} = |F_{AB}| \cdot \vec{\lambda}_{AB} \rightarrow F_{AB} \left(\frac{0}{4,358} \hat{i} + \frac{1,73}{4,358} \hat{j} + \frac{4}{4,358} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F}_{AC} = |F_{AC}| \cdot \vec{\lambda}_{AC} \rightarrow F_{AC} \left(\frac{1,5}{4,358} \hat{i} - \frac{0,87}{4,358} \hat{j} + \frac{4}{4,358} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F}_{AD} = |F_{AD}| \cdot \vec{\lambda}_{AD} \rightarrow F_{AD} \left(-\frac{1,5}{4,358} \hat{i} - \frac{0,87}{4,358} \hat{j} + \frac{4}{4,358} \hat{k} \right)$$

$$\vec{W} = (-500 \text{ N}) \hat{k}$$

Paso 5. Sumatoria de fuerzas

A continuación, se deberán indicar cada uno de los vectores de fuerza para poder efectuar las ecuaciones de equilibrio.

18

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AC} \left(\frac{1,5}{4,358} \right) + F_{AD} \left(-\frac{1,5}{4,358} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{AB} \left(\frac{1,73}{4,358} \right) + F_{AC} \left(-\frac{0,87}{4,358} \right) + F_{AD} \left(-\frac{0,87}{4,358} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{AB} \left(\frac{4}{4,358} \right) + F_{AC} \left(\frac{4}{4,358} \right) + F_{AD} \left(\frac{4}{4,358} \right) - 500 \text{ N} = 0 \quad \text{Ecuación 3}$$

Se despeja la ecuación 1 dejándolo en términos de $|FAC|$.

$$F_{AC} = 181,234 \text{ N}$$

Se reemplaza la ecuación 4 en la ecuación 2 y se despeja en términos de $|FAC|$.

Se reemplaza la ecuación 4 y la ecuación 5 en la ecuación 3 y se despeja para hallar el valor de $|FAC|$.

$$2F_{AC} \left(\frac{0,87}{1,73} \right) \left(\frac{4}{4,358} \right) + F_{AC} \left(\frac{4}{4,358} \right) + F_{AC} \left(\frac{4}{4,358} \right) - 500 \text{ N} = 0$$

$$F_{AC} \left[2 \left(\frac{0,87}{1,73} \right) \left(\frac{4}{4,358} \right) + \left(\frac{4}{4,358} \right) + \left(\frac{4}{4,358} \right) \right] = 500 \text{ N}$$

$$F_{AC} \cdot (2,7589) = 500 \text{ N} \rightarrow F_{AC} = \frac{500 \text{ N}}{2,7589} \rightarrow F_{AC} \cong 181,234 \text{ N}$$

Finalmente se despejan las ecuaciones 4 y 5 y se organizan los resultados de las tensiones de cada cable.

$$F_{AC} \left[2 \left(\frac{0,87}{1,73} \right) \left(\frac{4}{4,358} \right) + \left(\frac{4}{4,358} \right) + \left(\frac{4}{4,358} \right) \right] = 500 \text{ N}$$

$$F_{AC} \cdot (2,7589) = 500 \text{ N} \rightarrow F_{AC} = \frac{500 \text{ N}}{2,7589} \rightarrow F_{AC} \cong 181,234 \text{ N}$$

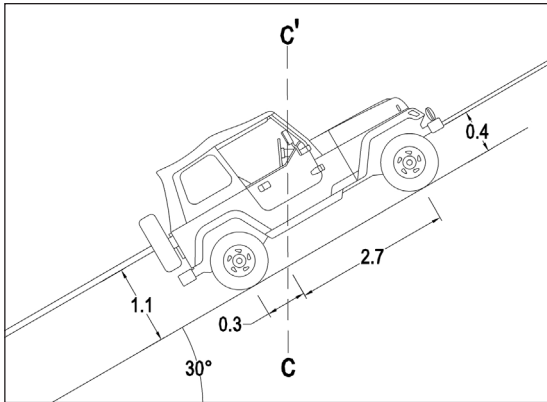
$$181,234 \text{ N} \cong F_{AD} \rightarrow F_{AD} \cong 181,234 \text{ N}$$

$$F_{AD} = 181,234 \text{ N}$$

Problema resuelto n.º 5.

Equilibrio de cuerpos rígidos

Figura 13



Un automóvil averiado se encuentra en una colina alado en su parte trasera con una cuerda que ejerce una tensión de 500 N (Figura 13). Si se sabe que sobre el eje c-c' se encuentra ubicada la línea de acción del peso del automóvil, el cual es de 5000 N. Determine la tensión T en la parte delantera y las reacciones que ejerce suelo sobre las ruedas.

20

Solución

Iniciaremos este ejercicio, realizando su diagrama de cuerpo libre, con el fin de identificar las fuerzas actuantes en el cuerpo y también, para tener un esquema simplificado el cual contenga sólo la información útil para la resolución del ejercicio.

Se establecerá para este caso un sistema de coordenadas convenientes, de tal manera que a la hora de usar las ecuaciones de sumatorias de fuerzas y de momentos los cálculos se simplifiquen.

En este caso se trabajará con un sistema de coordenadas paralelo y normal al plano inclinado (Figura 14). De esta manera se puede hallar la tensión en la parte delantera del automóvil (T), solamente con la ecuación de sumatoria de fuerzas en x, como se verá a continuación:

$$\sum F_x = 0$$

$$T - 500 \text{ N} - 5000 \text{ N} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$T = 500 \text{ N} + 2500 \text{ N} = 3000 \text{ N}$$

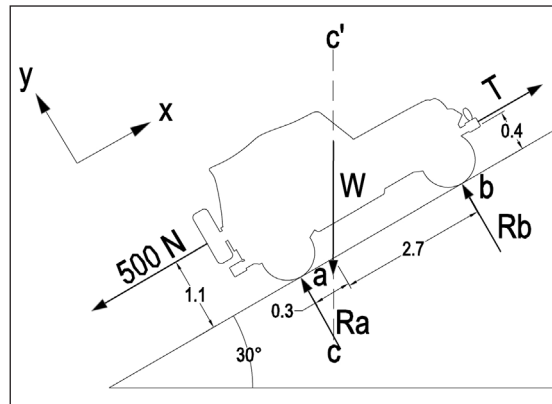
$$\sum F_y = 0$$

$$R_b + R_a - 5000 \text{ N} \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$R_a = 5000 \text{ N} \cdot \sin(60^\circ) - R_b$$

Ahora, para la obtención de R_b y R_a , realizaremos una sumatoria de momentos respecto al punto a , para obtener en la ecuación solamente una incógnita (R_b), y luego realizar la ecuación de sumatoria de fuerzas en y para obtener R_a , así:

Figura 14



$$\sum M_a = 0$$

$$-5000 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m} \cdot \cos(30^\circ) + 500 \text{ N} \cdot 1,1 \text{ m} + R_b \cdot 3 \text{ m} - 3000 \text{ N} \cdot 0,4 \text{ m} = 0$$

$$R_b = \frac{5000 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m} \cdot \cos(30^\circ) - 500 \text{ N} \cdot 1,1 \text{ m} + 3000 \text{ N} \cdot 0,4 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 649,68 \text{ kN}$$

Retomando la ecuación $\sum F_y$:

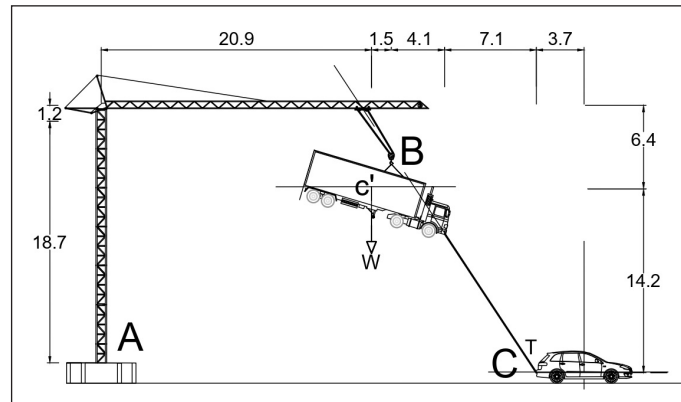
$$R_a = 5000 \text{ N} \cdot \sin(60^\circ) - 649,68 \text{ kN} = 3680,45 \text{ kN}$$

Problema resuelto n.º 6.

Equilibrio de cuerpos rígidos

Una Torre grúa de apoyo fijo se encuentra cargando un camión de 4 ejes mientras este recibe una Tensión $T = 50 \text{ kN}$ mediante un cable conectado a la parte trasera de un automóvil (Figura 15), teniendo en cuenta que el camión pesa $W = 300 \text{ kN}$. hallar el valor de la reacción en el punto A.

Figura 15



22

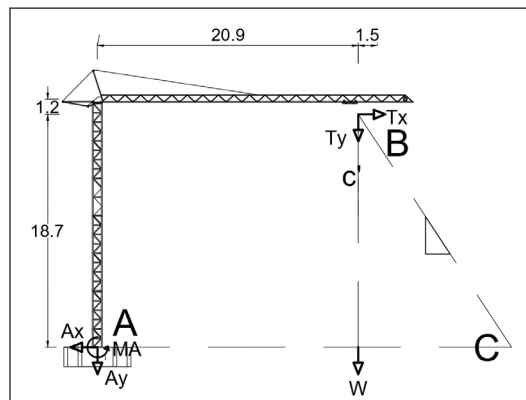
Solución

Paso 1. Diagrama de cuerpo libre

Se inicia dibujando el esquema de cuerpo libre ya que con este se podrán identificar las fuerzas que están actuando sobre el sistema (Figura 16).

Se ubican las fuerzas que están actuando en el sistema de tal forma que se puedan visualizar sus ejes de concurrencia y sus componentes ortogonales para poder facilitar los cálculos, para este ejercicio se desplazó la fuerza W en el mismo eje de A_x y la tensión en el mismo eje de la fuerza W .

Figura 16



Paso 2. Componentes de la tensión

Para poder separar por componentes ortogonales la tensión del cable se tiene que hallar los respectivos valores unitarios de cada sentido, para realizar esto, ya que la dirección de la fuerza es la misma dirección del cable, este sería el mismo vector unitario a utilizar en la fuerza, teniendo en cuenta esto, tenemos que:

$$1,5\text{ m} + 4,1\text{ m} + 7,1\text{ m} = 12,7\text{ m} \quad \text{y} \quad 14,2\text{ m} + 6,4\text{ m} - 1,2\text{ m} = 19,4\text{ m}$$

$$\sqrt{(12,7\text{ m})^2 + (19,4\text{ m})^2} = 23,19\text{ m} \rightarrow \overrightarrow{\lambda_{BC}} = \frac{12,7}{23,19}\hat{i} + \frac{19,4}{23,19}\hat{j}$$

Paso 3. Sumatoria de Fuerzas

$$\sum F_x = 0$$

$$-A_x + 50\text{ kN} \left(\frac{12,7}{23,19} \right) = 0$$

$$A_x = 27,38\text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-A_y + 300\text{ kN} + 50\text{ kN} \left(\frac{19,4}{23,19} \right) = 0$$

$$A_y = 341,83\text{ kN}$$

Paso 4. Sumatoria de momentos

Ya que la grúa corresponde a un apoyo fijo, este presenta un momento par que evita que esté presente rotaciones y se procede a hacer la sumatoria de los momentos en el punto A para poder hallarlo.

$$\sum M_A = 0$$

$$-300\text{ kN} \cdot (22,4\text{ m}) - 50\text{ kN} \left(\frac{19,4}{23,19} \right) \cdot (22,4\text{ m}) - 50\text{ kN} \left(\frac{12,7}{23,19} \right) \cdot (18,7\text{ m}) + M_A = 0$$

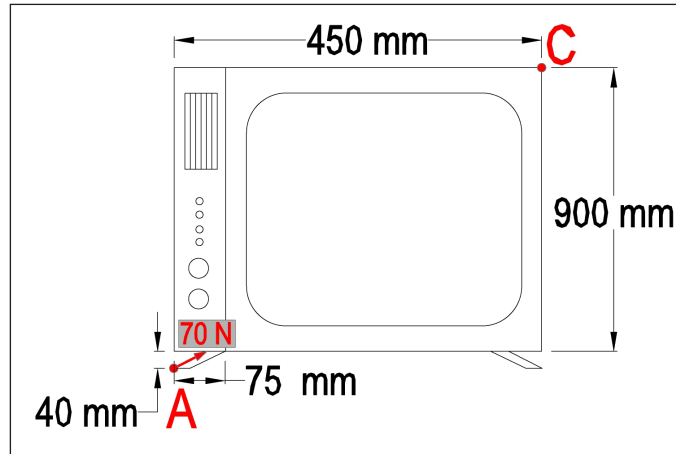
$$M_A = 6720\text{ kN} \cdot \text{m} + 936,96\text{ kN} \cdot \text{m} + 512,05\text{ kN} \cdot \text{m} = 8169,01\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Problema resuelto n.º 7.

Momento respecto a un punto

La pata de un televisor antiguo está resistiendo 70 N (Figura 17). Hallar el momento que genera esta fuerza respecto al punto C.

Figura 17



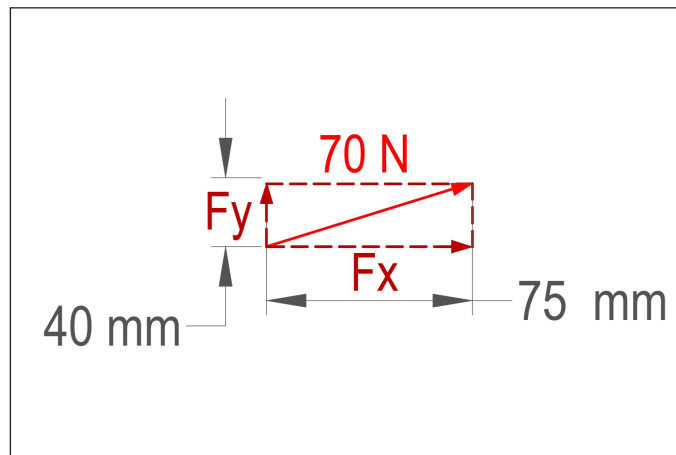
Solución

24

Paso 1. Descomposición de fuerza en componentes X y Y

Para este caso, hallaremos el momento que genera la fuerza respecto al punto C, descomponiéndola en componentes paralelas y perpendiculares a la horizontal (Figura 18).

Figura 18



Siendo así, tenemos que:

$$F_x = F \cdot \cos(\theta) = 70 \text{ N} \cdot \frac{75 \text{ mm}}{\sqrt{(40 \text{ mm})^2 + (75 \text{ mm})^2}} = 70 \text{ N} \cdot \frac{75 \text{ mm}}{85 \text{ mm}}$$

$$F_x = 70 \text{ N} \cdot \frac{15}{17} = \frac{1050}{17} \text{ N} \cong 61,8 \text{ N}$$

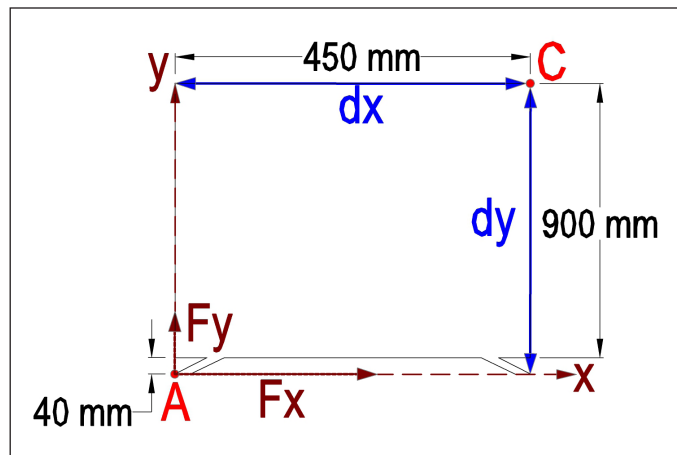
$$F_y = F \cdot \sin(\theta) = 70 \text{ N} \cdot \frac{40 \text{ mm}}{\sqrt{(40 \text{ mm})^2 + (75 \text{ mm})^2}} = 70 \text{ N} \cdot \frac{40 \text{ mm}}{85 \text{ mm}}$$

$$F_y = 70 \text{ N} \cdot \frac{8}{17} = \frac{560}{17} \text{ N} \cong 32,9 \text{ N}$$

Paso 2. Momento de las componentes respecto a C

Una vez tenemos las componentes de la fuerza. Identificamos las distancias perpendiculares de estas respecto al punto C (Figura 19).

Figura 19



Teniendo así que:

$$dx = 450 \text{ mm}$$

$$dy = 940 \text{ mm}$$

Y ahora se determinan los momentos de las componentes, los cuales, su sumatoria es igual al momento de la fuerza de 70 N respecto al punto C.

$$\sum M_C$$

$$F_x \cdot dy - F_y \cdot dx = \frac{1050}{17} N \cdot 0,94 m - \frac{560}{17} N \cdot 0,45 m$$

$$\frac{980}{17} N \cdot m - \frac{252}{17} N \cdot m \cong 58,1 N \cdot m - 14,8 N \cdot m$$

$$M_C \cong 42,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

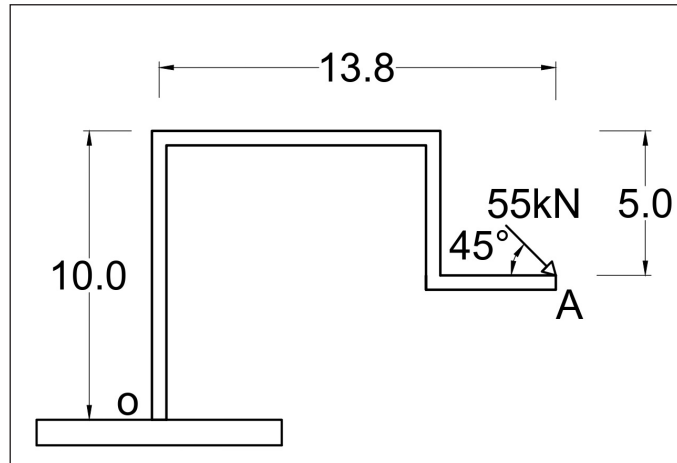


Problema resuelto n.º 8.

Momento respecto a un punto

Una fuerza de 55 kN actúa sobre una ménsula como se muestra (Figura 20), determinar el momento de la fuerza con respecto al punto o.

Figura 20



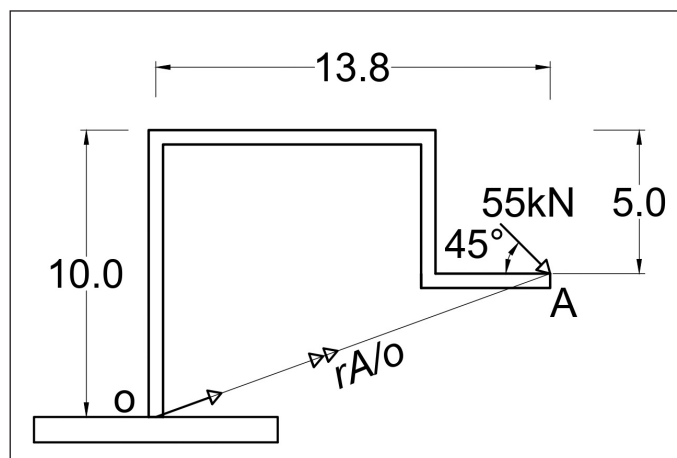
Solución

27

Paso 1. Momento mediante las componentes de la fuerza

El momento M_o es igual a la distancia entre A y o ($r_{A/o}$) (Figura 21) por la fuerza $F = 55$ kN y esa distancia se puede dividir en las componentes ortogonales del plano cartesiano.

Figura 21



$$F_{Ax} = 55 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ) = 38,89 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 55 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) = 38,89 \text{ kN}$$

$$\vec{F}_A = (38,89 \text{ kN})\hat{i} + (38,89 \text{ kN})\hat{j}$$

$$M_O = \vec{r}_{A/O} \times \vec{F}_A$$

$$M_O = -38,89 \text{ kN} \cdot 13,8 \text{ m} - 38,89 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} = -731,132 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

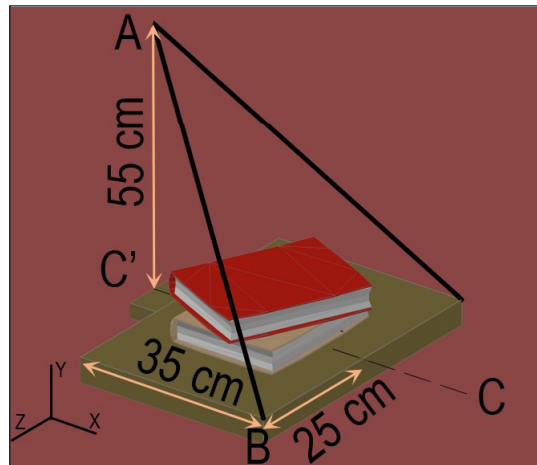
El momento es perpendicular al plano y apunta hacia afuera de la hoja.

Problema resuelto n.º 9.

Momento respecto a un eje

Una repisa se encuentra sujeta por dos cuerdas a la pared (Figura 22). Si la tensión en el cable BA es de 125 N. Halle el momento que ejerce esta fuerza respecto al eje C'-C.

Figura 22



29

Solución

Para resolver este ejercicio, se hará mediante el método del producto triple escalar, en donde necesitaremos identificar el vector dirección de la línea de momento, el vector $\mathbf{r}$ que representa una distancia de la fuerza respecto a la línea de acción del momento, y la fuerza expresada de manera vectorial para así armar la matriz del producto triple escalar y así obtener la magnitud del momento respecto al eje C-C' en este caso.

Paso 1. Determinar vector fuerza

Para este paso, se determina primeramente el vector unitario en dirección de la fuerza, el cual se multiplicará por la magnitud de la fuerza así:

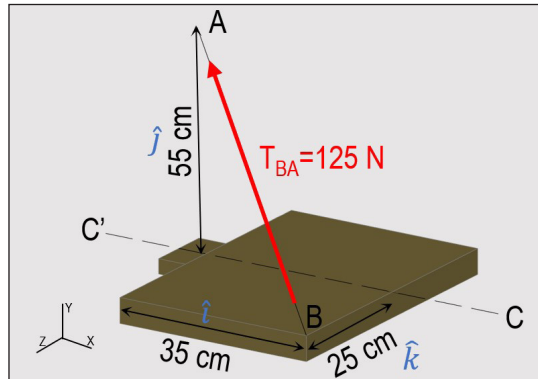
$$\overrightarrow{\lambda_{BA}} = \frac{[-(35 \text{ cm})\hat{i} + (55 \text{ cm})\hat{j} - (25 \text{ cm})\hat{k}]}{\sqrt{(-35 \text{ cm})^2 + (55 \text{ cm})^2 + (-25 \text{ cm})^2}}$$

$$\overrightarrow{\lambda_{BA}} = \frac{[-(35 \text{ cm})\hat{i} + (55 \text{ cm})\hat{j} - (25 \text{ cm})\hat{k}]}{5\sqrt{195} \text{ cm}}$$

$$\vec{\lambda}_{BA} = -\frac{7}{\sqrt{195}}\hat{i} + \frac{11}{\sqrt{195}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{195}}\hat{k}$$

$$\vec{\lambda}_{BA} = \frac{1}{\sqrt{195}}[-7\hat{i} + 11\hat{j} - 5\hat{k}]$$

Figura 23



$$\vec{T}_{BA} = T_{BA} \cdot \vec{\lambda}_{BA}$$

$$\vec{T}_{BA} = 125 \text{ N} \cdot \frac{1}{\sqrt{195}}[-7\hat{i} + 11\hat{j} - 5\hat{k}] = \frac{125}{\sqrt{195}} \text{ N} \cdot [-7\hat{i} + 11\hat{j} - 5\hat{k}]$$

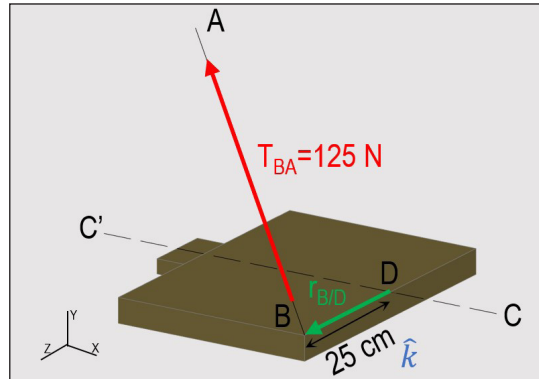
$$\vec{T}_{BA} = \frac{25\sqrt{195}}{39} \text{ N} \cdot [-7\hat{i} + 11\hat{j} - 5\hat{k}]$$

Paso 2. Determinar vector distancia ($\vec{r}$)

Para el vector distancia de la fuerza con respecto a la línea de acción del momento, se tomará el vector $\vec{r}$ más conveniente para la simplificación de los cálculos (Figura 24), como se muestra:

$$\vec{r}_{B/D} = (0,25 \text{ m})\hat{k}$$

Figura 24

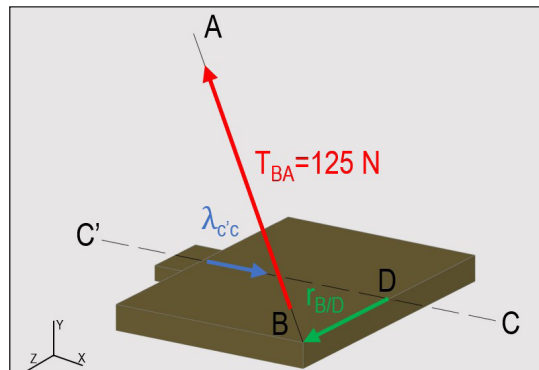


Paso 3. Determinar vector unitario de la línea de acción del momento

Para este caso el vector unitario que representa la dirección de línea de momento es el vector unitario $\hat{i}$ (Figura 25), ya que la línea C'-C es paralela al eje x.

$$\overrightarrow{\lambda_{C'C}} = \hat{i}$$

Figura 25



Paso 4. Realizar el producto triple escalar para hallar magnitud de momento.

Organizamos entonces en la matriz los vectores en el orden

Se puede simplificar también, extrayendo términos comunes:

$$|M_{CC'}| = \begin{vmatrix} \lambda_{C'Cx} & \lambda_{C'Cy} & \lambda_{C'Cz} \\ r_{B/Dx} & r_{B/Dy} & r_{B/Dz} \\ T_{BAx} & T_{BAy} & T_{BAz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \\ -7\frac{10\sqrt{195}}{13} & 11\frac{10\sqrt{195}}{13} & -5\frac{10\sqrt{195}}{13} \end{vmatrix} N \cdot m$$

$$|M_{CC'}| = \frac{10\sqrt{195}}{13} N \cdot m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \\ -7 & 11 & -5 \end{vmatrix} = \frac{10\sqrt{195}}{13} N \cdot m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \\ -7 & 11 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|M_{cc'}| = \frac{10\sqrt{195}}{13} N \cdot m [(1)(0 \cdot (-5) - 0,25 \cdot 11) - (0)(0(-5) - 0,25(-7)) + (0)(0 \cdot 11 - 0(-7))]$$

$$|M_{cc'}| = \frac{10\sqrt{195}}{13} N \cdot m [-2,75] = \left| -\frac{55\sqrt{195}}{26} N \cdot m \right|$$

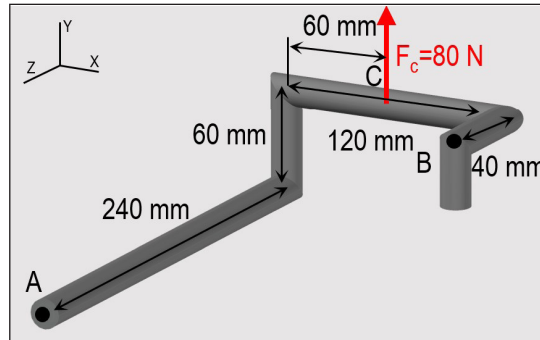
$$|M_{cc'}| = 29,5 N \cdot m$$

Problema resuelto n.º 10.

Momento respecto a un eje

A una tubería se le aplica una fuerza F_c como se aprecia (Figura 26). Determine el momento que esta fuerza genera respecto al eje $\overrightarrow{AB}$.

Figura 26



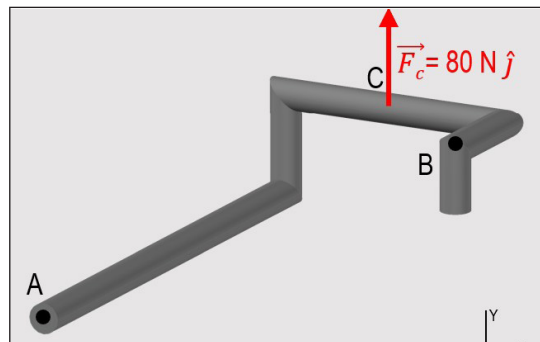
Solución

Se determinará el momento de la fuerza respecto al eje indicado, estableciendo un vector de distancia de la fuerza respecto al eje, indicando la fuerza de manera vectorial e identificando el vector unitario de la dirección del eje del momento. Así, con esto en cuenta, se determinará la magnitud del momento mediante el producto triple escalar, mediante el método de la matriz algebraica.

Paso 1. Determinar vector fuerza

Al ser la fuerza paralela al eje Y se representa de manera de vectorial como la magnitud de la fuerza en j (Figura 27):

Figura 27

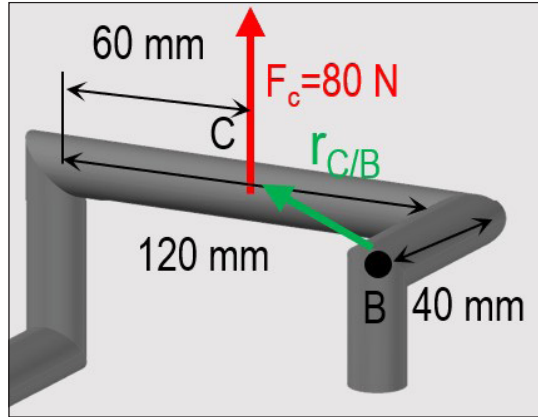


$$\overrightarrow{F_c} = (80 \text{ N})\hat{j}$$

Paso 2. Determinar vector distancia ($\vec{r}$)

Con los ejes coordenados indicados el vector $\vec{r}_{C/B}$ (Figura 28) tiene componentes iguales a:

Figura 28



$$\vec{r}_{B/A} = -(60 \text{ mm})\hat{i} + (0 \text{ mm})\hat{j} - (40 \text{ mm})\hat{k}$$

$$\vec{r}_{B/A} = -(60 \text{ mm})\hat{i} - (40 \text{ mm})\hat{k}$$

34

Paso 3. Determinar vector unitario de la línea de acción del momento

Se halla el vector unitario (Figura 29) determinando sus componentes vectoriales y dividiendo cada una de estas por la magnitud del vector, así:

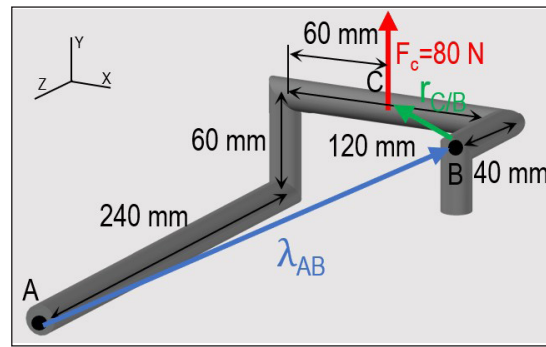
$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{[(120 \text{ mm})\hat{i} + (60 \text{ mm})\hat{j} - (200 \text{ mm})\hat{k}]}{\sqrt{(120 \text{ mm})^2 + (60 \text{ mm})^2 + (-200 \text{ mm})^2}}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{[(120 \text{ mm})\hat{i} + (60 \text{ mm})\hat{j} - (200 \text{ mm})\hat{k}]}{20\sqrt{145} \text{ mm}}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{6}{\sqrt{145}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{145}}\hat{j} - \frac{10}{\sqrt{145}}\hat{k}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{145}}[6\hat{i} + 3\hat{j} - 10\hat{k}]$$

Figura 29



Paso 4. Realizar el producto triple escalar para hallar magnitud de momento

Organizamos entonces en la matriz los vectores en el orden:

Es posible simplificar la matriz, sacando los factores comunes de cada fila, como, por ejemplo:

$$|M_{AB}| = \begin{vmatrix} \lambda_{AB\ x} & \lambda_{AB\ y} & \lambda_{AB\ z} \\ r_{\bar{B}\ x}^C & r_{\bar{B}\ y}^C & r_{\bar{B}\ z}^C \\ F_{C\ x} & F_{C\ y} & F_{C\ z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -10 \\ \sqrt{145} & \sqrt{145} & -\sqrt{145} \\ -60 & 0 & -40 \\ 0 & 80 & 0 \end{vmatrix} N \cdot mm$$

$$|M_{AB}| = \frac{1}{\sqrt{145}} \cdot (-20) \cdot 80 \begin{vmatrix} 6 & 3 & -10 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} N \cdot mm = -\frac{1600}{\sqrt{145}} \begin{vmatrix} 6 & 3 & -10 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} N \cdot mm$$

$$|M_{AB}| = -\frac{1600}{\sqrt{145}} N \cdot mm \cdot [(6)(0 \cdot 0 - 2 \cdot 1) - (3)(3 \cdot 0 - 2 \cdot 0) + (-10)(3 \cdot 1 - 0 \cdot 0)]$$

$$|M_{AB}| = -\frac{1600}{\sqrt{145}} N \cdot mm \cdot [(6)(-2) + (-10)(3)] = -\frac{1600}{\sqrt{145}} N \cdot mm \cdot [-12 - 30]$$

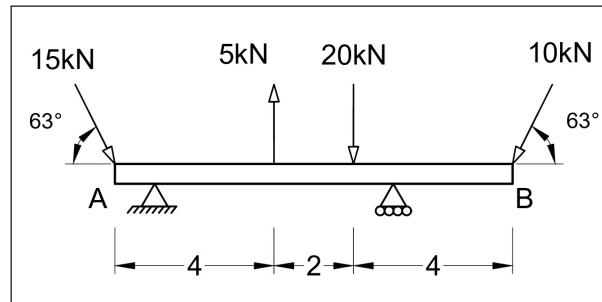
$$|M_{AB}| = -\frac{1600}{\sqrt{145}} N \cdot mm \cdot [-42] = \frac{67200}{\sqrt{145}} N \cdot mm \cong 5580 N \cdot mm \cong 5,58 N \cdot m$$

Problema resuelto n.º 11.

Sistema de fuerzas equivalente

Una viga de 10 m de longitud está sujeta a 4 fuerzas como se muestran (Figura 30). Reduzca el sistema de fuerzas a un sistema de fuerzas equivalentes en el punto A, también reduzca el sistema en el punto B y Redúzcalo a una sola resultante.

Figura 30



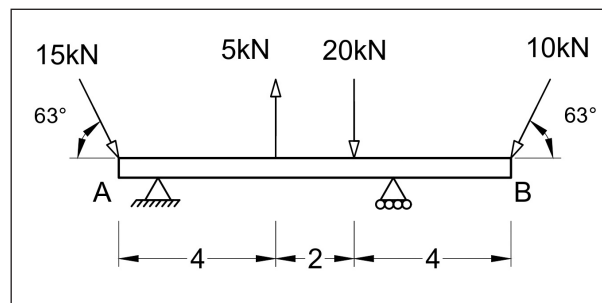
Solución

Paso 1. Sistema de fuerza en A

El sistema de fuerza-par en el punto A consta de una fuerza resultante en el punto A y un momento par $M_{R/A}$ el cual se define de la siguiente forma.

Para el desarrollo de este sistema de fuerzas equivalentes no se tienen en cuenta las reacciones y por ende este no va a estar en equilibrio (Figura 31).

Figura 31



$$\sum F_x = R_x$$

$$R_x = 15 \text{ kN} \cdot \cos(63^\circ) - 10 \text{ kN} \cdot \cos(63^\circ) = 2,27 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = R_y$$

$$R_y = -15 \text{ kN} \cdot \sin(63^\circ) - 10 \text{ kN} \cdot \sin(63^\circ) + 5 \text{ kN} + 20 \text{ kN} = -37,27 \text{ kN}$$

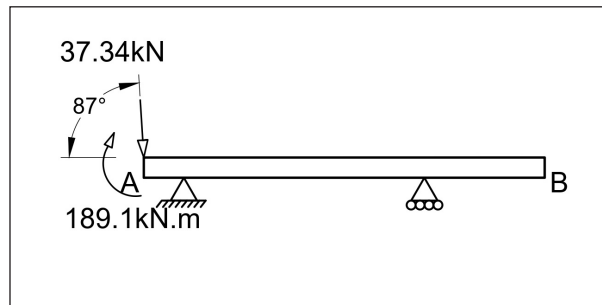
$$R = \sqrt{(2,27 \text{ kN})^2 + (-37,27 \text{ kN})^2} = 37,34 \text{ kN}$$

$$\text{Arctan}\left(\frac{-37,27}{2,27}\right) = -86,5146^\circ$$

$$M_{R/A} = \sum r \times F$$

$$5 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot \text{sen}(63^\circ) \cdot 10 \text{ m} = -189,1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura 32



37

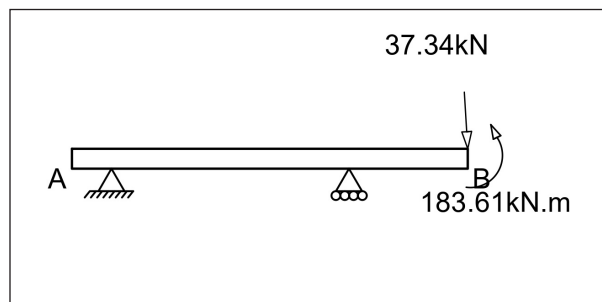
Paso 2. Sistema de fuerza en B

La fuerza resultante no cambia con respecto a la fuerza resultante en el punto A, pero el momento pasa a ser $M_{R/B}$ y se cambia a un momento par actuante sobre el punto B, para esto, se puede sumar el momento $M_{R/A}$ al momento resultante de la multiplicación de la fuerza R por la distancia entre A y B.

$$M_{R/B} = M_{R/A} + \overrightarrow{BA} \times \vec{R}$$

$$M_{\frac{R}{B}} = -189,1 \text{ kN} \cdot \text{m} + 37,34 \text{ kN} \cdot \text{sen}(86,5146^\circ) \cdot 10 \text{ m} = 183,61 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

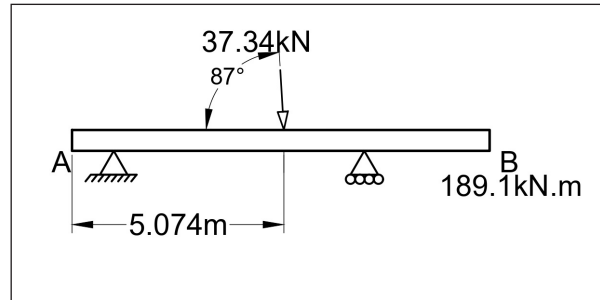
Figura 33



Paso 3. Sistema mediante fuerza resultante

Para este caso se tiene que determinar una distancia con respecto al punto A al cual se va a generar un momento de R que anule al momento $M_{R/A}$ (Figura 34).

Figura 34



$$M_{R/A} = X \times R$$

$$-189,1 \text{ kN} \cdot \text{m} = X \cdot (-37,34 \text{ kN}) \cdot \text{sen}(86,5146^\circ)$$

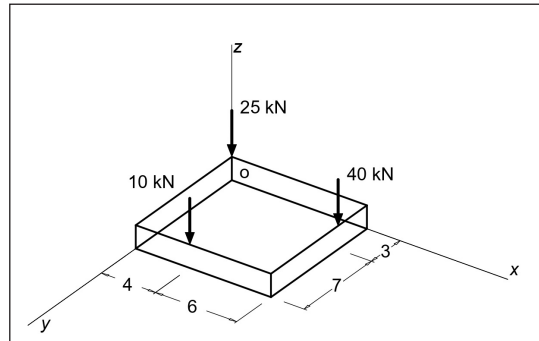
$$\frac{-189,1 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(-37,34 \text{ kN}) \cdot \text{sen}(86,5146^\circ)} = X = 5,0736 \text{ m}$$

Problema resuelto n.º 12.

Sistema de fuerzas equivalente

Una losa de cimentación cuadrada soporta 3 columnas representadas mediante fuerzas puntuales como se muestran (Figura 35), determine cuál es la resultante de las 3 cargas y su punto de aplicación.

Figura 35



Solución

Paso 1. Reducción del sistema de fuerza-par

Primero se reduce el sistema de fuerza-par en el origen del sistema de coordenadas, este sistema consta de una fuerza resultante R y un vector par $M_{R/O}$ que son definidos de la siguiente forma.

$$M_{R/O} = \sum(r \times F)$$

$$R = \sum(F)$$

$$R = -10 \text{ kN} - 25 \text{ kN} - 40 \text{ kN} = -75 \text{ kN}$$

$$\sum M_{R/O}y = -4 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} - 10 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} = -440 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum M_{R/O}x = 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} + 3 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} = 220 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

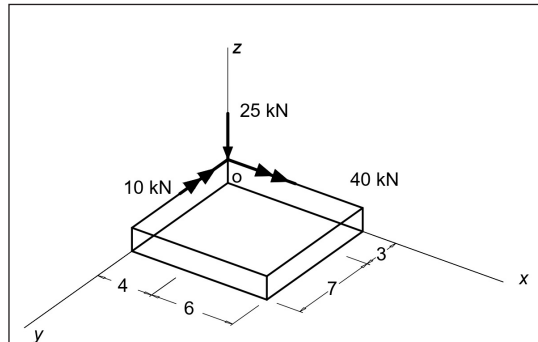
$$R = -75 \text{ kN}$$

$$M_{R/O} = (220 \text{ kN} \cdot \text{m})\hat{i} + (-440 \text{ kN} \cdot \text{m})\hat{j}$$

Paso 2. Reducción del sistema a fuerza R

Como la fuerza R y el vector del momento $M_{R/O}$ son perpendiculares, se puede reducir el sistema a una sola fuerza R (Figura 36), la fuerza será ubicada en el punto de la loza donde el momento con respecto al punto o sea igual a $M_{R/O}$.

Figura 36



$$M_{R/O} = \sum r \times F$$

$$\sum M_{R/O} y = -440 \text{ kN} \cdot \text{m} = X \cdot (-75 \text{ kN})$$

40

$$X = 5,867 \text{ m}$$

$$\sum M_{R/O} x = 220 \text{ kN} \cdot \text{m} = Y \cdot (75 \text{ kN})$$

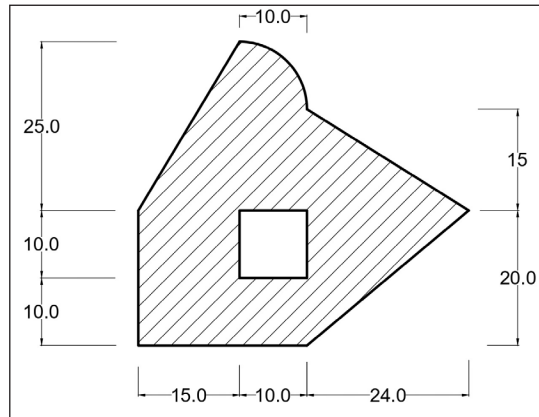
$$Y = 2,933 \text{ m}$$

Problema resuelto n.º 13.

Centroides

Para el área plana mostrada (Figura 37), determinar los primeros momentos de área en los ejes x y y , y la ubicación de su centroide.

Figura 37



Solución

41

Paso 1. Componentes de área

El área total de la figura se puede subdividir en figuras simples (Figura 38) con el fin de hacer más fácil el cálculo del centroide, las áreas rellenas se designan con un símbolo positivo y las áreas vacías negativo (Figura 39) y se calcula el centroide de cada una de ellas.

Figura 38

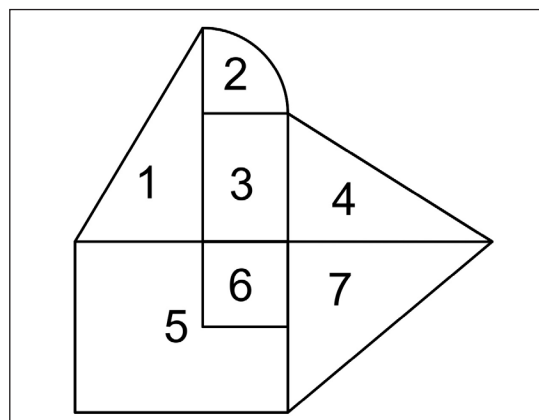
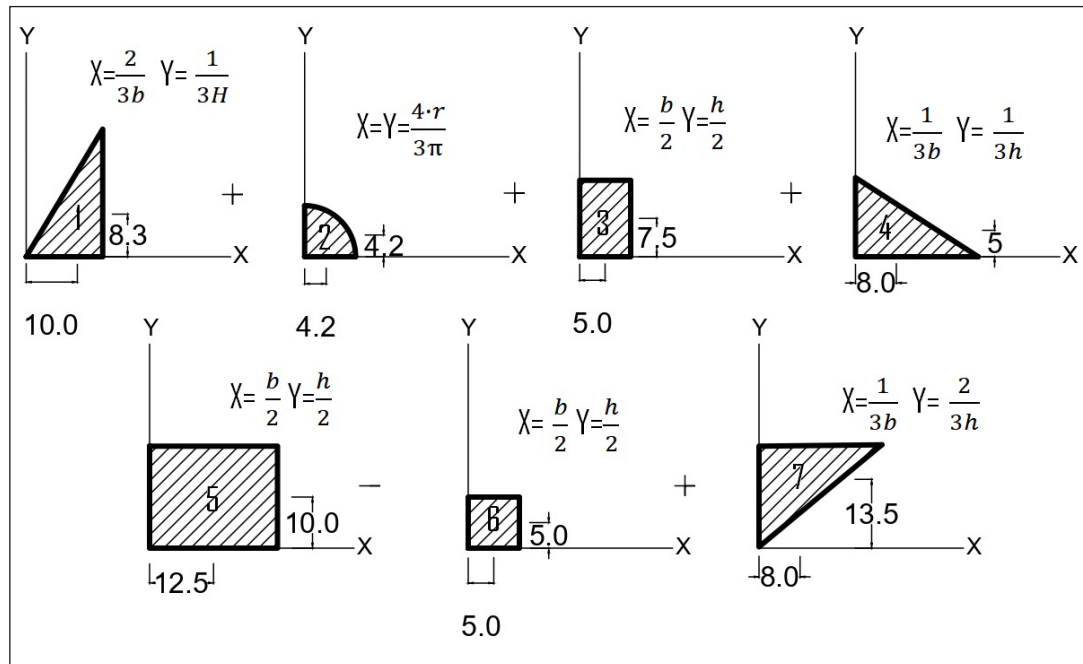


Figura 39



42

Paso 2. Tabla

Tabla 3

FIGURA	ÁREA (M ²)	$\bar{X}$ (M)	$\bar{Y}$ (M)	$\bar{X}A$ (M ³)	$\bar{Y}A$ (M ³)
1	$(1/2)(25)(15)=187,5$	$(10)=10$	$(20+8,33)=28,33$	1875	5311,875
2	$(1/4)(\pi)(10)^2=78,54$	$(15+4,24)=19,24$	$(25+4,24)=29,24$	1511,11	2296,51
3	$(10)(15)=150$	$(15+5)=20$	$(20+7,5)=27,5$	3000	4125
4	$(1/2)(24)(15)=180$	$(25+8)=33$	$(20+5)=25$	5940	4500
5	$(20)(25)=500$	$(12,5)=12,5$	$(10)=10$	6250	5000
6	$-(10)(10)=-100$	$(15+5)=20$	$(10+5)=15$	-2000	-1500
7	$(1/2)(24)(20)=240$	$(25+8)=33$	$(13,5)=13,5$	7920	3240
$\Sigma A = 1236,04$		$\Sigma \bar{X}A = 24996,11 \quad \Sigma \bar{Y}A = 22973,385$			

Los primeros momentos de área serían iguales a:

$$Q_y = 24996,11 \text{ m}^3$$

$$Q_x = 22973,385 \text{ m}^3$$

Paso 3. ubicación del centroide

$$\bar{X} = \frac{Qy}{A} = \frac{24996,11 \text{ m}^3}{1236,04 \text{ m}^2} = 19,818 \text{ m}$$

$$\bar{Y} = \frac{Qx}{A} = \frac{22932,58 \text{ m}^3}{1236,04 \text{ m}^2} = 19,189 \text{ m}$$

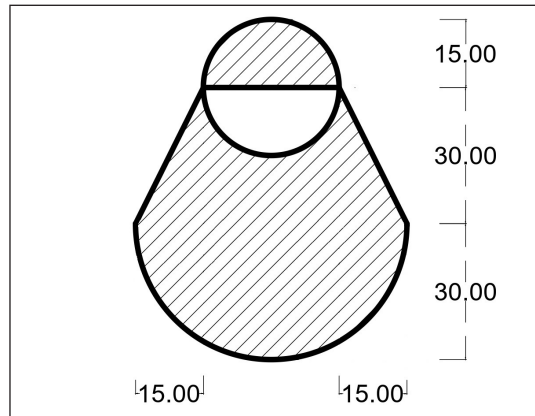


Problema resuelto n.º 14.

Centroides

Para el área plana mostrada (Figura 40), determinar los primeros momentos de área en los ejes x y y, la ubicación de su centroide.

Figura 40



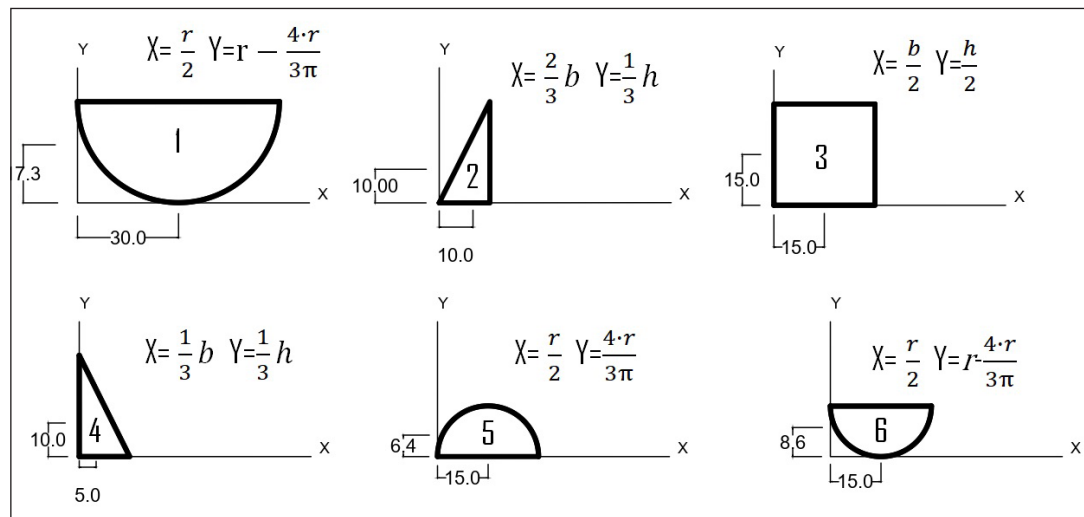
Solución

44

Paso 1. Componentes de área

El área total de la figura se puede subdividir en figuras simples (Figura 41) con el fin de hacer más fácil el cálculo del centroide, las áreas rellenas se designan con un símbolo positivo y las áreas vacías negativo y se calcula el centroide de cada una de ellas.

Figura 41



Paso 2. Tabla

Tabla 4

FIGURA	ÁREA (M ²)	$\bar{x}$ (M)	$\bar{y}$ (M)	$\bar{x}A$ (M ³)	$\bar{y}A$ (M ³)
1	$(1/2)(\pi)(30)^2=1413,7167$	$(30)=30$	$(17,27)=17,27$	42411,501	24414,887
2	$(1/2)(30)(15)=225$	$(10)=10$	$(30+10)=40$	2250	9000
3	$(30)(30)=900$	$(15+15)=30$	$(30+15)=45$	27000	40500
4	$(1/2)(30)(15)=225$	$(45+5)=50$	$(30+10)=40$	11250	9000
5	$(1/2)(\pi)(15)^2=353,429$	$(15+15)=30$	$(60+6,37)=66,37$	10602,87	23457,083
6	$(1/2)(\pi)(15)^2=-353,42$	$(15+15)=30$	$(60-15+8,63)=53,63$	-10602,87	-18653,91
$\Sigma A = 2763,7257$				$\Sigma \bar{x}A = 82911,501$	$\Sigma \bar{y}A = 87718,06$

Los primeros momentos de área serian iguales a:

$$Q_y = 82911,501 \text{ m}^3$$

$$Q_x = 87718,06 \text{ m}^3$$

Paso 3. ubicación del centroide

45

$$\bar{X} = \frac{Q_y}{A} = \frac{82911,501 \text{ m}^3}{2763,7257 \text{ m}^2} = 30 \text{ m}$$

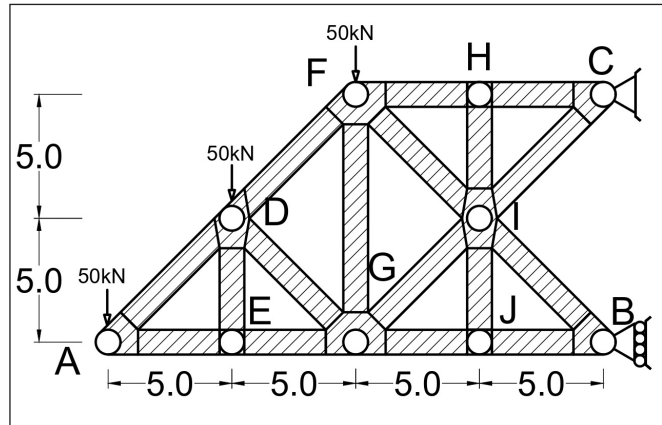
$$\bar{Y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{87418,06 \text{ m}^3}{2763,7257 \text{ m}^2} = 31,630 \text{ m}$$

Problema resuelto n.º 15.

Cerchas

Con el uso del método de los nodos, determinar la fuerza de cada uno de los elementos de la armadura (Figura 42).

Figura 42



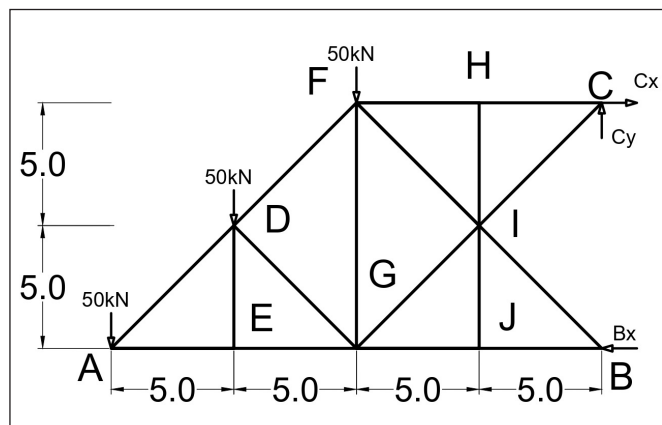
Solución

46

Paso 1. Diagrama de cuerpo libre

Se hace un esquema de toda la armadura, planteando las fuerzas externas que ocurren sobre ella (Figura 43), y se escriben las ecuaciones de equilibrio.

Figura 43



$$\sum M_C = 0$$

$$50 \text{ kN} \cdot 20 \text{ m} + 50 \text{ kN} \cdot 15 \text{ m} + 50 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m} - B_y \cdot 10 \text{ m} = 0$$

$$B_x = \frac{2250 \text{ kN} \cdot \text{m}}{10 \text{ m}} = 225 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-225 \text{ kN} + C_x = 0$$

$$C_x = 225 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-50 \text{ kN} - 50 \text{ kN} - 50 \text{ kN} + C_y = 0$$

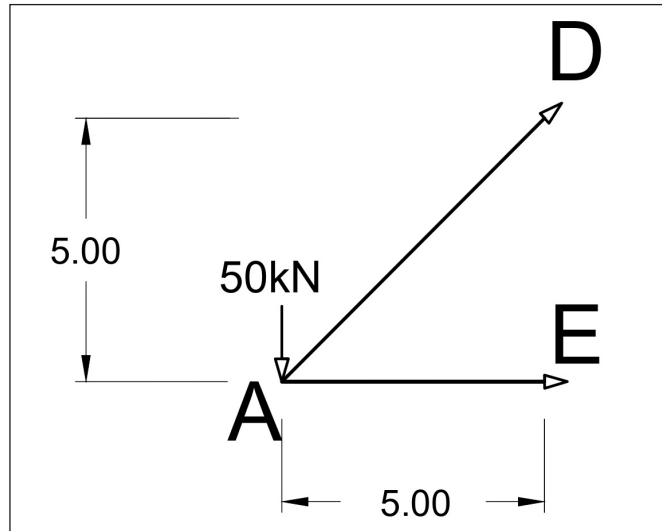
47

$$C_y = 150 \text{ kN}$$

Luego de hallar el valor de las reacciones que actúan en el equilibrio estático de la armadura, se procederá a determinar cada una de las fuerzas internas que reciben cada uno de los nodos, estos representados mediante el índice de fuerza (F), seguido de este, como subíndice, las dos letras asociadas a cada elemento recto.

Paso 2. Diagrama de cuerpo libre nodo A (Figura 44)

Figura 44



$$\sum F_y = 0$$

$$-50 \text{ kN} + F_{AD} \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0$$

$$F_{AD} = 70,71 \text{ kN}$$

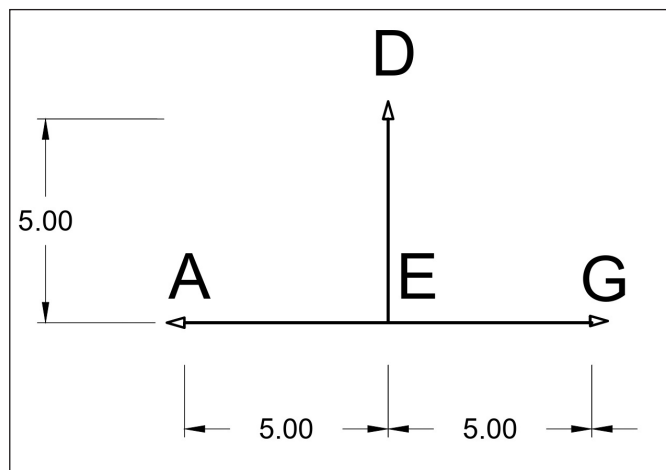
$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AE} + F_{AD} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$F_{AE} + F_{AD} \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0$$

Paso 3. Diagrama de cuerpo libre nodo E (Figura 45)

Figura 45



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{AE} + F_{EG} = 0$$

$$50 \text{ kN} + F_{EG} = 0$$

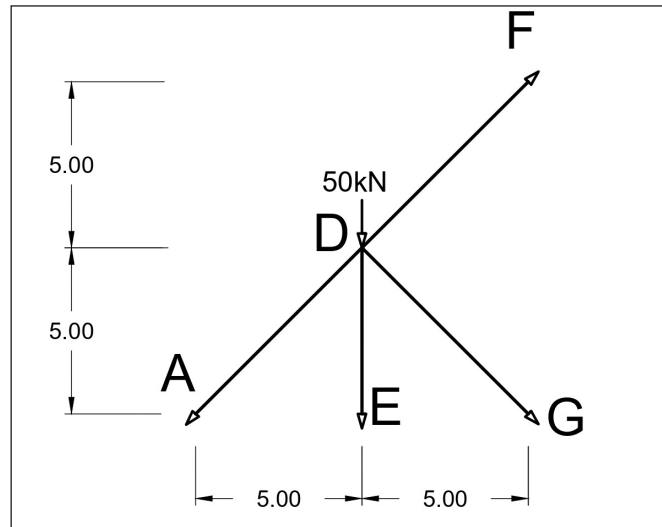
$$F_{EG} = -50 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{DE} = 0$$

Paso 4. Diagrama de cuerpo libre nodo D (Figura 46)

Figura 46



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{DA} \cdot \cos(45^\circ) + F_{DG} \cdot \cos(45^\circ) + F_{DF} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

50

$$50 \text{ kN} = F_{DF} \cdot \cos(45^\circ) + F_{DG} \cdot \cos(45^\circ)$$

$$50 \text{ kN} = F_{DF} \cdot \cos(45^\circ) + F_{DG} \cdot \cos(45^\circ)$$

$$\frac{50 \text{ kN} - F_{DF} \cdot \cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = F_{DG}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-50 \text{ kN} - F_{AD} \cdot \sin(45^\circ) - F_{DG} \cdot \sin(45^\circ) + F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

$$-50 \text{ kN} - 50 \text{ kN} - F_{DG} \cdot \sin(45^\circ) + F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

$$-\frac{50 \text{ kN} - F_{DF} \cdot \cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} \sin(45^\circ) + F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) = 100 \text{ kN}$$

$$-\frac{50 \text{ kN}}{\cos(45^\circ)} \cdot \sin(45^\circ) + F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) + F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) = 100 \text{ kN}$$

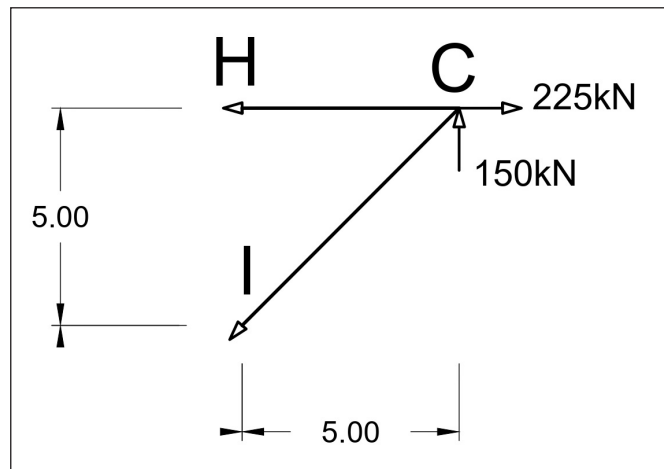
$$F_{DF}(1,4142) = 150 \text{ kN}$$

$$F_{DF} = 106,067 \text{ kN}$$

$$F_{DG} = \frac{50 \text{ kN} - 106,067 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = -35,356 \text{ kN}$$

Paso 5. Diagrama de cuerpo libre nodo C (Figura 47)

Figura 47



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{CH} - F_{CI} \cdot \cos(45^\circ) + 225 \text{ kN} = 0$$

$$F_{CH} = 225 \text{ kN} - F_{CI} \cdot \cos(45^\circ)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{CI} \cdot \text{sen}(45^\circ) + 150 \text{ kN} = 0$$

$$F_{CI} \cdot \text{sen}(45^\circ) = 150 \text{ kN}$$

$$F_{CI} = 212,132 \text{ kN}$$

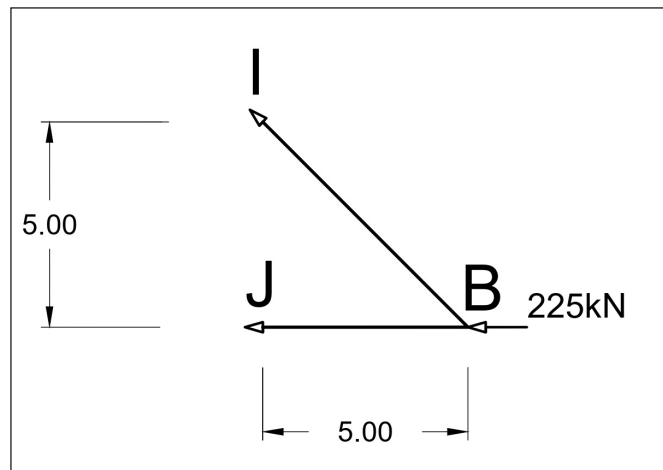
$$F_{CH} = 225 \text{ kN} - F_{CI} \cdot \cos(45^\circ)$$

$$F_{CH} = 75 \text{ kN}$$

Paso 6. Diagrama de cuerpo libre nodo B (Figura 48)

Figura 48

52



$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{BI} \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0 = F_{BI} = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

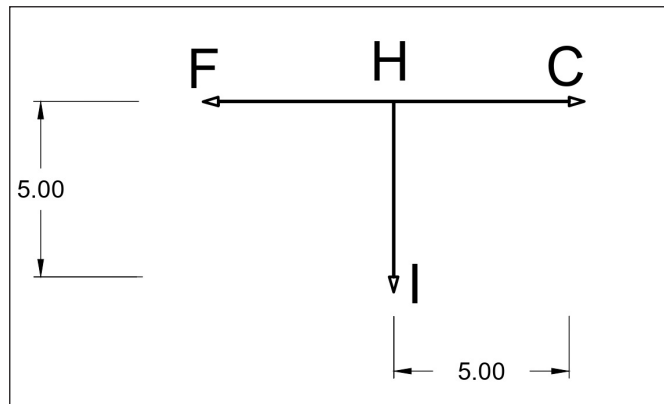
$$-F_{BI} \cdot \cos(45^\circ) - F_{BJ} - 225 \text{ kN} = 0$$

$$F_{BJ} = -225 \text{ kN} - F_{BI} \cdot \cos(45^\circ)$$

$$F_{BJ} = -225 \text{ kN}$$

Paso 7. Diagrama de cuerpo libre nodo H (Figura 49)

Figura 49



53

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{HF} + F_{HC} = 0$$

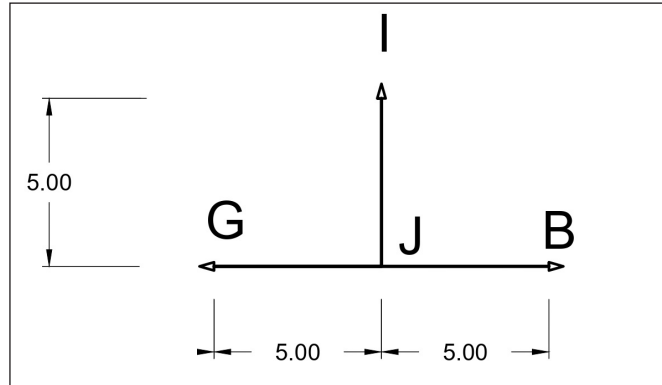
$$F_{HF} = 75 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{HI} = 0$$

Paso 8. Diagrama de cuerpo libre nodo J (Figura 50)

Figura 50



$$\sum F_y = 0$$

$$F_{JI} = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

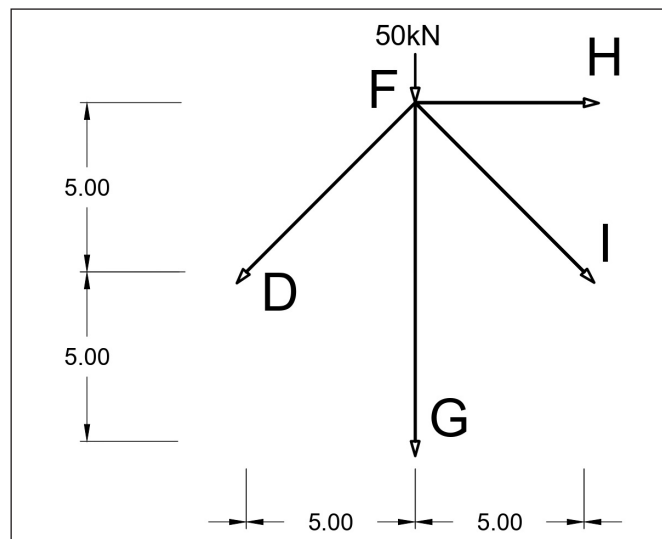
$$-F_{JG} + F_{JB} = 0$$

$$F_{JG} = -225 \text{ kN}$$

54

Paso 9. Diagrama de cuerpo libre nodo F (Figura 51)

Figura 51



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{FD} \cdot \cos(45^\circ) + F_{HF} + F_{FI} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$-106,066 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ) + 75 \text{ kN} + F_{FI} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$F_{FI} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{FD} \cdot \sin(45^\circ) - F_{FG} - F_{FI} \cdot \sin(45^\circ) - 50 \text{ kN} = 0$$

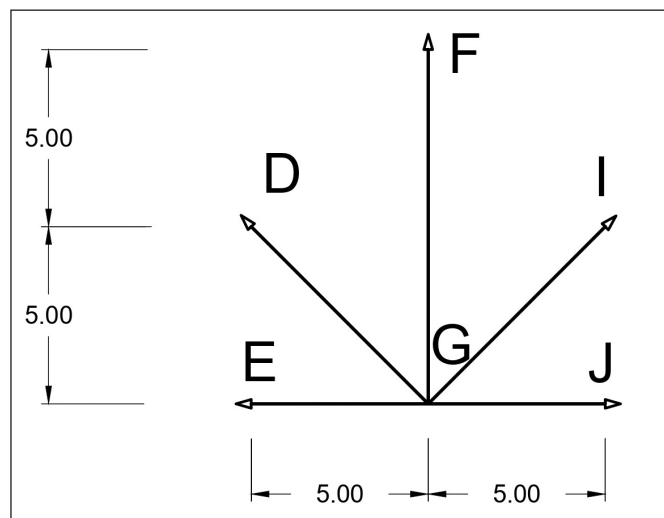
$$-106,066 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) - 50 \text{ kN} = F_{FG}$$

$$F_{FG} = -125 \text{ kN}$$

55

Paso 10. Diagrama de cuerpo libre nodo G (Figura 52)

Figura 52



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{GD} \cdot \cos(45^\circ) - F_{GE} + F_{GJ} + F_{GI} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$35,356 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ) + 50 \text{ kN} - 225 \text{ kN} + F_{GI} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$F_{GI} \cdot \cos(45^\circ) = 150 \text{ kN}$$

$$F_{GI} = 212,132 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{GD} \cdot \sin(45^\circ) + F_{GF} + F_{GI} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

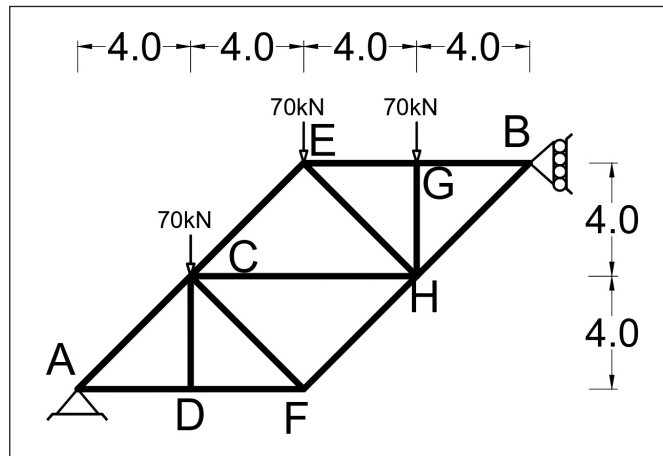
$$-35,356 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) - 125 \text{ kN} + 212,132 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

Problema resuelto n.º 16.

Cerchas

Con el uso del método de Secciones, determinar la fuerza de los elementos EC Y FH (Figura 53).

Figura 53



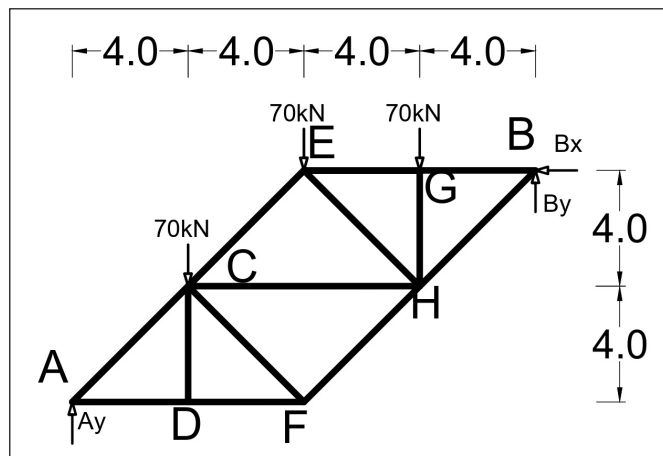
Solución

57

Paso 1. Diagrama de cuerpo libre

Se hace un esquema de toda la armadura, planteando las fuerzas externas que ocurren sobre ella (Figura 54), y se escriben las ecuaciones de equilibrio,

Figura 54



$$\sum M_B = 0$$

$$70 \text{ kN} \cdot 12 \text{ m} + 70 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} + 70 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} - A_y \cdot 16 \text{ m} = 0$$

$$B_x = \frac{1680 \text{ kN} \cdot \text{m}}{16 \text{ m}} = 105 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$105 \text{ kN} + B_y = 0$$

$$A_y = B_y = 105 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

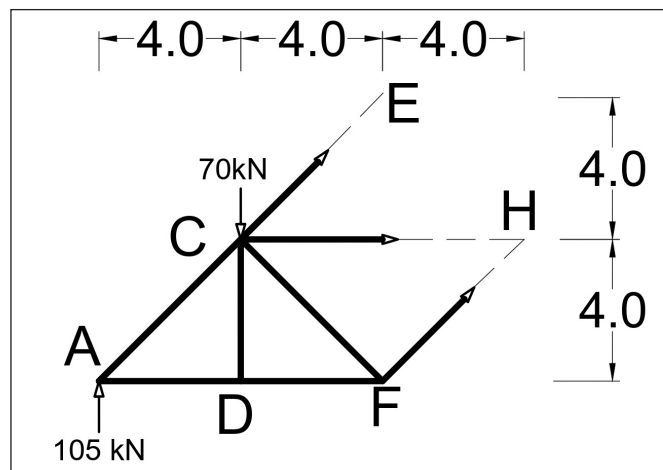
$$B_x = 0$$

58

Paso 2. Corte entre los elementos CE, CH y FH (Figura 55) y sumatoria de momentos en C

Se hace un esquema de toda la armadura, planteando las fuerzas externas que ocurren sobre ella (Figura 54), y se escriben las ecuaciones de equilibrio,

Figura 55



$$\sum M_C = 0$$

$$-105 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + F_{FH} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 4 \text{ m} + F_{FH} \cdot \sin(45^\circ) \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$4 \text{ m} \cdot F_{FH} (\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ)) = 420 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{FH} = \frac{420 \text{ kN} \cdot \text{m}}{5,6568 \text{ m}}$$

$$F_{FH} = 74,25 \text{ kN}$$

Paso 3. Sumatoria de momentos en A

Se hace un esquema de toda la armadura, planteando las fuerzas externas que ocurren sobre ella (Figura 54), y se escriben las ecuaciones de equilibrio,

$$\sum M_A = 0$$

$$-F_{CH} \cdot 4 \text{ m} + F_{FH} \cdot \sin(45^\circ) \cdot 8 \text{ m} - 70 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$-F_{CH} \cdot 4 \text{ m} = -74,25 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) \cdot 8 \text{ m} + 70 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m}$$

$$-F_{CH} \cdot 4 \text{ m} = -420,02 \text{ kN} \cdot \text{m} + 280 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{CH} = \frac{-420,02 \text{ kN} \cdot \text{m} + 280 \text{ kN} \cdot \text{m}}{-4 \text{ m}} = 35,005 \text{ kN}$$

Paso 4. Sumatoria de fuerzas

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{CH} + F_{CE} \cdot \text{sen}(45^\circ) + F_{FH} \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0$$

$$35,005 \text{ kN} + F_{CE} \cdot \text{sen}(45^\circ) + 74,25 \text{ kN} \cdot \text{sen}(45^\circ) = 0$$

$$F_{CE} = \frac{-35,005 \text{ kN} - 52,503 \text{ kN}}{\text{sen}(45^\circ)} = -123,755 \text{ kN}$$

60

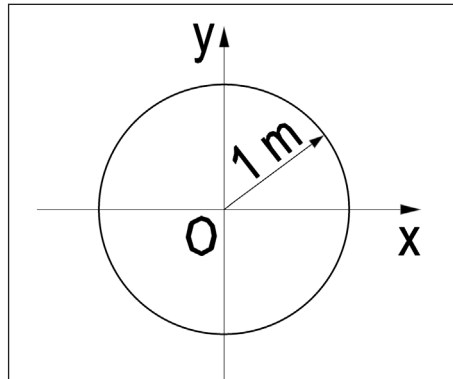


Problema resuelto n.º 17.

Momento polar de inercia

Determine: a) El momento polar de inercia del círculo y b) Usando el momento polar de inercia determine el momento de inercia respecto al centro de la figura (Figura 56).

Figura 56

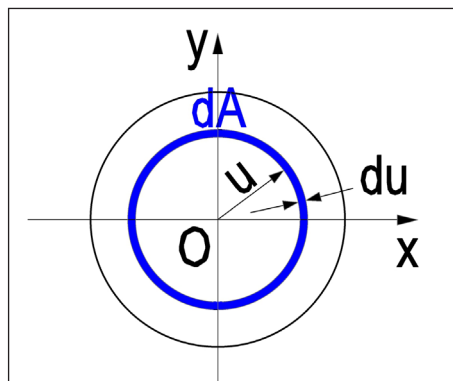


Solución

Paso 1. Momento polar de inercia

a) Tomaremos un elemento diferencial anular dA , como se muestra a continuación (Figura 57):

Figura 57



El momento polar de inercia para cada elemento diferencial anular del círculo sería:

$$dJ_O = u^2 \cdot dA$$
$$dA = 2\pi u \cdot du$$

Una vez expresado la ecuación de momento polar de inercia de cada elemento y su respectiva área, se procede a integrar la ecuación de 0 hasta el radio (1m):

$$J_o = \int dJ_o = \int_0^r u^2 (2\pi u \cdot du) = 2\pi \int_0^r u^3 \cdot du$$

$$J_o = \frac{2\pi r^4}{4} - \frac{2\pi 0^4}{4} = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$r = 1m$$

$$J_o = \frac{\pi \cdot (1m)^4}{2} = \frac{\pi}{2} m^4 = 1,57 m^4$$

Paso 2. Cálculo de momento de inercia respecto al centro de la figura

b) Primero, por la simetría de la figura se tiene que el momento con respecto al eje x es igual que el momento con respecto al eje y:

$$I_x = I_y$$

62

Entonces, se tiene que el momento polar de inercia es igual también a la suma de los momentos de inercia de la figura:

$$J_o = I_x + I_y$$

Y dado que obtuvimos el momento polar de inercia en el inciso a, se procede a despenar el momento de inercia ya que es la única incógnita.

$$J_o = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y$$

$$\frac{\pi}{2} m^4 = 2I_x$$

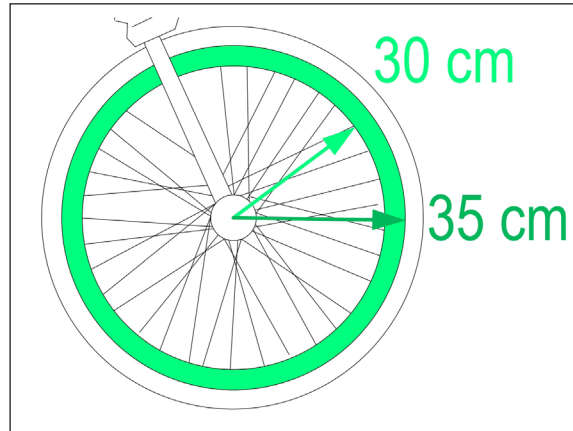
$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} m^4 = 0,79 m^4$$

Problema resuelto n.º 18.

Momento polar de inercia

Determine: a) El momento polar de inercia del rin de bicicleta (Figura 58) y b) Usando el momento polar de inercia determine el momento de inercia respecto al eje.

Figura 58



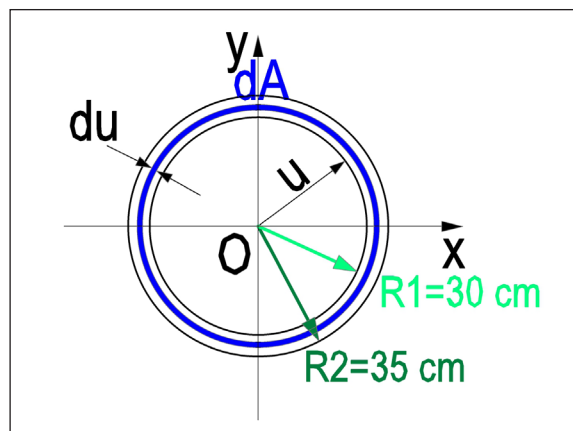
Solución

63

Paso 1. Momento polar de inercia

a) Tomaremos un elemento diferencial anular dA , como se muestra a continuación (Figura 59):

Figura 59



El momento polar de inercia para cada elemento diferencial anular del círculo sería:

$$dJ_o = u^2 \cdot dA$$

$$dA = 2\pi u \cdot du$$

Una vez expresado la ecuación de momento polar de inercia de cada elemento y su respectiva área, se procede a integrar la ecuación de o hasta el radio (1m):

$$J_o = \int dJ_o = \int_{R_1}^{R_2} u^2 (2\pi u \cdot du) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} u^3 \cdot du$$

$$J_o = \frac{2\pi(R_2)^4}{4} - \frac{2\pi(R_1)^4}{4} = \frac{2\pi}{4} [R_2 - R_1]^4 = \frac{\pi}{2} [R_2 - R_1]^4$$

$$R_1 = 30 \text{ cm}$$

$$R_2 = 35 \text{ cm}$$

$$J_o = \frac{\pi}{2} [35 \text{ cm} - 30 \text{ cm}]^4 = \frac{5\pi}{2} \text{ cm}^4 = 7,85 \text{ cm}^4$$

64

Paso 2. Cálculo de momento de inercia respecto al centro de la figura.

b) Primero, por la simetría de la figura se tiene que el momento con respecto al eje x es igual que el momento con respecto al eje y:

$$I_x = I_y$$

Entonces, se tiene que el momento polar de inercia es igual también a la suma de los momentos de inercia de la figura:

$$J_o = I_x + I_y$$

Y dado que obtuvimos el momento polar de inercia en el inciso a, se procede a despenar el momento de inercia ya que es la única incógnita.

$$J_o = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y$$

$$\frac{5\pi}{2} \text{ cm}^4 = 2I_x$$

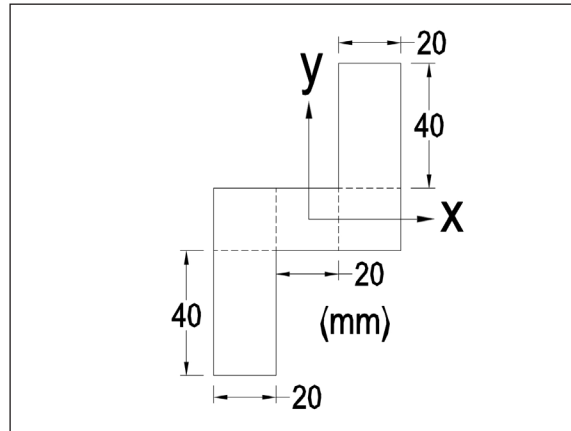
$$I_x = I_y = \frac{5\pi}{4} \text{ cm}^4 = 3,93 \text{ m}^4$$

Problema resuelto n.º 19.

Producto de inercia

Hallar el producto de inercia de la figura indicada (Figura 60) respecto al eje de referencia centroidal.

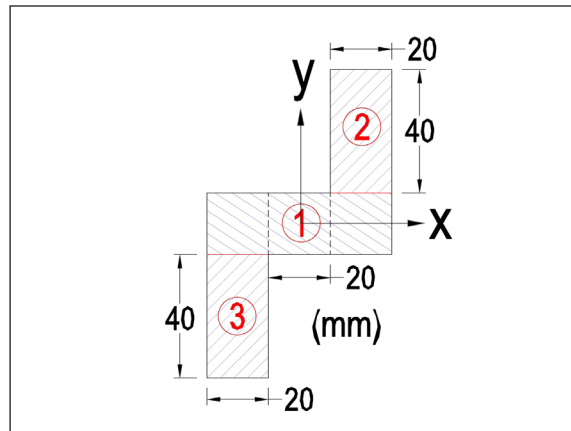
Figura 60



Solución

Para la realización de este ejercicio utilizaremos el teorema de ejes paralelos para determinar el producto de inercia de las divisiones de la figura (Figura 61) que realizamos a continuación:

Figura 61



Ahora bien, para tal disposición de contornos, el producto de inercia de la figura total estaría compuesto por los productos de inercia de los 3 contornos, en este caso:

$$I_{xy} = (\bar{I}_{xy})_1 + (I_{xy})_2 + (I_{xy})_3$$

El producto de inercia del contorno 1, se indica en la ecuación como el producto de inercia centroidal de este contorno, dado que el eje de referencia de toda la figura es el mismo que el eje centroidal del contorno 1.

También se destaca el hecho de que la figura al tener simetría respecto a un eje dado, su producto de inercia es cero:

$$(\bar{I}_{xy})_1 = 0$$

Ahora, los productos de inercia de las otras figuras se obtienen de acuerdo a la ecuación del teorema de ejes paralelos:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot A$$

Y también, dado que las figuras 2 y 3 tiene simetría respecto a un eje dado:

$$(\bar{I}_{xy})_2 = (\bar{I}_{xy})_3 = 0$$

La ecuación del producto de inercia de la figura sería entonces:

$$I_{xy} = (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot A)_2 + (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot A)_3$$

Para la obtención de las coordenadas de centroide de las figuras y las áreas, se realiza el cálculo de estos en una tabla para mejor organización:

Tabla 5

FIGURA	A (MM ²)	$\bar{x}$ (MM)	$\bar{y}$ (MM)	A · $\bar{x}$ · $\bar{y}$ (MM ⁴)
2	800	30	30	720000
3	800	-30	-30	720000
		Σ	1440000	+20,478

$$I_{xy} = 1,44 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Problema resuelto n.º 20.

Producto de inercia

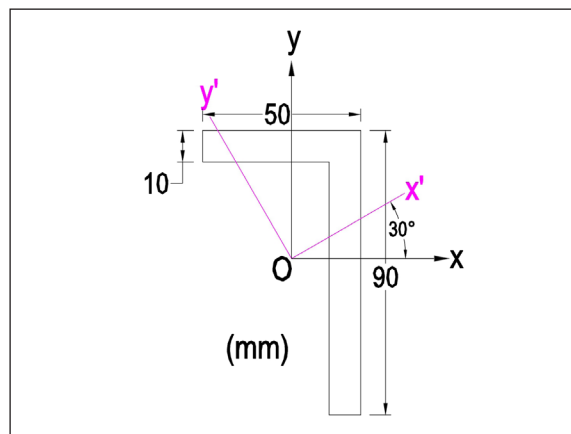
Para la figura mostrada (Figura 62) con los siguientes momentos y producto de inercia respecto a sus de referencia:

Usando el Círculo De Mohr Determine:

$$\bar{I}_x = \frac{25592500}{3} \text{ mm}^4; \bar{I}_y = \frac{5320000}{3} \text{ mm}^4; \bar{I}_{xy} = -\frac{46800000}{169} \text{ mm}^4$$

- a) Los ejes principales de la sección sobre el punto o (Centroide).
- b) Los valores de los momentos principales de inercia.
- c) Los momentos y productos de inercia respecto a los ejes X' y Y' que forman un ángulo de 30° con los ángulos de referencia iniciales.

Figura 62



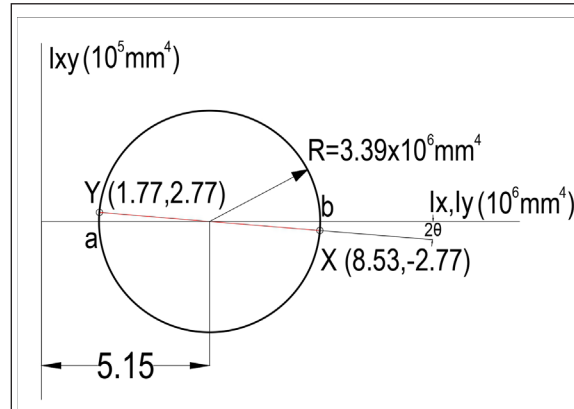
67

Solución

Paso 1. Dibujar círculo de Mohr

Primero se ubican los puntos con coordenadas $X = (I_x, I_{xy})$ y $Y = (I_y, -I_{xy})$ y se juntan con una línea recta (Figura 63). Con esto es posible determinar el círculo de Mohr, el I_{prom} y el radio de círculo:

Figura 63



$$I_{prom} = \frac{1}{2} \left(\frac{25592500}{3} mm^4 + \frac{5320000}{3} mm^4 \right) = \frac{15456250}{3} mm^4 \approx 5,15 \times 10^6 mm^4$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (I_x - I_y) \right]^2 + [I_{xy}]^2}$$

68

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (8,53 \times 10^6 mm^4 - 1,77 \times 10^6 mm^4) \right]^2 + [2,77 \times 10^5 mm^4]^2}$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{25592500}{3} mm^4 - \frac{5320000}{3} mm^4 \right) \right]^2 + \left[\frac{46800000}{169} mm^4 \right]^2}$$

$$R = 3390079,343 mm^4 \approx 3,39 \times 10^6 mm^4$$

Paso 2. Determinar ángulo de rotación de ejes principales

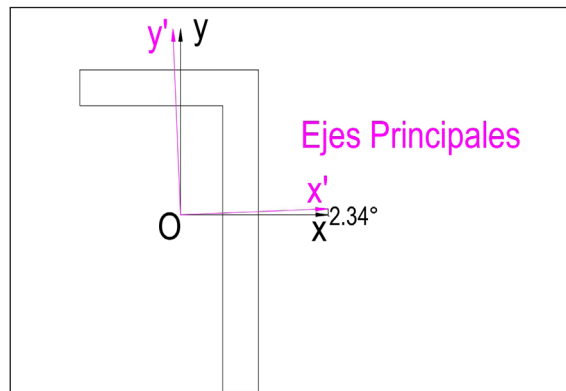
a) Los ejes principales correspondientes en el círculo de Mohr a los que forman una línea paralela con el eje I_x , I_y , se establece su ubicación de acuerdo al ángulo de giro de estos con respecto a los ejes iniciales que se obtuvieron trazando una línea por los puntos $X(I_x, I_{xy})$ y $Y(I_y, -I_{xy})$.

El ángulo entre los dos ejes representa el doble de lo que se tendría que girar realmente el eje de referencia para ubicarse en los ejes principales. Con esto en cuenta, se tiene que:

$$\sin(2\theta) = \frac{I_{xy}}{R} = \frac{\frac{46800000}{169} \text{ mm}^4}{3390079,343 \text{ mm}^4}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{\frac{46800000}{169} \text{ mm}^4}{3390079,343 \text{ mm}^4} \right) \cong 2,34^\circ$$

Figura 64



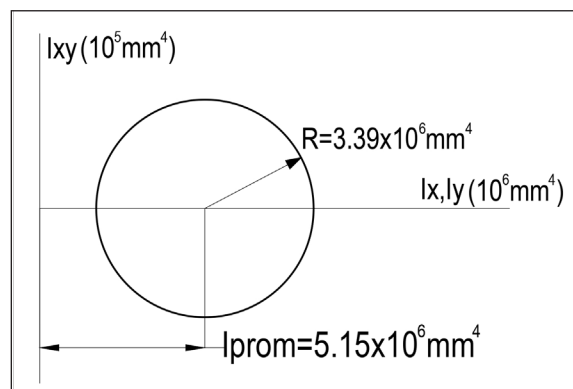
Así, rotando los ejes iniciales 2.34° en sentido antihorario, se ubican los ejes principales de la sección (Figura 64).

69

Paso 3. Determinar momentos principales de inercia

b) Mediante los términos hallados anteriormente de I_{prom} y R (Figura 65) se pueden obtener los valores momentos de inercia de los ejes principales, $I_{máx}$ e $I_{mín}$, como se describe a continuación:

Figura 65



$$I_{m\acute{a}x} = I_{prom} + R = \frac{15456250}{3} mm^4 + 3390079,343 mm^4 = 8542162,676 mm^4$$

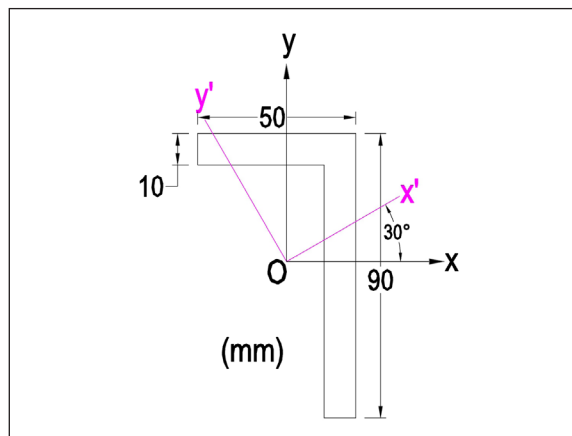
$$I_{m\acute{a}x} \cong 8,54 \times 10^6 mm^4$$

$$I_{m\acute{a}x} = I_{prom} - R = \frac{15456250}{3} mm^4 - 3390079,343 mm^4 = 1762003,99 mm^4$$

$$I_{m\acute{a}x} \cong 1,76 \times 10^6 mm^4$$

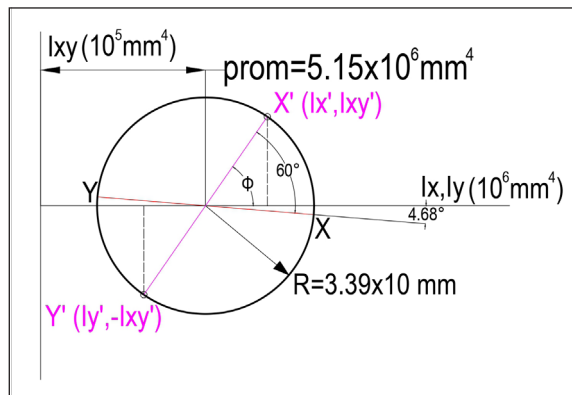
Paso 4. Momentos y producto de inercia respecto a los ejes X' y Y' (Figura 66)

Figura 66



c) Ahora, para representar lo ejes rotados 30° en sentido antihorario respecto a los ejes de referencia en el círculo de Mohr, se deben rotar el doble (60°) (Figura 67):

Figura 67



Luego, se determina el valor de Φ , que forman los ejes rotados con los principales para que mediante el triángulo recto formado se puedan determinar los momentos y productos de inercia:

$$\Phi = 60^\circ - 4,68^\circ = 55,32^\circ$$

$$I_{x'} = I_{prom} + R \cdot \cos(60^\circ) = \frac{15456250}{3} mm^4 + 3390079,343 mm^4 \cdot \cos(60^\circ)$$

$$I_{x'} = 6847123,005 mm^4 \cong 6,85 \times 10^6 mm^4$$

$$I_{y'} = I_{prom} - R \cdot \cos(60^\circ) = \frac{15456250}{3} mm^4 - 3390079,343 mm^4 \cdot \cos(60^\circ)$$

$$I_{y'} = 3457043,662 mm^4 \cong 3,46 \times 10^6 mm^4$$

$$I_{xy'} = R \cdot \sin(60^\circ) = 3390079,343 mm^4 \cdot \sin(60^\circ)$$

$$I_{xy'} = 2935894,832 mm^4 \cong 2,94 \times 10^5 mm^4$$



Esta obra se editó en Ediciones USTA.
Tipografías de la familia Fira Sans
y Share Tech.
2021