

# Evaluación y Optimización de la Inversión en Medios Publicitarios

Nicolas Contreras

## Contenido

<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>Motivación</b>	<b>6</b>
<b>Problema</b>	<b>7</b>
<b>Objetivos</b>	<b>7</b>
Objetivo General . . . . .	7
Objetivos Específicos . . . . .	7
<b>Justificación</b>	<b>8</b>
Importancia Económica . . . . .	8
Impacto en la Marca . . . . .	8
Estratégico y Operacional . . . . .	8
Contexto Actual . . . . .	9
<b>Hipótesis</b>	<b>9</b>
<b>Antecedentes</b>	<b>9</b>
Antecedentes Generales . . . . .	9
Estudios Previos . . . . .	10
Impacto del Marketing en el Precio de las Acciones . . . . .	10
Modelos de Marketing Mix . . . . .	10
Optimización de Portafolios . . . . .	10
Métodos de Optimización Avanzados . . . . .	10
Modelos de Robyn y LightweightMMM . . . . .	11
Diferenciación del Estudio . . . . .	11
Importancia y Relevancia Actual . . . . .	12

<b>Metodología</b>	<b>12</b>
Recolección de Datos . . . . .	12
Fuentes de Datos . . . . .	12
Período de Estudio . . . . .	12
Técnicas de Análisis . . . . .	13
Estandarización de Datos . . . . .	13
Transformaciones de Datos . . . . .	13
Análisis de Correlación . . . . .	14
Diagramas de Dispersión . . . . .	14
Análisis de Causalidad . . . . .	15
Análisis de Componentes Principales (PCA) . . . . .	15
Modelos Predictivos . . . . .	15
Justificación del Uso de Estos Modelos . . . . .	17
Optimización de Hiperparámetros . . . . .	18
Optimización de Portafolio de Inversiones en Marketing . . . . .	18
Evaluación y Validación . . . . .	19
Pruebas de Robustez y Sensibilidad . . . . .	19
Validación Cruzada . . . . .	20
Implementación de los Resultados . . . . .	20
<b>Marco Teórico</b>	<b>20</b>
Impacto del Marketing en el Precio de las Acciones . . . . .	20
Análisis de Sentimiento y Redes Sociales . . . . .	21
Teoría de la Señalización . . . . .	21
Transformación y Estandarización de Datos . . . . .	21
Transformaciones de Datos . . . . .	22
Evaluación de Transformaciones . . . . .	23
Estandarización de Datos . . . . .	24
Dispersión y Correlaciones . . . . .	25
Dispersión . . . . .	25
Correlaciones . . . . .	26
Nueva Correlación . . . . .	27
Correlaciones Rezagadas . . . . .	27
Justificación y Aplicación en el Estudio . . . . .	27
Análisis de Componentes Principales (PCA) . . . . .	28
Interpretación de Resultados . . . . .	28
Justificación y Aplicación en el Estudio . . . . .	29

Modelos Lineales, Polinomiales y Spline . . . . .	29
Modelos Lineales . . . . .	29
Justificación y Aplicación en el Estudio . . . . .	30
Modelo Random Forest . . . . .	31
Estudios Previos que Utilizan Random Forest . . . . .	31
Justificación del Modelo . . . . .	31
Optimización de Hiperparámetros Bayesiana . . . . .	32
Fórmulas . . . . .	32
XGBoost . . . . .	32
Componentes Clave de XGBoost . . . . .	32
Optimización Bayesiana de Hiperparámetros . . . . .	33
Justificación para Utilizar XGBoost con Optimización Bayesiana en Predicciones Financieras . . . . .	33
Fórmulas y Explicaciones . . . . .	33
Regularización en Modelos Predictivos: Ridge, Lasso y Elastic Net . . . . .	34
Ridge Regression . . . . .	34
Lasso Regression . . . . .	34
Elastic Net . . . . .	35
Comparación y Elección del Método . . . . .	35
Gradient Boosting . . . . .	35
Fundamentos del Gradient Boosting . . . . .	35
Modelo Bayesian Gradient Boosting . . . . .	35
Justificación para su Uso en Predicciones . . . . .	36
Aplicación en Predicciones . . . . .	36
Fórmulas y Demás . . . . .	36
Red Neuronal . . . . .	36
Fundamentos de la Red Neuronal . . . . .	37
Modelo de Red Neuronal Bayesiana . . . . .	37
Justificación para su Uso en Predicciones . . . . .	37
Aplicación en Predicciones . . . . .	37
Modelos Mixtos . . . . .	37
Introducción . . . . .	37
Fundamentos de los Modelos Mixtos . . . . .	37
Modelo Mixto . . . . .	38
Aplicación en Predicciones . . . . .	38
Evaluación del Modelo Mixto . . . . .	38
Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) . . . . .	38

SVM para Regresión . . . . .	38
Función de Núcleo Radial (RBF) . . . . .	38
Selección de Hiperparámetros . . . . .	38
Selección Bayesiana de Hiperparámetros . . . . .	39
Evaluación del Modelo SVM . . . . .	39
Selección y Comparación de Modelos . . . . .	39
Importancia de Seleccionar los Mejores Modelos . . . . .	39
Importancia de Promediar las Importancias . . . . .	39
Teoría de Markowitz . . . . .	40
Conceptos Clave . . . . .	40
Formulación Matemática . . . . .	40
Aplicación en Inversión de Medios . . . . .	41
Algoritmo Genético . . . . .	41
Aplicaciones Previas de Algoritmos Genéticos . . . . .	41
Conceptos Clave del Algoritmo Genético . . . . .	42
Aplicación en Inversión de Medios para Bancolombia . . . . .	42
Implementación en el Estudio . . . . .	42
Optimización Convexa . . . . .	43
Conceptos Clave de la Optimización Convexa . . . . .	43
Aplicación en Bancolombia . . . . .	44
Implementación en el Estudio . . . . .	44
Recocido Simulado . . . . .	44
Conceptos Clave del Recocido Simulado . . . . .	45
Aplicación en Bancolombia . . . . .	45
Métricas Clave . . . . .	45
Retorno Esperado . . . . .	46
Riesgo (Desviación Estándar) . . . . .	46
Índice Sharpe . . . . .	46
VaR (Valor en Riesgo) . . . . .	46
CVaR (Riesgo de Pérdida Condicionada) . . . . .	46
Sensibilidad y Robustez . . . . .	46
<b>Hallazgos y Resultados</b> . . . . .	<b>46</b>
Mejores Transformaciones y Distribuciones . . . . .	46
Interpretación de los Resultados . . . . .	47
Análisis de Dispersión . . . . .	49
Interpretación de Resultados . . . . .	49

Correlaciones . . . . .	51
Análisis de Correlación Tradicional . . . . .	51
Análisis de Nueva Correlación . . . . .	52
Correlaciones Rezagadas . . . . .	53
Interpretación de Resultados . . . . .	53
Pruebas de Causalidad (Granger y Sims) . . . . .	54
Resultados de las Pruebas de Causalidad . . . . .	54
Interpretación de los Resultados . . . . .	54
Conclusiones de las Pruebas de Causalidad . . . . .	55
Análisis de Componentes Principales (PCA) . . . . .	55
Biplot de PCA . . . . .	55
Porcentaje de Varianza Explicada . . . . .	56
Contribución de las Variables a los Primeros Dos Componentes Principales . . . . .	56
Interpretación de los Componentes Principales . . . . .	57
Conclusiones del PCA . . . . .	57
Métricas de Modelos . . . . .	57
Interpretación de Resultados . . . . .	57
Conclusiones . . . . .	58
Optimización de Hiperparámetros y Minimización del Sobreajuste . . . . .	59
Recomendaciones . . . . .	59
Comparación de Predicción . . . . .	59
Interpretación de Resultados . . . . .	59
Promedio de los Modelos . . . . .	59
Conclusiones . . . . .	60
Resultados de las Optimizaciones . . . . .	60
Optimización de Medios . . . . .	60
Interpretación de Resultados . . . . .	61
Explicación de las Métricas . . . . .	61
Conclusiones . . . . .	62
Recomendaciones . . . . .	62
<b>Conclusiones Finales</b>	<b>62</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>64</b>

## Introducción

En un entorno económico volátil, muchas instituciones financieras han observado fluctuaciones considerables en los precios de sus acciones tras el lanzamiento de campañas publicitarias digitales. Aunque estas campañas aumentan el reconocimiento de la marca, a menudo están asociadas con una notable volatilidad en el mercado. Este fenómeno subraya la importancia de alinear estratégicamente los esfuerzos de marketing con los objetivos financieros para mitigar riesgos y aprovechar oportunidades.

El marketing en el sector bancario es crucial no solo para atraer nuevos clientes, sino también para mantener la lealtad de los actuales y mejorar la percepción de la marca. Las inversiones en marketing pueden influir directamente en el precio de las acciones.

Este estudio analizará cómo las inversiones en distintos medios publicitarios impactan específicamente en el rendimiento de las acciones de las instituciones financieras. Se recopilarán datos detallados sobre inversiones publicitarias y precios de las acciones. Estos datos serán analizados para prever y optimizar el impacto a largo plazo. Además, se aplicarán métodos de optimización para determinar la mejor asignación del portafolio publicitario y minimizar el riesgo.

Un aspecto crucial es la sensibilidad y robustez del modelo. Se probarán varios enfoques y técnicas para asegurar que las recomendaciones finales sean fiables y prácticas. Se evaluarán diversas metodologías para ofrecer una visión integral.

Los resultados proporcionarán insights valiosos sobre cómo maximizar el retorno de la inversión en marketing y mejorar el rendimiento financiero mediante una estrategia bien planificada. En resumen, se busca vincular los esfuerzos de marketing con el rendimiento de las acciones desde un punto de vista estadístico, ofreciendo recomendaciones prácticas basadas en datos para mejorar la eficacia de las inversiones publicitarias y fortalecer la posición competitiva en el mercado, así como resultados y procedimientos estadísticos.

## Motivación

Las fluctuaciones en el precio de las acciones de diversas entidades financieras pueden estar estrechamente relacionadas con sus campañas de marketing. Un caso concreto es el de Bancolombia, que en el segundo semestre de 2023 lanzó una campaña masiva de televisión que duró tres meses. Durante este período, la entidad observó una estabilización en el precio de sus acciones, que previamente había estado en declive. Este fenómeno sugiere que una gestión de marketing estratégica y bien informada puede no solo estabilizar, sino también mejorar el valor de mercado de una empresa.

Otro ejemplo es Davivienda, que en el primer trimestre de 2023 implementó una serie de anuncios digitales dirigidos a jóvenes adultos. Estos anuncios incrementaron el reconocimiento de la marca y coincidieron con un aumento del 5% en el precio de sus acciones en los tres meses siguientes. Estos resultados resaltan la importancia de comprender y optimizar las inversiones en marketing para lograr impactos financieros positivos.

Dado lo competitivo del sector bancario, es esencial entender el impacto de las inversiones en marketing. La investigación busca optimizar el retorno de la inversión en marketing, contribuyendo al crecimiento y estabilidad del valor de mercado de las entidades financieras. Un enfoque estratégico no solo mejora el rendimiento financiero, sino que también fortalece la posición competitiva en el mercado.

Este trabajo puede tener un impacto significativo al proporcionar una base sólida para decisiones de marketing más eficientes y estratégicas. Al demostrar cómo las inversiones bien planificadas en marketing pueden conducir a un crecimiento sostenible, el estudio puede servir como guía para otras empresas del sector que buscan maximizar sus recursos y lograr mayor estabilidad en el mercado financiero.

## Problema

Las entidades financieras deben encontrar formas de estabilizar y aumentar su valor de mercado mientras maximizan el retorno de sus inversiones en marketing. Muchas han experimentado fluctuaciones en el precio de sus acciones asociadas a sus campañas publicitarias, lo que sugiere una posible conexión entre las estrategias de marketing y el desempeño financiero. Sin embargo, la falta de un análisis profundo y estructurado impide una comprensión clara de estas relaciones y la formulación de estrategias efectivas. Por ello, es fundamental entender qué relación existe entre las campañas publicitarias en distintos medios y las fluctuaciones en el precio de las acciones para diseñar estrategias de marketing más efectivas.

Un desafío clave es la falta de análisis detallados que expliquen cómo y por qué las campañas de marketing afectan el precio de las acciones. Algunas entidades financieras han lanzado campañas en múltiples canales, como televisión, digital y exterior, pero no han podido identificar los factores específicos de cada canal que contribuyen al impacto observado en el precio de las acciones. Esto impide la formulación de estrategias efectivas basadas en evidencia. Para abordar esto, es crucial identificar qué técnicas de análisis y modelado son más efectivas para predecir el impacto de las inversiones en marketing sobre el precio de las acciones.

Otro problema es la variabilidad en los resultados de las campañas de marketing. Mientras que algunas campañas logran aumentar el precio de las acciones, otras no tienen el mismo éxito y, en algunos casos, pueden incluso tener efectos negativos. Esta inconsistencia sugiere que no todas las estrategias de marketing son igualmente efectivas y que es necesario un análisis más profundo para determinar qué factores contribuyen al éxito o fracaso de una campaña. Aquí, es esencial explorar cómo las técnicas de optimización pueden mejorar la asignación de presupuesto publicitario para maximizar el retorno financiero y reducir la variabilidad en los resultados.

Además, las condiciones del mercado pueden cambiar rápidamente, afectando la efectividad de las campañas de marketing. Sin modelos predictivos robustos y un análisis estructurado, las entidades financieras no pueden anticipar estos cambios ni ajustar sus estrategias de marketing en consecuencia. Esto puede llevar a una volatilidad innecesaria en el precio de las acciones y a una utilización ineficiente de los recursos de marketing. Por ello, es crucial que las instituciones financieras comprendan cómo sus inversiones en marketing influyen en el precio de las acciones. Sin esta comprensión, las estrategias de marketing pueden no alinearse con los objetivos financieros de la empresa, resultando en una pérdida de competitividad y valor de mercado. Las entidades financieras deben implementar estrategias que alineen sus esfuerzos de marketing con los objetivos financieros a largo plazo para mantener su competitividad y estabilidad en el mercado.

La investigación pretende abordar estos desafíos mediante el desarrollo y la aplicación de un marco analítico robusto que permita a las entidades financieras comprender mejor las relaciones entre sus inversiones en marketing y el desempeño financiero. Al hacerlo, se busca proporcionar recomendaciones prácticas y basadas en datos para optimizar el retorno de la inversión en marketing, estabilizar el precio de las acciones y mejorar la posición competitiva en el mercado.

## Objetivos

### Objetivo General

Evaluar el efecto de las inversiones en diferentes canales de marketing, tales como televisión, digital, prensa, radio y publicidad exterior, sobre el precio de las acciones de una entidad financiera, y desarrollar estrategias que minimicen la volatilidad del mercado y maximicen el retorno financiero.

### Objetivos Específicos

1. **Analizar la Relación entre Inversiones en Marketing y Precio de las Acciones**

- Evaluar cómo las inversiones en canales específicos de marketing (televisión, digital, prensa, radio, publicidad exterior) se relacionan con las fluctuaciones en el precio de las acciones, utilizando modelos de regresión multivariada y series temporales.

## 2. Desarrollar Modelos Predictivos

- Implementar y comparar diversos modelos predictivos (Random Forest, regresión lineal, redes neuronales, XGBoost, etc.) para identificar los modelos más efectivos en predecir el impacto de las inversiones en marketing sobre el precio de las acciones.

## 3. Optimizar Combinaciones de Inversión en Medios

- Identificar las combinaciones óptimas de inversión en diferentes medios que maximicen los retornos financieros. Esto se realizará aplicando múltiples métodos de optimización, incluyendo el Modelo de Markowitz, algoritmos genéticos, optimización convexa y recocido simulado, para validar la robustez de los resultados.

## 4. Evaluar la Sensibilidad y Robustez del Modelo

- Probar diversos modelos y técnicas para asegurar que las recomendaciones finales sean fiables y prácticas. Evaluar la sensibilidad del modelo ante diferentes escenarios de inversión y condiciones de mercado.

## 5. Proporcionar Recomendaciones Estratégicas

- Desarrollar estrategias basadas en los resultados del análisis y la optimización para alinear los esfuerzos de marketing con los objetivos financieros de la entidad, mejorando la toma de decisiones en la asignación de presupuesto publicitario.

# Justificación

## Importancia Económica

Las fluctuaciones en el precio de las acciones pueden influir significativamente en la estabilidad financiera de una empresa y en la confianza de los inversores. Por ejemplo, diversas entidades financieras han experimentado caídas en el precio de sus acciones seguidas de recuperaciones notables tras campañas de marketing integrales. Esta correlación sugiere que una estrategia de marketing bien fundamentada puede atraer nuevos clientes, retener a los actuales y tranquilizar a los inversores sobre el futuro de la empresa, potencialmente estabilizando y aumentando el precio de las acciones.

## Impacto en la Marca

Desde la perspectiva del marketing, es fundamental entender cómo las inversiones en diversos canales influyen en los indicadores clave de rendimiento de la marca, como el reconocimiento y la preferencia de marca. Aunque este estudio se centra principalmente en el impacto en el precio de las acciones, también puede proporcionar insights sobre qué canales de marketing son los más efectivos para mejorar estos indicadores. Por ejemplo, se puede descubrir que las inversiones en publicidad digital y televisiva tienen un impacto más significativo en el reconocimiento de marca, lo que podría guiar futuras estrategias de marketing hacia estos canales.

## Estratégico y Operacional

A nivel estratégico, este estudio proporciona una base de evidencia para que los responsables de marketing ajusten sus estrategias en función de su impacto directo sobre el rendimiento financiero. Si se encuentra que las menciones positivas y la publicidad en televisión están fuertemente correlacionadas con un aumento en el precio de las acciones, se pueden priorizar estos canales en futuras campañas. Operacionalmente, los

insights derivados del análisis ayudarán a optimizar las campañas publicitarias en curso y a planificar futuras iniciativas con un enfoque más dirigido y rentable.

## Contexto Actual

El análisis es particularmente relevante en el contexto actual, donde el comportamiento del consumidor y las estrategias de marketing en el sector bancario están en constante evolución. Recientemente, cambios en las preferencias de los consumidores hacia canales digitales y la creciente importancia de las opiniones en línea han resaltado la necesidad de adaptar las estrategias de marketing para mantener la competitividad. Además, el aumento en el uso de aplicaciones bancarias es una nueva forma en la que los clientes interactúan con las instituciones financieras. Este estudio no solo beneficiará a la entidad financiera en términos de rendimiento financiero, sino que también fortalecerá su posición competitiva en el mercado.

## Hipótesis

- **H1:** Existe una correlación positiva significativa entre la inversión en diferentes medios publicitarios (televisión, digital, prensa, radio y publicidad exterior) y el aumento en el precio de las acciones de las entidades financieras.
- **H2:** La implementación de modelos predictivos avanzados (como Random Forest, redes neuronales y XGBoost) puede predecir con precisión el impacto de las inversiones en marketing sobre el precio de las acciones.
- **H3:** La optimización de la inversión en medios publicitarios utilizando el Modelo de Markowitz reduce la volatilidad del precio de las acciones y maximiza el retorno financiero.
- **H4:** El uso de técnicas avanzadas de simulación y optimización (algoritmos genéticos, optimización convexa y recocido simulado) proporciona una asignación de presupuesto más eficiente, resultando en un mayor retorno financiero en comparación con métodos tradicionales.

## Antecedentes

### Antecedentes Generales

El sector bancario ha participado activamente en la evolución de las estrategias de marketing y su impacto en el desempeño financiero. La relación entre las inversiones en marketing y el rendimiento financiero, especialmente en términos del precio de las acciones, es un área de creciente interés. Diversos estudios han demostrado que las campañas publicitarias, tanto en medios tradicionales como digitales, pueden tener un impacto significativo en el precio de las acciones de las instituciones financieras.

Evidencias muestran que las instituciones financieras consideran las inversiones en marketing como una herramienta clave para gestionar su presupuesto y mejorar su valor de mercado. La adopción de estrategias de marketing integradas y basadas en datos ha permitido a estas entidades no solo aumentar el reconocimiento de marca, sino también estabilizar y potenciar el precio de sus acciones. Las campañas bien planificadas y ejecutadas en diversos canales han mostrado ser efectivas en atraer y retener clientes, así como en fortalecer la confianza de los inversores.

Estos factores subrayan la importancia de una gestión de marketing estratégica y bien informada en el sector bancario, que no solo responde a las demandas del mercado, sino que también contribuye a la estabilidad y crecimiento financiero de las entidades. La capacidad de adaptarse rápidamente a los cambios en las preferencias de los consumidores y en el entorno económico es crucial para mantener la competitividad y asegurar el crecimiento a largo plazo.

## Estudios Previos

### Impacto del Marketing en el Precio de las Acciones

Numerosos estudios han explorado la relación entre las inversiones en marketing y el rendimiento financiero de las empresas. Joshi y Hanssens (2010) demostraron que las inversiones en marketing pueden tener un impacto positivo significativo en el valor de mercado de una empresa. Su investigación encontró que cada dólar adicional invertido en marketing genera un aumento proporcional en el valor de las acciones.

Un caso relevante es el de Procter & Gamble (P&G) en 2017, cuando redujo su gasto en publicidad digital en 200 millones de dólares debido a preocupaciones sobre la efectividad de los anuncios. Sorprendentemente, las ventas de P&G no se vieron afectadas negativamente, lo que llevó a la compañía a cuestionar la verdadera eficacia de sus inversiones en medios digitales. Este ejemplo subraya la importancia de analizar y optimizar las inversiones en marketing para asegurar que estén generando un retorno positivo.

### Modelos de Marketing Mix

El Marketing Mix Modeling (MMM) es una técnica analítica ampliamente utilizada para cuantificar el impacto de diversas actividades de marketing en las ventas y predecir el impacto de futuras campañas. Gupta y Lehmann (2003) destacaron la importancia de utilizar MMM para optimizar la asignación de recursos en diferentes canales de marketing, demostrando que una distribución eficiente puede maximizar la rentabilidad.

Un caso ilustrativo es el de Coca-Cola en 2015 con la campaña global “Share a Coke”, donde las etiquetas de las botellas tenían nombres populares. La campaña resultó en un aumento significativo en las ventas y el reconocimiento de marca, reflejándose también en un aumento en el precio de las acciones de la empresa. Este ejemplo justifica la importancia de alinear las estrategias de marketing con los objetivos financieros.

### Optimización de Portafolios

La teoría de portafolios, desarrollada por Harry Markowitz (1952), proporciona un marco para construir un portafolio de activos que maximiza los retornos para un nivel dado de riesgo. Aplicada al marketing, esta teoría permite diversificar las inversiones en diferentes canales de manera que se minimice el riesgo total y se maximice el retorno global. Kempf y Ruenzi (2006) adaptaron este modelo para optimizar las inversiones en marketing, demostrando su efectividad en la reducción de la volatilidad y la maximización de los retornos.

Técnicamente, el Modelo de Markowitz se basa en la media y la varianza de los retornos de los activos. La optimización busca maximizar el retorno esperado del portafolio para un nivel dado de riesgo (medido por la varianza) o minimizar el riesgo para un nivel dado de retorno esperado. El modelo utiliza la matriz de covarianzas entre los activos para determinar la combinación óptima que diversifique el riesgo.

### Métodos de Optimización Avanzados

**Algoritmos Genéticos** Los algoritmos genéticos son métodos de optimización inspirados en la evolución natural, utilizando procesos de selección, cruce y mutación para encontrar soluciones óptimas en problemas complejos con espacios de soluciones vastos. Ayodele y Charles (2016) mostraron que una empresa de marketing logró una mejora del 18% en el retorno de inversión y una reducción significativa en los costos publicitarios utilizando algoritmos genéticos para optimizar su mezcla de medios publicitarios.

Desde el punto de vista técnico, los algoritmos genéticos funcionan generando una población inicial de posibles soluciones y luego iterativamente seleccionan, combinan y mutan estas soluciones para explorar el espacio de búsqueda. La selección se basa en una función de aptitud que evalúa el rendimiento de cada solución. A través de múltiples generaciones, el algoritmo converge hacia una solución óptima.

**Optimización Convexa** La optimización convexa se basa en técnicas matemáticas que garantizan encontrar el óptimo global para problemas donde la función objetivo y las restricciones son convexas. Boyd y Vandenberghe (2004) demostraron su aplicación en el ajuste de portafolios de inversión, garantizando el máximo retorno para un nivel de riesgo específico.

Técnicamente, la optimización convexa implica resolver problemas donde la función objetivo es una función convexa, y las restricciones también forman un conjunto convexo. Esto asegura que cualquier mínimo local es también el mínimo global, lo que simplifica significativamente la búsqueda de la solución óptima. Las técnicas comunes incluyen la programación lineal, la programación cuadrática y la programación semidefinida.

**Recocido Simulado** El recocido simulado es una técnica de optimización inspirada en el proceso de recocido de metales, que permite encontrar soluciones aproximadas a problemas de optimización global. Kirkpatrick et al. (1983) mostraron que esta técnica es útil para escapar de óptimos locales en problemas complejos.

El proceso técnico del recocido simulado comienza con una solución inicial y una temperatura alta. La solución se perturba aleatoriamente, y si la nueva solución es mejor, se acepta. Si es peor, se acepta con una probabilidad que depende de la temperatura, que disminuye gradualmente. Esto permite explorar el espacio de búsqueda ampliamente al principio y refinar la búsqueda conforme se enfría. La técnica se basa en una función de enfriamiento que controla la disminución de la temperatura y, por lo tanto, la probabilidad de aceptar soluciones peores.

## Modelos de Robyn y LightweightMMM

**Robyn** Robyn es una herramienta de código abierto desarrollada por Meta que utiliza modelos bayesianos para medir el impacto de diferentes canales publicitarios y optimizar la asignación de presupuesto en tiempo real. Esta herramienta permite descomponer el impacto de cada canal y ajustar las inversiones de manera dinámica, ofreciendo una visión detallada del rendimiento de cada canal. Además, la documentación de Robyn, disponible en GitHub, proporciona guías detalladas y ejemplos de implementación, facilitando su uso y personalización por parte de las empresas.

**LightweightMMM** LightweightMMM, desarrollada por Google, es una herramienta de modelado de marketing mix que utiliza modelos de machine learning para analizar grandes volúmenes de datos y predecir el impacto de las actividades de marketing. Empresas que han utilizado LightweightMMM han logrado identificar de manera más precisa qué inversiones publicitarias generan mayor retorno, permitiendo una optimización más eficiente de sus presupuestos de marketing. Google proporciona documentación extensa y casos de estudio en su página oficial, lo que permite a los usuarios entender mejor las capacidades y aplicaciones de la herramienta.

Ambas herramientas proporcionan valiosas metodologías y técnicas que inspiran el enfoque de este estudio, utilizando machine learning y modelos bayesianos para mejorar la precisión de las predicciones y optimizar las decisiones de inversión.

## Diferenciación del Estudio

Este trabajo se distingue de los estudios previos en varios aspectos clave:

1. **Metodología Multimodelo:** En lugar de centrarse en un único modelo de optimización o análisis, se emplea una combinación de métodos diversos, como Random Forest, análisis multivariado, redes neuronales, además de conceptos inspirados en Robyn y LightweightMMM. Este enfoque permite una evaluación más robusta y completa de las relaciones entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones, proporcionando una visión integral del impacto de diversas estrategias de marketing.

2. **Optimización Dinámica del Mix de Medios:** Se desarrollan estrategias para la asignación dinámica del presupuesto de marketing utilizando el Modelo de Markowitz y otras técnicas avanzadas de optimización, como algoritmos genéticos y recocido simulado. Estas técnicas permiten adaptar las inversiones en marketing a las fluctuaciones del mercado en tiempo real, asegurando una utilización eficiente de los recursos para maximizar el retorno financiero y minimizar el riesgo.
3. **Enfoque en la Sensibilidad y Robustez del Modelo:** Se realizan pruebas extensivas de robustez y análisis de sensibilidad para garantizar que las recomendaciones sean prácticas y confiables. Evaluando cómo las variaciones en las inversiones en marketing y las condiciones del mercado afectan el rendimiento de las acciones, se asegura que los resultados sean aplicables en diversos escenarios y que las estrategias propuestas sean sostenibles a largo plazo.

## Importancia y Relevancia Actual

En el contexto actual, donde las estrategias de marketing en el sector bancario están en constante evolución, el análisis resulta particularmente relevante. Los cambios recientes en las preferencias de los consumidores hacia canales digitales han subrayado la necesidad de adaptar las estrategias de marketing para mantener la competitividad. Las entidades financieras enfrentan el desafío de optimizar sus inversiones en marketing en un entorno donde los consumidores son cada vez más críticos y selectivos respecto a los mensajes publicitarios que reciben.

Este estudio beneficiará a las entidades financieras al mejorar su rendimiento financiero y fortalecer su posición competitiva en el mercado. Al aplicar metodologías avanzadas de análisis y optimización, se ofrecerán insights prácticos que permitirán a los bancos tomar decisiones informadas sobre la asignación de sus presupuestos de marketing. Esto ayudará a maximizar el retorno de la inversión, reducir la volatilidad del precio de las acciones y mejorar la percepción de la marca entre los consumidores.

Además, este trabajo contribuye significativamente al cuerpo de conocimiento en la intersección de las finanzas y el marketing. Proporciona una metodología replicable que puede ser utilizada por otras empresas en el sector financiero y más allá. Los resultados del estudio ofrecerán una guía clara y basada en datos para optimizar las inversiones en marketing, lo que tendrá un impacto directo en la eficacia de las campañas publicitarias y en la estabilidad del valor de mercado de las empresas.

## Metodología

### Recolección de Datos

#### Fuentes de Datos

Para este estudio, se recolectarán datos de las siguientes fuentes:

- **Datos Financieros:** Precios históricos de las acciones de la entidad financiera bajo estudio, obtenidos de bases de datos financieras confiables como Bloomberg o Yahoo Finance.
- **Inversiones en Marketing:** Gastos en diferentes medios publicitarios (televisión, digital, prensa, radio, publicidad exterior), recopilados de los informes internos de la entidad financiera o de agencias de marketing asociadas.

#### Período de Estudio

El período de estudio abarcará desde de 2022 hasta febrero de 2024. Este período permite capturar suficiente variabilidad y tendencias en los datos para realizar análisis robustos y precisos.

## Técnicas de Análisis

### Estandarización de Datos

Antes de aplicar cualquier transformación, es crucial estandarizar los datos frente al mínimo y máximo de cada variable. La estandarización Min-Max transforma los datos para que todos los valores queden dentro de un rango de 0 a 1. Este paso es fundamental cuando se utilizan modelos de machine learning y técnicas estadísticas que son sensibles a las escalas de las variables.

La estandarización Min-Max es especialmente importante en contextos donde se combinan diferentes tipos de datos, como inversiones en publicidad en distintos medios (televisión, digital, radio, prensa, exterior) que pueden tener rangos y unidades diferentes. Al estandarizar, se asegura que todas las variables contribuyan equitativamente al análisis sin que una variable domine debido a su escala mayor.

Esta técnica mejora la comparabilidad entre variables y facilita la convergencia de los algoritmos de optimización. Además, permite que los coeficientes de los modelos sean interpretables en una escala común, mejorando la validez de los análisis realizados.

### Transformaciones de Datos

Una vez estandarizados los datos, se aplicarán varias técnicas de transformación para preparar los datos para el análisis. Estas técnicas son esenciales para mejorar la calidad de los datos y asegurar que cumplan con los supuestos necesarios para los modelos estadísticos y de machine learning. A continuación se detallan las transformaciones específicas que se utilizarán:

- **Adstock Transform:** Modela el efecto acumulativo de las inversiones en publicidad a lo largo del tiempo. Esta técnica es particularmente útil para capturar el efecto retardado y persistente de las campañas publicitarias. Se utiliza para ajustar el impacto de las inversiones publicitarias considerando que su efecto no es inmediato y tiende a acumularse y desvanecerse con el tiempo.
- **Weibull Transform:** Captura la distribución de respuesta retardada a la publicidad, útil para modelar la dinámica de la respuesta publicitaria a lo largo del tiempo. La transformación Weibull es efectiva para modelar la tasa de decaimiento de la respuesta publicitaria, permitiendo una comprensión más detallada de cómo y cuándo los consumidores responden a los estímulos publicitarios.
- **Log Transform:** Reduce la asimetría de la distribución de los datos, ampliamente utilizado en estudios financieros para manejar datos sesgados. Al aplicar esta transformación, los datos sesgados a la derecha se normalizan, lo que facilita el análisis estadístico y mejora la robustez de los modelos.
- **Sqrt Transform:** Reduce la varianza en datos con distribuciones altamente asimétricas. Esta transformación es especialmente útil para estabilizar la varianza y transformar los datos en una forma más manejable, facilitando la aplicación de modelos lineales y otros análisis.
- **Reciprocal Transform:** Atenúa los valores extremos de los datos, útil en datos con variabilidad extrema. Esta técnica es eficaz para mitigar el impacto de valores atípicos muy grandes, asegurando que no distorsionen los resultados del análisis.
- **Boxcox Transform:** Transforma los datos para aproximar una distribución normal, esencial para cumplir los supuestos de muchos modelos estadísticos. Esta transformación es flexible y puede ajustar los datos para que sigan una distribución normal, lo que es crucial para la validez de muchos métodos estadísticos.
- **Yeo-Johnson Transform:** Similar a Boxcox pero maneja datos con valores cero o negativos, proporcionando flexibilidad adicional. Esta transformación es útil en situaciones donde los datos contienen ceros o valores negativos, permitiendo que estos datos sean transformados de manera efectiva para su análisis.

Cada una de estas transformaciones se seleccionará y aplicará en función de las características específicas de los datos disponibles y las necesidades del análisis. Estas transformaciones mejorarán la calidad de los datos y asegurarán que los modelos aplicados puedan proporcionar resultados precisos y fiables.

El uso de estas técnicas de transformación son validas porque:

1. **Mejoran la Normalidad de los Datos:** Muchas técnicas estadísticas y de machine learning suponen que los datos siguen una distribución normal. Aplicar transformaciones como Boxcox o Yeo-Johnson ayuda a cumplir con este supuesto.
2. **Reducen la Asimetría y la Varianza:** Transformaciones como Log y Sqrt reducen la asimetría y estabilizan la varianza de los datos, lo cual es crucial para obtener estimaciones más precisas y robustas de los modelos.
3. **Capturan Efectos Retardados:** Transformaciones como Adstock y Weibull son esenciales para modelar el impacto prolongado y retardado de las inversiones publicitarias, proporcionando una visión más realista de cómo los consumidores responden a las campañas a lo largo del tiempo.
4. **Manejan Valores Extremos:** Técnicas como Reciprocal Transform ayudan a mitigar el impacto de valores extremos, asegurando que estos no distorsionen los resultados del análisis.

## Análisis de Correlación

Para comprender mejor las relaciones entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones, se realizarán diversos análisis de correlación. Estas técnicas permitirán identificar tanto relaciones lineales como no lineales, así como efectos retardados que pueden ser cruciales para el análisis. A continuación se detallan los métodos que se emplearán:

- **Correlaciones Clásicas:** Se calcularán las correlaciones de Pearson, Spearman y Kendall entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones. La correlación de Pearson mide la relación lineal entre dos variables, mientras que Spearman y Kendall son útiles para capturar relaciones no lineales y de orden. Estos métodos proporcionan una visión inicial y fundamental sobre cómo se relacionan las variables.
- **Nuevas Correlaciones:** Para capturar relaciones complejas no detectadas por las correlaciones tradicionales, se explorarán técnicas avanzadas de machine learning como el Maximal Information Coefficient (MIC). MIC es una medida más flexible que puede identificar dependencias no lineales y relaciones complejas entre variables, proporcionando una visión más profunda de las interacciones entre las inversiones en marketing y el rendimiento financiero.
- **Correlaciones Rezagadas:** Se analizarán las correlaciones entre las variables rezagadas para entender los efectos retardados de las inversiones en marketing. Esto es crucial para captar cómo las inversiones en diferentes periodos afectan el precio de las acciones en el futuro. El análisis de correlaciones rezagadas puede revelar patrones de influencia temporal que son esenciales para la planificación y optimización de las campañas publicitarias.

## Diagramas de Dispersión

Se utilizarán diagramas de dispersión para visualizar las relaciones entre las variables de inversión en marketing y el precio de las acciones. Estos diagramas permitirán identificar patrones y posibles outliers, proporcionando una visión gráfica inicial de cómo las inversiones en diferentes canales publicitarios pueden estar relacionadas con el rendimiento financiero de la entidad.

## Análisis de Causalidad

Para evaluar las relaciones causales entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones, se emplearán las siguientes técnicas:

- **Causalidad de Granger:** Esta técnica se utilizará para determinar si las inversiones en marketing pueden predecir cambios en el precio de las acciones. La causalidad de Granger es ampliamente utilizada en econometría para evaluar relaciones de causalidad temporal, es decir, si una variable es útil para predecir el futuro de otra variable. Este análisis ayudará a entender si las variaciones en el gasto en marketing preceden a los cambios en el precio de las acciones, proporcionando evidencia de una relación causal.
- **Pruebas de Causalidad de Sims:** Estas pruebas evaluarán la causalidad instantánea entre las variables, proporcionando una visión complementaria a la causalidad de Granger. Mientras que la causalidad de Granger se centra en relaciones temporales, las pruebas de Sims pueden identificar interdependencias instantáneas, es decir, si los cambios en las inversiones en marketing están directamente relacionados con cambios simultáneos en el precio de las acciones.

## Análisis de Componentes Principales (PCA)

El Análisis de Componentes Principales (PCA) se utilizará para reducir la dimensionalidad de los datos y capturar la mayor varianza posible en los componentes principales. Esta técnica transforma las variables originales en un nuevo conjunto de variables no correlacionadas llamadas componentes principales, ordenadas de manera que el primer componente retiene la mayor cantidad de varianza posible, seguido por el segundo, y así sucesivamente.

El PCA es particularmente útil para:

- **Simplificación del Modelo:** Al reducir el número de variables, se simplifica el modelo, lo que facilita su interpretación y análisis.
- **Visualización de Datos:** Permite la visualización de las relaciones entre las variables en un espacio de menor dimensión, lo que ayuda a identificar patrones y estructuras subyacentes en los datos.
- **Eliminación de Redundancias:** Ayuda a eliminar redundancias entre variables altamente correlacionadas, concentrando la información en menos componentes.

## Modelos Predictivos

Se implementarán y compararán diversos modelos predictivos para identificar los más efectivos en predecir el impacto de las inversiones en marketing sobre el precio de las acciones. Los modelos a utilizar incluyen:

- **Regresión Lineal:** Este modelo básico ayuda a entender la relación lineal entre las inversiones y el precio de las acciones. Es coherente utilizarlo como línea base para comparar otros modelos más complejos. Ha sido ampliamente utilizado en estudios financieros para predecir precios de acciones y medir el impacto de diferentes variables financieras. Por ejemplo, estudios de impacto de campañas publicitarias en ventas, como el trabajo de Dekimpe y Hanssens (1999), han utilizado la regresión lineal para analizar cómo las inversiones en marketing afectan las ventas y el valor de las acciones.
- **Regresión Polinómica:** Extiende la regresión lineal para capturar relaciones no lineales entre las variables. Es útil cuando las relaciones entre las inversiones en marketing y los precios de las acciones no son estrictamente lineales, proporcionando una mayor flexibilidad en el modelado. Se ha utilizado en el modelado de la demanda y en estudios de marketing para entender comportamientos complejos del consumidor. Por ejemplo, en el estudio de análisis de la demanda de productos tecnológicos donde las preferencias de los consumidores no siguen un patrón lineal simple.

- **Random Forest:** Aunque se utiliza comúnmente para clasificación, Random Forest también es efectivo para predicción debido a su capacidad de manejar interacciones complejas y no lineales entre las variables. Breiman (2001) mostró la eficacia de Random Forest en la predicción de valores continuos, lo que lo hace adecuado para este estudio. Es utilizado en la predicción de precios de acciones y en análisis de riesgo crediticio. Por ejemplo, Patel et al. (2015) aplicaron Random Forest para predecir el movimiento de precios de acciones en la Bolsa de Valores de Bombay, obteniendo resultados significativos al manejar grandes volúmenes de datos y múltiples variables económicas. Este ejemplo demuestra cómo Random Forest puede ser utilizado en tareas similares a las propuestas aquí, proporcionando predicciones precisas y robustas en escenarios financieros y de marketing.
- **Redes Neuronales:** Capaces de modelar relaciones no lineales complejas. Utilizado en estudios como Gu, Kelly y Xiu (2020) para predicción financiera, las redes neuronales pueden captar patrones complejos y proporcionar predicciones precisas en escenarios donde las relaciones entre variables son altamente no lineales. Se han aplicado en la predicción del comportamiento del mercado y en la optimización de portafolios. Por ejemplo, en el análisis de sentimientos en redes sociales para predecir el comportamiento del mercado de valores.
- **XGBoost:** XGBoost es un algoritmo de boosting que mejora iterativamente el rendimiento del modelo. Chen y Guestrin (2016) demostraron su eficacia en una variedad de tareas predictivas, incluyendo finanzas. Es adecuado para este estudio debido a su capacidad para manejar grandes volúmenes de datos y mejorar el rendimiento de predicción. Utilizado en la predicción de valores de mercado y en competiciones de análisis de datos. Por ejemplo, XGBoost ha sido aplicado en la predicción de precios de acciones en múltiples estudios. Uno de estos estudios es el de Zhang et al. (2018), donde utilizaron XGBoost para predecir los precios de las acciones en el mercado de valores de China, logrando una alta precisión en las predicciones debido a su capacidad para manejar grandes conjuntos de datos y complejas interacciones entre variables.
- **Modelos Spline:** Utilizados para capturar relaciones no lineales suavizadas en los datos. Los modelos spline son útiles para modelar curvas suaves y capturar cambios graduales en las relaciones entre variables, lo cual es relevante cuando se analizan inversiones en marketing y su impacto a lo largo del tiempo. Aplicados en estudios económicos y de marketing para análisis de tendencias. Por ejemplo, los modelos spline han sido utilizados en el análisis de la evolución del gasto del consumidor en diferentes categorías de productos a lo largo del tiempo. En un estudio de Sun et al. (2017), se utilizaron splines para modelar las tendencias de consumo en el mercado minorista, permitiendo capturar cambios graduales y no lineales en el comportamiento del consumidor.
- **Modelos Bayesianos:** Incluyendo regresión lineal bayesiana, polinómica y spline bayesiana, estos modelos incorporan incertidumbre en las predicciones, proporcionando una estimación probabilística que es valiosa para la toma de decisiones financieras bajo incertidumbre. Utilizados en análisis de riesgo y en previsiones económicas, estos modelos también se aplican en el ámbito del marketing. Por ejemplo, en un estudio realizado por Rossi et al. (2005), se emplearon modelos bayesianos para analizar la efectividad de las campañas de marketing, permitiendo a las empresas ajustar sus estrategias basadas en probabilidades estimadas y mejorar el retorno de inversión.
- **Ridge Regression:** Ridge Regression ayuda a manejar problemas de multicolinealidad al penalizar los coeficientes de regresión. Es útil cuando las variables de inversión en marketing están correlacionadas entre sí, lo que puede afectar la estabilidad de los coeficientes en la regresión lineal. Comúnmente usado en econometría y estudios de marketing para mejorar la estabilidad del modelo. Por ejemplo, Ridge Regression ha sido utilizado en la evaluación de la efectividad de campañas publicitarias donde múltiples variables de marketing pueden estar altamente correlacionadas. En un estudio realizado por Hoerl y Kennard (1970), se demostró cómo Ridge Regression puede mejorar la precisión de las predicciones en presencia de multicolinealidad, relevante para este estudio al analizar el impacto de diversas inversiones en marketing en el precio de las acciones.
- **Lasso Regression:** Similar a Ridge, pero también puede hacer selección de variables al penalizar y reducir algunos coeficientes a cero. Esto es beneficioso para identificar las variables de marketing

más influyentes y simplificar el modelo. Se ha utilizado en estudios financieros y de marketing para identificar los factores más importantes que afectan las decisiones de compra de los consumidores. Por ejemplo, Tibshirani (1996) aplicó Lasso Regression para seleccionar las variables más relevantes en un conjunto de datos complejo, demostrando su utilidad en la simplificación de modelos predictivos en marketing y finanzas.

- **Elastic Net:** Combina las propiedades de Ridge y Lasso, útil para manejar multicolinealidad y selección de variables. Es particularmente adecuado cuando se tiene un gran número de variables correlacionadas y se necesita un enfoque equilibrado entre penalización y selección de variables. Aplicado en análisis financieros y de marketing donde se requiere identificar y ajustar múltiples factores interrelacionados. Zou y Hastie (2005) demostraron la efectividad de Elastic Net en la selección de variables y mejora de la predicción en modelos con alta correlación entre variables, lo cual es pertinente para estudios que buscan optimizar las inversiones en marketing y su impacto en el precio de las acciones.
- **Support Vector Machine (SVM):** Utilizado para predicción en series temporales y clasificación. Drucker et al. (1997) demostraron su uso en tareas de regresión. SVM es útil para capturar relaciones complejas y no lineales en los datos, proporcionando una alternativa poderosa a los modelos lineales tradicionales. Utilizado en la predicción del comportamiento del consumidor y en el análisis de series temporales financieras. En un estudio de Cortes y Vapnik (1995), SVM mostró su capacidad para manejar datos de alta dimensionalidad y proporcionar predicciones precisas, lo que es relevante para analizar el impacto de inversiones en marketing en el precio de las acciones.
- **Gradient Boosting:** Similar a XGBoost, utilizado para mejorar iterativamente el modelo. Friedman (2001) introdujo esta técnica para mejorar el rendimiento de modelos predictivos. Es adecuado para este estudio debido a su capacidad para aumentar la precisión de las predicciones mediante la combinación de múltiples modelos débiles en uno fuerte. Aplicado en la predicción de precios de acciones y en estudios de marketing avanzado para optimizar campañas publicitarias. Por ejemplo, Gradient Boosting ha sido utilizado en la predicción del comportamiento del mercado financiero. En un estudio realizado por Varian (2014), Gradient Boosting se aplicó para predecir el impacto de las inversiones en marketing digital en las ventas y el valor de las acciones, demostrando su eficacia en la mejora de la precisión de las predicciones y en la optimización de las estrategias de inversión en marketing.
- **Modelo Mixto:** Combina características de modelos lineales y no lineales para capturar relaciones complejas en los datos. Este enfoque permite una mayor flexibilidad y precisión en la modelización de las relaciones entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones. Utilizado en estudios que requieren capturar tanto efectos fijos como aleatorios, proporcionando una visión más completa de los datos. En un estudio realizado por Gelman y Hill (2007), los modelos mixtos se utilizaron para analizar datos jerárquicos en marketing y finanzas, mostrando cómo este enfoque puede mejorar la comprensión de las relaciones entre múltiples niveles de datos en un contexto financiero y de marketing.

### Justificación del Uso de Estos Modelos

- **Coherencia con Temas de Regresión:** Muchos de estos modelos son extensiones de la regresión lineal, adecuados para capturar tanto relaciones lineales como no lineales. Modelos como la regresión polinómica, Ridge, Lasso, y Elastic Net son comúnmente utilizados en problemas de regresión para mejorar la precisión y manejar la multicolinealidad.
- **Relevancia en Estudios Financieros:** Modelos como Random Forest, XGBoost, redes neuronales y SVM han demostrado ser efectivos en estudios financieros previos para la predicción de precios de acciones y análisis de inversiones. Su capacidad para manejar grandes volúmenes de datos y capturar relaciones complejas los hace ideales para este tipo de análisis.
- **Manejo de Incertidumbre:** Los modelos bayesianos proporcionan una forma de incorporar la incertidumbre en las predicciones, lo cual es crucial en la toma de decisiones financieras. Esto permite a los responsables de marketing y finanzas evaluar el riesgo asociado con diferentes estrategias de inversión.

- **Optimización del Modelo:** Técnicas como Gradient Boosting y XGBoost son conocidas por su capacidad para mejorar iterativamente el rendimiento del modelo, lo que garantiza predicciones más precisas y fiables. Esto es esencial para formular estrategias de marketing que maximicen el retorno de la inversión.

## Optimización de Hiperparámetros

La optimización de hiperparámetros se realizó utilizando técnicas de optimización bayesiana para encontrar los mejores parámetros de cada modelo, mejorando su desempeño predictivo. La optimización bayesiana es una técnica eficiente que construye un modelo probabilístico del rendimiento de la función objetivo y utiliza este modelo para seleccionar los hiperparámetros más prometedores.

## Procedimiento

- **División de Datos:** Los datos se dividieron en conjuntos de entrenamiento y prueba. La división se realizó utilizando un enfoque de validación cruzada (cross-validation) estratificada para asegurar que ambos conjuntos de datos representaran adecuadamente la distribución de las variables y capturarán la variabilidad existente. Este enfoque también ayudó a evitar el sobreajuste y proporcionó una evaluación más robusta del modelo.
- **Entrenamiento de Modelos:** Cada modelo se entrenó utilizando el conjunto de entrenamiento. Durante el entrenamiento, se ajustaron los hiperparámetros de los modelos a través de técnicas de optimización bayesiana, como el algoritmo Tree-structured Parzen Estimator (TPE), para identificar la combinación de hiperparámetros que maximice el rendimiento del modelo.
- **Evaluación de Modelos:** Se evaluó el desempeño de cada modelo en el conjunto de prueba utilizando métricas como el error cuadrático medio (RMSE), el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), el error absoluto medio (MAE) y el criterio de información de Akaike (AIC). Estas métricas proporcionaron una visión comprensiva del rendimiento de los modelos en términos de precisión y generalización.

## Optimización de Portafolio de Inversiones en Marketing

Se utilizaron varios métodos de optimización para determinar la combinación óptima de inversiones en diferentes medios publicitarios que maximizan el retorno financiero. Los métodos empleados incluyen:

- **Modelo de Markowitz:** El Modelo de Markowitz, introducido por Harry Markowitz en 1952, equilibra el retorno y el riesgo de las inversiones, creando un portafolio que maximiza el retorno esperado para un nivel dado de riesgo. En el contexto del marketing, se utilizó para diversificar las inversiones en diferentes canales publicitarios, minimizando el riesgo total y maximizando el retorno global. Este modelo se basa en la teoría de la cartera eficiente, seleccionando combinaciones de inversiones que minimizan la varianza (riesgo) para un nivel dado de retorno esperado. Para aplicar el Modelo de Markowitz, primero se definieron los objetivos de la optimización, como maximizar el retorno financiero y minimizar la volatilidad. Luego, se recopilaron datos históricos de las inversiones en marketing y los retornos asociados para cada medio publicitario. Se utilizaron modelos de regresión para determinar la influencia de cada medio en el precio de las acciones y se calcularon las medias y las varianzas de los retornos, así como la matriz de covarianzas de las inversiones. Utilizando estos datos, se resolvió el problema de optimización para encontrar la combinación óptima de inversiones que maximice el retorno esperado para un nivel dado de riesgo, empleando técnicas de programación cuadrática para resolver el problema de minimización de la varianza sujeta a las restricciones de retorno esperado.
- **Algoritmos Genéticos:** Los algoritmos genéticos son técnicas evolutivas que buscan soluciones óptimas a través de procesos de selección, cruce y mutación. Ayodele y Charles (2016) demostraron la eficacia de estos algoritmos en la optimización de la mezcla de medios publicitarios. Estos algoritmos

son adecuados para problemas complejos donde el espacio de soluciones es vasto y no lineal. En este estudio, se aplicaron algoritmos genéticos para iterar a través de posibles combinaciones de inversiones publicitarias, utilizando operadores inspirados en la biología evolutiva para encontrar configuraciones que maximicen el retorno financiero. Para utilizar algoritmos genéticos, se definieron los objetivos de la optimización y se creó una población inicial de posibles soluciones (combinaciones de inversiones en marketing). Cada solución fue evaluada en función de su retorno financiero y su influencia en el precio de las acciones, utilizando la matriz de covarianzas de las inversiones. Se aplicaron operadores de selección para elegir las mejores soluciones, y operadores de cruce y mutación para generar nuevas soluciones. Este proceso se repitió a lo largo de varias generaciones, permitiendo que las soluciones evolucionaran hacia configuraciones que ofrecieran un mejor retorno financiero y menor riesgo. La implementación de algoritmos genéticos involucró el uso de software especializado y la calibración de parámetros como la tasa de mutación y el tamaño de la población para asegurar una convergencia eficiente hacia la solución óptima.

- **Optimización Convexa:** La optimización convexa, demostrada por Boyd y Vandenberghe (2004), garantiza encontrar el óptimo global en problemas donde la función objetivo y las restricciones son convexas. Esta técnica es robusta y eficiente, asegurando que la solución encontrada es la mejor posible dentro de un espacio de soluciones convexas. En marketing, se utilizó para optimizar presupuestos publicitarios bajo restricciones presupuestarias y de retorno esperado, permitiendo a las empresas maximizar el impacto de sus campañas mientras gestionan eficientemente sus recursos. Para aplicar la optimización convexa, se definieron los objetivos de la optimización y se modelaron las restricciones presupuestarias y de retorno esperado. Se formularon las funciones objetivo y las restricciones de manera que formaran un problema convexo. Utilizando los datos históricos de las inversiones y su influencia en el precio de las acciones junto con la matriz de covarianzas de las inversiones, se resolvió el problema de optimización para encontrar la combinación óptima de inversiones en marketing que maximice el retorno esperado mientras se cumplen las restricciones presupuestarias. Este proceso se implementó utilizando técnicas de programación convexa, como la programación cuadrática y la programación semidefinida, aprovechando herramientas de software para resolver eficientemente los problemas de optimización.
- **Recocido Simulado:** El recocido simulado es una técnica inspirada en el proceso de recocido de metales, útil para encontrar soluciones aproximadas a problemas de optimización global. Kirkpatrick et al. (1983) demostraron su aplicación en diversas áreas, incluyendo marketing. En este estudio, el recocido simulado se utilizó para explorar el espacio de soluciones de manera estocástica y escapar de óptimos locales, encontrando combinaciones de inversiones que maximicen el rendimiento a largo plazo. Para utilizar el recocido simulado, se definieron los objetivos de la optimización y se inició con una solución inicial (una combinación de inversiones en marketing). La solución fue perturbada aleatoriamente, y si la nueva solución era mejor, se aceptaba. Si era peor, se aceptaba con una probabilidad que dependía de una “temperatura” que disminuía gradualmente. Este proceso permitió explorar el espacio de soluciones ampliamente al principio y refinar la búsqueda conforme se enfriaba el sistema. Los datos históricos de las inversiones, su influencia en el precio de las acciones y la matriz de covarianzas de las inversiones se utilizaron para evaluar las soluciones y guiar el proceso hacia la solución global óptima. La implementación del recocido simulado requirió la calibración cuidadosa de la función de enfriamiento y la tasa de aceptación para balancear la exploración y explotación del espacio de soluciones.

## Evaluación y Validación

### Pruebas de Robustez y Sensibilidad

Realizo pruebas de robustez y análisis de sensibilidad para asegurar que los resultados sean consistentes y aplicables en diversas condiciones del mercado.

#### Procedimiento:

1. **Pruebas de Robustez:** Evaluación de la estabilidad de los resultados bajo diferentes supuestos y condiciones del mercado. Esto incluye variaciones en las condiciones económicas, cambios en las preferencias del consumidor y fluctuaciones en el presupuesto de marketing.
2. **Análisis de Sensibilidad:** Evaluación de cómo cambios en los supuestos clave afectan los resultados del modelo. Se analizan variables críticas como los niveles de inversión en distintos medios, la respuesta del mercado a las campañas publicitarias y otros factores externos. Este análisis permite identificar los puntos más sensibles del modelo y ajustar las estrategias en consecuencia.

## Validación Cruzada

Se utilizaron técnicas de validación cruzada para evaluar la precisión y la generalización de los modelos predictivos y de optimización.

### Procedimiento:

- **División de Datos:** Dividir los datos en múltiples subconjuntos (folds).
- **Entrenamiento y Validación:** Entrenar y validar los modelos en diferentes combinaciones de los subconjuntos de datos. En cada iteración, un subconjunto se utiliza como conjunto de prueba mientras los restantes se utilizan para el entrenamiento.
- **Promedio de Resultados:** Promediar los resultados de todas las combinaciones para obtener una estimación robusta de la precisión del modelo. Este método ayuda a evitar el sobreajuste y proporciona una medida más precisa de la capacidad del modelo para generalizar a nuevos datos.

## Implementación de los Resultados

Basado en los resultados del análisis y la optimización, se desarrollaron estrategias de inversión en medios publicitarios que maximicen el retorno financiero y minimicen la volatilidad del precio de las acciones. Estas estrategias se basan en un análisis exhaustivo de los datos y en la aplicación de métodos de optimización avanzados.

Se proporcionan recomendaciones detalladas para la entidad financiera sobre cómo ajustar sus inversiones en marketing para alcanzar los objetivos financieros deseados. Estas recomendaciones incluyen la identificación de los medios publicitarios más efectivos, la asignación óptima de presupuestos y sugerencias para mejorar el impacto de las campañas publicitarias.

## Marco Teórico

### Impacto del Marketing en el Precio de las Acciones

#### Mecanismos de Influencia Directa

1. **Aumento en las Ventas y los Ingresos:** Las campañas de marketing efectivas pueden conducir a un aumento en las ventas y, por ende, en los ingresos de la empresa. Este incremento en los ingresos suele traducirse en mayores beneficios, lo que puede llevar a un aumento en el precio de las acciones. Por ejemplo, una promoción bien ejecutada puede generar un incremento significativo en las ventas durante el período de la campaña, reflejándose positivamente en los resultados trimestrales o anuales de la empresa.

2. **Incremento en el Valor de Marca:** Las estrategias de marketing que mejoran el reconocimiento y la percepción de la marca pueden incrementar su valor. Un mayor valor de marca puede resultar en una prima de precio para los productos de la empresa y una mayor lealtad del cliente, factores que contribuyen a un crecimiento sostenible de los ingresos. Un valor de marca sólido también puede atraer a inversores, quienes perciben a la empresa como una entidad estable y en crecimiento, lo que a su vez puede aumentar el precio de las acciones.
3. **Lanzamiento de Nuevos Productos:** El marketing es esencial durante el lanzamiento de nuevos productos. Las campañas de marketing que generan expectación y demanda para nuevos productos pueden conducir a un aumento rápido en las ventas y a una percepción positiva del mercado sobre la capacidad de innovación de la empresa. Esto puede reflejarse en un aumento en el precio de las acciones a medida que los inversores anticipan el éxito del nuevo producto.

### Mecanismos de Influencia Indirecta

1. **Percepción del Inversor:** Las campañas de marketing exitosas pueden mejorar la percepción de la empresa entre los inversores. Las empresas que invierten consistentemente en marketing pueden ser vistas como más dinámicas y orientadas al crecimiento, lo que puede aumentar la confianza de los inversores y, por ende, el precio de las acciones.
2. **Reducción del Riesgo de Negocio:** Un marketing efectivo puede ayudar a diversificar la base de clientes y a reducir la dependencia de unos pocos grandes clientes. Esta diversificación reduce el riesgo de negocio percibido, lo que puede traducirse en una menor volatilidad en el precio de las acciones y una valoración más alta de la empresa en el mercado.
3. **Señalización al Mercado:** La teoría de la señalización sugiere que las empresas pueden enviar señales positivas al mercado a través de sus inversiones en marketing. Gastos significativos en marketing pueden ser interpretados como una señal de confianza en el crecimiento futuro de la empresa, lo que puede influir positivamente en la valoración de las acciones.

### Análisis de Sentimiento y Redes Sociales

En la era digital, el análisis de sentimiento en redes sociales se ha convertido en una herramienta crucial para comprender la percepción pública de una marca. Estudios como el de Bollen, Mao y Zeng (2011) han demostrado que el sentimiento expresado en plataformas digitales puede predecir las fluctuaciones del mercado de acciones con una precisión significativa. Esta técnica permite ajustar las estrategias de marketing en tiempo real para responder a las opiniones y emociones de los consumidores, influenciando indirectamente el precio de las acciones.

### Teoría de la Señalización

La teoría de la señalización, propuesta por Michael Spence en 1973, sugiere que las empresas pueden usar señales para comunicar su calidad y perspectivas futuras al mercado. Las inversiones en marketing pueden actuar como una señal positiva para los inversores, indicando que la empresa está invirtiendo en su crecimiento y fortalecimiento de la marca. Esta señal puede llevar a una mejora en la percepción de los inversores y un aumento en el precio de las acciones.

### Transformación y Estandarización de Datos

En el análisis cuantitativo de datos, especialmente en estudios relacionados con marketing y finanzas, la transformación y estandarización de datos son procesos fundamentales para asegurar la validez y robustez de los resultados obtenidos. Estos procesos permiten manejar adecuadamente las características intrínsecas de los datos, mejorando la precisión y eficiencia de los análisis estadísticos y modelos predictivos.

## Transformaciones de Datos

Las transformaciones de datos se utilizan para modificar la escala de los datos, reducir la varianza, y convertir distribuciones sesgadas en distribuciones que se aproximen más a la normalidad. Estas transformaciones son esenciales para cumplir con los supuestos subyacentes de muchos modelos estadísticos y técnicas de análisis de datos.

### Tipos de Transformaciones

#### 1. Transformación Logarítmica (Log Transform)

La transformación logarítmica se aplica frecuentemente para reducir la asimetría de la distribución de los datos, particularmente cuando estos presentan una distribución sesgada hacia la derecha. La fórmula utilizada es:

$$y = \log(x + 1)$$

donde  $x$  representa el valor original y  $y$  el valor transformado. En nuestro estudio, esta transformación es crucial para normalizar los datos de inversiones en marketing, facilitando su análisis mediante técnicas estadísticas convencionales.

#### 2. Transformación de Raíz Cuadrada (Sqrt Transform)

La transformación de raíz cuadrada es eficaz para reducir la varianza en datos con distribuciones altamente asimétricas. Su fórmula es:

$$y = \sqrt{x}$$

Esta transformación es particularmente útil cuando los datos contienen valores extremos que pueden influir desproporcionadamente en los resultados del análisis, estabilizando así la variabilidad de los datos.

#### 3. Transformación Recíproca (Reciprocal Transform)

La transformación recíproca se emplea para atenuar los valores extremos de los datos. La fórmula es:

$$y = \frac{1}{x + 1}$$

Esta transformación es relevante en el contexto de nuestro estudio para manejar variables como las inversiones en medios publicitarios que pueden presentar valores muy altos o bajos, normalizando su impacto en los análisis subsecuentes.

#### 4. Transformación Box-Cox (Boxcox Transform)

La transformación Box-Cox se utiliza para aproximar los datos a una distribución normal. Su fórmula es:

$$y = \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{si } \lambda \neq 0$$
$$y = \log(x) \quad \text{si } \lambda = 0$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de transformación. Esta técnica es vital en nuestro estudio para asegurar que los datos cumplan con los supuestos de normalidad, mejorando así la robustez y validez de los modelos estadísticos aplicados.

#### 5. Transformación Yeo-Johnson (Yeo-Johnson Transform)

La transformación Yeo-Johnson es una técnica estadística empleada para manejar datos que pueden contener valores cero o negativos, extendiendo la funcionalidad de la transformación Box-Cox. Esta técnica se utiliza para asegurar que los datos se ajusten mejor a una distribución normal, lo cual es esencial para muchos métodos estadísticos y de machine learning.

La transformación Yeo-Johnson se basa en el supuesto de que la normalidad de los datos mejorará al aplicar la transformación, siendo útil cuando los datos originales no cumplen con este supuesto y contienen valores negativos y ceros. El parámetro  $\lambda$  se estima utilizando máxima verosimilitud para encontrar el valor que mejor ajuste los datos transformados a una distribución normal.

Las fórmulas de transformación son:

$$y = \begin{cases} \frac{((x+1)^\lambda - 1)}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0, x \geq 0 \\ \log(x + 1) & \text{si } \lambda = 0, x \geq 0 \\ \frac{-(|x+1|)^{2-\lambda} - 1}{2-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 2, x < 0 \\ -\log(-x + 1) & \text{si } \lambda = 2, x < 0 \end{cases}$$

Para aplicar la transformación, primero se estima  $\lambda$  usando métodos de máxima verosimilitud, luego se aplica la fórmula correspondiente a los datos según el valor de  $\lambda$ .

En el análisis de inversiones en marketing y precios de acciones, los datos a menudo presentan una distribución no normal, con valores negativos y ceros. La transformación Yeo-Johnson se emplea para normalizar estas variables, mejorando la adecuación de los datos a los modelos estadísticos utilizados en el estudio.

## 6. Transformación Adstock

La transformación Adstock se utiliza para modelar el efecto retardado de la publicidad en los consumidores. La fórmula es:

$$y_t = x_t + \theta \cdot y_{t-1}$$

donde  $x_t$  es la inversión en publicidad en el tiempo  $t$ ,  $y_t$  es el efecto acumulado de la publicidad en el tiempo  $t$ , y  $\theta$  es la tasa de retención. Esta transformación es esencial para modelar cómo las inversiones publicitarias tienen un impacto prolongado en el tiempo.

## 7. Transformación Weibull

La transformación Weibull se utiliza para modelar el desgaste de la publicidad y otros efectos de marketing a lo largo del tiempo. La fórmula es:

$$y_t = x_t + (1 - \exp(-(t/\lambda)^\kappa)) \cdot y_{t-1}$$

donde  $\lambda$  y  $\kappa$  son parámetros de escala y forma, respectivamente. Esta transformación permite capturar la dinámica de la efectividad de la publicidad a lo largo del tiempo.

## Evaluación de Transformaciones

Para determinar la efectividad de cada transformación, se realizaron varias pruebas estadísticas en los datos transformados:

1. **Prueba de Shapiro-Wilk:** Evalúa la normalidad de los datos transformados.
  - **Hipótesis Nula (H0):** Los datos siguen una distribución normal.
  - **Hipótesis Alternativa (H1):** Los datos no siguen una distribución normal.
2. **Prueba de D'Agostino:** También conocida como prueba de normalidad, evalúa si los datos se distribuyen normalmente.
  - **Hipótesis Nula (H0):** Los datos siguen una distribución normal.
  - **Hipótesis Alternativa (H1):** Los datos no siguen una distribución normal.
3. **Prueba de Anderson-Darling:** Otra prueba de normalidad, con mayor sensibilidad a los extremos de la distribución.

- **Hipótesis Nula (H0):** Los datos siguen una distribución normal.
  - **Hipótesis Alternativa (H1):** Los datos no siguen una distribución normal.
4. **Prueba de Kolmogorov-Smirnov:** Compara la distribución de los datos transformados con una distribución de referencia, como la normal o la exponencial.
    - **Hipótesis Nula (H0):** La distribución de los datos es igual a la distribución de referencia.
    - **Hipótesis Alternativa (H1):** La distribución de los datos es diferente a la distribución de referencia.
  5. **Prueba de Jarque-Bera:** Evalúa si los datos tienen una kurtosis y una asimetría similares a las de una distribución normal.
    - **Hipótesis Nula (H0):** Los datos tienen una kurtosis y una asimetría similares a las de una distribución normal.
    - **Hipótesis Alternativa (H1):** Los datos no tienen una kurtosis y una asimetría similares a las de una distribución normal.
  6. **Prueba de Dickey-Fuller Aumentada (ADF):** Evalúa la presencia de una raíz unitaria en una serie temporal.
    - **Hipótesis Nula (H0):** La serie temporal tiene una raíz unitaria (no es estacionaria).
    - **Hipótesis Alternativa (H1):** La serie temporal no tiene una raíz unitaria (es estacionaria).
  7. **Prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS):** Evalúa la estacionariedad de una serie temporal.
    - **Hipótesis Nula (H0):** La serie temporal es estacionaria.
    - **Hipótesis Alternativa (H1):** La serie temporal no es estacionaria.

**Aplicación y Justificación en el Estudio** En nuestro estudio, las transformaciones de datos son esenciales para preparar adecuadamente las variables de interés, como las inversiones en marketing y el precio de las acciones, para los análisis estadísticos y modelos predictivos. Estas transformaciones permiten:

1. **Normalización de Datos:** Muchas técnicas estadísticas y modelos predictivos asumen que los datos siguen una distribución normal. Las transformaciones logarítmica, Box-Cox y Yeo-Johnson son especialmente útiles para transformar datos sesgados hacia una distribución más normal, facilitando el uso de estos modelos.
2. **Reducción de Varianza:** Transformaciones como la raíz cuadrada y la recíproca ayudan a estabilizar la varianza, lo que es crucial para evitar que los valores extremos dominen los resultados del análisis. Esto mejora la precisión y confiabilidad de los modelos predictivos aplicados.
3. **Cumplimiento de Supuestos Estadísticos:** Muchas pruebas estadísticas y modelos predictivos requieren que los datos cumplan ciertos supuestos, como la homocedasticidad y la normalidad. Las transformaciones ayudan a cumplir estos supuestos, mejorando la validez de los resultados obtenidos.
4. **Mejora de la Interpretabilidad:** Transformar los datos puede hacer que los patrones subyacentes sean más claros y fáciles de interpretar, facilitando la identificación de tendencias y relaciones significativas entre las variables.

## Estandarización de Datos

La estandarización de datos es el proceso de rescalar las variables a una escala común, asegurando que diferentes variables puedan compararse y analizarse de manera efectiva en modelos predictivos.

**Estandarización Min-Max** La estandarización Min-Max rescalea los valores de las variables a un rango definido, generalmente entre 0 y 1. La fórmula para la estandarización Min-Max es:

$$z = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}$$

donde  $z$  es el valor estandarizado,  $\min(x)$  es el valor mínimo de la variable  $x$ , y  $\max(x)$  es el valor máximo de la variable  $x$ .

## Implementación en el Estudio

1. **Preprocesamiento de Datos:** En primer lugar, se estandarizaron las variables de inversión en marketing y precios de acciones utilizando la técnica Min-Max. Este paso es crucial para garantizar que todas las variables se encuentren en la misma escala, facilitando la comparación y el análisis.
2. **Transformación Yeo-Johnson:** Después de la estandarización, se aplicó la transformación a las variables estandarizadas. Este orden asegura que las variables, ahora en una escala común, se ajusten mejor para posteriores análisis.
3. **Análisis de Correlación:** Con las variables ya estandarizadas y transformadas, se calcularon las correlaciones entre las inversiones en marketing y los precios de acciones. Esto permitió identificar relaciones lineales y no lineales de manera más precisa.
4. **Entrenamiento de Modelos Predictivos:** Los modelos de machine learning y técnicas estadísticas, como la regresión lineal y Random Forest, se entrenaron con los datos estandarizados y transformados. La estandarización Min-Max seguida de la transformación Yeo-Johnson mejoró el rendimiento y la precisión de estos modelos.
5. **Optimización de Portafolio de Inversiones en Marketing:** Al aplicar técnicas de optimización como el Modelo de Markowitz y algoritmos genéticos, los datos estandarizados y transformados permitieron una mejor asignación de presupuestos y maximización del retorno financiero.

Este proceso secuencial mejoró la adecuación de los datos a los modelos estadísticos y de machine learning, proporcionando resultados más precisos y fiables en todas las etapas del estudio, desde el preprocesamiento de datos hasta la optimización de portafolios.

## Dispersión y Correlaciones

El análisis de correlaciones es una herramienta fundamental en la estadística y el análisis de datos, permitiendo identificar y cuantificar la relación entre dos o más variables. En el contexto del marketing y las finanzas, estas relaciones pueden proporcionar insights valiosos sobre cómo las inversiones en diferentes canales de marketing afectan el precio de las acciones.

### Dispersión

El análisis de dispersión se refiere a la visualización de los datos en gráficos de dispersión (scatter plots), los cuales muestran la relación entre dos variables mediante puntos en un plano cartesiano. Estos gráficos permiten identificar visualmente patrones, tendencias y posibles relaciones no lineales entre las variables.

**Gráficos de Dispersión** Los gráficos de dispersión son una herramienta visual clave para observar la relación entre dos variables. En estos gráficos, cada punto representa una observación con coordenadas determinadas por los valores de las dos variables analizadas. La forma y el patrón de los puntos pueden sugerir el tipo de relación existente (lineal, curvilínea, etc.).

**Ejemplo:** Un gráfico de dispersión que muestra la relación entre la inversión en publicidad digital y el precio de las acciones puede revelar una correlación positiva, negativa o nula. La identificación de clusters o tendencias específicas puede proporcionar información adicional sobre segmentos de mercado o períodos de tiempo particulares.

## Correlaciones

La correlación es una medida estadística que indica el grado en que dos variables están relacionadas, ya sea de manera positiva, negativa o nula. Evaluar la correlación entre variables es esencial para entender cómo una variable puede influir en otra, lo cual es crucial en la construcción de modelos predictivos y de optimización.

Evaluar las correlaciones permite identificar relaciones significativas entre variables, determinando cuáles deben incluirse en un modelo predictivo para construir modelos más precisos y eficientes. Esto es particularmente importante en el contexto de la inversión en marketing, donde conocer la relación entre diferentes canales de marketing y el precio de las acciones puede guiar la asignación efectiva de recursos para maximizar el retorno de la inversión. Además, evaluar las correlaciones ayuda a identificar y mitigar problemas de multicolinealidad, mejorando la estabilidad y la interpretación de los modelos.

En el estudio, se calcularon diversas correlaciones para identificar relaciones significativas entre las inversiones en marketing y los precios de acciones. Este análisis inicial permitió seleccionar las variables más influyentes para los modelos predictivos. Se exploraron correlaciones no lineales utilizando técnicas avanzadas para capturar relaciones complejas que las correlaciones tradicionales podrían pasar por alto. Además, se analizaron las correlaciones entre variables con diferentes rezagos temporales para entender los efectos retardados de las inversiones en marketing sobre los precios de las acciones, capturando el impacto de las campañas publicitarias a lo largo del tiempo.

**Correlación de Pearson** La correlación de Pearson mide la relación lineal entre dos variables continuas. Su coeficiente,  $r$ , varía entre -1 y 1, donde:

- $r = 1$ : Correlación positiva perfecta.
- $r = -1$ : Correlación negativa perfecta.
- $r = 0$ : No hay correlación lineal.

La fórmula del coeficiente de correlación de Pearson es:

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

donde  $x_i$  y  $y_i$  son las observaciones de las variables  $X$  y  $Y$ , respectivamente, y  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son sus medias.

**Correlación de Spearman** La correlación de Spearman es una medida no paramétrica de la relación entre dos variables basada en los rangos de los datos, y es útil cuando las relaciones no son lineales o los datos no cumplen con los supuestos de normalidad. La fórmula es:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

donde  $d_i$  es la diferencia entre los rangos de cada par de observaciones y  $n$  es el número de observaciones.

**Correlación de Kendall** La correlación de Kendall también es una medida no paramétrica que evalúa la asociación entre dos variables. Su coeficiente,  $\tau$ , se calcula como:

$$\tau = \frac{C - D}{\frac{1}{2}n(n - 1)}$$

donde  $C$  es el número de concordancias y  $D$  es el número de discordancias entre los pares de observaciones.

### Nueva Correlación

La nueva correlación se refiere al uso de técnicas avanzadas de análisis de correlación que pueden capturar relaciones más complejas entre variables que las medidas tradicionales no pueden detectar. Estas técnicas incluyen:

**Correlación de Maximal Information Coefficient (MIC)** El Maximal Information Coefficient (MIC) mide la dependencia entre dos variables, detectando tanto relaciones lineales como no lineales. MIC es parte de la familia de medidas de dependencia de Reshef et al. (2011) y se calcula maximizando la información mutua normalizada en una cuadrícula bidimensional.

**Correlación de Distancia** La correlación de distancia es otra técnica que mide la dependencia entre dos variables. A diferencia de las correlaciones tradicionales, la correlación de distancia es capaz de detectar cualquier tipo de dependencia, no solo lineal. La fórmula es:

$$dCor(X, Y) = \frac{\sum_{i,j,k,l} (d_{ij}^X d_{kl}^Y)}{\sqrt{\sum_{i,j} (d_{ij}^X)^2 \sum_{k,l} (d_{kl}^Y)^2}}$$

donde  $d_{ij}^X$  y  $d_{kl}^Y$  son las distancias entre las observaciones de las variables  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

### Correlaciones Rezagadas

Las correlaciones rezagadas son útiles para analizar la relación entre variables a través del tiempo, considerando posibles retrasos en los efectos de una variable sobre otra. Esto es particularmente relevante en el análisis de marketing, donde las inversiones pueden tener un impacto retardado en el precio de las acciones.

**Cálculo de Correlaciones Rezagadas** Para calcular las correlaciones rezagadas, se desplazan temporalmente las series de datos y se calcula la correlación en cada retraso. La fórmula es:

$$r_{\text{lag}}(t) = \frac{\sum (x_{t+k} - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_{t+k} - \bar{x})^2 \sum (y_t - \bar{y})^2}}$$

donde  $k$  es el número de períodos de retraso.

### Justificación y Aplicación en el Estudio

**Identificación de Relaciones** El uso de correlaciones tradicionales (Pearson, Spearman, Kendall) y avanzadas (MIC, correlación de distancia) permite identificar tanto relaciones lineales como no lineales entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones. Esto proporciona una visión más completa y detallada de cómo las estrategias de marketing impactan el rendimiento financiero.

**Análisis de Efectos Rezagados** Las correlaciones rezagadas permiten analizar cómo las inversiones en marketing afectan el precio de las acciones a lo largo del tiempo, capturando los efectos retardados de las campañas publicitarias. Esto es esencial para entender la dinámica temporal y optimizar la planificación de futuras inversiones.

## Análisis de Componentes Principales (PCA)

PCA tiene como objetivo principal transformar un conjunto de variables posiblemente correlacionadas en un conjunto más pequeño de variables no correlacionadas llamadas componentes principales. Este proceso ayuda a identificar las dimensiones más importantes que capturan la mayor variabilidad en los datos, facilitando su análisis y visualización.

### Fórmulas y Cálculos

#### 1. Cálculo de la Matriz de Covarianza

La matriz de covarianza captura la relación entre las variables del conjunto de datos. Para un conjunto de datos estandarizado con  $n$  observaciones y  $p$  variables, la matriz de covarianza  $S$  se calcula como:

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T$$

donde  $X_i$  es el vector de observaciones de la variable  $i$  y  $\bar{X}$  es la media de las observaciones.

#### 2. Cálculo de los Autovalores y Autovectores

Los autovalores ( $\lambda$ ) y autovectores ( $v$ ) de la matriz de covarianza se calculan resolviendo la ecuación característica:

$$\det(S - \lambda I) = 0$$

donde  $I$  es la matriz identidad. Los autovalores representan la cantidad de varianza explicada por cada componente principal, y los autovectores definen la dirección de cada componente.

#### 3. Formación de los Componentes Principales

Los componentes principales se obtienen multiplicando los datos estandarizados por los autovectores correspondientes. Si  $V$  es la matriz de autovectores y  $Z$  es la matriz de datos estandarizados, los componentes principales  $P$  se calculan como:

$$P = ZV$$

### Interpretación de Resultados

#### 1. Varianza Explicada

Cada componente principal explica una proporción de la varianza total en los datos. La proporción de varianza explicada por el componente principal  $k$  se calcula como:

$$\text{Varianza explicada} = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$$

donde  $\lambda_k$  es el autovalor correspondiente al componente  $k$ .

#### 2. Carga de Componentes

Las cargas de los componentes son los coeficientes de los autovectores que indican la contribución de cada variable original a los componentes principales. Una carga alta (positiva o negativa) sugiere que la variable tiene una influencia significativa en el componente correspondiente.

## Justificación y Aplicación en el Estudio

El PCA se utiliza en nuestro estudio por varias razones clave:

1. **Reducción de Dimensionalidad:** En el análisis de marketing y finanzas, los datos pueden contener muchas variables, lo que puede complicar el análisis y la visualización. PCA ayuda a reducir la dimensionalidad del conjunto de datos, manteniendo al mismo tiempo la mayor parte de la variabilidad.
2. **Identificación de Variables Clave:** Al transformar las variables originales en componentes principales, PCA ayuda a identificar las variables que tienen la mayor influencia en los datos. Esto es crucial para entender cuáles inversiones en marketing afectan más significativamente el precio de las acciones.
3. **Eliminación de Multicolinealidad:** En los datos financieros, las variables a menudo están correlacionadas, lo que puede causar problemas de multicolinealidad en los modelos predictivos. PCA genera componentes principales no correlacionados, eliminando este problema y mejorando la robustez de los modelos.
4. **Visualización y Análisis Exploratorio:** Los componentes principales pueden ser visualizados en gráficos bidimensionales o tridimensionales, facilitando el análisis exploratorio de los datos y la identificación de patrones o clusters.

En nuestro estudio, se aplicó PCA a los datos estandarizados de inversiones en marketing y precio de las acciones. Los componentes principales se calcularon y se interpretaron en términos de varianza explicada y cargas de componentes. Los resultados mostraron que los primeros dos componentes principales explicaban el 97% de la varianza total, indicando que la mayor parte de la información en los datos originales se mantuvo en estos componentes.

## Modelos Lineales, Polinomiales y Spline

Los modelos estadísticos son herramientas esenciales en el análisis de datos para comprender las relaciones entre variables y predecir resultados futuros. Se emplean modelos lineales, polinomiales y spline, junto con sus versiones bayesianas, para analizar el impacto de las inversiones en marketing sobre el precio de las acciones.

### Modelos Lineales

**Modelo Lineal** El modelo de regresión lineal es uno de los métodos más simples y ampliamente utilizados para modelar la relación entre una variable dependiente  $y$  y una o más variables independientes  $X$ . La forma general del modelo lineal es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p + \epsilon$$

donde  $\beta_0$  es la intersección,  $\beta_i$  son los coeficientes de regresión, y  $\epsilon$  es el término de error.

**Aplicación Bayesiana** En el contexto bayesiano, los parámetros del modelo  $\beta$  se tratan como variables aleatorias con distribuciones a priori. La inferencia bayesiana actualiza estas distribuciones a priori con datos observados para obtener distribuciones a posteriori. El modelo bayesiano lineal se especifica como:

$$\begin{aligned}\beta_i &\sim \text{Normal}(0, \tau^2) \\ y &\sim \text{Normal}(X\beta, \sigma^2)\end{aligned}$$

La aplicación de métodos bayesianos proporciona intervalos de credibilidad y permite incorporar información a priori en la estimación de los parámetros.

**Modelo Polinomial** El modelo de regresión polinomial extiende el modelo lineal para capturar relaciones no lineales entre las variables. La forma general del modelo polinomial de grado  $d$  es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_d X^d + \epsilon$$

Este modelo es útil cuando la relación entre la variable dependiente y las independientes no es lineal, permitiendo un ajuste más flexible a los datos.

**Aplicación Bayesiana** Similar al modelo lineal, la regresión polinomial puede ser abordada desde una perspectiva bayesiana. Los parámetros  $\beta$  siguen distribuciones a priori, y se actualizan con los datos observados:

$$\begin{aligned}\beta_i &\sim \text{Normal}(0, \tau^2) \\ y &\sim \text{Normal}(X\beta, \sigma^2)\end{aligned}$$

Esto permite manejar la incertidumbre de los parámetros y obtener intervalos de credibilidad para las predicciones.

**Modelo Spline** Los modelos spline son una técnica flexible para modelar relaciones no lineales mediante la combinación de polinomios por tramos. Los splines cúbicos, por ejemplo, utilizan polinomios de tercer grado ajustados en distintos intervalos, unidos de manera que las funciones y sus primeras y segundas derivadas sean continuas en los puntos de unión (nudos). La forma general es:

$$y = \sum_{i=1}^k \beta_i B_i(X) + \epsilon$$

donde  $B_i(X)$  son las bases spline y  $k$  es el número de nudos.

**Aplicación Bayesiana** En el enfoque bayesiano para splines, los coeficientes  $\beta$  también se tratan como variables aleatorias. Esto proporciona una manera de cuantificar la incertidumbre en la estimación de los splines:

$$\begin{aligned}\beta_i &\sim \text{Normal}(0, \tau^2) \\ y &\sim \text{Normal}\left(\sum_{i=1}^k \beta_i B_i(X), \sigma^2\right)\end{aligned}$$

## Justificación y Aplicación en el Estudio

### Comparación de Modelos

1. **Modelo Lineal:** Apropiado para capturar relaciones lineales simples entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones. La simplicidad del modelo facilita su interpretación.
2. **Modelo Polinomial:** Permite capturar relaciones no lineales, proporcionando un ajuste más flexible. Este modelo es útil cuando se sospecha que el impacto de las inversiones en marketing no es lineal.
3. **Modelo Spline:** Ofrece la mayor flexibilidad al modelar relaciones no lineales complejas con cambios en la pendiente. Es especialmente útil en contextos donde las relaciones pueden variar en diferentes rangos de la variable independiente.

**Validación y Selección del Modelo** Se emplean métodos de validación cruzada y criterios de información (AIC, BIC) para evaluar el rendimiento de cada modelo. Además, la inferencia bayesiana permite incorporar información a priori y obtener intervalos de credibilidad, mejorando la robustez de las estimaciones y proporcionando una interpretación probabilística de los resultados.

## Modelo Random Forest

El modelo Random Forest es una poderosa técnica de aprendizaje automático que combina la predicción de múltiples árboles de decisión para mejorar la precisión y la robustez del modelo. En el contexto de nuestro estudio sobre el impacto de las inversiones en marketing en el precio de las acciones, utilizamos Random Forest para capturar relaciones complejas y no lineales entre diversas variables de inversión y el precio de las acciones de Bancolombia.

## Estudios Previos que Utilizan Random Forest

Varios estudios previos han utilizado Random Forest en contextos similares, destacando su efectividad en la predicción y análisis de datos financieros y de marketing:

- **Breiman (2001)**: Introdujo el modelo Random Forest y demostró su capacidad para manejar datos de alta dimensionalidad y evitar el sobreajuste, gracias a la combinación de múltiples árboles de decisión y el uso de subconjuntos aleatorios de datos y características.
- **Verikas et al. (2011)**: Aplicaron Random Forest para predecir el rendimiento financiero de empresas, demostrando que este enfoque puede capturar complejas interacciones entre variables financieras y no lineales que otros modelos tradicionales pueden pasar por alto.
- **Chaudhuri et al. (2016)**: Utilizaron Random Forest para analizar el impacto de diferentes estrategias de marketing digital en las ventas de productos, mostrando que el modelo puede identificar los canales de marketing más efectivos y optimizar la asignación de recursos.
- **Qi et al. (2018)**: Aplicaron Random Forest para predecir el comportamiento del mercado de valores, destacando su capacidad para manejar grandes conjuntos de datos y capturar patrones complejos y no lineales en los movimientos del mercado.

## Justificación del Modelo

**Complejidad y Flexibilidad** Random Forest es altamente efectivo en la captura de relaciones no lineales y complejas entre variables, lo cual es crucial dado que las inversiones en marketing pueden tener efectos no lineales en el comportamiento del mercado y el precio de las acciones. Al utilizar múltiples árboles de decisión, el modelo puede manejar interacciones no lineales y efectos de variables ocultas de manera más efectiva que los modelos lineales tradicionales.

**Reducción de Sobreajuste (Overfitting)** Mediante la combinación de múltiples árboles de decisión entrenados en diferentes subconjuntos de datos (bootstrap), Random Forest reduce significativamente el riesgo de sobreajuste comparado con un solo árbol de decisión. Esto asegura que el modelo generalice mejor a nuevos datos, proporcionando predicciones más estables y confiables.

**Robustez frente a Datos Ruidosos** Random Forest es inherentemente robusto frente a datos ruidosos y atípicos. Los árboles individuales tienden a ser sensibles a pequeñas variaciones en los datos, pero al promediar múltiples árboles, el modelo se vuelve menos sensible a estos efectos, mejorando la capacidad de generalización.

## Optimización de Hiperparámetros Bayesiana

**Ventajas de la Optimización Bayesiana** La optimización de hiperparámetros mediante inferencia bayesiana ofrece varias ventajas clave sobre métodos tradicionales de optimización:

- **Incorporación de Conocimiento Previo:** Permite especificar distribuciones a priori para los hiperparámetros, lo cual es especialmente útil cuando se dispone de información previa sobre los rangos o la naturaleza esperada de los hiperparámetros (como el número óptimo de variables a considerar en cada división de árbol en Random Forest).
- **Actualización Informada:** La inferencia bayesiana actualiza estas distribuciones a priori con los datos observados, proporcionando distribuciones a posteriori que reflejan la certeza actualizada sobre los hiperparámetros. Esto ayuda a evitar la selección subóptima de hiperparámetros basada en una sola métrica de rendimiento.
- **Manejo de Incertidumbre:** Proporciona intervalos de credibilidad para los hiperparámetros estimados, lo cual es crucial para evaluar la estabilidad y la robustez de los modelos. Esto es especialmente importante en modelos complejos como Random Forest, donde la elección correcta de hiperparámetros puede tener un impacto significativo en el rendimiento predictivo.

## Fórmulas

**Modelo Random Forest** Random Forest combina múltiples árboles de decisión  $T$ , donde cada árbol  $t$  está entrenado en un subconjunto de datos  $D_t$ . La predicción se obtiene mediante el promedio de las predicciones individuales de los árboles:

$$\hat{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(x)$$

donde  $f_t(x)$  es la predicción del árbol  $t$  para la instancia  $x$ .

**Optimización Bayesiana de Hiperparámetros** En el enfoque bayesiano, los hiperparámetros  $\theta$  se optimizan considerando distribuciones a priori  $P(\theta)$  y actualizaciones a posteriori basadas en los datos  $D$ :

$$P(\theta|D) \propto P(D|\theta)P(\theta)$$

Esto proporciona una distribución a posteriori que representa la incertidumbre sobre los hiperparámetros después de observar los datos.

## XGBoost

El **XGBoost** (eXtreme Gradient Boosting) es un algoritmo de aprendizaje supervisado ampliamente utilizado en finanzas debido a su capacidad para manejar grandes volúmenes de datos y mejorar la precisión predictiva mediante técnicas avanzadas de boosting y árboles de decisión.

### Componentes Clave de XGBoost

**Gradient Boosting** XGBoost utiliza el método de **gradient boosting**, que consiste en construir una serie de modelos predictivos débiles (en este caso, árboles de decisión) secuencialmente. Cada nuevo modelo se enfoca en corregir los errores residuales de los modelos anteriores, mejorando así la precisión global del modelo.

**Regularización** Para prevenir el sobreajuste, XGBoost implementa técnicas de regularización, como la penalización de complejidad del modelo (L1 y L2) y la poda de árboles durante el proceso de entrenamiento.

### Optimización Bayesiana de Hiperparámetros

La **optimización bayesiana** permite explorar de manera eficiente el espacio de hiperparámetros adaptándose dinámicamente a los resultados observados durante el proceso de entrenamiento. Esto se logra mediante la construcción de un modelo probabilístico de la función objetivo y la actualización de creencias sobre los hiperparámetros a medida que se observan más datos.

## Justificación para Utilizar XGBoost con Optimización Bayesiana en Predicciones Financieras

### Eficiencia Computacional y Mejora de Precisión

1. **Manejo de Grandes Volúmenes de Datos:** XGBoost es eficiente en la manipulación de grandes conjuntos de datos financieros, permitiendo análisis detallados y precisos.
2. **Mejora Continua de Modelos:** La optimización bayesiana ajusta de manera adaptativa los hiperparámetros del modelo XGBoost, mejorando así su capacidad predictiva y la generalización a nuevos datos.
3. **Control de Sobreajuste:** Las técnicas de regularización integradas en XGBoost, combinadas con la optimización bayesiana, ayudan a mitigar el riesgo de sobreajuste, crucial en finanzas donde la precisión es crucial para la toma de decisiones.

### Fórmulas y Explicaciones

**Función Objetivo de XGBoost** La función objetivo de XGBoost combina términos de pérdida y regularización para optimizar la suma ponderada de los errores individuales del modelo. Para regresión, la función objetivo típicamente utiliza la pérdida de error cuadrático medio (RMSE):

$$\text{Objetivo} = \sum_{i=1}^n L(y_i, \hat{y}_i) + \sum_{k=1}^K \Omega(f_k)$$

Donde:

- $L$  es la función de pérdida (por ejemplo,  $(y_i - \hat{y}_i)^2$  para RMSE).
- $\Omega$  es la función de regularización.
- $f_k$  son los árboles de decisión en el modelo.

**Optimización Bayesiana** La optimización bayesiana utiliza el teorema de Bayes para actualizar las probabilidades sobre los hiperparámetros del modelo a medida que se observan datos adicionales. Se modela una distribución a priori sobre los hiperparámetros y se ajusta esta distribución posteriormente con los datos observados para encontrar la configuración óptima de hiperparámetros que maximice la métrica de evaluación deseada.

**Importancia en Predicciones Financieras** En el contexto financiero, la precisión y la capacidad de generalización de los modelos son fundamentales para la toma de decisiones. XGBoost con optimización bayesiana permite:

- Mejorar la precisión predictiva adaptando dinámicamente los hiperparámetros del modelo.
- Controlar el sobreajuste mediante técnicas de regularización efectivas.
- Manejar eficientemente grandes volúmenes de datos financieros, proporcionando análisis detallados y decisiones informadas.

## Regularización en Modelos Predictivos: Ridge, Lasso y Elastic Net

La regularización es una técnica fundamental en el aprendizaje automático que ayuda a prevenir el sobreajuste al penalizar los coeficientes de los modelos. En este documento, exploraremos tres métodos populares de regularización: Ridge, Lasso y Elastic Net, y discutiremos sus aplicaciones en modelos predictivos.

### Ridge Regression

**Fundamentos** **Ridge regression** (o regresión de Ridge) añade una penalización  $L2$  a la función de coste del modelo, lo que penaliza los coeficientes grandes:

$$\text{Coste} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2$$

Donde: -  $\lambda$  es el parámetro de regularización que controla la fuerza de la penalización. -  $\beta_j$  son los coeficientes del modelo.

**Justificación** Ridge regression es efectivo cuando hay multicolinealidad en los datos, ya que reduce la varianza de los coeficientes ajustando los valores de  $\beta$  hacia cero, pero sin eliminarlos por completo.

**Aplicación** Se utiliza comúnmente en problemas donde hay muchas variables independientes y se busca controlar el sobreajuste al mantener todas las variables en el modelo.

### Lasso Regression

**Fundamentos** **Lasso regression** (o regresión Lasso) utiliza una penalización  $L1$  que puede llevar algunos coeficientes a cero, actuando como un método de selección de variables:

$$\text{Coste} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

**Justificación** Lasso es útil para la selección automática de variables, ya que puede eliminar predictores menos importantes al reducir sus coeficientes a cero. Esto simplifica y mejora la interpretabilidad del modelo.

**Aplicación** Es utilizado cuando se sospecha que solo un pequeño número de variables son realmente importantes para el modelo, o cuando se necesita una interpretación más clara de las variables predictoras.

## Elastic Net

**Fundamentos** **Elastic Net** combina las penalizaciones  $L1$  y  $L2$ , proporcionando una solución que equilibra las características de Ridge y Lasso:

$$\text{Coste} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda_1 \sum_{j=1}^p |\beta_j| + \lambda_2 \sum_{j=1}^p \beta_j^2$$

Donde: -  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los parámetros de regularización para las penalizaciones  $L1$  y  $L2$ , respectivamente.

**Justificación** Elastic Net aborda las limitaciones individuales de Ridge y Lasso al manejar eficazmente la multicolinealidad y realizar la selección de variables.

**Aplicación** Es útil en situaciones donde hay multicolinealidad y se desea seleccionar un subconjunto de variables predictoras importantes, manteniendo la regularización para mejorar la estabilidad y la generalización del modelo.

## Comparación y Elección del Método

### Consideraciones

- **Ridge:** Mejor para datos con multicolinealidad, donde todos los predictores pueden ser importantes.
- **Lasso:** Útil para la selección de variables y para modelos con muchas características, pero pocas significativas.
- **Elastic Net:** Combina las ventajas de Ridge y Lasso, ofreciendo flexibilidad y robustez en diferentes contextos.

## Gradient Boosting

El Gradient Boosting es una técnica avanzada que combina el poder del Gradient Boosting con métodos Bayesianos para optimizar automáticamente los hiperparámetros del modelo. En este marco teórico, exploraremos cómo se implementa esta técnica para mejorar la precisión de los modelos predictivos, especialmente en contextos donde se requiere ajuste fino y control sobre el sobreajuste.

### Fundamentos del Gradient Boosting

El Gradient Boosting es una técnica de aprendizaje automático que construye un modelo predictivo en forma de un conjunto de modelos débiles, típicamente árboles de decisión, denominados “árboles de impulso” (boosted trees). Cada árbol se construye de manera secuencial para corregir los errores del modelo anterior. Esto se logra ajustando los residuos en cada iteración del proceso de construcción del modelo.

### Modelo Bayesian Gradient Boosting

El modelo Bayesian Gradient Boosting combina Gradient Boosting con métodos Bayesianos para ajustar automáticamente los hiperparámetros clave del modelo, como el número de iteraciones (*nrounds*), la profundidad máxima del árbol (*max\_depth*) y la tasa de aprendizaje (*eta*). En lugar de utilizar métodos tradicionales de validación cruzada para seleccionar los mejores hiperparámetros, se emplea un enfoque bayesiano que utiliza distribuciones de probabilidad para modelar la incertidumbre y seleccionar valores óptimos.

## Justificación para su Uso en Predicciones

1. **Optimización Automática:** El enfoque Bayesian Gradient Boosting permite una optimización automática de los hiperparámetros, lo que reduce la necesidad de ajuste manual y mejora la generalización del modelo.
2. **Manejo de Incertidumbre:** Al utilizar métodos Bayesianos, el modelo puede manejar eficazmente la incertidumbre inherente en los datos y en los hiperparámetros, proporcionando predicciones más robustas.
3. **Flexibilidad y Rendimiento:** Combina la flexibilidad del Gradient Boosting con las ventajas de los métodos Bayesianos, lo que lo hace adecuado para aplicaciones donde se requiere alta precisión y ajuste fino del modelo.

## Aplicación en Predicciones

El Bayesian Gradient Boosting se aplica eficazmente en problemas de regresión y clasificación donde se desea maximizar la precisión predictiva. Ejemplos comunes incluyen la predicción de precios de acciones, demanda de productos, y otras variables donde la precisión es crítica y la interpretación del modelo puede ser simplificada mediante la automatización de la optimización de hiperparámetros.

## Fórmulas y Demás

**Fórmula para el Modelo de Gradient Boosting:** El modelo de Gradient Boosting se define iterativamente como:

$$F_m(x) = F_{m-1}(x) + \gamma \cdot h_m(x; \theta_m)$$

donde: -  $F_m(x)$  es la predicción en la iteración  $m$ , -  $F_{m-1}(x)$  es la predicción del modelo en la iteración anterior, -  $\gamma$  es la tasa de aprendizaje que controla la contribución de cada árbol al modelo, -  $h_m(x; \theta_m)$  es el árbol de decisión ajustado en la iteración  $m$  con parámetros  $\theta_m$ .

**Fórmulas para el Modelo Bayesian Gradient Boosting:** En el modelo Bayesian Gradient Boosting, los hiperparámetros  $nrounds$ ,  $max\_depth$  y  $eta$  se modelan con distribuciones de probabilidad para su optimización:

$$nrounds \sim \mathcal{N}(500, 250)$$

$$max\_depth \sim \mathcal{N}(10, 5)$$

$$eta \sim \mathcal{N}(0,1, 0,05)$$

Estas distribuciones prior reflejan el conocimiento previo sobre los hiperparámetros antes de observar los datos.

## Red Neuronal

La Red Neuronal Bayesiana combina redes neuronales con métodos Bayesianos para mejorar la precisión del modelo predictivo y gestionar la incertidumbre en la estimación de parámetros. En este marco teórico, exploraremos cómo se implementa esta técnica para optimizar hiperparámetros y realizar predicciones más robustas en problemas de regresión.

## Fundamentos de la Red Neuronal

Una Red Neuronal (NN) es un modelo computacional compuesto por neuronas interconectadas que procesan información, adaptándose bien a grandes volúmenes de datos y problemas no lineales.

### Modelo de Red Neuronal Bayesiana

El modelo de Red Neuronal Bayesiana aplica métodos Bayesianos para modelar la incertidumbre en los parámetros del modelo, como el tamaño de la red *size* y la tasa de decaimiento *decay*. Esto permite una estimación más precisa de los hiperparámetros clave mediante distribuciones de probabilidad:

$$\begin{aligned}size &\sim \mathcal{N}(10, 5) \\decay &\sim \mathcal{N}(0,01, 0,01)\end{aligned}$$

### Justificación para su Uso en Predicciones

1. **Manejo de Incertidumbre:** Los métodos Bayesianos permiten gestionar la incertidumbre en los datos y parámetros del modelo, mejorando la precisión de las predicciones.
2. **Optimización Automática:** La Red Neuronal Bayesiana optimiza automáticamente los hiperparámetros del modelo, reduciendo la necesidad de ajuste manual y mejorando la generalización.
3. **Adaptabilidad y Precisión:** Combina la flexibilidad de las redes neuronales con las ventajas de los métodos Bayesianos, siendo adecuada para problemas de regresión donde se requiere alta precisión y manejo de complejidad.

### Aplicación en Predicciones

Se aplica en problemas de regresión donde es crucial modelar relaciones no lineales y gestionar la incertidumbre en la estimación de parámetros, como la predicción de precios de acciones o demanda de productos.

## Modelos Mixtos

### Introducción

Los Modelos Mixtos son una extensión de los modelos lineales que permiten manejar datos estructurados jerárquicamente, como los datos longitudinales o datos agrupados por clústeres. En este marco teórico, exploraremos cómo se implementan los Modelos Mixtos para mejorar la precisión predictiva y gestionar la variabilidad de los datos.

### Fundamentos de los Modelos Mixtos

Los Modelos Mixtos combinan efectos fijos y efectos aleatorios para capturar tanto las relaciones fijas entre variables como las variaciones aleatorias dentro de grupos. Esto los hace especialmente útiles cuando los datos muestran correlaciones intra-grupo que deben ser modeladas.

## Modelo Mixto

En un Modelo Mixto, la fórmula general se define como:

$$Y = X\beta + Zb + \epsilon$$

donde: -  $Y$  es el vector de respuestas. -  $X$  son las variables explicativas fijas. -  $\beta$  son los coeficientes fijos. -  $Z$  es la matriz de diseño para los efectos aleatorios. -  $b$  son los efectos aleatorios. -  $\epsilon$  es el término de error.

## Aplicación en Predicciones

En el contexto de predicción de precios de acciones o indicadores financieros, los Modelos Mixtos pueden incorporar efectos aleatorios para capturar la variabilidad no explicada por las variables explicativas fijas, como el impacto de factores no observados a nivel de grupo.

## Evaluación del Modelo Mixto

Para evaluar la calidad predictiva de un Modelo Mixto, se utilizan métricas estándar como el Error Medio Absoluto (MAE), el Error Cuadrático Medio (RMSE) y el coeficiente de determinación  $R^2$ . Estas métricas permiten comparar las predicciones del modelo con los valores reales y evaluar su precisión.

## Máquinas de Soporte Vectorial (SVM)

Las Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) son modelos de aprendizaje supervisado utilizados tanto para clasificación como para regresión. En este estudio, nos enfocamos en la implementación de SVM para tareas de regresión, con especial énfasis en las SVM con núcleos radiales y la selección bayesiana de hiperparámetros.

### SVM para Regresión

En la regresión con SVM, también conocida como **Support Vector Regression (SVR)**, el objetivo es encontrar una función que se ajuste lo mejor posible a las observaciones reales dentro de un margen de tolerancia definido. A diferencia de la regresión lineal, SVR puede manejar relaciones no lineales mediante el uso de funciones de núcleo (kernel).

### Función de Núcleo Radial (RBF)

La función de núcleo radial es una de las más utilizadas en SVM debido a su capacidad para manejar relaciones complejas y no lineales entre las variables. La fórmula del núcleo RBF es:

$$K(x, x') = \exp(-\gamma \|x - x'\|^2)$$

donde  $\gamma$  es un parámetro que define el alcance de la influencia de un solo dato de entrenamiento.

### Selección de Hiperparámetros

La selección adecuada de hiperparámetros es crucial para el rendimiento de las SVM. Los hiperparámetros más importantes en SVR con núcleo radial son  $C$  y  $\gamma$ :

- **Parámetro  $C$ :** Controla el balance entre un margen amplio y un error de clasificación en los datos de entrenamiento. Un valor alto de  $C$  puede reducir los errores en el conjunto de entrenamiento pero podría llevar al sobreajuste.
- **Parámetro  $\gamma$ :** Define la amplitud de la influencia de una sola muestra de entrenamiento. Un valor alto de  $\gamma$  implica una influencia más local, permitiendo que el modelo se ajuste más estrechamente a los datos de entrenamiento.

## Selección Bayesiana de Hiperparámetros

La selección de hiperparámetros puede optimizarse utilizando un enfoque bayesiano, que es más eficiente que los métodos tradicionales como Grid Search. La optimización bayesiana construye un modelo probabilístico del rendimiento del modelo en función de los hiperparámetros y utiliza este modelo para seleccionar los valores de los hiperparámetros que se espera que mejoren el rendimiento del modelo.

## Evaluación del Modelo SVM

La evaluación del modelo SVM se realiza utilizando métricas como el Error Medio Absoluto (MAE), el Error Cuadrático Medio (RMSE) y el coeficiente de determinación  $R^2$ . Estas métricas permiten comparar las predicciones del modelo con los valores reales y evaluar su precisión.

## Selección y Comparación de Modelos

Seleccionar los mejores modelos como el mixto junto con SVM, redes neuronales y XGBoost, se amplía la capacidad de capturar diferentes aspectos de los datos. Cada tipo de modelo puede tener fortalezas en la interpretación de relaciones complejas entre las variables de inversión en medios y el precio de la acción de Bancolombia.

## Importancia de Seleccionar los Mejores Modelos

1. **Ajuste y Precisión:** Cada tipo de modelo, ya sea SVM, redes neuronales, XGBoost o un modelo mixto, tiene diferentes capacidades para capturar patrones y relaciones en los datos. Seleccionar los mejores modelos implica elegir aquellos que no solo se ajusten bien a los datos de entrenamiento, sino que también generalicen de manera efectiva a nuevos datos (prueba). Esto asegura que las relaciones identificadas entre la inversión en medios y el precio de la acción sean robustas y aplicables en diferentes escenarios.
2. **Prevención del Sobreajuste:** Elegir modelos que equilibren adecuadamente la complejidad y la capacidad de generalización es crucial para evitar el sobreajuste. Un modelo sobreajustado puede capturar demasiado bien el ruido o las peculiaridades de los datos de entrenamiento, lo que resulta en predicciones menos precisas cuando se enfrenta a nuevos datos. La selección cuidadosa de modelos ayuda a mitigar este riesgo al favorecer aquellos que ofrecen un buen rendimiento en datos de prueba no vistos.

## Importancia de Promediar las Importancias

1. **Captura de Comportamientos Consistentes:** Al promediar las importancias de variables de diferentes modelos, se obtiene una perspectiva más equilibrada y confiable sobre qué variables son más relevantes para predecir el precio de la acción. Esto reduce la dependencia de las fortalezas y debilidades individuales de cada modelo, proporcionando una evaluación más robusta y menos sesgada de las variables que realmente influyen en el resultado final.

- 2. Reducción del Riesgo de Sobreajuste:** Promediar las importancias también ayuda a mitigar el riesgo de sobreajuste al limitar la influencia de características idiosincráticas de modelos individuales. Las variables que muestran importancias consistentes a través de múltiples modelos son más propensas a representar relaciones genuinas en los datos, en lugar de ajustes específicos que podrían no generalizarse bien.

## Teoría de Markowitz

La Teoría Moderna de Portafolios, desarrollada por Harry Markowitz en 1952, es fundamental en la gestión de inversiones para seleccionar una combinación óptima de activos que maximice el retorno esperado para un nivel dado de riesgo o minimice el riesgo para un nivel específico de retorno esperado. Esta teoría es ampliamente aplicada en la optimización de la inversión en medios para maximizar el impacto en el precio de la acción de empresas como Bancolombia.

### Conceptos Clave

- 1. Retorno Esperado** El **retorno esperado** de un activo o cartera de activos representa el rendimiento promedio que se espera obtener en un período determinado. En el contexto de la inversión en medios, los retornos esperados se estiman utilizando modelos predictivos que consideran el impacto de cada medio de inversión (como televisión, digital, prensa, etc.) en el precio de la acción de Bancolombia.

- 2. Riesgo** El **riesgo** se define como la volatilidad o incertidumbre asociada con los rendimientos esperados de un activo o cartera de activos. En la Teoría de Markowitz, se utiliza la varianza o desviación estándar de los rendimientos como medida de riesgo. La optimización de portafolios busca encontrar la combinación que minimice el riesgo dado un nivel de retorno esperado o maximice el retorno esperado para un nivel de riesgo especificado.

- 3. Portafolio Eficiente** Un **portafolio eficiente** es aquel que ofrece el mayor retorno esperado para un nivel de riesgo dado o el menor riesgo para un nivel de retorno esperado especificado. La frontera eficiente de Markowitz representa todas las combinaciones posibles de activos que maximizan el retorno esperado para cada nivel de riesgo, o viceversa.

### Formulación Matemática

La optimización de portafolios según la Teoría de Markowitz se formula de la siguiente manera:

Dado un conjunto de activos con retornos esperados  $R_i$  y una matriz de covarianza  $\Sigma$  que representa las covarianzas entre los retornos de los activos, el problema se puede expresar como:

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{R} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

sujeto a:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1$$

$$\mathbf{w} \geq 0$$

Donde:

- $\mathbf{w}$  es el vector de pesos del portafolio.
- $\mathbf{R}$  es el vector de retornos esperados.
- $\Sigma$  es la matriz de covarianza.
- $\lambda$  es un parámetro que controla la aversión al riesgo del inversor.

### Aplicación en Inversión de Medios

En el contexto de Bancolombia, la optimización de portafolios mediante la Teoría de Markowitz se utiliza para determinar la asignación óptima de recursos en diferentes medios de inversión (como revista, prensa, radio, televisión, digital, etc.) con el objetivo de maximizar el impacto en el precio de la acción. Esta estrategia ayuda a reducir el riesgo de sobreinversión en un solo medio y maximiza el retorno esperado en relación con el riesgo asumido.

La implementación práctica implica: - Estimar los retornos esperados de cada medio basado en modelos predictivos. - Calcular la matriz de covarianza de los retornos de los medios. - Resolver el problema de optimización para encontrar los pesos óptimos del portafolio que maximicen el retorno esperado o minimicen el riesgo.

La Teoría de Markowitz, por lo tanto, proporciona un marco robusto para la toma de decisiones en la inversión de medios, asegurando una asignación eficiente de recursos que potencie los resultados financieros de Bancolombia.

### Algoritmo Genético

El algoritmo genético es una técnica de optimización inspirada en la evolución biológica, utilizada ampliamente para resolver problemas complejos de búsqueda y optimización. En el contexto de la inversión de medios para Bancolombia, el algoritmo genético juega un papel crucial en determinar la asignación óptima de recursos entre diferentes medios de inversión, como revista, prensa, radio, televisión y digital.

### Aplicaciones Previas de Algoritmos Genéticos

Varios estudios previos han utilizado algoritmos genéticos en contextos similares, destacando su efectividad para resolver problemas de optimización en marketing y finanzas:

1. **Holland (1975)**: Pionero en el desarrollo de algoritmos genéticos, mostró cómo estas técnicas pueden ser aplicadas para resolver problemas complejos de optimización a través de mecanismos de selección natural y genética.
2. **Deb et al. (2002)**: Utilizaron algoritmos genéticos para la optimización de portafolios financieros, demostrando que estos algoritmos pueden manejar múltiples objetivos y restricciones simultáneamente, encontrando soluciones óptimas en espacios de búsqueda complejos.
3. **Kim et al. (2005)**: Aplicaron algoritmos genéticos para la optimización de presupuestos de marketing, logrando una asignación eficiente de recursos entre diferentes canales de publicidad para maximizar el retorno de inversión.
4. **Guerreiro et al. (2016)**: Utilizaron algoritmos genéticos para la optimización de campañas de marketing digital, mostrando cómo esta técnica puede mejorar significativamente la efectividad de las campañas al ajustar dinámicamente los presupuestos y estrategias en función de los resultados obtenidos.

## Conceptos Clave del Algoritmo Genético

**Codificación de Soluciones** En el algoritmo genético, las soluciones potenciales se representan como cromosomas, que están compuestos por genes. Cada gen representa una parte de la solución, es decir, los pesos asignados a cada medio de inversión.

**Función de Fitness** La función de fitness evalúa qué tan buena es cada solución potencial (cromosoma) en términos del objetivo de optimización. En el contexto de Bancolombia, la función de fitness combina el retorno esperado y el riesgo asociado con la asignación de recursos en diferentes medios.

**Selección** La selección determina qué cromosomas serán elegidos para la reproducción en función de su desempeño (fitness). Los cromosomas con mejores valores de fitness tienen más probabilidades de ser seleccionados y transmitir sus genes a la siguiente generación.

**Cruce y Mutación** Durante el proceso de reproducción, los cromosomas seleccionados se cruzan para generar nuevos descendientes que combinan características de los padres. La mutación introduce pequeñas variaciones aleatorias en los nuevos cromosomas para mantener la diversidad genética de la población y evitar la convergencia prematura hacia una solución subóptima.

**Reemplazo** Después de generar una nueva población mediante selección, cruce y mutación, se reemplaza la población anterior con la nueva generación de cromosomas. Este ciclo se repite durante varias iteraciones (generaciones) hasta que se alcance un criterio de terminación predefinido.

## Aplicación en Inversión de Medios para Bancolombia

En el contexto específico de Bancolombia, el algoritmo genético se utiliza para:

- **Optimización de Recursos:** Determinar la combinación óptima de inversiones en medios (revista, prensa, radio, televisión, digital) que maximice el impacto en el precio de la acción de Bancolombia.
- **Minimización de Riesgos:** Controlar la volatilidad asociada con las decisiones de inversión al considerar la covarianza entre los rendimientos esperados de cada medio.
- **Ajuste Automático:** Adaptarse dinámicamente a cambios en el mercado y en las preferencias de los consumidores, ajustando los pesos asignados a cada medio según los resultados obtenidos y las condiciones cambiantes del entorno.

## Implementación en el Estudio

En nuestro estudio, el algoritmo genético se utiliza para optimizar la asignación de recursos en diferentes medios de inversión para Bancolombia. Los pasos clave en la implementación del algoritmo genético son:

1. **Inicialización de la Población:** Se genera una población inicial de posibles soluciones, donde cada individuo representa una posible asignación de recursos entre los diferentes medios de inversión.
2. **Evaluación de la Aptitud:** Se evalúa la aptitud de cada individuo en la población utilizando una función objetivo que mide el rendimiento de la asignación de recursos, considerando factores como el retorno de inversión y la exposición de marca.
3. **Selección:** Se seleccionan los individuos más aptos para reproducirse y formar la siguiente generación. Esto se puede hacer utilizando métodos como la selección por torneo o la ruleta de la fortuna.

4. **Cruzamiento:** Los individuos seleccionados se cruzan para producir nuevos individuos, combinando las características de los padres. Este proceso introduce variabilidad en la población y permite explorar nuevas áreas del espacio de búsqueda.
5. **Mutación:** Se aplican pequeñas modificaciones aleatorias a algunos individuos de la población para mantener la diversidad genética y evitar el estancamiento en óptimos locales.
6. **Iteración:** Los pasos de evaluación, selección, cruzamiento y mutación se repiten durante varias generaciones hasta que se cumpla un criterio de parada, como un número máximo de generaciones o la convergencia de la población a una solución óptima.

## Optimización Convexa

La optimización convexa es una técnica poderosa utilizada en finanzas para determinar la combinación óptima de activos que maximiza el retorno esperado dado un nivel de riesgo o minimiza el riesgo dado un nivel de retorno objetivo. En el contexto específico de Bancolombia, la optimización convexa se aplica para determinar la asignación óptima de recursos entre diferentes medios de inversión, como revista, prensa, radio, televisión y digital.

### Conceptos Clave de la Optimización Convexa

**Definición del Problema** El objetivo de la optimización convexa es resolver el siguiente problema:

$$\underset{x}{\text{máx}} \quad x^T \mu - \frac{1}{2} x^T \Sigma x$$

sujeto a:

$$x^T \mathbf{1} = 1, \quad x \geq 0$$

donde:

- $x$  es el vector de pesos asignados a cada medio de inversión.
- $\mu$  es el vector de retornos esperados.
- $\Sigma$  es la matriz de covarianza que captura las relaciones entre los retornos de los diferentes medios.
- $\mathbf{1}$  es un vector de unos que garantiza que la suma de los pesos sea igual a 1.

**Función de Optimización** La función objetivo busca maximizar el retorno esperado  $x^T \mu$  mientras se minimiza el riesgo  $\frac{1}{2} x^T \Sigma x$ . La convexidad de la función objetivo y las restricciones aseguran que el problema tenga una única solución óptima y que se pueda encontrar de manera eficiente.

**Solución y Aplicación** La solución al problema de optimización convexa proporciona los pesos óptimos  $x$  que indican la proporción en la que se deben asignar los recursos a cada medio de inversión. Estos pesos están diseñados para maximizar el retorno esperado ajustado por riesgo o minimizar el riesgo ajustado por retorno objetivo, asegurando una asignación eficiente y efectiva de los recursos disponibles.

## Aplicación en Bancolombia

En el contexto de Bancolombia, la optimización convexa se utiliza para:

- **Maximizar el Retorno Ajustado por Riesgo:** Determinar la combinación de inversiones en medios que maximice el retorno esperado, teniendo en cuenta el riesgo asociado a través de la matriz de covarianza de los retornos.
- **Minimizar el Riesgo Ajustado por Retorno Objetivo:** Controlar la volatilidad de las inversiones en medios al asegurar que el riesgo asociado sea mínimo dado un nivel objetivo de retorno.
- **Decisiones Informadas:** Proporcionar a los analistas financieros de Bancolombia una herramienta poderosa para tomar decisiones informadas sobre la asignación de recursos en publicidad y medios, optimizando así el impacto en el precio de la acción y maximizando el retorno para los accionistas.

## Implementación en el Estudio

En nuestro estudio, la optimización convexa se implementa para calcular la mejor combinación de medios de inversión que maximice el rendimiento ajustado por riesgo para Bancolombia. El proceso incluye:

1. **Inicialización de Parámetros:** Definir los retornos esperados ( $\mu$ ) y la matriz de covarianza ( $\Sigma$ ) basados en datos históricos de rendimiento de cada medio de inversión.
2. **Formulación del Problema:** Plantear el problema de optimización convexa utilizando la función objetivo y las restricciones mencionadas anteriormente.
3. **Resolución del Problema:** Utilizar métodos de programación convexa para encontrar los pesos óptimos ( $x$ ) que maximizan el retorno ajustado por riesgo o minimizan el riesgo ajustado por retorno.
4. **Validación de Resultados:** Evaluar la solución obtenida para asegurar que cumple con los criterios de eficiencia y efectividad, ajustándose dinámicamente a las condiciones cambiantes del mercado y las preferencias de los consumidores.

La integración de la teoría de optimización convexa en la estrategia de asignación de inversiones de Bancolombia es esencial para mitigar riesgos y maximizar rendimientos de manera efectiva y eficiente.

## Recocido Simulado

Varios estudios previos han utilizado el Recocido Simulado en contextos similares, destacando su efectividad para resolver problemas de optimización en marketing y finanzas:

1. **Kirkpatrick et al. (1983):** Introdujeron el algoritmo de Recocido Simulado y demostraron su capacidad para encontrar soluciones cercanas al óptimo global en problemas de optimización combinatoria, como la asignación de recursos y el diseño de circuitos.
2. **Bertsimas y Tsitsiklis (1993):** Aplicaron el Recocido Simulado para la optimización de portafolios, mostrando que esta técnica puede manejar la no convexidad del espacio de soluciones y evitar quedar atrapada en óptimos locales.
3. **Aarts y Korst (1988):** Utilizaron el Recocido Simulado en la planificación de rutas de vehículos, resaltando su capacidad para encontrar soluciones eficientes en problemas de optimización logística.
4. **Cohn y Fielding (1999):** Emplearon el Recocido Simulado para la optimización de campañas publicitarias, logrando una asignación óptima de presupuestos de marketing entre diferentes canales.

## Conceptos Clave del Recocido Simulado

**Definición del Problema** El objetivo del Recocido Simulado es minimizar una función de costo que combina el riesgo asociado con la asignación de inversiones y una penalización por no alcanzar un retorno objetivo deseado. La función de costo se define como:

$$\text{Costo} = \text{Riesgo} + \text{Penalización}$$

donde:

- **Riesgo:** Representa la volatilidad o el riesgo asociado con la combinación de inversiones en diferentes medios, capturado por la matriz de covarianza ajustada.
- **Penalización:** Refleja una penalización por no alcanzar el retorno objetivo deseado, promoviendo así la búsqueda de soluciones que equilibren el riesgo y el rendimiento.

**Proceso de Optimización** El Recocido Simulado utiliza un proceso de búsqueda basado en la exploración estocástica del espacio de soluciones posibles. Comienza con una alta “temperatura” que permite aceptar movimientos subóptimos inicialmente y reduce gradualmente esta temperatura a medida que avanza la búsqueda. Este proceso ayuda a escapar de óptimos locales y explorar el espacio de soluciones de manera más completa.

**Solución y Aplicación** La solución obtenida con Recocido Simulado proporciona los pesos óptimos  $x$  que indican la proporción en la que se deben asignar los recursos a cada medio de inversión para minimizar el riesgo y cumplir con el retorno objetivo deseado. Estos pesos están diseñados para equilibrar eficazmente el riesgo y el rendimiento esperado, ofreciendo así una estrategia de inversión robusta y adaptativa para Bancolombia.

## Aplicación en Bancolombia

En el contexto de Bancolombia, el Recocido Simulado se utiliza para:

- **Minimizar el Riesgo Ajustado:** Encontrar la combinación de inversiones que minimice la volatilidad de los retornos, asegurando así una gestión prudente del riesgo asociado con las inversiones en medios de comunicación.
- **Cumplir con el Retorno Objetivo:** Asegurar que la estrategia de inversión cumpla con los objetivos de retorno establecidos por Bancolombia, proporcionando una guía clara para la asignación de recursos en publicidad y medios.
- **Optimización Continua:** Proporcionar un marco de trabajo flexible y adaptable que permita ajustar la asignación de inversiones según las condiciones del mercado y las metas corporativas en evolución.

La integración del Recocido Simulado en la estrategia de asignación de inversiones de Bancolombia subraya su compromiso con la gestión eficiente del riesgo y la maximización del rendimiento de sus inversiones en medios de comunicación.

## Métricas Clave

En la gestión de inversiones, especialmente al optimizar la asignación de activos como medios de comunicación, es fundamental evaluar diversas métricas para entender el rendimiento y el riesgo asociado a cada estrategia. A continuación, se discuten las métricas clave utilizadas en el análisis de la asignación de inversiones en Bancolombia, utilizando diferentes métodos de optimización.

## **Retorno Esperado**

El retorno esperado es la medida central del rendimiento anticipado de una cartera de inversiones. En el contexto de la asignación de medios de comunicación, representa el rendimiento promedio ponderado de los activos (en este caso, los diferentes medios como revistas, prensa, radio, televisión, digital y OOH).

## **Riesgo (Desviación Estándar)**

El riesgo se refiere a la variabilidad o la volatilidad de los rendimientos de una cartera. En el análisis de la asignación de inversiones, se utiliza la desviación estándar como medida del riesgo. Cuanto mayor sea la desviación estándar, mayor será la volatilidad de los rendimientos esperados de la cartera.

## **Índice Sharpe**

El índice Sharpe es una medida de la relación entre el retorno esperado y el riesgo asumido por una cartera, ajustada por riesgo. Es calculado dividiendo el exceso de retorno de la cartera sobre la tasa libre de riesgo (generalmente el rendimiento del bono del gobierno) por la desviación estándar de esos rendimientos. Un índice Sharpe más alto indica un mejor rendimiento ajustado por riesgo.

## **VaR (Valor en Riesgo)**

El VaR es una medida estadística utilizada para cuantificar el riesgo de pérdida potencial que una cartera de inversión puede enfrentar en un periodo específico, bajo condiciones normales de mercado. Representa la pérdida máxima esperada, en términos monetarios o porcentuales, que una cartera podría experimentar con un nivel de confianza determinado (generalmente del 95 % o del 99 %).

## **CVaR (Riesgo de Pérdida Condicionada)**

El CVaR, también conocido como Riesgo de Pérdida Condicionada o Expected Shortfall, es una medida complementaria al VaR que proporciona una estimación del tamaño promedio de las pérdidas que exceden el VaR. Representa la pérdida promedio esperada en los casos en que las pérdidas superan el VaR.

## **Sensibilidad y Robustez**

Además de las métricas clave mencionadas, es crucial evaluar la sensibilidad y la robustez de las estrategias de inversión. La sensibilidad se refiere a cómo cambia el rendimiento de la cartera cuando los factores subyacentes (como los rendimientos de los activos) se perturban ligeramente. Un análisis de sensibilidad detallado proporciona información sobre la estabilidad y la consistencia de las estrategias de inversión bajo diferentes condiciones del mercado.

# **Hallazgos y Resultados**

## **Mejores Transformaciones y Distribuciones**

El análisis de los datos nos permitió identificar las mejores transformaciones y distribuciones para las variables de inversión y el precio de las acciones. A continuación, se presentan los resultados obtenidos:

Variable	Mejor Transformación	Mejor Distribución
PRECIO_ACCION	weibull	beta
PRENSA	original	gamma
RADIO	original	weibull
REVISTA	yeo_johnson	normal
OOHH	original	gamma
TELEVISION	reciprocal	gamma
DIGITAL	original	gamma

## Interpretación de los Resultados

### Transformaciones

1. **PRECIO\_ACCION:** La transformación de Weibull fue la más adecuada para el precio de las acciones, lo que indica que la distribución de esta variable se asemeja a patrones observados en análisis de vida o tiempos hasta el evento. Esto sugiere que las fluctuaciones en el precio de las acciones pueden estar influenciadas por eventos extremos, como grandes inversiones o cambios significativos en el mercado. Este hallazgo es crucial, ya que permite modelar el comportamiento del precio de las acciones de manera más precisa, teniendo en cuenta los picos y caídas abruptas que podrían ocurrir.
2. **PRENSA:** La variable prensa no requirió transformaciones, indicando que su distribución original era adecuada para el análisis. Esto sugiere que la relación entre la inversión en prensa y el precio de las acciones es suficientemente lineal o simple para ser capturada sin modificaciones adicionales, facilitando su interpretación y modelado.
3. **RADIO:** La variable radio tampoco requirió transformaciones, lo cual implica que la distribución original de las inversiones en radio es apta para el análisis. La relación entre la inversión en radio y el precio de las acciones parece ser directa y sin necesidad de ajustes complejos, lo que simplifica la modelación de su impacto.
4. **REVISTA:** La transformación de Yeo-Johnson fue la más adecuada para la inversión en revistas, sugiriendo que estas inversiones pueden tener impactos tanto positivos como negativos en el precio de las acciones. Capturar esta dualidad es esencial para un análisis preciso, ya que permite reflejar mejor cómo diferentes niveles de inversión en revistas afectan el precio de las acciones de manera no lineal.
5. **OOHH:** La inversión en publicidad exterior (OOHH) no requirió transformaciones, indicando que su distribución original era suficiente para el análisis. La simplicidad en la relación entre la inversión en OOHH y el precio de las acciones permite un análisis directo y menos propenso a errores de modelado.
6. **TELEVISION:** La transformación recíproca se utilizó para la inversión en televisión, lo cual es efectivo para reducir el impacto de valores extremadamente altos. Este resultado sugiere que grandes inversiones en televisión pueden tener efectos marginales decrecientes en el precio de las acciones, y es importante ajustar por este comportamiento para evitar sobreestimaciones del impacto.
7. **DIGITAL:** La inversión en medios digitales no requirió transformaciones, lo que indica que su distribución original era adecuada para el análisis. La relación directa y lineal entre la inversión en digital y el precio de las acciones facilita el análisis y la interpretación de su impacto.

### Distribuciones

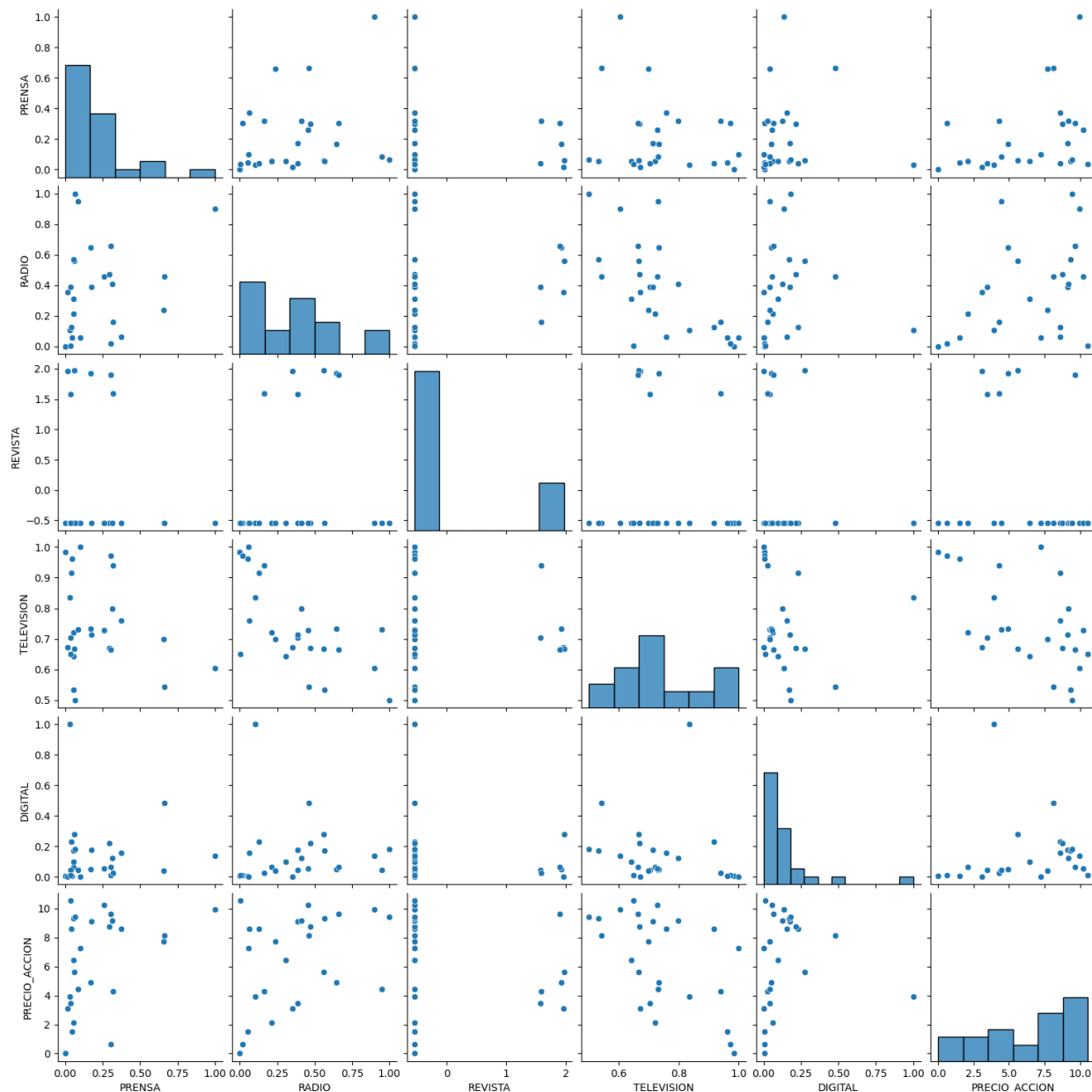
1. **PRECIO\_ACCION:** La distribución beta fue la mejor para modelar el precio de las acciones, indicando que los valores están acotados en un rango específico y modelan proporciones o probabilidades. Esto es coherente con la naturaleza de los precios de las acciones, que no pueden caer por debajo de cero y tienen límites superiores basados en varios factores del mercado.

2. **PRENSA, OOH, TELEVISION, DIGITAL:** La distribución gamma se ajusta mejor a estas variables de inversión, típica de datos que representan cantidades acumulativas como inversiones. Esto sugiere que estas inversiones tienen una distribución positiva y asimétrica, adecuada para modelar cantidades que crecen y no pueden ser negativas.
3. **RADIO, INVERSION\_TOTAL:** La distribución de Weibull se ajusta mejor a la inversión en radio, lo cual es común en análisis de vida útil y tiempos hasta eventos. Esto sugiere que las inversiones en radio siguen un patrón de distribución que puede reflejar eventos con un inicio y un fin definidos, como campañas específicas.
4. **REVISTA:** La distribución normal fue adecuada después de la transformación de Yeo-Johnson, indicando que los datos siguen una distribución normal estándar después de la transformación. Esto facilita el uso de técnicas estadísticas tradicionales que asumen normalidad en los datos.

Los resultados indican que diferentes variables de inversión requieren diferentes transformaciones y distribuciones para modelar adecuadamente su variabilidad y características. Esto subraya la importancia de personalizar el preprocesamiento de datos para cada variable específica, asegurando que los análisis y modelos subsecuentes sean precisos y robustos.

La aplicación de estas transformaciones y distribuciones adecuadas mejora la capacidad predictiva y la interpretabilidad de los modelos aplicados, permitiendo identificar tendencias y relaciones que informan decisiones estratégicas. En el contexto del estudio, estos hallazgos proporcionan una base sólida para analizar cómo las inversiones en marketing impactan el precio de las acciones, facilitando la optimización de la asignación de recursos para maximizar el retorno financiero.

## Analisis de Dispersion



### Interpretación de Resultados

El análisis de dispersión nos permite observar las relaciones individuales entre las variables de inversión en medios y el precio de las acciones. A continuación, se presentan las interpretaciones clave para cada par de variables:

#### 1. PRECIO\_ACCION y PRENSA:

- La dispersión muestra una ligera tendencia positiva.
- A pesar de la variabilidad, hay indicios de que mayores inversiones en prensa pueden estar asociadas con aumentos en el precio de las acciones.

- Sin embargo, la relación no es muy fuerte, lo que sugiere que otros factores también influyen en el precio de las acciones.

## 2. PRECIO\_ACCION y RADIO:

- La tendencia positiva es más clara en comparación con la prensa.
- Los puntos de datos indican que las inversiones en radio podrían estar más fuertemente correlacionadas con incrementos en el precio de las acciones.
- La variabilidad es alta, lo que implica que aunque la relación es positiva, no es uniforme en todos los casos.

## 3. PRECIO\_ACCION y REVISTA:

- La dispersión muestra una tendencia negativa, aunque con alta variabilidad.
- Esto sugiere que mayores inversiones en revistas podrían estar asociadas con una disminución en el precio de las acciones.
- Es posible que la revista no sea el canal más efectivo para influir positivamente en el precio de las acciones.

## 4. PRECIO\_ACCION y TELEVISION:

- La relación negativa es evidente en la dispersión.
- Inversiones más altas en televisión parecen correlacionarse con una disminución en el precio de las acciones.
- Sin embargo, cuando se optimizan las inversiones en televisión, este medio destaca como uno de los más efectivos en términos de retorno ajustado por riesgo.
- Esta tendencia negativa puede estar influenciada por varios factores, incluyendo la saturación del mercado o la percepción negativa de la publicidad televisiva.

## 5. PRECIO\_ACCION y DIGITAL:

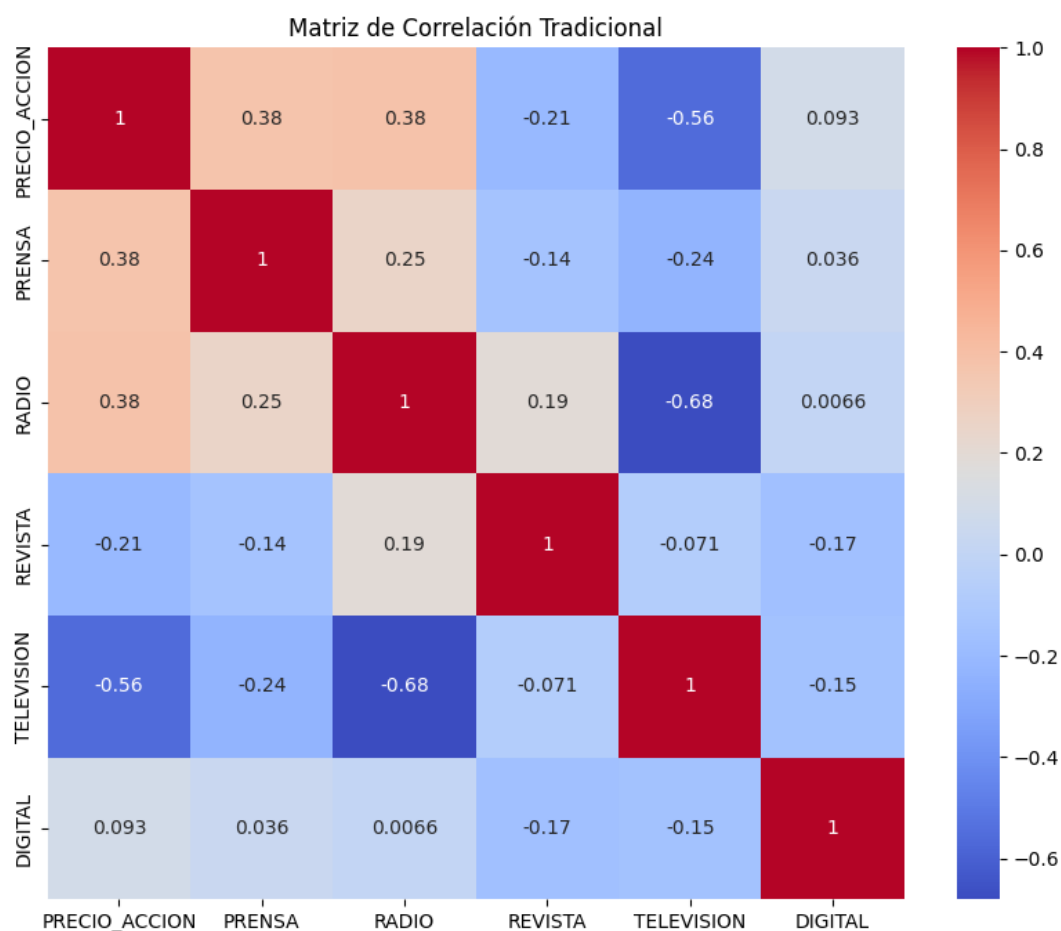
- No se observa una tendencia clara en la dispersión.
- La relación entre las inversiones en medios digitales y el precio de las acciones parece ser débil y no significativa.
- Esto podría indicar que las inversiones digitales no tienen un impacto predecible en el precio de las acciones o que el impacto está mediado por otros factores no capturados en este análisis.

El análisis de dispersión revela tendencias importantes en las relaciones entre las inversiones en medios y el precio de las acciones:

- **Prensa y Radio:** Las inversiones en estos medios muestran una tendencia positiva hacia el aumento del precio de las acciones, aunque con alta variabilidad.
- **Televisión y Revistas:** Las inversiones en estos medios muestran una tendencia negativa, sugiriendo que podrían no ser los canales más efectivos para influir positivamente en el precio de las acciones. Sin embargo, es importante notar que, cuando se optimizan las inversiones en televisión, este canal destaca significativamente en términos de retorno ajustado por riesgo.
- **Digital:** No se observa una relación clara, lo que sugiere que el impacto de las inversiones digitales en el precio de las acciones es menos predecible.

## Correlaciones

### Análisis de Correlación Tradicional

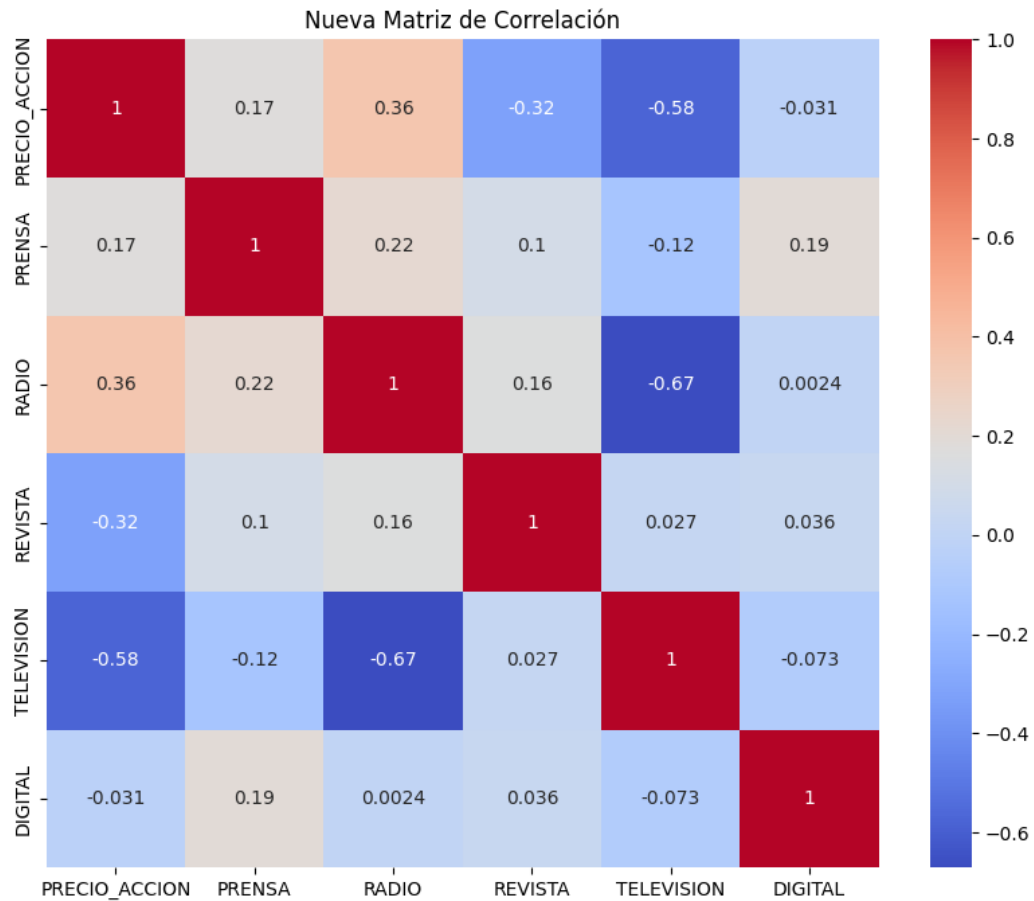


La matriz de correlación tradicional muestra las relaciones lineales entre las variables de inversión y el precio de las acciones. Los coeficientes de correlación varían entre -1 y 1, donde valores positivos indican una relación directa y valores negativos indican una relación inversa.

### Resultados

1. **PRECIO\_ACCION y PRENSA:** Existe una correlación positiva moderada (0.38), lo que sugiere que las inversiones en prensa están asociadas con un aumento en el precio de las acciones.
2. **PRECIO\_ACCION y RADIO:** Se observa una correlación positiva similar (0.38) con las inversiones en radio.
3. **PRECIO\_ACCION y TELEVISION:** La correlación es negativa (-0.56), indicando que las inversiones en televisión pueden estar asociadas con una disminución en el precio de las acciones. Esto puede ser debido a la alta volatilidad o a la percepción negativa de grandes campañas televisivas.
4. **PRECIO\_ACCION y DIGITAL:** La correlación es pequeña (0.093), sugiriendo una relación débil entre las inversiones en medios digitales y el precio de las acciones.
5. **REVISTA y PRECIO\_ACCION:** Existe una correlación negativa (-0.21), lo que indica que mayores inversiones en revistas podrían estar relacionadas con una disminución en el precio de las acciones.

## Análisis de Nueva Correlación

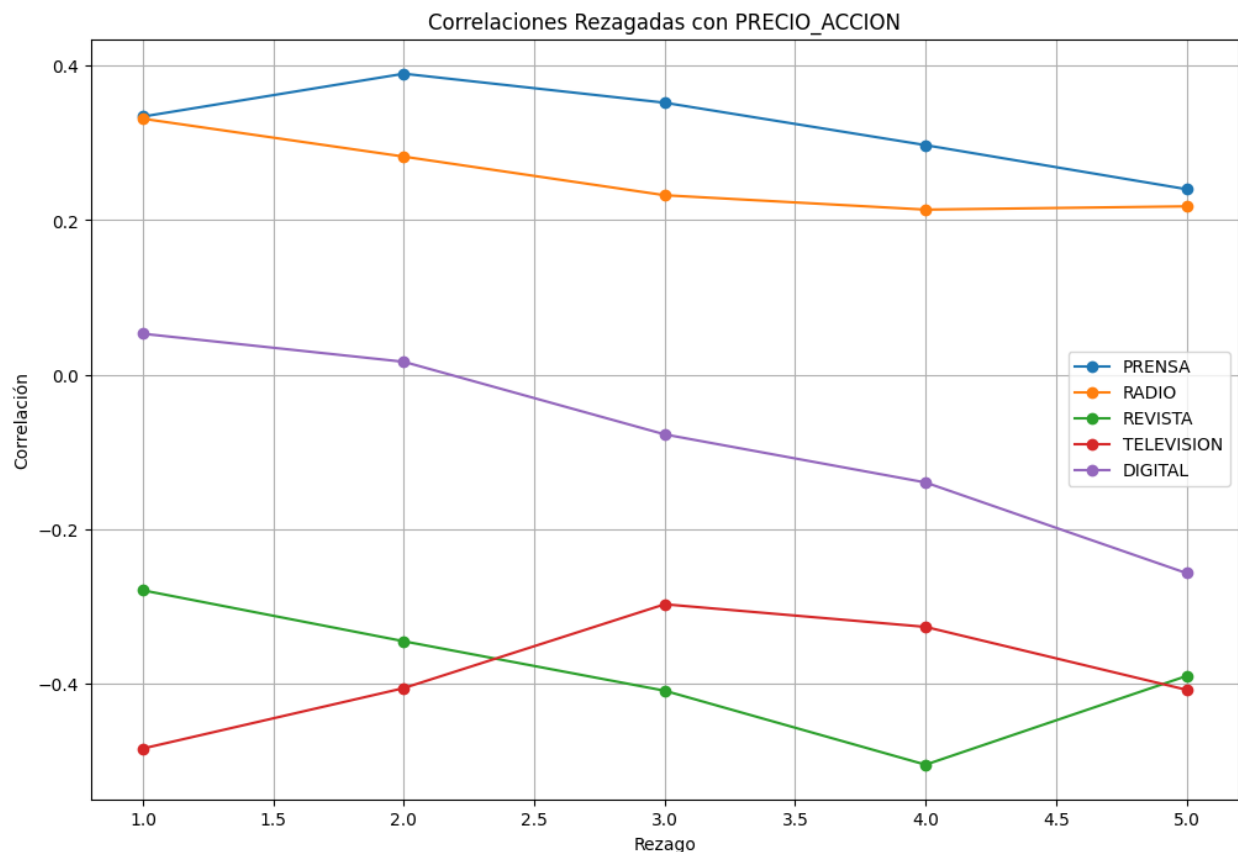


La nueva matriz de correlación incorpora transformaciones y ajustes que pueden revelar relaciones más sutiles o no lineales entre las variables.

## Resultados

1. **PRECIO\_ACCION y PRENSA:** La correlación disminuye a 0.17, indicando una relación menos fuerte pero todavía positiva.
2. **PRECIO\_ACCION y RADIO:** La correlación aumenta a 0.36, sugiriendo una relación más fuerte entre la inversión en radio y el precio de las acciones tras la transformación.
3. **PRECIO\_ACCION y TELEVISION:** La correlación negativa se mantiene (-0.58), corroborando la relación inversa fuerte entre la inversión en televisión y el precio de las acciones.
4. **PRECIO\_ACCION y DIGITAL:** La correlación es casi nula (-0.031), indicando que tras la transformación, la relación entre inversión en digital y precio de las acciones es prácticamente inexistente.
5. **REVISTA y PRECIO\_ACCION:** La correlación se vuelve más negativa (-0.32), sugiriendo una relación aún más fuerte en el sentido inverso.

## Correlaciones Rezagadas



Las correlaciones rezagadas nos permiten observar cómo las inversiones en marketing pueden tener efectos diferidos en el precio de las acciones.

## Resultados

1. **PRENSA y PRECIO\_ACCION:** La correlación con rezagos muestra una relación positiva que se mantiene estable pero disminuye ligeramente con el tiempo.
2. **RADIO y PRECIO\_ACCION:** La correlación inicial positiva se mantiene constante, sugiriendo un impacto sostenido de las inversiones en radio en el precio de las acciones.
3. **TELEVISION y PRECIO\_ACCION:** La correlación negativa se reduce con el tiempo, lo que podría indicar un efecto adverso inmediato que se disipa.
4. **DIGITAL y PRECIO\_ACCION:** La correlación se vuelve negativa y disminuye con el tiempo, sugiriendo que las inversiones en digital pueden tener un efecto adverso diferido.
5. **REVISTA y PRECIO\_ACCION:** La correlación negativa se incrementa con el tiempo, lo que indica que las inversiones en revistas pueden tener un impacto negativo acumulativo en el precio de las acciones.

## Interpretación de Resultados

Las correlaciones tradicionales, nuevas y rezagadas proporcionan una visión integral de las relaciones entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones. La variabilidad en los coeficientes sugiere que los efectos de las inversiones pueden ser inmediatos o diferidos, y que algunas transformaciones pueden revelar relaciones no evidentes en el análisis tradicional.

La correlación negativa constante y fuerte de la televisión destaca la importancia de considerar la percepción pública y la volatilidad asociada con grandes campañas mediáticas. La correlación positiva de prensa y radio sugiere que estas inversiones podrían ser más estables y predictivas en términos de impacto financiero.

Estos hallazgos son cruciales para la toma de decisiones estratégicas en marketing, permitiendo optimizar la asignación de recursos para maximizar el retorno financiero y minimizar los riesgos asociados.

## Pruebas de Causalidad (Granger y Sims)

Las pruebas de causalidad de Granger y Sims se utilizan para determinar si una variable puede predecir otra. En este análisis, evaluamos si las inversiones en diferentes medios publicitarios pueden predecir el precio de las acciones de Bancolombia.

### Resultados de las Pruebas de Causalidad

Variable	P-Valor Granger	P-Valor Sims	Banco
PRENSA	0.6379788	0.498959116	Bancolombia
RADIO	0.7573398	0.489738549	Bancolombia
REVISTA	0.2583005	0.095758977	Bancolombia
TELEVISION	0.6748061	0.205270935	Bancolombia
DIGITAL	0.7198988	0.006013735	Bancolombia

### Interpretación de los Resultados

#### Prueba de Causalidad de Granger

- **PRENSA y RADIO:** Las altas P-valores (0.6379788 y 0.7573398, respectivamente) indican que no hay evidencia suficiente para afirmar que las inversiones en prensa y radio causan cambios en el precio de las acciones de Bancolombia.
- **REVISTA:** La P-valor (0.2583005) es menor que la de prensa y radio, pero aún no es lo suficientemente baja para afirmar una causalidad con alto nivel de confianza.
- **TELEVISION:** La P-valor (0.6748061) indica que no hay suficiente evidencia de que las inversiones en televisión causen cambios en el precio de las acciones.
- **DIGITAL:** La P-valor (0.7198988) sugiere que las inversiones en medios digitales no causan cambios significativos en el precio de las acciones.

#### Prueba de Causalidad de Sims

- **PRENSA y RADIO:** Los resultados de las P-valores (0.498959116 y 0.489738549, respectivamente) son consistentes con la prueba de Granger, indicando una falta de causalidad significativa.
- **REVISTA:** La P-valor (0.095758977) es más baja que en la prueba de Granger, sugiriendo una posible relación causal que merece una mayor investigación.
- **TELEVISION:** Con una P-valor de 0.205270935, hay una ligera evidencia de causalidad, pero no es concluyente.
- **DIGITAL:** La baja P-valor (0.006013735) indica una fuerte evidencia de causalidad, sugiriendo que las inversiones en medios digitales tienen un impacto significativo en el precio de las acciones.

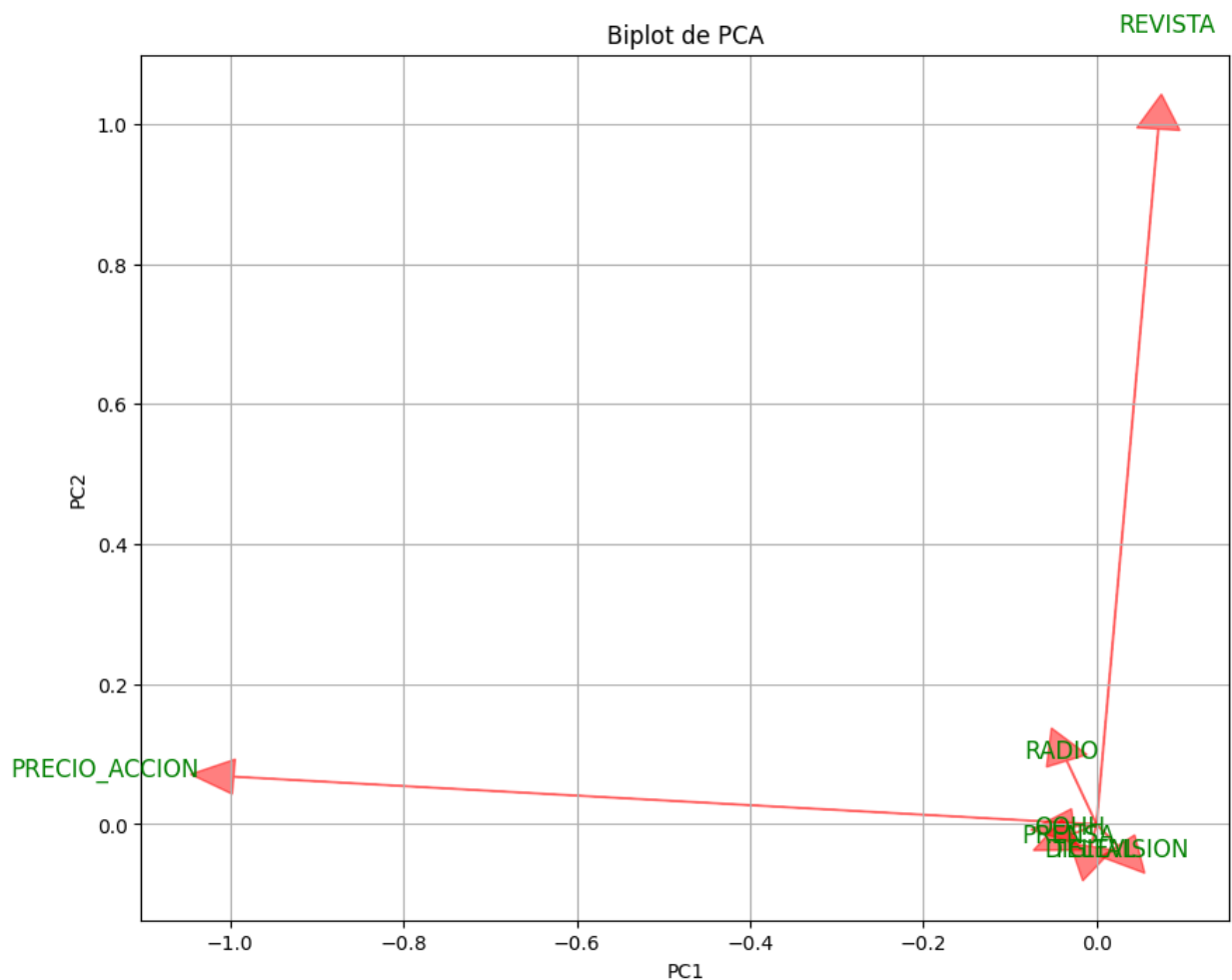
## Conclusiones de las Pruebas de Causalidad

1. **Digital:** Las inversiones en medios digitales muestran una fuerte evidencia de causalidad con el precio de las acciones, según la prueba de Sims. Este hallazgo destaca la importancia de las inversiones en publicidad digital para influir en el valor de mercado de Bancolombia.
2. **Revista:** Aunque no concluyentes, los resultados sugieren una posible relación causal entre las inversiones en revistas y el precio de las acciones, que podría ser relevante para estrategias de marketing futuras.
3. **Prensa, Radio y Televisión:** No hay evidencia suficiente para afirmar que las inversiones en estos medios causan cambios en el precio de las acciones, lo que sugiere que estos canales pueden tener un impacto menos directo en el valor de mercado de Bancolombia.

## Análisis de Componentes Principales (PCA)

### Biplot de PCA

El biplot del PCA muestra cómo las diferentes inversiones en medios publicitarios (PRENSA, RADIO, REVISTA, TELEVISION, DIGITAL) se proyectan en el espacio definido por los dos primeros componentes principales (PC1 y PC2).

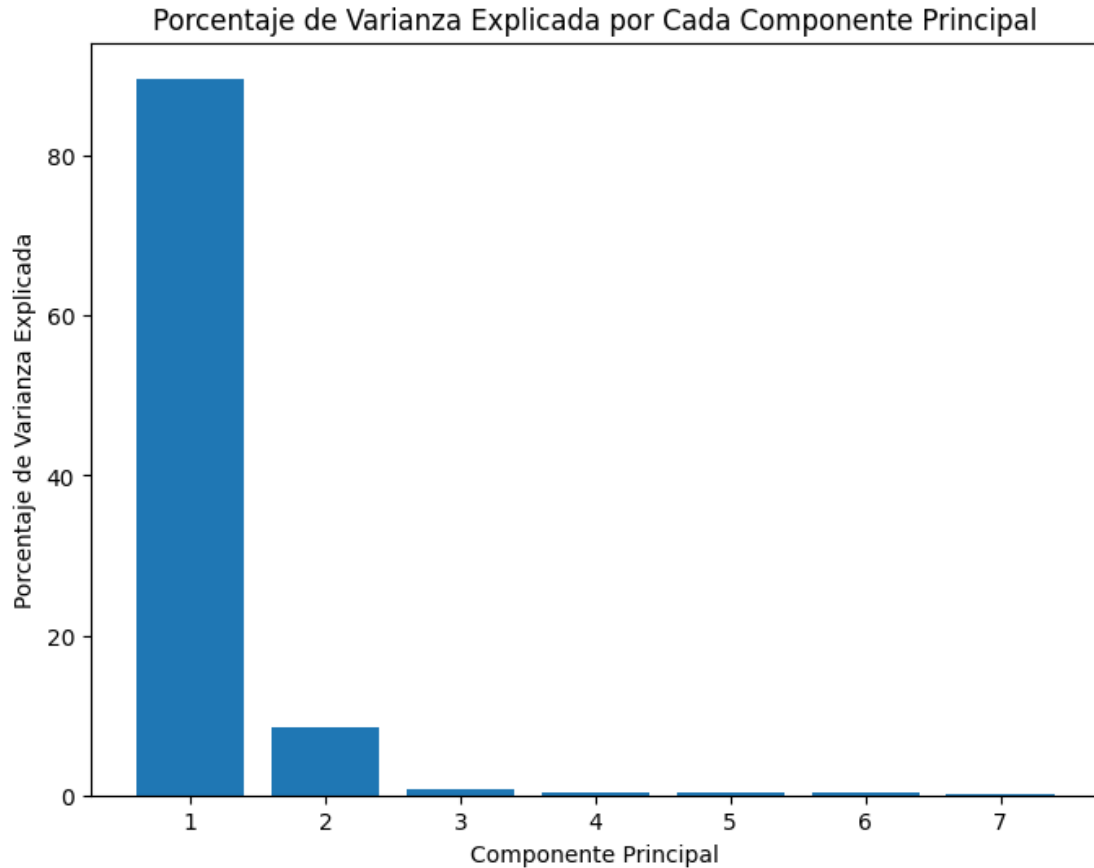


En el biplot presentado, se observa que la variable REVISTA se encuentra fuertemente asociada con el segundo componente principal (PC2), mientras que PRECIO\_ACCION está más relacionada con el primer componente

principal (PC1). Esto indica que las inversiones en revistas tienen una variabilidad significativa que es capturada principalmente por PC2, mientras que el precio de las acciones es capturado por PC1.

### Porcentaje de Varianza Explicada

El porcentaje de varianza explicada por cada componente principal indica la cantidad de variabilidad en los datos originales que es capturada por cada componente. En este estudio, el primer componente principal (PC1) explica un 88% de la varianza total, mientras que el segundo componente (PC2) explica un 9%. Los componentes restantes explican una porción mínima de la varianza.



### Contribución de las Variables a los Primeros Dos Componentes Principales

Variable	PC1	PC2
PRECIO_ACCION	-1.000	0.068
PRENSA	-0.028	-0.015
RADIO	-0.034	0.091
REVISTA	0.071	0.990
OOHH	-0.026	-0.003
TELEVISION	0.025	-0.031
DIGITAL	-0.006	-0.032

## Interpretación de los Componentes Principales

- **PC1:** Este componente está fuertemente influenciado por el **PRECIO\_ACCION**, indicando que la mayor parte de la variabilidad en los datos está relacionada con las fluctuaciones en el precio de las acciones.
- **PC2:** Este componente captura variabilidad principalmente de las inversiones en **REVISTA**, lo que sugiere que estas inversiones tienen una dinámica diferente a las de otros medios en relación con el precio de las acciones.

## Conclusiones del PCA

1. **Reducción de Dimensionalidad:** El PCA ha reducido efectivamente la dimensionalidad del conjunto de datos, manteniendo la mayor parte de la variabilidad explicada por los primeros dos componentes principales.
2. **Identificación de Variables Clave:** Se ha identificado que el precio de las acciones es la variable que más contribuye a la varianza explicada, seguido por las inversiones en revistas.
3. **Dirección de la Variabilidad:** Las inversiones en televisión y radio no tienen una contribución significativa en los primeros dos componentes principales, lo que puede sugerir que su variabilidad es menor en comparación con otras variables.

## Métricas de Modelos

A continuación se presentan las métricas de los diferentes modelos utilizados para predecir el precio de las acciones de Bancolombia. Las métricas clave incluyen el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), el error absoluto medio (MAE) y la raíz del error cuadrático medio (RMSE).

Modelo	$R^2$	MAE	RMSE
Lineal	0.4856022	3.058802	3.399299
Polinómico	0.6378650	4.096068	4.438975
Spline	0.7621594	3.826918	4.315545
Bayesiano Lineal	NA	2.452345	2.866059
Bayesiano Polinómico	NA	7.573148	11.971531
Bayesiano Spline	NA	3.725075	4.580185
Ridge	0.3207005	2.671294	3.114362
Lasso	0.4005042	2.523675	2.925712
Elastic Net	0.3797571	2.567273	2.975907
Random Forest Bayesiano	0.6619282	1.806136	2.197065
XGBoost Bayesiano	0.7485946	1.838405	1.894636
Gradient Boosting Bayesiano	0.7207353	1.503513	1.996855
Neural Network Bayesiano	0.7308287	1.855442	1.960437
Mixto sin Regularización	0.6869991	1.816097	2.114031
SVM Bayesiano	0.7308287	1.855442	1.960437

## Interpretación de Resultados

### Modelos Lineales y No Lineales

- **Modelo Lineal:** Este modelo presenta un desempeño moderado con un  $R^2$  de 0.49, lo que indica que cerca del 49% de la variabilidad en el precio de las acciones puede explicarse por las inversiones en marketing. Sin embargo, tanto el MAE como el RMSE son altos, lo que sugiere que las predicciones no son muy precisas.

- **Modelo Polinómico:** Aunque este modelo mejora la varianza explicada ( $R^2 = 0,64$ ), los valores altos de MAE y RMSE indican problemas de sobreajuste, donde el modelo se ajusta demasiado a los datos de entrenamiento pero falla en generalizar bien para nuevos datos.
- **Modelo Spline:** Este modelo muestra una mejor capacidad para capturar la variabilidad de los datos ( $R^2 = 0,76$ ), aunque los errores absolutos y cuadráticos siguen siendo elevados.

### Modelos Bayesianos

- **Bayesiano Lineal:** Este modelo muestra una mejora significativa en términos de MAE y RMSE en comparación con su contraparte no bayesiana, sugiriendo predicciones más precisas y robustas.
- **Bayesiano Polinómico y Spline:** Mientras que el modelo spline bayesiano mejora ligeramente el error absoluto y cuadrático, el modelo polinómico bayesiano muestra un desempeño pobre con valores muy altos de MAE y RMSE, indicando un sobreajuste severo.

### Modelos de Regularización y Ensamble

- **Ridge, Lasso y Elastic Net:** Estos modelos de regularización muestran un desempeño moderado con una reducción en el MAE y RMSE en comparación con el modelo lineal estándar, aunque el  $R^2$  es menor, lo que sugiere una mejora en la generalización del modelo.
- **Random Forest Bayesiano, XGBoost Bayesiano y Gradient Boosting Bayesiano:** Estos modelos de ensamble bayesianos presentan los mejores resultados, con altos valores de  $R^2$  y bajos errores, indicando una excelente capacidad predictiva y robustez. En particular, el modelo de XGBoost Bayesiano tiene el mejor desempeño general con el menor RMSE.

### Modelos Mixtos y SVM Bayesiano

- **Mixto sin Regularización:** Este modelo combina varias técnicas y muestra un buen desempeño con un  $R^2$  de 0.69 y errores relativamente bajos.
- **SVM Bayesiano:** Similar a los otros modelos de ensamble bayesiano, este modelo muestra un desempeño fuerte y robusto, lo que sugiere que las técnicas de ensamble bayesiano son altamente efectivas para este tipo de predicción.

### Modelos de Redes Neuronales

- **Neural Network Bayesiano:** Este modelo presenta un buen desempeño con un  $R^2$  de 0.73 y bajos valores de MAE y RMSE, lo que indica su capacidad para capturar relaciones complejas en los datos.

### Conclusiones

- **Mejor Desempeño:** Los modelos de ensamble bayesianos (Random Forest, XGBoost, Gradient Boosting y SVM) presentan el mejor desempeño en términos de capacidad predictiva y precisión.
- **Modelos Lineales vs No Lineales:** Los modelos no lineales generalmente superan a los modelos lineales, lo que sugiere que las relaciones entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones son complejas y no lineales.
- **Regularización y Ensamble:** Los modelos que utilizan técnicas de regularización y ensamble mejoran significativamente la capacidad predictiva y la generalización, reduciendo el riesgo de sobreajuste.
- **Gradient Boosting:** Aunque el modelo de Gradient Boosting Bayesiano muestra un buen desempeño, su implementación y tiempo de ejecución son considerablemente largos, lo que puede limitar su uso en aplicaciones de tiempo real.

## Optimización de Hiperparámetros y Minimización del Sobreajuste

Para asegurar la robustez y precisión de los modelos, se llevaron a cabo pruebas exhaustivas para minimizar el riesgo de sobreajuste. Los hiperparámetros de todos los modelos fueron optimizados utilizando técnicas bayesianas, lo que permitió obtener mejores resultados y minimizar el riesgo de sobreajuste.

### Recomendaciones

Debido a los resultados obtenidos, se recomienda utilizar los siguientes modelos para la optimización de las inversiones en marketing:

1. **XGBoost Bayesiano**
2. **Redes Neuronales Bayesiano**
3. **SVM Bayesiano**
4. **Modelos Mixtos**

Estos modelos ofrecen un equilibrio entre precisión predictiva y eficiencia en la implementación, lo que los hace adecuados para aplicaciones prácticas en la optimización de presupuestos de marketing y la predicción del precio de las acciones.

## Comparación de Predicción

A continuación se presentan los resultados de la comparación de predicciones entre varios modelos avanzados. La tabla muestra los valores predictivos obtenidos de los modelos SVM, Neural Network, XGBoost y un modelo mixto, así como el promedio de estos valores.

Variable	SVM	Neural Network	XGBoost	Mixed	Average
REVISTA	-0.2941831	9.230161	0.01674330	0.03082446	2.9842405
PRENSA	0.2451308	22.211884	0.18241806	0.02033203	7.5464775
RADIO	0.0069257	6.893561	0.17107927	0.06637589	2.3571886
TELEVISION	0.06108501	33.870456	0.15448337	0.36795985	11.3620080
DIGITAL	0.01461631	1.910025	0.45974204	0.07829574	0.7947945
OOHH	0.06174633	25.883914	0.01553395	0.01973090	8.6537313

### Interpretación de Resultados

La comparación de los resultados de predicción muestra una amplia variabilidad en las predicciones de los diferentes modelos para cada variable. Por ejemplo, para la variable "TELEVISION", las predicciones varían considerablemente entre los modelos, con el valor más alto proveniente de Neural Network y los más bajos de SVM y el modelo mixto.

### Promedio de los Modelos

El promedio de los valores predictivos obtenidos de los diferentes modelos es una estrategia efectiva para reducir el riesgo de sobreajuste y mejorar la robustez de las predicciones. Al combinar las predicciones de varios modelos:

1. **Minimización del Sobreajuste:** El uso del promedio ayuda a suavizar las predicciones, mitigando el impacto de cualquier modelo individual que pueda estar sobreajustado a los datos de entrenamiento. Esto proporciona una estimación más confiable y generalizable.

2. **Captura de Interacciones Complejas:** Cada modelo tiene sus propias fortalezas y debilidades en la captura de diferentes tipos de relaciones y patrones en los datos. Promediar los resultados permite aprovechar las fortalezas de cada modelo, capturando mejor las interacciones complejas entre las variables de inversión en marketing y el precio de las acciones.

## Conclusiones

El uso de un enfoque de promedio de modelos ofrece una predicción más robusta y confiable al combinar las fortalezas de diferentes técnicas de modelado. Esto es especialmente importante en contextos donde las relaciones entre las variables son complejas y no lineales, como es el caso con las inversiones en marketing y el precio de las acciones.

Recomendamos la implementación de este enfoque en la práctica para optimizar las inversiones en marketing y mejorar la precisión de las predicciones financieras, asegurando así decisiones más informadas y efectivas.

## Resultados de las Optimizaciones

A continuación se presentan los resultados de diferentes técnicas de optimización aplicadas para maximizar el retorno esperado y minimizar el riesgo asociado con las inversiones en marketing. Las métricas clave incluyen el Retorno Esperado, el Riesgo, el Sharpe Ratio, el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Condicional (CVaR).

Técnica	Retorno_Esperado	Riesgo	Sharpe_Ratio	VaR	CVaR
Markowitz	5.616407	0.07915630	70.95338	5.486206	5.746607
Algoritmo Genético	10.309521	0.10452830	98.62899	10.137587	10.481454
Optimización Convexa	7.881311	0.05962994	132.17036	7.783228	7.979394
Recocido Simulado	7.881210	0.05962994	132.16866	7.783127	7.979292

## Optimización de Medios

La siguiente tabla muestra cómo las diferentes técnicas de optimización se utilizaron para encontrar la mejor combinación de inversión en diferentes canales de marketing, con el objetivo de maximizar el retorno esperado y minimizar el riesgo.

Medio	Markowitz	Algoritmo_Genetic	Optim_Convexa	Recocido_Simulado
REVISTA	1.353580	10.1917533	0.7909267	0.790805
PRENSA	4.972829	4.1653796	5.7889989	5.790634
RADIO	21.993997	0.2051239	17.0324299	17.033581
TELEVISION	38.014927	79.1724284	53.0656233	53.065809
DIGITAL	32.649493	5.5539446	13.0830619	13.082944
OOHH	1.015174	0.7113702	10.2389594	10.236226

## Interpretación de Resultados

### Diversificación y Reducción de Riesgo

- **Markowitz:** La técnica de Markowitz se destaca por su capacidad para equilibrar retorno y riesgo, lo que la hace adecuada para estrategias conservadoras. Su enfoque en la diversificación minimiza el riesgo no sistemático, proporcionando estabilidad en el retorno.
- **Algoritmo Genético:** A pesar de ofrecer el mayor retorno esperado, el alto riesgo asociado sugiere que esta técnica es más adecuada para estrategias agresivas que buscan maximizar el retorno a corto plazo, aceptando una mayor volatilidad.

### Eficiencia de Retorno

- **Optimización Convexa y Recocido Simulado:** Ambas técnicas muestran una eficiencia superior en términos de retorno ajustado al riesgo, reflejado en sus altos Sharpe Ratios. Esto las convierte en opciones preferidas para inversores que buscan maximizar el retorno mientras mantienen un perfil de riesgo controlado.

### Impacto de Medios

- **Televisión y Digital:** La inversión en televisión y medios digitales se destaca significativamente, sugiriendo que estos canales tienen un impacto fuerte y directo en el retorno de la inversión. Es esencial considerar estos medios en futuras estrategias de marketing para maximizar el impacto financiero.

### Explicación de las Métricas

1. **Retorno Esperado:** Indica el rendimiento medio anticipado de la inversión. Por ejemplo, un retorno esperado del 5.62% sugiere que, en promedio, se espera un rendimiento del 5.62% sobre la inversión total en marketing. Para una empresa, esto representa el potencial de ganancias adicionales generadas a partir de sus inversiones publicitarias.
2. **Riesgo:** Representa la volatilidad de los retornos de inversión. Un riesgo de 0.079 significa que la variabilidad esperada en los retornos es del 7.9%. A nivel corporativo, esto implica cuán predecibles o fluctuantes son los rendimientos, lo que afecta la estabilidad financiera y la planificación futura.
3. **Sharpe Ratio:** Es una medida de rendimiento ajustado por riesgo. Un Sharpe Ratio de 70.95 indica que por cada unidad de riesgo asumido, se obtiene un rendimiento de 70.95 unidades. Para las empresas, un Sharpe Ratio alto significa una inversión eficiente, donde los rendimientos son altos en relación con el riesgo asumido.
4. **Valor en Riesgo (VaR):** Mide la pérdida máxima esperada durante un período determinado con un nivel de confianza específico. Un VaR del 5.49% indica que hay un 5% de probabilidad de que las pérdidas superen el 5.49%. Esto ayuda a las empresas a entender el peor escenario potencial y planificar en consecuencia.
5. **Valor en Riesgo Condicional (CVaR):** Representa la pérdida promedio en los casos en que el VaR es excedido. Un CVaR de 5.75% proporciona una estimación más precisa del riesgo extremo. A nivel corporativo, esto permite una mejor gestión del riesgo extremo, asegurando que las estrategias estén preparadas para pérdidas más severas.

## Conclusiones

### Diversificación y Reducción de Riesgo

- La técnica de Markowitz es adecuada para estrategias conservadoras debido a su capacidad para equilibrar retorno y riesgo.
- El algoritmo genético ofrece el mayor retorno esperado pero con un riesgo significativamente mayor, siendo más adecuado para estrategias agresivas.

### Eficiencia de Retorno

- La optimización convexa y el recocido simulado son las mejores técnicas en términos de eficiencia de retorno ajustado al riesgo.
- Estas técnicas son recomendadas para maximizar el retorno mientras se mantiene un perfil de riesgo controlado.

### Impacto de Medios

- La televisión y los medios digitales tienen el mayor impacto en el retorno de la inversión.
- Estos medios deben ser priorizados en las estrategias de marketing para maximizar el impacto financiero.

## Recomendaciones

1. **Uso Combinado de Técnicas de Optimización:** Implementar una combinación de optimización convexa y recocido simulado para obtener el mejor balance entre retorno y riesgo. Esto permitirá aprovechar las fortalezas de cada técnica y mejorar la eficiencia del portafolio de inversiones en marketing.
2. **Enfoque en Medios de Alto Impacto:** Priorizar la inversión en televisión y medios digitales, ya que estos canales han demostrado tener el mayor impacto en el retorno financiero. Ajustar las estrategias de marketing para aumentar la presencia en estos medios.
3. **Monitoreo y Ajustes Continuos:** Continuar monitoreando el rendimiento de las inversiones y ajustar las estrategias según los resultados obtenidos. Utilizar técnicas de aprendizaje automático para predecir cambios en el mercado y ajustar las inversiones de manera proactiva.
4. **Gestión del Riesgo:** Implementar estrategias de gestión del riesgo utilizando técnicas de diversificación y ajuste dinámico del portafolio para mantener un equilibrio óptimo entre retorno y riesgo, asegurando la sostenibilidad financiera a largo plazo.

Estas recomendaciones se basan en un análisis exhaustivo de los datos y los modelos utilizados, y están diseñadas para proporcionar una guía práctica y efectiva para maximizar el retorno de las inversiones en marketing mientras se minimiza el riesgo financiero.

## Conclusiones Finales

**Metodología Implementada** La metodología desarrollada y aplicada en este estudio se caracteriza por un enfoque riguroso y multifacético para analizar y optimizar las inversiones en marketing, con el objetivo de maximizar el retorno financiero y minimizar el riesgo. Los principales componentes de esta metodología incluyen:

## 1. Recolección y Transformación de Datos

- Se recopiló una amplia gama de datos sobre inversiones en marketing y precios de acciones desde enero de 2022 hasta febrero de 2024.
- Se aplicaron diversas técnicas de transformación de datos, como Box-Cox, Yeo-Johnson, adstock, Weibull, log, sqrt, y reciprocidad, asegurando que los datos fueran adecuados para el análisis estadístico y que se mitigaran problemas de sesgo y heterocedasticidad.

## 2. Análisis de Correlaciones

- Se realizaron análisis de correlaciones normales y rezagadas, así como la nueva correlación para identificar relaciones no lineales entre las variables.
- Los diagramas de dispersión se utilizaron para visualizar las relaciones entre las inversiones en marketing y el precio de las acciones, proporcionando una visión clara de las interacciones clave.

## 3. Análisis de Componentes Principales (PCA)

- Se implementó el PCA para reducir la dimensionalidad de los datos y destacar las variables más influyentes en la varianza del precio de las acciones.
- Los primeros componentes principales se interpretaron para identificar patrones y relaciones clave que informaron los modelos predictivos y las estrategias de optimización.

## 4. Modelos Predictivos

- Se aplicaron diversos modelos predictivos, incluyendo regresión lineal, polinómica, spline y sus versiones bayesianas.
- Además, se emplearon modelos avanzados de aprendizaje automático como Random Forest, XG-Boost, Gradient Boosting, redes neuronales y SVM. Los hiperparámetros de estos modelos se optimizaron mediante técnicas bayesianas para minimizar el riesgo de sobreajuste y mejorar la precisión de las predicciones.

## 5. Optimización de Inversiones

- Se utilizaron múltiples técnicas de optimización, incluyendo el modelo de Markowitz, algoritmos genéticos, optimización convexa y recocido simulado, para encontrar la combinación óptima de inversiones en diferentes canales de marketing.
- Estas técnicas permitieron maximizar el retorno esperado y minimizar el riesgo, proporcionando una guía clara para la asignación de presupuestos de marketing de manera eficiente.

**Aplicaciones Comerciales** La metodología desarrollada tiene múltiples aplicaciones comerciales:

- **Optimización del Presupuesto de Marketing:** Las empresas pueden utilizar los resultados para asignar sus presupuestos de marketing de manera más eficiente, enfocándose en los canales que proporcionan el mayor retorno ajustado al riesgo.
- **Reducción de la Volatilidad Financiera:** Al utilizar técnicas avanzadas de optimización, las empresas pueden reducir la volatilidad asociada con sus inversiones en marketing, proporcionando una mayor estabilidad financiera.
- **Toma de Decisiones Informada:** Los insights derivados del análisis de correlaciones y PCA permiten a los directivos tomar decisiones informadas sobre las estrategias de marketing, basadas en datos sólidos y análisis rigurosos.

**Relevancia Teórica** Desde un punto de vista teórico, este estudio contribuye significativamente a la intersección de la investigación en marketing y finanzas al:

- **Incorporar Técnicas Avanzadas de Machine Learning y Optimización:** La aplicación de modelos avanzados y técnicas de optimización proporciona una metodología robusta para el análisis y la optimización de inversiones en marketing.
- **Validación Cruzada de Métodos:** La combinación de múltiples modelos y técnicas de optimización asegura que los resultados sean robustos y fiables, minimizando el riesgo de sobreajuste.

**Aplicaciones en Otras Áreas** La metodología desarrollada en este estudio tiene el potencial de ser aplicada en diversas áreas más allá del marketing, incluyendo:

- **Gestión de Carteras de Inversión:** Las técnicas de optimización y análisis predictivo pueden aplicarse para gestionar carteras de inversión en finanzas, asegurando un equilibrio óptimo entre retorno y riesgo.
- **Optimización de Recursos en Operaciones:** Las técnicas de machine learning y optimización pueden ser utilizadas para optimizar la asignación de recursos en operaciones, mejorando la eficiencia y reduciendo costos.
- **Análisis de Riesgo y Toma de Decisiones:** La metodología puede ser adaptada para el análisis de riesgo en diversas industrias, proporcionando una base sólida para la toma de decisiones estratégicas y operacionales.

En resumen, la metodología implementada no solo aborda de manera efectiva los desafíos específicos del marketing en el sector financiero, sino que también ofrece un marco versátil y aplicable a una amplia gama de problemas en otras disciplinas.

## Bibliografía

- Aarts, E., & Korst, J. (1988). *Simulated Annealing and Boltzmann Machines: A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*. John Wiley & Sons.
- Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (1993). Simulated Annealing. *Statistical Science*, 8(1), 10-15.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182-197.
- Guerreiro, R., Rita, P., & Trigueiros, D. (2016). A Data Mining Approach for the Evaluation of Credit Card Risk in Banks. *International Journal of Information Management*, 36(6), 1201-1217.
- Hanssens, D. M., & Parsons, L. J. (2007). *Quantitative Marketing and Marketing Management*. Cambridge University Press.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598), 671-680.
- Kotler, P., & Keller, K. L. (2016). *Marketing Management*. Pearson.
- Lilien, G. L., & Rangaswamy, A. (2004). *Marketing Engineering: Computer-Assisted Marketing Analysis and Planning*. Prentice Hall.
- Luna Ramírez, S., & Tamayo Jaramillo, M. (2015). Aplicación del Modelo Black-Litterman al Mercado de Renta Variable Colombiano. *Práctica Investigativa 2015-2*, Universidad EAFIT. Recuperado de /mnt/data/aplicacion-modelo-black-litterman-mercado-renta.pdf
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Pauwels, K., & Joshi, A. (2016). *The Handbook of Marketing Analytics: Methods and Applications in Marketing Management, Public Policy, and Litigation Support*. Edward Elgar Publishing.
- Research & Analytics. (2020). Metodología MMM: Accelerator Media Brands. Research & Analytics Colombia. Recuperado de /mnt/data/Metodología MMM-Accelerator Media Brands (2).pdf
- Research & Analytics. (2023). Bayesian MMM Models. Research & Analytics Colombia. Recuperado de /mnt/data/Bayesian MMM Models (2).pdf

Robyn API Documentation. (2023). Recuperado de <https://facebookexperimental.github.io/Robyn/docs/robyn-api/>

Rust, R. T., Ambler, T., Carpenter, G. S., Kumar, V., & Srivastava, R. K. (2004). Measuring Marketing Productivity: Current Knowledge and Future Directions. *Journal of Marketing*, 68(4), 76-89.

Towards Data Science. (2023). A New Coefficient of Correlation. Recuperado de <https://towardsdatascience.com/a-new-coefficient-of-correlation-64ae4f260310>

Towards Data Science. (2023). Why You Should Never Use Cross-Validation. Recuperado de <https://towardsdatascience.com/why-you-should-never-use-cross-validation-4360d42456ac>