

Estimación de la pobreza monetaria para los municipios de Cundinamarca vía estimación en áreas pequeñas.

Estimation of monetary poverty for the municipalities of Cundinamarca via estimation in small areas.

Heyder Fabián Gómez Pinto.^a
heydergomez@usantotomas.edu.co

Andrés Felipe Ortiz Rico.^b
andresortiz@usta.edu.co

Giovanni Andrés Camacho Murillo.^c
andres.camacho@usta.edu.co

Resumen

El cálculo de la *pobreza monetaria* de los territorios es quizá una de las medidas más importantes para el análisis de modelos de desigualdad económica y social. Proponemos un procedimiento estadístico que contribuya para analizar los registros de la *Encuesta Multipropósito (EM)* del año 2017, así como también los registros oficiales, la producción de estadística demográfica que los municipios de Cundinamarca generan y el sector privado dando paso a una estimación de la *pobreza monetaria por municipio*. Para la elaboración del procedimiento se vincula la rama de la ciencia estadística denominada *Estimación en Áreas Pequeñas* (SAE, por sus siglas en inglés) con datos composicionales, que permite obtener estimaciones de *pobreza monetaria* a un mínimo nivel de desagregación geográfica (estimaciones para los 116 municipios de Cundinamarca) mediante un modelo multivariado de Fay-Harriot de estimación de áreas pequeñas con su respectivo *MSE-bootstrap* paramétrico que se alimenta de los datos que provienen de la *EM 2017* y de los registros oficiales de los actores anteriormente mencionados.

Palabras clave: Estimación en áreas pequeñas, pobreza monetaria, desarrollo del territorio, hogares, muestreo, estadísticas oficiales, administración pública, datos composicionales.

Abstract

The calculation of *monetary poverty* of territories is perhaps one of the most important measures for the analysis of economic and social inequality models. We propose a statistical procedure that contributes to analyze the records of *Multipurpose Survey* of 2017 (*La Encuesta Multipropósito*), as well as official records, the production of demographic statistics that the municipalities of Cundinamarca generate and the private sector giving way to an estimation of *monetary poverty by municipality*. For the elaboration of the procedure, the branch of statistics science called *Small Area Estimation* (SAE) with compositional data is linked, which will allow achieving monetary poverty estimates at a minimum level of geographic disaggregation (estimates for the 116 municipalities of Cundinamarca) through a multivariate model Fay-Harriot of small areas estimation with their respective parametric *MSE-bootstrap*, that is fed by the data coming from the *EM 2017*, from the official records (auxiliary information) of the aforementioned actors.

keywords: Estimation in small areas, compositional data, monetary poverty, territory development, households, sampling, official statistics, public administration.

^a Autor, Estudiante Facultad de Estadística USTA

^b Director - Docente Facultad de Estadística USTA

^c Codirector - Docente Facultad de Economía USTA

1. Introducción

El cálculo de la pobreza en Colombia es llevado a cabo por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (*DANE*) según la metodología establecida por Amartya Sen en 1981 [31] y la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL-UN) [9]. Su medición está dada de manera directa e indirecta, de la primera se evalúan los resultados del gozo de los derechos que tiene un individuo respecto a salud, educación, empleo, entre otras y de la medición indirecta, que abordaremos en este documento, evalúa la capacidad que tienen los hogares en adquirir bienes y servicios. La medición de la pobreza indirecta se construye a partir del cálculo del ingreso per cápita corriente que posee el hogar, es decir, los ingresos corrientes disponibles del hogar dividido por el total de integrantes del mismo, a partir del cálculo de la línea de pobreza monetaria calculada por el *DANE* (2018), la cual captura el mínimo estándar de vida que puede ser conseguido por cada persona con su ingreso o consumo [3].

Según la metodología establecida por el *DANE* para el cálculo de la pobreza monetaria, los resultados que esta entidad publica llega a un mínimo nivel de desagregación por área de tipo departamental más las ciudades capitales considerando modelos clásicos univariados con una frecuencia de medición anual. Dado lo anterior, nace la premisa de estudiar el comportamiento que puede tener la medición de la pobreza monetaria para los municipios que se encuentran en el Departamento de Cundinamarca.

A diferencia de los censos, el muestreo estadístico es un medio rentable para obtener información sobre una amplia gama de contenidos de interés. Con esta técnica se pueden llegar a obtener estimaciones de una población completa objeto de estudio, también, se puede llegar a estimar parámetros en una variedad de subpoblaciones denominadas dominios que se derivan de la población completa, generalmente se definen como áreas geográficas o fraccionamientos socioeconómicos. Con la rama de la ciencia estadística denominada *Estimación en Áreas Pequeñas*, se dice que un estimador de un parámetro en un dominio dado es directo si está basado solamente en los datos específicos del dominio [29]. Un estimador directo puede usar también información auxiliar, como por ejemplo el total en el dominio de una variable x relacionada con la variable de interés y . Un estimador directo es típicamente un estimador “basado en el diseño muestral”, pero también puede estar motivado y justificado por modelos [29].

Con el muestreo estadístico obtendremos información para correlacionar estratégicamente la inversión del gasto público, el capital humano y el desarrollo territorial con la pobreza monetaria. Pero, ¿Qué tan eficiente puede ser la información que se obtiene mediante la metodología de estimación en áreas pequeñas al índice de pobreza para cada área municipal observada del departamento de Cundinamarca? y ¿cuáles son las características particulares que arroja el cálculo del índice de pobreza monetaria ajustado por el desarrollo de los territorios dados por las fuentes de financiación y el capital humano?.

Para el desarrollo de las anteriores premisas se vincula entonces el concepto de desarrollo en cuánto a las mejoras que tuvieron los hogares de los municipios de Cundinamarca dada las ejecuciones de los recursos financieros en materia de empleo, infraestructura, vivienda, salud y educación, esto como variables auxiliares al momento del desarrollo del modelo multivariado de cara a estimación de la medida de pobreza monetaria.

Esta investigación se aborda con los datos de la *Encuesta Multipropósito 2017* del *DANE* ya que contempla 37 áreas municipales del Departamento de Cundinamarca, así como también resúmenes generados a partir de herramientas establecidas como el Sistema de Identificación de Potenciales Beneficiarios de Programas Sociales (*SISBEN*) del Departamento Nacional de Planeación (*DNP*) y sus respectivas bases de datos regionales. De igual modo se toman datos relevantes a la estructura económica de los territorios, sin dejar de lado las herramientas convencionales en materia de ordenamiento territorial, lo que permite obtener datos recientes y precisos que conllevan a identificar los flujos de migración poblacional. Lo anterior representa un esfuerzo en la consolidación de información auxiliar de cara a la consecución de indicadores de población debido a que su realización involucra la toma de datos en áreas geográficas pequeñas (municipios).

Con las anteriores fuentes de información mencionadas y sus respectivos registros se ajusta un modelo

de Fay-Herriot (*FH*) multivariado, para datos composicionales e incluyendo las matrices de varianzas y covarianzas por municipio utilizando linealización de Taylor para analizar este compendio de información, el modelo es estudiado y aplicado a Estimación en Áreas Pequeñas (*SAE*). El modelo ajustado se utiliza para estimar las proporciones que enmarca cada uno de los componentes de la *pobreza monetaria* incluyendo personas empleadas, desempleadas, entre otras variables sociodemográficas. La estimación del error cuadrático medio (*MSE*) del predictor basado en el modelo es un tópico importante ya que este está determinado por las variables auxiliares que se lleguen a determinar.

De igual modo, esta investigación presenta la aplicación de una metodología estadística que es nueva en tres aspectos principales, la primera de ella, es el uso nulo dado por las entidades oficiales encargadas del manejo y uso de los datos en cuánto la aplicación del *SAE* (en el contexto del cálculo del índice de pobreza monetaria); por ello, la importancia del estudio presentado. El segundo aspecto es el tratamiento de los datos derivado de la aplicación de la *EM 2017* y de los registros oficiales dándoles el tratamiento de datos composicionales a nivel de área. El último aspecto incluye los estadísticos que se derivan de la aplicación del modelo que se llegue a proponer.

Las conclusiones que se generan al desarrollar este índice de pobreza monetaria ajustado, esta guiada bajo una serie de principios generales que propenden por la visibilización de cifras dadas el desarrollo de los municipios. Se pretende reducir al máximo el error cuadrático medio de las cifras que se estimen.

Entonces la interpretación del cálculo de la pobreza monetaria para los municipios de Cundinamarca esta acorde al uso y la ocupación de los dominios, entendiendo el uso en términos que reflejen la realidad social y económica. Con la metodología estadística de muestreo bajo un enfoque de estimación en áreas pequeñas y datos composicionales, entre algunas otras herramientas, se mostrará la relevancia de cada variable de la *EM 2017* tiene como parte o componente que contribuye y determina el cálculo de la pobreza monetaria por área municipal.

2. Marco teórico

En este capítulo se abordan las metodologías y definiciones que son necesarias para la determinación del índice de la pobreza monetaria y cada uno de los componentes que hacen parte de este como lo son: capital humano, territorio y variables auxiliares asociadas a indicadores que se suelen producir a partir de los registros oficiales y la *encuesta multipropósito 2017*. Con base en lo que se determina en la literatura estadística en cuánto al muestreo en áreas pequeñas (*SAE*) junto con el modelo Fay-Herriot multivariado, para datos composicionales e incluyendo las matrices de varianzas y covarianzas por municipio utilizando linealización de Taylor. Aunque no se toman todos los indicadores existentes, los que se describen en este apartado se utilizan para ilustrar la técnica de estimación en áreas pequeñas con datos composicionales para el propósito de la investigación propuesta.

Según el Banco Mundial [2], la pobreza es una "*privación pronunciada del bienestar*" desde una perspectiva monetaria y no monetaria. Dada la primera, un hogar pobre es aquel donde sus integrantes viven por debajo del umbral de pobreza. Desde la perspectiva no monetaria de la pobreza es un enfoque más amplio del bienestar que se centra en la capacidad del hogar para interactuar en la sociedad. La identificación de la pobreza está asociada a través de variables asociadas al recurso, a los ingresos o gastos [7].

En Colombia la publicación de los resultados de la medición de pobreza monetaria se da para las grandes ciudades capitales y departamentos, tomando como base la medición del ingreso per cápita corriente de la unidad de gasto el hogar; es decir, el ingreso corriente de la unidad de gasto dividido por el total de integrantes de la misma;

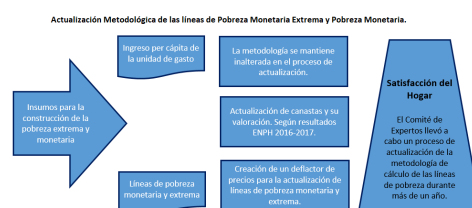


Figura 1: Bases Metodología DANE - Pobreza monetaria 2019.

[12]

y se compara con el costo monetario de adquirir una canasta de alimentos, en el caso de la pobreza monetaria extrema o indigencia, o con el costo monetario de adquirir una canasta de bienes alimentarios y no alimentarios mínimos para la subsistencia, en el caso de la pobreza monetaria [12].

La designación oficial para el cálculo de la pobreza monetaria está a cargo del *Departamento Administrativo Nacional de Estadística* junto de un *Comité de Expertos en Pobreza* que tiene como objetivo principal garantizar la transparencia, comparabilidad y estabilidad metodológica de las mediciones de pobreza [12].

La construcción de las líneas de pobreza se realiza a partir de instrumentos establecidos como la *Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos (ENIG) 2006-2007* y la *Encuesta Nacional de Presupuesto de los Hogares (ENPH) 2016-2017* además de otros instrumentos multipropósito orientados a la medición de indicadores de mercado laboral como lo es la *Encuesta Multipropósito 2017*. Este último provee la información requerida para actualizar constantemente las líneas de pobreza, incorporando los nuevos patrones de consumo de los hogares colombianos [12].

Aunque se aborda la metodología de cálculo de pobreza monetaria propuesta por el *DANE* en 2018 y 2020, se trata la línea de pobreza monetaria establecida en el año 2017 por el manejo de información que se divulga en los diversos portales de información.

Generar el indicador de pobreza monetaria, permite expresar cuantitativamente las características, comportamientos o fenómenos asociados a explicar las privaciones multidimensionales de los hogares residentes en los Municipios de Cundinamarca. Este tipo de indicadores facilitan los procesos de diagnóstico y seguimiento de las políticas públicas, ya que permiten cuantificar los cambios que se presentan en determinados contextos de desarrollo, realizar seguimiento al cumplimiento de acuerdos, compromisos, planes, programas y proyectos y, así, generar alertas tempranas para el logro de los objetivos planteados [14].

Con el uso de las fuentes de información y los instrumentos de recolección de datos mencionados, se aplicará la técnica de muestreo de áreas pequeñas un modelo Fay-Herriot para calcular estimadores directos (EBLUP empírico best linear unbiased predictor) de la pobreza monetaria en los municipios de Cundinamarca.

2.1. Pobreza Monetaria

Uno de los indicadores ampliamente utilizados dadas las políticas públicas es el impacto que estas tienen en la definición y medición de la pobreza. En este sentido, la pobreza monetaria, según el Banco Mundial se puede definir como la privación pronunciada que tiene un hogar como fuente observable y medible en el bienestar [2] dados sus ingresos o consumo para ponerlos en función de unos límites definidos.

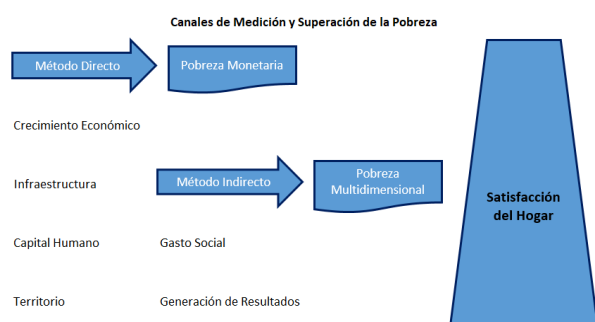


Figura 2: Canales y Medición de la Pobreza.
[13]

Según Haughton y Khandker [19], la unidad de observación principal para el cálculo de la pobreza monetaria es el hogar; que se define como un grupo de personas comiendo y viviendo juntos bajo una misma vivienda y por último un buen conjunto de datos, la mayoría de ellos que permitan obtener las medidas de bienestar que son basados en el gasto de consumo del hogar y el ingreso del hogar.

En Colombia el Departamento Nacional de Planeación [13], para los departamentos elabora 2 indicadores (como se observa en la figura 2) que miden la pobreza. El primero de ellos es la pobreza monetaria o método directo, que mide el porcentaje de la población con ingresos por debajo del mínimo de ingresos mensuales definidos como necesarios para cubrir sus necesidades básicas, que a

la par es el que abordaremos en el presente estudio y un segundo que es la pobreza multidimensional o método indirecto, que mide los hogares con privaciones en dimensiones básicas de bienestar, distintas a la carencia de ingresos.

Siguiendo el enfoque de los ingresos absolutos, el Banco Mundial define la línea de pobreza monetaria mundial basándose en un ingreso de *USD*\$1,90 dólar al día [4] y para el caso Colombia hacia el año 2017, el límite identificado para la pobreza monetaria se definió en un monto de \$250.620 [10]. En este caso, la principal preocupación es la cuantificación de la distribución de los ingresos o, más específicamente, con qué ingresos cuentan los hogares de los municipios del departamento de Cundinamarca que son objeto de estudio en la encuesta multipropósito 2017.

La línea de pobreza monetaria para un hogar (1) z_i , se define como la función $e(\cdot)$ del gasto o consumo mínimo (o ingreso u otra medida acorde a las variables auxiliares que se tengan) necesaria para alcanzar al menos el nivel mínimo de utilidad u_z , dado el nivel de precios (p) y las características demográficas del hogar (x), con esto tenemos:

$$z_i = e(p, x, u_z) \quad (1)$$

Entonces, la pobreza monetaria es el resultado que analiza aquellos factores que impiden a los hogares disfrutar de suficiente bienestar, incluyendo la generación de ingresos necesarios para aumentar el consumo de bienes y servicios [2].

Con la metodología propuesta por el *Departamento Administrativo Nacional de Estadística DANE* (2008-2019) la incidencia de la pobreza monetaria mide el porcentaje de la población que tiene un ingreso per cápita del hogar por debajo de la línea de pobreza según el dominio geográfico. Esta metodología consiste en la construcción del ingreso corriente y en estimar los agregados para cada una de sus fuentes (2). En segundo lugar, se realiza un modelo de imputación para corregir sesgos en la información reportada por la población. En tercer lugar, se obtiene un consolidado del ingreso total a nivel de la Población en Edad de Trabajar (PET), que posteriormente se agrega a nivel de la unidad de gasto. En cuarto lugar, se realiza un ajuste por propiedad de la vivienda para los hogares que son propietarios. Finalmente, se calcula el valor del ingreso per cápita de la unidad de gasto, monto a partir del cual se calcula la incidencia de la pobreza y de la pobreza extrema [12].

Dado lo anterior, la metodología de cálculo está dada por [9]:

$$P_i = Coef_{Ors} \cdot Lpm \quad \text{con} \quad Coef_{Ors} = \frac{(G_{al} + R_{cal})}{G_{al}} \quad (2)$$

Dónde:

P_i = Línea de pobreza monetaria

$Coef_{Ors}$ = Coeficiente de Orshansky que corresponde al cociente entre el gasto total (con la selección de productos para el componente no alimentario) y el gasto en alimentos de la población de referencia.

Lpm = Línea de pobreza monetaria extrema

G_{al} = Gasto en Alimentos del total de personas en el universo o dominio (Aquí total de personas del municipio x)

R_{cal} = Rubros del componente no alimentario del total de personas en el universo o dominio (Aquí total de personas del municipio x)

La incorporación del consumo de bienes no alimentarios se realiza con base en el gasto observado en la población del dominio de referencia con la que se determina la canasta de alimentos (Definida en la Encuesta Multipropósito 2017 en el capítulo M). El gasto en este tipo de bienes se resume en un factor, conocido como *coeficiente de Orshansky*, que expresa la relación entre el gasto total y el gasto en

alimentos observada en ese grupo. Dicho coeficiente se utiliza como un valor de referencia para convertir el costo de la canasta básica de alimentos en la línea de pobreza monetaria [9].

2.1.1. Capital Humano

Según el Banco Mundial, el capital humano comprende la conjunción que tiene un hogar en Cuánto a conocimientos, habilidades y salud que cada integrante acumula a lo largo de su vida y que les permite desarrollar su potencial como miembros productivos de la sociedad. Estos, a su vez, influyen en el desarrollo a nivel regional y nacional reflejando cambios en sus ingresos, salud y por ende en el capital humano [30]. Con el desarrollo del capital humano se fortalecen sociedades más productivas, por lo cual es necesario invertir en las personas y esto es mejorar su nutrición, atención en salud, educación de calidad, empleo y competencias.

El trabajo está sujeto a la mano de obra calificada que incorpora el capital humano. El capital físico y financiero, la educación de una persona, la dotación de habilidades y talentos genera una convergencia espacial de beneficios crecientes en los niveles de vida y su influencia en la pobreza monetaria. Los hogares con educación limitada tienden a estar más sujetos a las fluctuaciones de ingresos y menos capacidades de gestionar el riesgo, por ejemplo, limitaciones al acceso del crédito [2].

Los gobiernos dentro de un área geográfica deben desplegar estrategias para superar los múltiples obstáculos que impiden invertir de manera eficaz en capital humano. Entre las estrategias que contempla el banco Mundial están aquellas que permitan (i) apoyar las iniciativas a través de los distintos ciclos políticos; (ii) coordinar tareas entre las diversas áreas del Gobierno; y (iii) diseñar políticas y programas que utilicen y amplíen la base de evidencias de éxito [5].

Los países que han tenido éxito en atacar la pobreza han adelantado un patrón de crecimiento que hace uso eficiente de la mano de obra y han invertido en el capital humano de los hogares que se encuentran bajo la línea de pobreza monetaria [2], esto siguiendo las estrategias mencionadas. El primer patrón de inversión es garantizar a los hogares oportunidades de trabajo, educación de las personas que trabajan; tenencia de tierras, entre otros, y el segundo consiste en mejorar su bienestar inmediato aumentando su capacidad de tomar ventaja de las nuevas posibilidades creadas como acceso a servicios públicos, la distancia a una carretera pavimentada, vías y equipamientos de los territorios. Entonces, el desarrollo de los territorios ligado con el desarrollo económico para aumentar el capital humano es clave para reducir la pobreza monetaria.

2.2. Encuesta Multipropósito 2017 - Economía - Infraestructura

La encuesta multipropósito fue desarrollada por el DANE en el año 2011 en articulación con otras entidades nacionales. Su primer desarrollo se dio para la ciudad de Bogotá DC con el objetivo de obtener información estadística sobre aspectos sociales, económicos y desarrollo territorial en el cual se desenvuelven los hogares y habitantes de la capital del país. A partir de esto se han implementado varios operativos de captura de información en los años 2014 y 2017, de esta última se tomarán, entre otras fuentes de consulta, los datos insumo para el cálculo de la pobreza monetaria [11].

La *Encuesta Multipropósito 2017* (EM-2017) realizada por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística DANE y el Departamento de Cundinamarca profundizan en aspectos de cobertura, calidad y gasto de los hogares en servicios públicos domiciliarios, mercado laboral y condiciones de vida a nivel de la ciudad. De aquí que se hayan obtenido datos de Bogotá (20 localidades y su área rural) y de 37 Municipios de Cundinamarca (Tabla 1).

Municipio	Número de Hogares Observados	Provincia	Municipio	Número de Hogares Observados	Provincia
Chocontá	879	Almeidas	Sesquilé	935	Almeidas
Girardot	981	Alto Magdalena	Guaduas	801	Bajo Magdalena
Villeta	903	Gualivá	Gachetá	787	Guavio
Guatavita	661	Guavio	La Calera	826	Guavio
San Juan de Río Seco	880	Magdalena Centro	Medina	1082	Medina
Caqueza	640	Oriente	Pacho	830	Rionegro
Cajicá	968	Sabana Centro	Chía	900	Sabana Centro
Cogua	745	Sabana Centro	Cota	810	Sabana Centro
Gachancipá	829	Sabana Centro	Nemocón	750	Sabana Centro
Sopó	924	Sabana Centro	Tabio	826	Sabana Centro
Tenjo	669	Sabana Centro	Tocancipá	845	Sabana Centro
Zipaquirá	978	Sabana Centro	Bojacá	763	Sabana Occidente
El Rosal	895	Sabana Occidente	Facatativá	1039	Sabana Occidente
Funza	1006	Sabana Occidente	Madrid	970	Sabana Occidente
Mosquera	1047	Sabana Occidente	Subachoque	667	Sabana Occidente
Sibaté	955	Soacha	Soacha	1164	Soacha
Fusagasugá	1054	Sumapáz	La Mesa	774	Tequendama
Sutatausa	501	Ubaté	Tausa	243	Ubaté
Villa de San Diego de Ubaté	994	Ubaté			

Tabla 1: Municipios de Cundinamarca en la Encuesta Multipropósito 2017.

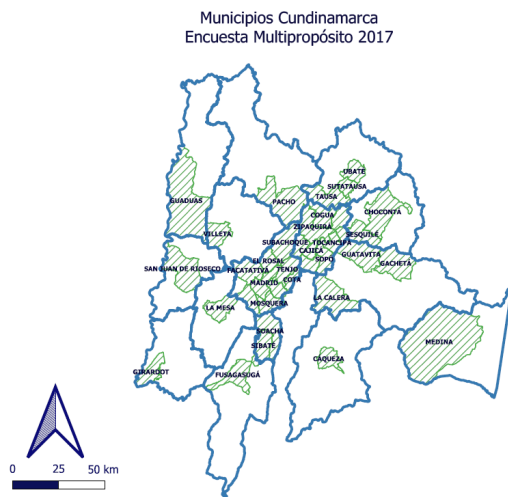


Figura 3: Municipios Cundinamarca - Encuesta Multipropósito 2017.

Los anteriores tamaños de muestra (3)(tabla 1) fueron definidos y determinados en la *Encuesta Multipropósito 2017* (EM-2017) con un Muestreo Aleatorio Simple de elementos, ajustado con base en el efecto de los conglomerados en el diseño (deff), que es una relación para cada estrato de muestreo, entre la varianza real de este diseño de conglomerados y la que se obtendría con un diseño aleatorio simple de elementos [11].

$$n_d = \frac{N_d P_d Q_d deff}{(N_d (ESrel P_d)^2 + P_d Q_d deff)} \quad (3)$$

Dónde:

n_d = Total de personas de la muestra

indicadores a nivel municipio

N_d = Total de personas en el universo o dominio
(total de personas del municipio x)

$Q_d = 1 - P_d$

$ESrel$ = Error estándar relativo

P_d = porcentaje de prevalencia de los principales

$deff$ = Efecto de los conglomerados

Los antecedentes más importantes de la *encuesta multipropósito* son las encuestas de calidad de vida

(1991, 1993, 2003, 2007, 2008, 2010, 2014) en las cuales se alcanzó cobertura para la ciudad de Bogotá, así mismo la encuesta de capacidad de pago (2004) también fue un importante antecedente de la encuesta multipropósito de Bogotá.

El DANE, en la Metodología General de la *Encuesta Multipropósito*, define [11] que la encuesta y la muestra propuesta es bajo un diseño probabilístico (Cada unidad de muestreo tiene una probabilidad de selección conocida y superior a cero), multietápico (En dos etapas, en la primera etapa se usa un muestreo proporcional al tamaño sistemático y en la segunda etapa, un muestreo aleatorio simple de conglomerados), estratificado (En el caso de los municipios de Cundinamarca, cada municipio es un estrato) y de conglomerados (Para el caso de los municipios de Cundinamarca los conglomerados están definidos por segmentos o medidas de tamaño de 10 viviendas (contiguas) en promedio donde se encuestan todas las viviendas, hogares y personas que lo conforman).

De igual modo, la unidad de observación está constituida por los predios, las viviendas, los hogares y las personas (Población civil no institucional residente en los municipios), constituyéndose así en la unidad de análisis de la operación estadística.

La *Encuesta Multipropósito 2017* aborda una diversidad de temas que inciden en las condiciones de vida de las personas (hogares, excluyendo la población que reside en lugares especiales de alojamiento como cárceles, albergues infantiles, hogares geriátricos, conventos, seminarios, cuarteles, guarrniciones o estaciones de policía) que habitan en el Distrito Capital y en 37 (tabla 1) municipios del departamento de Cundinamarca [11], las secciones definidas en el instrumento de captura de información son:

- Capítulo A. denominado *Identificación*, que contempla 12 variables, de las cuales 8 de ellas son discretas y 4 continuas., y contiene información acerca de la geolocalización de los hogares muestreados.
- Capítulo B. *Datos de la vivienda y su entorno* que contiene 51 variables, de ellas 3 son continuas y 48 discretas, relacionando información con el entorno de la vivienda así como las características habitacionales y estructurales de la vivienda.
- Capítulo C. *Condiciones habitacionales del hogar* Aquí se contemplan 137 variables, de ellas 26 son continuas y 111 discretas, en donde hay información referente a la calidad de la vivienda en relación con los espacios y servicios para disposición del hogar los gastos del por el derecho de habitar la vivienda (arriendo, cuotas de administración, etc.) y de igual modo equipamiento del hogar.
- Capítulo D. *Servicios Públicos Domiciliarios y Tecnología*, con 70 variables este capítulo indaga características de dotación, calidad y gasto en servicios públicos domiciliarios y de tic del hogar.
- Capítulo E. *Composición del hogar y demografía* que Contiene 56 variables y su información es de características sociodemográficas de la población en Bogotá y de los municipios de estudio.
- Capítulo. F. *Salud* Este capítulo contiene 113 variables de las cuales 21 son continuas y 92 son discretas y se indaga aquí sobre las condiciones de salud de los miembros del hogar, así como la cobertura según afiliación al sistema de seguridad social en salud por régimen por cada miembro del hogar y los gastos de los hogares por servicios en salud, uso, percepción y calidad.
- Capítulo G. *Atención a menores de 5 años* con un total de 73 variables sobre la asistencia a los establecimientos públicos y privados destinados a la atención integral de los niños y niñas menores de 5 años. De igual modo, gastos de los hogares por cuidado y atención, servicios escolares o subsidios educativos con menores de 5 años. Así como, asistencia a controles de crecimiento y desarrollo y problemas de salud.
- Capítulo H. *Educación*, este capítulo contiene 128 variables que describen las características educativas de la población de 5 años y más, tales como alfabetismo, asistencia escolar, niveles educativos alcanzados, años de educación y sitio de permanencia después de la jornada escolar. Así como los gastos de los hogares en servicios de educación y cobertura de subsidios y créditos educativos de igual modo actividades de esparcimiento y cultura.

- Capítulo I. *Uso de tecnologías de la información*, Son en total 88 variables sobre el acceso y uso de tecnologías de la información y comunicaciones de las personas de 5 años y más.
- Capítulo J. *Participación en organizaciones y redes sociales*, con 61 variables se busca indagar sobre la participación en organizaciones y redes sociales.
- Capítulo K. *Fuerza de trabajo*, con 133 variables se busca verificar la actividad económica de la población, participación de los integrantes del hogar en el mercado laboral, ingresos, horas laboradas, empleo secundario, actividades no remuneradas y otras características.
- Capítulo L. *Percepción sobre el desempeño institucional*, este capítulo contempla 130 variables de las cuales 9 son continuas y 121 discretas sobre la percepción del hogar sobre el estado y la dinámica de sus propias condiciones de vida y capacidades (pobreza subjetiva, suficiencia de ingresos para cubrir gastos, etc.).
- Capítulo M. *Gastos del hogar* que contiene 416 variables de estudio del gasto del hogar (niveles) de acuerdo con los bienes y servicios a los cuales acceden y periodicidad del mismo.

Este instrumento de captura de información brinda información valiosa y suficiente para Bogotá, pero para los municipios de Cundinamarca con las metodologías tradicionales de captura de información representativa no es lo suficientemente significativa inclusive para los que están incluidos en la muestra y en un grado muchísimo menor para aquellos municipios que no fueron incluidos en el estudio. Dado lo anterior acudimos a la estimación de áreas pequeñas con datos composicionales permitiendo estimar el parámetro deseado en una variedad de subpoblaciones denominadas dominios, que para nuestro caso son los municipios.

2.3. Territorio - Administración Pública y Datos Económicos

Con los registros administrativos (variables auxiliares) de los municipios de Cundinamarca aumenta la calidad en cuanto a la precisión de las estimaciones generadas al final y acorde a la introducción, este apartado refleja el compilado de las variables auxiliares tomadas de los diferentes sistemas de información que son el soporte para la generación de los resultados propuestos por el índice, claro esta, que se requiere de buenas variables con un volumen de información considerable que de alguna manera está relacionada con la variable de estudio *y*. Este levantamiento de información busca construir una base de datos para los municipios de Cundinamarca objeto de estudio que cuente con información asociada a las siguientes categorías:

- Situación económica y administrativa del municipio e infraestructura territorial.

Con base en los estudios dados por el *Departamento Nacional de Planeación*, este apartado contempla datos en cuanto a las exigencias legales que en materia de seguimiento y evaluación establecen el marco normativo nacional para evaluar la gestión pública de los municipios, la toma de decisiones en políticas públicas y de asignación y el gasto de recursos con base en los resultados y la problemática local. En particular, la metodología evalúa la gestión municipal en cuatro componentes integrados: i) eficacia, ii) eficiencia, iii) cumplimiento de requisitos legales, y iv) gestión, tal como se evidencia en la figura

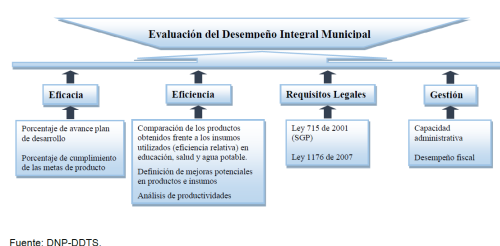


Figura 4: Desempeño Integral Municipal DNP - 2017

- Densidad de población rural y urbana.

Los datos de población y territorio generados por el *Departamento Administrativo Nacional de Estadística DANE* resultado del ejercicio estadístico denominado *series de población* para la vigencia 2017, serán las principales variables auxiliares que se tomarán para esta categoría.

Así como también las siguientes categorías:

- Acceso y permanencia en servicios de educación.
- Acceso y permanencia en servicios de salud.
- Cobertura de servicios públicos.
- Otros factores asociados a empleo y fuentes de alimentación.

En el anexo B del presente documento, se muestran las variables auxiliares asociadas a cada una de las categorías de las que trata la presente sección.

2.4. Estimación en Áreas Pequeñas (SAE)

Las técnicas de estimación en dominios o áreas pequeñas hace referencia a la estimación de cualquier tipo de parámetro (medias, totales, entre otros) de las variables poblacionales para los dominios de interés que tienen un tamaño de muestra relativamente pequeño tomados de un diseño muestral en el que dichas áreas no recibieron una consideración específica. Es decir, un dominio (área) se considera grande (o principal) si la muestra específica del dominio es lo suficientemente grande como para producir "estimaciones directas" de precisión adecuada. Un dominio se considera "pequeño" si la muestra específica del dominio no es lo suficientemente grande para respaldar estimaciones directas de precisión adecuada. Algunos otros términos utilizados para indicar un dominio con un tamaño de muestra pequeño incluyen "área local", "subdominio", "pequeño subgrupo", "subprovincia" y "dominio menor". En algunas aplicaciones, muchos dominios de interés (como los condados) pueden tener un tamaño de muestra cero [29].

En esta documento el dominio definido se vincula a los municipios de Cundinamarca (sin llegar a desagregar al municipio entre área urbana y rural). También se utiliza información auxiliar disponible de los dominios estudiados, las cuales fueron descritas en la sección 2.3. Los métodos para llevar a cabo esta clase de estimaciones están basados en el ajuste de modelos mixtos, que toman en cuenta las variaciones existentes dentro de cada dominio (área pequeña), es ideal para estimar economías que se encuentran en transición y las cuales carecen de información de calidad [29].

El ajuste de este tipo de modelos permite aumentar la información disponible en el dominio definido como *área pequeña*, haciendo uso de información provista por variables auxiliares o por la misma variable analizada en un periodo de tiempo distinto, el efecto esperado dado este aumento de información es la potencial disminución en el error de muestreo y una mejora sustancial en la calidad de las estimaciones de las medias y de los totales de las variables atendiendo el diseño muestral definido por la *Encuesta Multipropósito 2017* [24].

En la siguiente sección se presenta el modelo de Fay - Herriot (1979) como una de las herramientas para la estimación en áreas pequeñas.

2.4.1. Modelo Multivariado Fay - Herriot (FH)

Para el desarrollo multivariado del modelo Fay-Herriot [6]. Sea P una población finita de tamaño N , dividida en D subpoblaciones llamadas áreas pequeñas P_d de tamaños N_d , $d = 1, 2, \dots, D$ y sea $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)'$ el vector aleatorio de interés (con r -ésima observación del área d), cuyos valores en las unidades de población son:

$$y_{dj} = (y_{d1}, y_{d2}, \dots, y_{djr})' \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_d, d = 1, 2, 3, \dots, D \quad (4)$$

Ahora, sea $\mu_d = N_d^{-1} \sum_{j=1}^{N_d} y_{dj}$ denota la media de la variable de interés Y_k para el área $d, k = 1, 2, 3, \dots, r_d$, y el vector de medias para el área d -ésima se denota por $\mu_d = (\mu_{d1}, \mu_{d2}, \dots, \mu_{dr})'$ el cual puede ser estimado utilizando un estimador directo en la forma $\bar{y}_d = (\bar{y}_{d1}, \bar{y}_{d2}, \dots, \bar{y}_{dr})'$, $d = 1, 2, 3, \dots, D$.

El vector de medias de área satisface:

$$\mu_d = (X_d\beta + 1_r u_r), \quad u_r \sim N(0, \sigma_u^2) \quad d = 1, 2, 3, \dots, D \quad (5)$$

Donde, $\sigma_u^2 \in (0, \infty)$ es desconocido y los efectos aleatorios $u_d = (u_{d1}, u_{d2}, \dots, u_{dr})$ son independientes. Ahora se definen los vectores y matrices:

$$y = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_D \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_D \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_D \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_D \end{bmatrix} \quad (6)$$

o de la forma $y = X\beta + Zu + e = X\beta + Z_1u_1 + \dots + Z_Du_D + e$ donde $e, u_{d1}, \dots, u_{dr}$ son independientes con distribuciones $e \sim N(0, \text{diag}_{1 \leq r \leq R}(\sigma_{edr}^2))$ y $u \sim N(0, \text{diag}_{1 \leq r \leq R}(\sigma_{ur}^2))$. Bajo el modelo 6 se tiene que $E(y) = X\beta$ el cual se toma para el desarrollo del cálculo de la *pobreza monetaria* para los municipios de Cundinamarca del año 2017.

Según Morales [17] el mejor predictor lineal insesgado (best linear unbiased predictor, BLUP por sus siglas en inglés) para u y μ_d son los siguientes:

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \text{ donde, } V = \text{diag}(V_1, \dots, V_D), \text{ y } V_d = \sigma_u^2 1_r 1_r' \quad (7)$$

$$\hat{u} = (V_u Z' V^{-1})(y - X\hat{\beta}) \quad (8)$$

$$\hat{\mu} = X\hat{\beta} + Z\hat{u} \quad (9)$$

En la práctica, estas varianzas V son desconocidas y debemos estimarlas. Un Método habitual de estimación es el de máxima verosimilitud restringida o residual (en inglés, restricted/residual ML, REML) el cual consiste en la posibilidad de tomar $V_{ud}^{(0)}$ la matriz de varianza a nivel de dominio de las transformaciones con los datos composicionales descritos en sección 2.5 *ILR* de los estimadores directos de las proporciones de cada categoría; esto es, sustituir $\hat{\theta}$ en V_u , obtenemos $\hat{V}_u = V_u(\theta) + V_e$ y sustituyendo $\hat{V}_u$ en 7, 8 y 9 obtenemos mejor predicción empírica lineal imparcial (empirical best linear unbiased prediction EBLUP):

$$\hat{\beta}_{eblup} = (X'\hat{V}^{-1}X)^{-1}X'\hat{V}^{-1}y \quad (10)$$

$$\hat{u}_{eblup} = (\hat{V}_u Z' \hat{V}^{-1})(y - X\hat{\beta}_{eblup}) \quad (11)$$

$$\hat{\mu}_{eblup} = X\hat{\beta}_{eblup} + Z\hat{u}_{eblup} \quad (12)$$

Ahora bien, consideramos el error cuadrático medio MSE con base en Morales [21] como sigue:

$$MSE(\hat{\mu}) = g_{1i}(\hat{\sigma}_u^2) + g_{2i}(\hat{\sigma}_u^2) + g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2) \quad (13)$$

donde cada componente se puede describir de la siguiente manera:

$$g_{1i}(\hat{\sigma}_u^2) = \Gamma V_e \quad (14)$$

$$g_{2i}(\hat{\sigma}_u^2) = (1 - \Gamma)X(X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T(1 - \Gamma)^T \quad (15)$$

$$g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2) \approx \sum \sum cov(\hat{\sigma}_{uk}^2, \hat{\sigma}_{ul}^2) \Gamma_{(k)} \Omega \Gamma_{(k)}^T, k, l, = 1, 2, \dots, q \quad (16)$$

donde, $\Gamma = Z^T \hat{V} Z$, $\Gamma_{(k)} = \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma_u^2}$, y $cov(\hat{\sigma}_{uk}^2, \hat{\sigma}_{ul}^2)$ es la inversa de la matriz de información de Fisher en la estimación de REML.

2.5. Datos Composicionales

Tradicionalmente, un conjunto de datos se denomina composicional si un total es compuesto de porciones de una variable de interés. Las partes individuales de la composición se denominan componentes. Cada componente tiene una cantidad, que representa su importancia dentro del conjunto. Las cantidades pueden ser medidas como valores absolutos, en valores físicos de tipo de cantidad como dinero, tiempo, volumen, masa, individuos, eventos entre otros [33].

El concepto de *datos composicionales* se impulsó con Aitchison (1986) [1] que propuso un enfoque axiomático para el análisis de datos que se generan como partes de un gran total y comprende una variedad de métodos, operaciones y herramientas basadas en un conjunto de principios fundamentales, como la coherencia composicional, que se basa en que los datos deben estar enmarcados en un marco lógico de estudio.

El total obtenido es el resultado de la suma sobre las cantidades de todos los componentes, entonces los *datos composicionales* se definen como un vector C de componentes positivos $\times = [x_1 \dots x_C]$ resumiendo a una constante κ dada, generalmente establecida igual a 1, es decir, una sumatoria en porcentaje a 100 % [33].

Las transformaciones que se pueden aplicar a los datos composicionales son (en el anexo C se muestra el procedimiento y cálculo de aplicación de las siguientes ecuaciones a el vector de totales por municipio obtenido):

- Transformación logcociente aditiva (alr): Una composición pasa de $x \in S^D$ a $y \in \mathbb{R}^{D-1}$, (resultados anexo C) se define como:

$$y = alr(c) = \left[\frac{x_1}{x_D}, \dots, \ln \frac{x_{D-1}}{x_D} \right] \quad (17)$$

- Transformación logcociente isométrica (ilr): La transformación ilr de una composición se define como (resultados anexo C):

$$x = ilr(c) = [c_1, \dots, c_{D-1}] x \in \mathbb{R}^{D-1} \quad (19)$$

- Transformación logcociente centrada (clr): Una composición pasa de $x \in S^D$ a $z \in \mathbb{R}^D$, (resultados anexo C) y se define como:

$$z = clr(c) = \left[\frac{c_1}{g(c)}, \dots, \ln \frac{c_D}{g(c)} \right] \quad (18)$$

donde,

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{c_i(c_i + 1)}} \ln \left(\frac{\prod_{j=1}^i c_j}{(c_i + 1)^i} \right) \quad (20)$$

Para el cálculo de la pobreza monetaria en el Departamento de Cundinamarca, se considera una composición el vector de totales que contiene los totales que se generan en cada una de las variables de interés descritas al principio de este apartado dado a que la unidad de observación es el *Hogar* y las características sociodemográficas que se generan en los territorios.

Se tomaron los datos de la *Encuesta Multipropósito 2017* cuya frecuencia de realización es cada tres años, en donde se entrevistaron un total de 32.086 hogares de los 37 municipios de Cundinamarca del cual el marco estadístico está constituido por el inventario cartográfico y el listado de viviendas y hogares a nivel de manzana, obtenidos de la información del Censo Nacional de Población y Vivienda de 2005 actualizado al año 2016 y el diseño de la muestra propuesto es un diseño probabilístico, multietápico, estratificado y de conglomerados [11].

Ahondando más en la terminología propia, sea la *Encuesta Multipropósito 2017* una población M (municipios de Cundinamarca) $U = \cup_{d=1}^D M$ particionada en D dominios U_d . Cada dominio se divide en subconjuntos U_{dK} , $K = 1, 2, 3, \dots, d$, los parámetros objetivo son los medios de dominio (proporciones) y los totales de dominio (conteos), es decir, sean N y N_d los tamaños de U y U_d , respectivamente, considere las variables de estudio tomando los valores $z_{dkj} = 1$ si la unidad j del dominio U_d está en la categoría k y $z_{dkj} = 0$ de lo contrario [15]:

$$\bar{Z} = \frac{Z_{dk}}{N_d}, \quad Z = \sum_{j \in U_d} z_{dkj}, \quad d = 1, \dots, D, \quad k = 1, \dots, q. \quad (21)$$

Como $\bar{Z}_{d1} + \dots + \bar{Z}_{dq} = 1$ y $Z_{d1} + \dots + Z_{dq} = N_d$, con N_d conocido, estamos interesados en conocer el estimador de composiciones de los dominios, luego para cualquier muestra $s \subset U$ extraída de la población, s_d denota la submuestra de U_d de tamaño n_d y w_{dj} representa el peso de muestreo de la *Encuesta Multipropósito* de la unidad j de la submuestra s_d las proporciones y los recuentos de muestra son los siguientes [15]:

$$z_{dk} = \frac{z_{dk}}{n_d}, \quad z_{dk}Z = \sum_{j \in s_d} z_{dkj}, \quad d = 1, \dots, D, \quad k = 1, \dots, q. \quad (22)$$

2.5.1. El Simplex

El S^C simplex es un subconjunto $(C-1)$ dimensional del espacio real C -dimensional. Por lo anterior, los datos composicionales generalmente se expresan en términos de la base canónica de $\mathbb{R}^C$, luego cualquier composición $x \in S^C$ se puede escribir de la siguiente manera [25]:

$$S^C = \left\{ X = (X_1, X_2, \dots, X_C) : X_i > 0 (i = 1, 2, \dots, C), \sum_{d=1}^C x_i = k \right\} \quad (23)$$

$$x = x_1 * (1, 0, \dots, 0) + x_2 * (1, 0, \dots, 0) + \dots + x_C * (1, 0, \dots, 0) \quad (24)$$

Debido a que la suma de x_i es 1 y todos los x_i son positivos, la ecuación 24 es una combinación lineal convexa en $\mathbb{R}^C$ [25]. Los datos son multivariados por naturaleza, debido a que el conjunto de datos que se abordan solo puede ser composicional si tiene al menos dos componentes, de lo contrario no se puede abordar como un total predefinido si y solo si por una parte complementaria.

Para el cálculo de la *pobreza monetaria* se toman las variables auxiliares definidas en la sección 2.3 y en la *Encuesta Multipropósito 2017*, algunas de ellas están en totales como lo es la variable 2.3; esta variable define la inversión de un municipio en un sector sin tener presente qué tan grande era el presupuesto total, o cual sería la inversión en otros sectores, eso implica una diferencia sustancial entre los datos de composición y otros conjuntos de datos multivariados [25].

El problema es que el conjunto de vectores $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ no es una base ni un sistema generador en S^C respecto a la estructura del espacio vectorial definido anteriormente; estos vectores ni siquiera pertenecen al simplex. Además, la ecuación 24 no es una combinación lineal en S^C porque ni la suma ni el producto es una operación cerrada en el simplex [25].

Sin embargo, las observaciones generalmente se registran de esta manera con la geometría de Aitchison, se puede obtener un sistema generador de S^C como $\{w_1, w_2, \dots, w_C\}$ con $w_i = C(1, 1, \dots, e, \dots, 1)$ (donde e es el componente i -ésimo) para $i = 1, 2, \dots, C$. de hecho, cualquier vector $x \in S^C$ se puede escribir de la siguiente manera [25]:

$$x = (\ln x_1 \odot w_1) \oplus (\ln x_2 \odot w_2) \oplus \dots \oplus (\ln x_D \odot w_D) \quad (25)$$

La metodología propuesta por Aitchison se basa en la transformación de los datos composicionales al espacio real multivariante. Notemos que el espacio muestral para los cocientes entre las partes es el octante positivo de $\mathbb{R}^{C-1}$, si tomamos los logaritmos de los cocientes, el espacio final es todo $\mathbb{R}^{C-1}$ y por lo tanto resulta más coherente el trabajo con los datos analizados [25].

2.5.2. Bootstrap paramétrico para estimar el MSE

Para lograr estimar el error cuadrático medio MSE del $EBLUP$ $\hat{Y}_d^{EBLUP}$ que proviene de $\bar{Y}_d$, se puede adelantar mediante procedimientos de remuestreo. El procedimiento *Bootstrap* paramétrico para poblaciones finitas, particularizado aquí para la estimación de las medias de las áreas $\bar{Y}_d$, es el siguiente [17] [29] [27]:

- Ajustar el modelo 31 a los datos de la muestra $y_s = (y'_{1s}, \dots, y'_{Ds})'$ y obtener los estimadores de los parámetros del modelo $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_u^2$ y $\hat{\sigma}_e^2$.
- Generar M copias independientes de la variable W_1 con $E[W_1] = 0$ y $E[W_1^2] = 1$. Construya el vector $u^* = (u_1^*, \dots, u_D^*)'$, con $u_d^* = \hat{\sigma}_u W_1$. El vector de medias y la matriz de covarianza de u^* son respectivamente 0_D y $\sum_u = \sigma_u^2 I_D$
- Generar rxZ independientes copias de la variable aleatoria W_2 con $E[W_2] = 0$ y $E[W_2^2] = 1$, independiente de W_1 . Construya $e^* = \sum_e^{1/2} W_2$ con $W_2 = (W'_{21}, \dots, W'_{2D})'$ y $W_{2d} = (W_{2d1}, \dots, W_{2dr})'$ para todo $d = 1, \dots, D$. El vector de media de e es 0_{Dr} y su matriz de covarianza es $\sum_e = \text{diag}[\sum_1, \dots, \sum_D]$
- Construya el modelo *bootstrap* $\bar{y}_d^* = \mu_d^* + e_d^*$ con $d = 1, \dots, D$ con $\mu_d^* = X_d \hat{\beta}_E + 1_r u_{*d}$.
- Para el último paso denotemos por E_* , Var_* , Cov_* y $MCPE_*$ la matriz de esperanza, varianza, covarianza y error suministrada por el modelo *bootstrap* (paso anterior). Bajo el modelo del paso anterior el BLUP μ^* es de la forma:

$$\hat{\mu}^* = \hat{\mu}(\hat{\sigma}_u^2, y^*) = X\hat{\beta} + Z\hat{u}^* \quad (26)$$

donde, $\hat{\beta}^* = \hat{\beta}(\hat{\sigma}_u^2, y^*)$ y $\hat{u}^* = \hat{u}(\hat{\sigma}_u^2, y^*) = (\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_D^*)$ son las versiones *bootstrap* de $\hat{\beta}$ y $\hat{u}$. Luego, $\hat{\sigma}_u^{2*} = \hat{\sigma}_u^{2*}(y^2)$ sea el estimador *bootstrap* de σ_u^2 obtenido del paso anterior. Luego reemplace dicho estimador en 27 obtenemos el bootstrap EBLUP $\hat{\mu}^* = \hat{\mu}(\hat{\sigma}_u^{2*}, y^*) = X\hat{\beta}^* + Z\hat{u}^*$, donde, $\hat{\beta}^* = \hat{\beta}(\hat{\sigma}_u^{2*}, y^*)$ y $\hat{u}^* = \hat{u}(\hat{\sigma}_u^{2*}, y^*) = (\hat{u}_1^*, \dots, \hat{u}_D^*)'$. De la misma manera, el $MCPEM$ de $\hat{u}^*$ está dada por:

$$MCPE_*(\hat{\mu}^*) = E_*[(\hat{\mu}^* - \mu^*)(\hat{\mu}^* - \mu^*)'] \quad (27)$$

El estimador *bootstrap* directo de $MCPE_*(\hat{\mu}^*)$ se aproxima via Monte Carlo.

3. Metodología

En esta sección se describen las variables auxiliares utilizadas en el modelo Fay-Herriot Multivariado referenciado en el modelo 6 y se describe el cálculo de la variable de interés y el diseño que se implementó para generar los resultados del índice de pobreza monetaria para los municipios del departamento de Cundinamarca.

3.1. Variables de Interés del Modelo

Además de las variables auxiliares descritas en la sección 2.3 *Territorio - Administración Pública y Datos Económicos*, se tiene presente la *Encuesta Multipropósito del año 2017* que se mencionó en la sección 2.2. Las variables que se involucran en el diseño son aquellas que contienen información en relación a las posibles fuentes de ingresos que tienen los hogares, es decir, si alguno de sus integrantes cuentan con empleo, o si son independientes o reciben algún tipo de ingreso por una actividad económica, infraestructura, territorio y capital humano.

Las categorías son las siguientes, y las variables por categoría se describen en el anexo A:

- Situación económica del municipio observado.
 - Capital Humano, población rural, variable que se encuentran en unidad de medida *porcentaje* denotando el total de personas que se encuentran en el área rural y centros poblados de los municipios de Cundinamarca.
 - Indicador de desempeño integral, variable que se encuentran en unidad de medida *porcentaje* denotando la dinamica territorial administrativa de efecacia.
- Educación al servicio del capital humano, variable que se encuentran en unidad de medida *porcentaje* denotando el total de personas neto que se vinculan al sistema de educación.
- Acceso y permanencia en servicios de salud, variable que se encuentran en unidad de medida *porcentaje* denotando el total de personas vinculadas al sistema de salud.
- Infraestructura territorial (distancia en kilometros del centro de la capital), medida en kilometros y es resultado de la distancia por carretera vehicular a la ciudad capital a la ciudad capital desde la zona urbana a centro del municipio.
- Cobertura de servicios públicos (Agua), variable que se encuentran en unidad de medida *porcentaje* y denota el total de hogares que cuyenan con el servicio de conexión a acueducto, es tomada con base en información publicada por el *DNP*.

3.2. Resultados

3.2.1. Estimaciones de incidencia de pobreza (LP) y de pobreza extrema (PE) por municipio

Con base en las variables tratadas en la sección 2.2 un primer resultado necesario para la construcción del modelo final (que involucra tambien las variables tratadas en la sección 2.3), se estima a continuación el Porcentaje de hogares bajo líneas de pobreza (*LP*) y de pobreza extrema (*PE*) 2, usando el Estimador de Hajek (Hj, 28) [21] que para la media de un dominio se obtiene como:

$$\hat{Y}_d^{HA} = \frac{\sum_{s_d} w_{dj} Y_{dj}}{\sum_{s_d} w_{dj}} = \frac{\sum_{s_d} w_{dj} Y_{dj}}{\hat{N}_d} \quad (28)$$

Donde w_{dj} corresponde a los factores de expansión originados por el diseño de muestreo, coinciden con el inverso de la probabilidad de inclusión π_{dj} y representan la cantidad de personas en la población, a las cuales representa el individuo medido con Y_{dj} . Usando este estimador, también es posible tener una estimación para el total como $\hat{Y}^{HA} = N_d \hat{Y}_d^{HA}$, el cual sí requiere conocer el tamaño del dominio N_d .

La varianza del estimador [18] [24] bajo su estimación insesgada (bajo el diseño de muestreo) corresponde a:

$$\hat{V}_d(\hat{Y}_d^{HA}) = \frac{1}{\hat{N}_d^2} \sum_{s_d} \sum_{s_j} \left(\frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_{ij}} \right) \left(\frac{Y_{di} - \hat{Y}_d^{HA}}{\pi_i} \right) \left(\frac{Y_{dj} - \hat{Y}_d^{HA}}{\pi_j} \right) \quad (29)$$

Municipio	LP _d ^{Haiek}	MSE LP _d ^{Haiek}	PE(M) _d ^{Haiek}	MSE PE _d ^{Haiek}
Chocontá	0.1990	0.0750	0.0535	0.155
Sesquilé	0.1830	0.0815	0.0608	0.142
Girardot	0.1590	0.1050	0.0385	0.200
Guaduas	0.3170	0.0706	0.116	0.108
Villeta	0.2430	0.0803	0.0859	0.139
Gachetá	0.2960	0.0732	0.111	0.113
Guatavita	0.2160	0.0752	0.0795	0.117
La Calera	0.0983	0.1020	0.0360	0.160
San Juan de Río Seco	0.3880	0.0549	0.153	0.084
Medina	0.5160	0.0422	0.217	0.069
Caqueza	0.2490	0.0714	0.0968	0.109
Pacho	0.3780	0.0732	0.167	0.100
Cajicá	0.1140	0.1030	0.0362	0.177
Chía	0.1010	0.1290	0.0358	0.195
Cogua	0.1640	0.0908	0.0419	0.178
Cota	0.0807	0.1240	0.0350	0.187
Gachancipá	0.2580	0.0775	0.0641	0.140
Nemocón	0.2110	0.0801	0.0704	0.131
Sopó	0.0750	0.1210	0.0314	0.204
Tabio	0.1370	0.1230	0.0501	0.161
Tenjo	0.1000	0.1620	0.0218	0.299
Tocancipá	0.1200	0.1100	0.0334	0.196
Zipaquirá	0.1440	0.1120	0.400	0.183
Bojacá	0.2330	0.0861	0.0588	0.183
El Rosal	0.1840	0.0807	0.0309	0.175
Facatativá	0.1860	0.0893	0.0495	0.186
Funza	0.1660	0.0896	0.0476	0.165
Madrid	0.1310	0.0931	0.0278	0.191
Mosquera	0.1810	0.0854	0.0361	0.167
Subachoque	0.1190	0.1350	0.0316	0.232
Sibaté	0.1660	0.0933	0.0433	0.141
Soacha	0.2840	0.0603	0.0789	0.114
Fusagasugá	0.2240	0.0781	0.0723	0.125
La Mesa	0.1630	0.0920	0.0634	0.144
Sutatausa	0.3800	0.0766	0.124	0.109
Tausa	0.3010	0.1060	0.0854	0.243
Villa de San Diego de Ubaté	0.2170	0.0820	0.0431	0.154

Tabla 2: Resultados Estimados y MSE para la Pobreza (LP) y Pobreza Extrema (Monetaria)(PE) en los Municipios de Cundinamarca con base en la EM 2017.

La figura 5 traza las estimaciones efectuadas dadas la incidencia de la pobreza (derecha) y de la pobreza extrema (monetaria, izquierda), respectivamente de la tabla 2, los colores son más oscuros a medida que se alejan del centro del departamento, es decir se presenta en proporciones menores la incidencia de la pobreza y la pobreza extrema (pobreza monetaria).

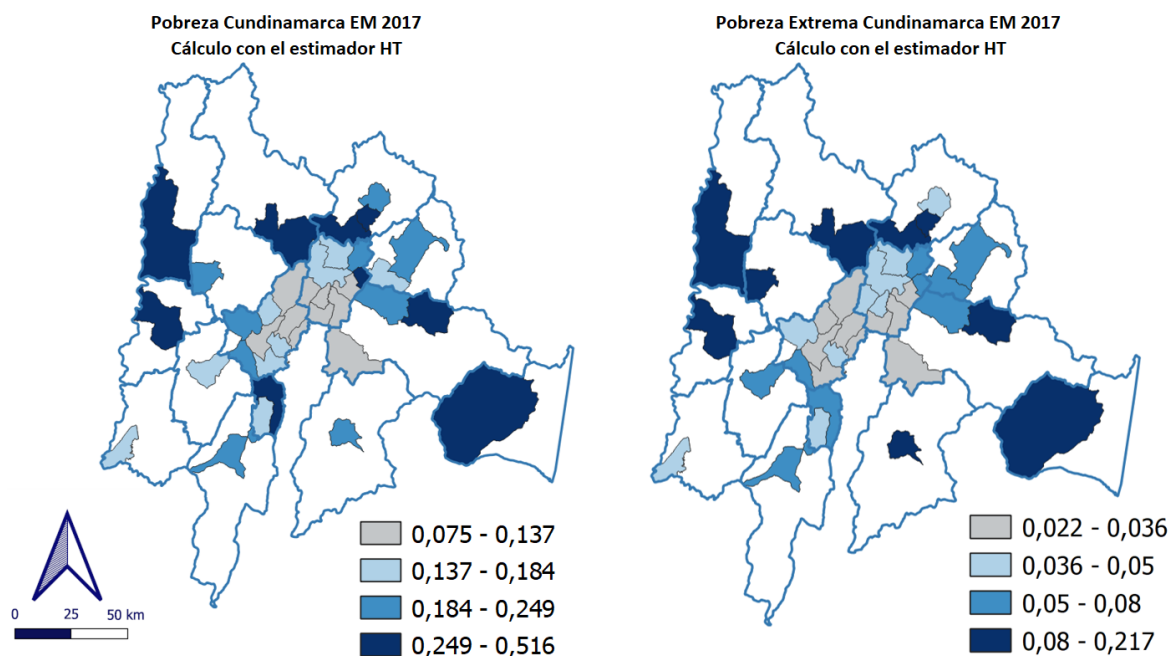


Figura 5: Cálculo con el estimador HT para Pobreza y Pobreza Extrema (Monetaria) en Municipios Cundinamarca - Encuesta Multipropósito 2017.

3.2.2. Estimaciones y transformaciones de los Datos Composicionales; Transformaciones log-cociente

Tradicionalmente se utilizan transformaciones a los totales obtenidos para ampliar el espacio muestral del *simplex* a todos los reales dado a que uno de los primeros resultados que se obtienen sobre la matriz de *varianza - covarianza* de las composiciones es singular y con la transformaciones se tiene un nuevo conjunto de datos que busca corregir una nueva matriz de *varianza - covarianza* que ya no es singular. Una vez mencionada la necesidad de centrar la atención en los cocientes entre las partes, surge la pregunta sobre qué tipo de transformaciones aplicar. Lo más importante de la metodología propuesta por Aitchison (1986) es la transformación de una composición definida sobre S^D en un vector que involucre los cocientes entre las partes y que este definido sobre el espacio real. Si esa transformación es biyectiva se establece una correspondencia uno a uno entre las composiciones del *simplex* y los correspondientes vectores transformados reales. Así, se tiene la posibilidad de resolver cualquier problema que afecte las composiciones usando las técnicas multivariantes habituales en espacios reales.

Para obtener una mejor indicación del comportamiento de los datos composicionales correspondientes a la tabla 2 aplicando lo referido en la sección 2.5 el *simplex*, acudimos al uso de un diagrama ternario 6, que precisamente le apunta a que se pueda lograr establecer agrupaciones de puntos con las mismas propiedades, es decir, nótese como en los municipios (áreas d) tienden a presentarse un patrón de que a medida que aumenta la proporción de la pobreza observada en el área d el punto se mueve desde la base correspondiente hacia el vértice opuesto en este caso la pobreza extrema:

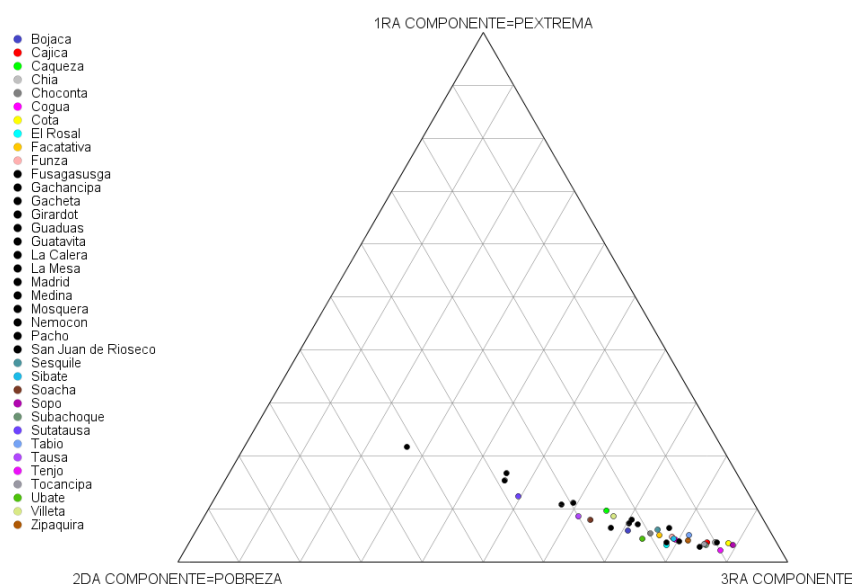


Figura 6: Representación Composicional - Pobreza y Pobreza Extrema - Cundinamarca.

Una pregunta clave para usar las transformaciones de razón logarítmica es elegir el divisor. Inicialmente no se contempló las transformaciones dada la transformación 17 *alr* (logratio aditivo) porque las distancias entre puntos en el espacio transformado no son las mismas para diferentes divisores. Una forma de evitar este problema de elegir un divisor es dividir por la media geométrica, conocida como la transformación *clr* (relación logarítmica centrada) 18, la desventaja de esto es que la matriz de covarianza *clr* es singular, lo que dificulta su uso en algunos procedimientos estadísticos estándar sin adaptación.

Lo anterior sugiere que la mejor escogencia para el tratamiento de las composiciones es la dada por *ilr* (isometric log-ratio) 20 [26], que evita la arbitrariedad de *alr* y la singularidad de *clr*, por lo tanto, *ilr* tiene ventajas conceptuales significativas, el resultado de la escogencia de la transformación *ilr* se pueden evidenciar en el anexo C, y la representación gráfica de las composiciones objeto de las transformaciones *ILR* esta dada en la figura 6.

Usando estas transformaciones, una composición se representa como un vector real, numéricamente, las coordenadas o coeficientes son fáciles de calcular. Tomemos por ejemplo el primer municipio muestreado por la EM 2017 Para la composición de tres partes $x : [0.06, 0.23, 0.71] \in S^3$, las representación se escribe como un vector con dos componentes para las coordenadas *ilr*:

$$\begin{aligned}
 ILR(c) &= ilr[0.06, 0.23, 0.71] \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{0.06}{0.23}\right), \frac{1}{\sqrt{6}} \log\left(\frac{0.06 \cdot 0.23}{0.712}\right) \right] \\
 &= [-1.47, -0.97]
 \end{aligned} \tag{30}$$

Una vez efectuada la transformación de los datos previamente obtenidos, se procede al cálculo de las varianzas y covarianzas a partir de las *ilr* calculadas para cada uno de los municipios y acorde al anexo D, tenemos que para el cálculo de las covarianzas entre las *ilr* obtenidas se obtiene aplicando el procedimiento de linealización de Taylor descrito en la ecuación 54 para cada uno de los dominios y su varianza para cada una de las transformaciones viene de la forma descrita en la ecuación 42 para la ilr_1 y para el ilr_2 de la forma 43.

3.2.3. Modelo Propuesto para el Cálculo de la Pobreza Monetaria en Áreas no Observadas

El modelo de Fay Herriot multivariado 6 permite generalizar la predicción óptima (por medio de eblups, de la sección 2.4.1) de varias características de interés simultáneamente, considera algunas similitudes y diferencias con respecto a su homólogo univariado entre otras [24]:

- Como en el caso univariado, se requiere de un conjunto de estimaciones directas junto con sus varianzas para múltiples características de interés.
- Como en el caso univariado, es posible enlazar variables explicativas para el proceso de predicción.

Dado lo anterior y aplicando los resultados de la transformación ILR del anexo C a la variables composicionales *pobreza* y *pobreza extrema* 2, es la manera como es posible ajustar un modelo multivariado a cada coordenada ilr . Obteniendo el siguiente modelo con su respectiva estimación. El modelo resultante es de la forma:

$$ilr(C) = \begin{bmatrix} \beta_{0,p_o} \\ \beta_{0,p_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{1,p_o} \cdot VariableAxuxiliar_1 \\ \beta_{1,p_e} \cdot VariableAxuxiliar_1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \beta_{g,p_o} \cdot VariableAxuxiliar_n \\ \beta_{g,p_e} \cdot VariableAxuxiliar_n \end{bmatrix} + \epsilon_i \quad (31)$$

Con su respectiva matriz de varianza y covarianza que toma la siguiente forma:

$$Var(ilr(C)) = \begin{bmatrix} Var(ILR_1), Covar(ILR_1, ILR_2) \\ Covar(ILR_1, ILR_2), Var(ILR_2) \end{bmatrix} \quad (32)$$

3.2.4. Procedimiento del cálculo de las inversas de las transformaciones a las componentes

Acorde al resultado preliminar obtenido de los municipios muestreados por la *EM* 2017, se debe obtener las inversas a fin de garantizar los resultados a los municipios de Cundinamarca no muestreados [24].

Partiendo de los resultados de las ecuaciones 53 para la primera componente:

$$C_1 = bC_2 \text{ con } b = e^{\sqrt{2}ILR_2} \quad (33)$$

Acorde al anterior resultado y partiendo de la ecuación cuadrática se compila para la segunda componente:

$$C_2 = \frac{a(b+1)^2 - \sqrt{ab}}{a(b+1)^2 - b} \text{ con } a = e^{\sqrt{6}ILR_1} \quad (34)$$

Por último y para el cálculo de la tercera componente, que es la referente acorde a la pobreza monetaria, su cálculo estaría dado por:

$$C_3 = 1 - C_1 - C_2 \quad (35)$$

3.2.5. Estimaciones de la pobreza monetaria por municipio no muestreado EM

Con base en las variables auxiliares tratadas en la sección 2.3 descritas en el anexo B y como resultado del modelo final de la sección 3.2.3, se estima a continuación el *Porcentaje de hogares bajo líneas de pobreza monetaria* para municipios no muestreados de Cundinamarca y usando el Estimador de Horvitz-Thompson (Hajék 28) [21] con el modelo descrito en la ecuación 31 se obtiene:

Variable	$\beta^{FH-EBLUP}$	std.error
β_{ILR1-0} Intercepto ILR1	38.80400000	0.2063600
β_{ILR1-X_1} % Población Rural	0.00122590	0.0025884
β_{ILR1-X_2} Cobertura Acueducto	-0.00491790	0.0032071
β_{ILR1-X_3} Cobertura Bruta Educación	-0.00259870	0.0017730
β_{ILR1-X_4} Cobertura Salud	-0.39090000	0.2098900
β_{ILR1-X_5} Indicador Desempeño Integral del Municipio	-0.02124000	0.0075022
β_{ILR1-X_6} Distancia Bogotá Kms	0.00546410	0.0016589
β_{ILR2-0} Intercepto ILR2	9.55880000	0.8992500
β_{ILR2-X_1} % Población Rural	0.00338260	0.0011682
β_{ILR2-X_2} Cobertura Acueducto	-0.00343040	0.0013373
β_{ILR2-X_3} Cobertura Bruta Educación	0.00077292	0.00084037
β_{ILR2-X_4} Cobertura Salud	-0.10734000	0.0915600
β_{ILR2-X_5} Indicador Desempeño Integral del Municipio	0.00472430	0.0032417
β_{ILR2-X_6} Distancia Bogotá Kms	0.00026043	0.00068089

Tabla 3: Modelo FH Multivariado - Parámetros estimados.

Aplicando el modelo propuesto (el nivel de significancia de cada parámetro se encuentran en el anexo F), sería de la forma:

$$ilr1_{d1}^{FH-EBLUP} = 38,804 + 0,0012259X_1 - 0,0049179X_2 - 0,0025987X_3 - 0,3909X_4 - 0,02124X_5 + 0,0054641X_6 \quad (36)$$

$$ilr2_{d1}^{FH-EBLUP} = 9,5588 + 0,0033826X_1 - 0,0034304X_2 + 0,00077292X_3 - 0,10734X_4 + 0,0047243X_5 + 0,00026043X_6 \quad (37)$$

Una vez se hacen los respectivos cálculos para los municipios no muestreados de Cundinamarca y aplicando 36 y 37, procedemos a estimar los resultados de la pobreza y pobreza extrema (monetaria) aplicando las inversas referidas en las ecuaciones 33 (pobreza) y 34 (pobreza extrema (monetaria)), estos resultados se ven reflejados en el anexo E y representados en la figura 7.

Del modelo presentado en la tabla 3 se presentan el siguiente análisis:

- Acorde a la variable auxiliar del tipo de poblacional rural, esta incide positivamente en el cálculo de las componentes $ILR1$ y $ILR2$ de pobreza y pobreza extrema (monetaria), luego a mayor población rural en el municipio o dominio de observación en Cundinamarca habrá más pobreza y pobreza extrema (monetaria).
- Es claro que con la propuesta del modelo con intercepto se parte de que no hay ausencia de pobreza y pobreza extrema (monetaria) en los municipios del departamento de Cundinamarca.
- Se evidencia de igual modo una variación positiva que incide en la pobreza y pobreza extrema (monetaria) de distancia de los municipios con respecto al centro de la capital del departamento.
- Un contrapeso en el cálculo de la pobreza y pobreza extrema (monetaria) esta relacionado con las variables asociadas a la cobertura de acueducto, cobertura bruta en educación, cobertura en salud e inversión municipal, esto para la $ILR1$, es decir, se presentaran índices mas bajos a medida que hay mejores coberturas de educación, salud y servicios públicos.
- Dada la $ILR2$ el contrapeso en el cálculo de la pobreza y pobreza extrema (monetaria) esta relacionado con las variables asociadas a la cobertura de acueducto y cobertura bruta en salud, para las variables asociadas a la cobertura en educación e inversión municipal inciden positivamente, es decir, acorde al numeral anterior $ILR1$ se presentaran índices mas bajos a medida que hay mejores coberturas de educación, salud y servicios públicos.

- Por último y acorde a la variable auxiliar del desempeño institucional de los territorios esta relacionada en relación a la eficiencia administrativa de las administraciones, es decir, una mejor y eficiente inversión en el territorio disminuye la pobreza y pobreza extrema (monetaria) en los municipios del departamento de Cundinamarca.

El desglose de cada una de las estimaciones de los municipios de Cundinamarca no muestreados en la EM 2017 se encuentran descritas en el anexo E. La figura 7 traza las estimaciones efectuadas dadas la incidencia de la pobreza (derecha) y de la pobreza extrema (monetaria, izquierda), respectivamente de la tabla 3, los colores son más oscuros a medida que se alejan del centro del departamento, esto como referencia a una de las variables seleccionadas denominada *distancia en km de Bogotá*, es decir se presenta en proporciones mayores la incidencia de la pobreza y la pobreza extrema (monetaria) a medida que es más distante el área *d* observada.

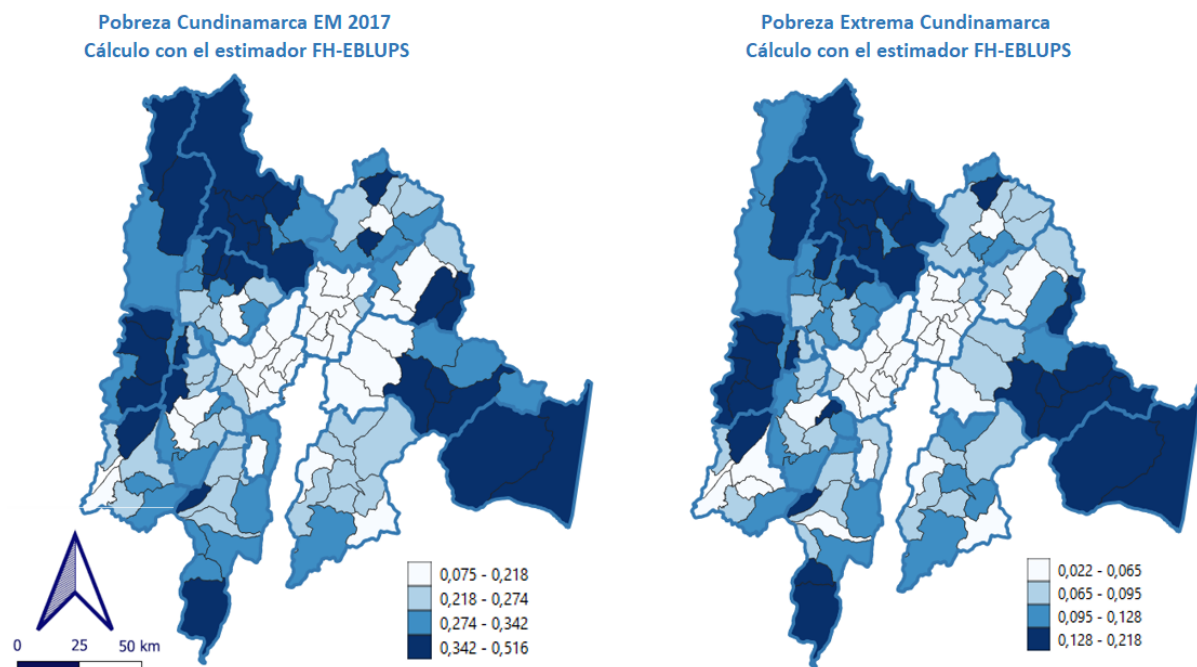


Figura 7: Cálculo con el estimador FH-EBLUP para Pobreza y Pobreza Extrema (Monetaria) en Municipios Cundinamarca No Muestreados por la Encuesta Multipropósito 2017.

3.2.6. Resultados Bootstrap paramétrico para estimar el MSE

Con la ayuda de la herramienta computacional *R*, se proponen el siguiente comparativo entre los siguientes *MSE* para los *ILR* calculados en cada una de las áreas muestreadas de la encuesta multipropósito 2017, en la columna *MCPE* son los definidos mediante el modelo propuesto 3.2.5 tratado con la información auxiliar y los *MSE* son los propuestos con la información disponible de la EM 2017:

Área Observada	MCPE PE	MCPE LP	MSE Directo PE	MSE Directo LP
Bojacá	0.01045	0.06780	0.183	0.0861
Cajicá	0.01020	0.06242	0.177	0.1030
Caqueza	0.00545	0.03765	0.109	0.0714
Chía	0.01368	0.07118	0.195	0.1290
Chocontá	0.00740	0.05450	0.155	0.0750
Cogua	0.00950	0.06020	0.178	0.0908
Cota	0.01346	0.10690	0.187	0.1240

Área Observada	MCPE PE	MCPE LP	MSE Directo PE	MSE Directo LP
El Rosal	0.00867	0.05651	0.175	0.0807
Facatativá	0.01041	0.06397	0.186	0.0893
Funza	0.00886	0.05715	0.165	0.0896
Fusagasugá	0.00644	0.04337	0.125	0.0781
Gachancipá	0.00710	0.05088	0.140	0.0775
Gachetá	0.00590	0.03810	0.113	0.0732
Girardot	0.01274	0.08515	0.200	0.1050
Guaduas	0.00585	0.04024	0.116	0.0706
Guatavita	0.00575	0.04202	0.117	0.0752
La Calera	0.00919	0.05786	0.160	0.1020
La Mesa	0.00787	0.05120	0.144	0.0920
Madrid	0.01032	0.06456	0.191	0.0931
Medina	0.00287	0.01863	0.069	0.0422
Mosquera	0.00876	0.05952	0.167	0.0854
Nemocón	0.00665	0.04666	0.131	0.0801
Pacho	0.00601	0.03682	0.100	0.0732
San Juan de Río Seco	0.00411	0.02583	0.084	0.0549
Sesquile	0.00718	0.05297	0.142	0.0815
Sibaté	0.00769	0.05040	0.141	0.0933
Soacha	0.00501	0.04045	0.114	0.0603
Sopó	0.01354	0.07359	0.204	0.1210
Subachoque	0.01704	0.08515	0.232	0.1350
Sutatausa	0.00589	0.04076	0.109	0.0766
Tabio	0.01104	0.06154	0.161	0.1230
Tausa	0.01597	0.08380	0.243	0.1060
Tenjo	0.02470	0.10893	0.299	0.1620
Tocancipá	0.01221	0.06947	0.196	0.1100
Ubaté	0.00832	0.06642	0.154	0.0820
Villeta	0.00715	0.04731	0.139	0.0803
Zipaquirá	0.01156	0.06622	0.183	0.1120

Tabla 4: COMPARATIVO CVE POBREZA (LP) Y POBREZA EXTREMA (PE) GENERADO DEL MODELO BOOTSTRAP Y ESTIMACIÓN DIRECTA - Áreas Muestreadas EM.

En la tabla 4 se muestran las estimaciones basadas en el diseño de los errores cuadráticos medios MSE de los estimadores directos D y las estimaciones *bootstrap paramétricas* de los MSE de el modelo FH-Multivariado. Se evidencia de igual modo que acorde a los resultados puestos en la tabla 4 muestra que los predictores acorde a los datos composicionales tienen los mejores resultados en términos de MSE que los estimadores directos.

Acorde a las variables auxiliares que se escogieron, las cifras propuestas resultan significativas dado a que en principio en el análisis hecho no sólo se hace a nivel de ingresos, sino a nivel de salud, educación, movilidad y economía territorial.

4. Conclusiones

En este apartado presentamos como producto de la investigación aplicada los resultados obtenidos de la *pobreza monetaria* en los municipios del Departamento de Cundinamarca para la vigencia 2017 con el análisis de datos composicionales a través de la metodología de áreas pequeñas, se presentan una serie de conclusiones y limitaciones así como la propuesta de trabajo sobre la presente temática:

- Se espera que esta investigación contribuya significativamente al modelado multivariado del área de nivel de estimación en áreas pequeñas. Adicionalmente, se prevé que los gobiernos regionales utilicen

la información sobre la pobreza monetaria de los municipios de Cundinamarca que resulta de la estimación mediante el enfoque Multivariado EBLUP-FH para diseñar e implementar programas relacionados con el bienestar y la pobreza.

- El presente trabajo de grado tuvo como objetivo principal mostrar que a través de las herramientas y técnicas adecuadas el análisis de datos composicionales y de áreas pequeñas, es posible ajustar un modelo multivariado que logra explicar bajo ciertas variables auxiliares que representan la realidad social y económica de Cundinamarca, los resultados de la *pobreza monetaria* para el año 2017 el cual se ajustó a los resultados mostrados en cada la sección descrita para tal fin.
- Con la propuesta de modelo que se implementa se comprueba que el uso de las metodologías mencionadas para los datos composicionales y el estudio de áreas no muestreadas, garantizan una eficiente representación de los resultados asociados con la *pobreza monetaria* de los municipios de Cundinamarca para el año 2017, lo anterior se ilustra en la réplica de los resultados a nivel máximo de municipio según se mostraban en la sección de resultados. La trascendencia de este modelo radica en el hecho de tener en cuenta la información auxiliar de los territorios dentro de varias variables auxiliares.
- A raíz de las transformaciones aplicadas a los datos, en especial con la transformación *ILR* los datos no son difíciles de interpretar y los coeficientes estimados del modelo no carecen de interpretación tal como se describe en la sección 3.2.5.
- Los resultados resultan ser representativos pero hay que manejarlos con extrema precaución dado que la recolección de la información base tomada de la *Encuesta Multipropósito 2017* se toma en las áreas urbanas de los municipios muestreados, careciendo de datos rurales.
- Resulta un reto interesante de mostrar la caracterización de las variables auxiliares propuestas en cada uno de los municipios de Cundinamarca objeto del cálculo de la *pobreza monetaria* para el año 2017.
- Como objeto futuro a las discusiones en temas de modelos económicos, resultaría un nuevo trabajo que consistirá en presentar la lógica pertinente a las cifras presentadas de la *pobreza monetaria* los municipios de Cundinamarca para el año 2017.
- Las limitaciones computacionales derivadas del manejo de la programación en cuanto al cálculo del error cuadrático medio puede llegar a ser objeto de mejora en otro contexto de investigación en el cálculo del índice propuesto.

Referencias

- [1] AITCHISON, J. The statistical analysis of compositional data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* (1982).
- [2] BANK, W. *World development report 2000-2001: attacking poverty*. World Bank Group, 2000.
- [3] BANK, W. *World development report 2005: Introduction to poverty analysis*. Oxford University Press, Inc, 2005.
- [4] BANK, W. *World development report 2011: Poverty*. Oxford University Press, Inc, 2011.
- [5] BANK, W. *Human Capital Project : How Countries Nurture Human Capital - Policies and Programs that Use and Expand the Evidence Base*. World Bank Publications, 2019.
- [6] BENAVENT, R., AND MORALES, D. Multivariate fay-herriot models for small area estimation. *Computational Statistics & Data Analysis* 94 (2016), 372–390.

- [7] CAMACHO MURILLO, G. A. *Tourism demand: understanding its determinants and contribution to poverty reduction in Colombia: a thesis presented in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in Economics at Massey University, Palmerston North, New Zealand*. PhD thesis, Massey University, 2019.
- [8] CASTAÑEDA, J., TÉLLEZ, C., AND FÚQUENE, J. Una alternativa para la estimación del ingreso promedio mediante métodos de estimación en áreas pequeñas an alternative for the average income estimation using small area methods. *arXiv preprint arXiv:1907.05387* (2019).
- [9] CEPAL, U. *Medición de la pobreza por ingresos: actualización metodológica y resultados*. CEPAL, 2018.
- [10] DE ESTADÍSTICA DANE, D. A. N. *Boletín Técnico Pobreza Monetaria en Colombia Año 2017*. DANE, 2017.
- [11] DE ESTADÍSTICA DANE, D. A. N. *Metodología General Encuesta Multipropósito Año 2017*. DANE, 2017.
- [12] DE ESTADÍSTICA DANE, D. A. N. *Boletín Técnico Pobreza Monetaria en Colombia Año 2019*. DANE, 2019.
- [13] DE PLANEACIÓN DNP, D. N. *Panorámica Regional. Pobreza monetaria y multidimensional departamental: necesidad de políticas públicas diferenciadas*. DNP Publications, 2017.
- [14] DE PLANEACIÓN DNP, D. N. *Guía para la construcción y análisis de indicadores*. DNP, 2018.
- [15] ESTEBAN, M. D., LOMBARDÍA, M. J., LÓPEZ-VIZCAÍNO, E., MORALES, D., AND PÉREZ, A. Small area estimation of proportions under area-level compositional mixed models. *TEST* (2019), 1–26.
- [16] FAY III, R. E., AND HERRIOT, R. A. Estimates of income for small places: an application of james-stein procedures to census data. *Journal of the American Statistical Association* 74, 366a (1979), 269–277.
- [17] GONZÁLEZ-MANTEIGA, W., LOMBARDÍA, M. J., MOLINA, I., MORALES, D., AND SANTAMARÍA, L. Analytic and bootstrap approximations of prediction errors under a multivariate fay–herriot model. *Computational Statistics & Data Analysis* 52, 12 (2008), 5242–5252.
- [18] GUTIÉRREZ, H. A. Estrategias de muestreo. *Diseno de encuestas y estimación de parámetros*, Universidad Santo Tomás (2009).
- [19] HAUGHTON, J., AND KHANDKER, S. Handbook on poverty and inequality, 2009. *Washington, DC: World Bank* (2009).
- [20] MOLINA, I. Desagregación de datos en encuesta de hogares: Metodologías de estimación en áreas pequeñas.
- [21] MORALES, D., ESTEBAN, M. D., PÉREZ, A., AND HOBZA, T. A course on small area estimation and mixed models. *Methods, theory and applications in R* (2021).
- [22] MORALES, D., AND MOLINA, I. Estimación en áreas pequeñas: Métodos basados en modelos. *Unpublished manuscript, UMH Elche, Spain* (2006).
- [23] MORALES GONZÁLEZ, D. Estimación en áreas pequeñas: Métodos basados en modelos. *Universidad Miguel Hernández de Elche* (2015).
- [24] ORTIZ, A. F. Notas de clase del curso estimación en Áreas pequeñas sae. *Universidad Santo Tomás* (2021).
- [25] PAWLOWSKY-GLAHN, V., AND BUCCIANI, A. *Compositional data analysis*. Wiley Online Library, 2011.

- [26] PAWLOWSKY-GLAHN, V., AND EGOZCUE, J. J. Compositional data and their analysis: an introduction. *Geological Society, London, Special Publications 264*, 1 (2006), 1–10.
- [27] PERMATASARI, NOVIA Y UBADILLAH, A. msae: un paquete r de modelos multivariados de fayherriot para la estimación de áreas pequeñas. *R J.* 13, 2 (2021), 28.
- [28] PRATESI, M. *Analysis of poverty data by small area estimation*. John Wiley & Sons, 2016.
- [29] RAO, J., AND MOLINA, I. *Small area estimation*. Wiley Series in Survey Methodology, 2015.
- [30] SCOTT, A. J. World development report 2009: reshaping economic geography, 2009.
- [31] SEN, A. Public action and the quality of life in developing countries. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 43, 4 (1981), 287–319.
- [32] SHANMUGAM, R. Applied compositional data analysis: with worked examples in r: by peter filzmoser, karel hron, and matthias templ, springer verlag press, nature switzerland ag, 2018, pp. 280+xvii, isbn: 978-3-319-96420-1 (hardback), 2019.
- [33] VAN DEN BOOGAART, K. G., AND TOLOSANA-DELGADO, R. *Analyzing compositional data with R*, vol. 122. Springer, 2013.

Anexos

A. Variables - Encuesta Multipropósito

Tomamos de la *Encuesta Multipropósito del año 2017* que se mencionó en la sección 2.1.2. Las siguientes variables acorde a los capítulos:

- Situación económica del municipio observado.
 - Capital Humano y población rural y urbana.
 - Capt. A; V3981: Llave número único identificador de vivienda.
 - Capt. A; V3986: Divipola Departamento - municipio.
 - Capt. A; V3987: Clase 1 Cabecera, 2 Centros poblados, 3 Área rural dispersa.
 - Capt. E; V3334 NPCEP4, ¿Cuántos años cumplidos tiene ... ?.
 - Capt. E; V3335 NPCEP5, Sexo, 1 Hombre, 2 Mujer, 3 Intersexual.
 - Infraestructura económica y empresarial.
 - Capt. C; V2580 NHCCP1, La vivienda ocupada por este hogar es: 1 Propia, totalmente pagada, 2 Propia, la están pagando, 3 En arriendo, subarriendo o leasing, 4 En usufructo, 5 Otra forma de tenencia (posesión sin título, ocupante de hecho, propiedad colectiva, etc.).
 - Capt. C; V2620 NHCCPCTRL2, ¿Cuántas personas componen este hogar?
 - Capt. L; V2810 NHCLP7AA, Entre el año 2014 y el momento actual ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes equipamientos?, Vías y puentes vehiculares, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 8 No aplica, 9 No sabe.
 - Capt. L; V2821 NHCLP7AM, Entre el año 2014 y el momento actual ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes equipamientos? Zonas comerciales, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 8 No aplica, 9 No sabe.
- Educación al servicio del capital humano.
 - Capt. H; V3576 NPCHP1, ¿... sabe leer y escribir? discrete numeric 1. ¿... sabe leer y escribir? 1 Si, 2 No.
 - Capt. H; V3579 NPCHP4, ¿Cuál es el nivel educativo más alto alcanzado por ... y el último año o grado aprobado en este nivel? 1 Ninguno, 2 Preescolar, 3 Básica primaria (1° - 5°), 4 Básica secundaria (6° - 9°), 5 Media (10° - 13°), 6 Técnico, 7 Tecnológico, 8 Universitaria incompleta (sin título), 9 Universitaria completa (con título), 10 Especialización incompleta (sin título), 11 Especialización completa (con título), 12 Maestría incompleta (sin título), 13 Maestría completa (con título), 14 Doctorado incompleto (sin título), 15 Doctorado completo (con título).
 - Capt. L; V2816 NHCLP7AF, Entre el año 2014 y el momento actual ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes equipamientos?, Colegios, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 8 No aplica, 9 No sabe.
 - Capt. L; V2843 NHCLPA8D, Entre el año 2014 y el momento actual, ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes aspectos?, Educación pública, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 9 No sabe.
- Acceso y permanencia en servicios de salud.

- Capt. L; V2815 NHCLP7A6, Entre el año 2014 y el momento actual ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes equipamientos?, Hospitales y centros de salud, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 8 No aplica, 9 No sabe.
 - Capt. F; V3390 NPCFP1, ¿... está afiliado(a) (cotizante o beneficiario(a)) a alguna entidad de seguridad social en salud?, 1 Si, 2 No, 3 No sabe, no informa.
 - Capt. F; V3400 NPCFP8, En general, considera que la calidad del servicio de la entidad de seguridad social en salud a la que ... está afiliado(a) es: 1 Muy buena, 2 Buena, 3 Regular, 4 Mala, 5 Muy mala, 9 No sabe, no informa.
- Infraestructura territorial.
- Capt. B; V2529 NVCBP1, La vía de acceso a la edificación es: 1 Sendero o camino en tierra, 2 Peatonal construida, 3 Vehicular destapada, 4 Vehicular pavimentada.
 - Capt. B; V2547 NVCBP10, Tipo de vivienda: 1 Casa, 2 Apartamento, 3 Cuarto (s), 4 Otro tipo de vivienda (carpa, tienda, vagón, embarcación, refugio natural, etc.).
 - Capt. C; V2636 NHCCP26, ¿Qué energía o combustible utilizan principalmente para cocinar? 1 Electricidad, 2 Gas natural conectado a red pública, 3 Gas propano (en cilindro o pipeta), 4 Petróleo, gasolina, kerosene, alcohol, cocinol, 5 Carbón mineral, 6 Carbón de leña, 7 Leña, madera, 8 Material de desecho.
 - Capt. C; V2638 NHCCP27, El agua para preparar los alimentos (o beber) la obtienen principalmente de 1 Acueducto público, 2 Acueducto comunal o veredal, 3 Pozo con bomba, 4 Pozo sin bomba, jagüey, 5 Agua lluvia, 6 Río, quebrada, manantial o nacimiento, 7 Pila pública, aguatero, 8 Carro tanque, 9 Agua embotellada o en bolsa.
- Cobertura de servicios públicos (Agua, energía eléctrica, combustibles).
- Capt. B; V2548 NVCBP11A, ¿Con cuáles de los siguientes servicios públicos, privados o comunales cuenta la vivienda?: Energía eléctrica 1 Si, 2 No.
 - Capt. B; V2550 NVCBP11B, ¿Con cuáles de los siguientes servicios públicos, privados o comunales cuenta la vivienda?: Acueducto 1 Si, 2 No.
 - Capt. B; V2552 NVCBP11D, ¿Con cuáles de los siguientes servicios públicos, privados o comunales cuenta la vivienda?: Recolección de basuras 1 Si, 2 No.
 - Capt. B; V2555 NVCBP13, ¿Cuál es el material predominante de los pisos?: 1 Alfombra o tapete de pared a pared, 2 Madera pulida y lacada, parqué, 3 Mármol, 4 Baldosa, vinilo, tableta, ladrillo, laminado o flotante 5 Madera burda, tabla o tablón, otro vegetal, 6 Cemento, gravilla, 7 Tierra, arena.
 - Capt. L; V2818 NHCLP7AH, Entre el año 2014 y el momento actual ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes equipamientos?, Ampliación de redes de acueducto, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 8 No aplica, 9 No sabe.
 - Capt. L; V2819 NHCLP7AK, Entre el año 2014 y el momento actual ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes equipamientos?, Ampliación de redes de alcantarillado, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 8 No aplica, 9 No sabe.
 - Capt. L; V2827 NHCLP7AAF, ¿Cómo considera la condición de los siguientes equipamientos en su centro poblado o vereda?, Ampliación de redes de acueducto, 1 Muy buena, 2 Buena, 3 Mala, 4 Muy mala 8 No aplica, 9 No sabe.
 - Capt. L; V2845 NHCLPA8F, Entre el año 2014 y el momento actual, ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes aspectos?, Programas de alimentación y nutrición, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 9 No sabe.

- Capt. L; V2866 NHCLPA9A, Entre el año 2014 y el momento actual ¿cree que el municipio ha mejorado, empeorado o se mantiene igual, en cada uno de los siguientes aspectos ambientales?, Calidad del agua, 1 Mejor, 2 Igual, 3 Peor, 9 No sabe.
- Factores asociados a ingresos, desempleo y gastos.
 - Capt. C; V2581 NHCCP2, ¿Cuál es el valor MENSUAL de la cuota de vivienda?.
 - Capt. C; V2603 NHCCP10, ¿Cuánto paga MENSUALMENTE por el arriendo o leasing de esta vivienda?.
 - Capt. C; V2637 NHCCP26A, ¿Cuánto pagaron EL MES PASADO en combustible para cocinar?.
 - Capt. D; V2718 NHCDP2, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio de acueducto?.
 - Capt. D; V2722 NHCDP4, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio de alcantarillado?.
 - Capt. D; V2726 NHCDP6, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio de recolección de basuras?.
 - Capt. D; V2735 NHCDP11, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio de energía eléctrica?.
 - Capt. D; V2748 NHCDP18, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio de gas natural?.
 - Capt. D; V2756 NHCDP23, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio telefónico fijo?.
 - Capt. D; V2769 NHCDP29, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio de internet?.
 - Capt. D; V2779 NHCDP32, ¿Cuánto pagó este hogar la ÚLTIMA VEZ por el servicio de televisión?.
 - Capt. M1; V2918 NHCMP2A, ¿Cuánto gastó el hogar en total, en alimentos o bebidas no alcohólicas en los últimos 7 días?.
 - Capt. M1; V2920 NHCMP2B, ¿Cuánto gastó el hogar en total, en alimentos o bebidas no alcohólicas en el último mercado semanal?.
 - Capt. M1; V2922 NHCMP2C, ¿Cuánto gastó el hogar en total, en alimentos o bebidas no alcohólicas en el último mercado quincenal?.
 - Capt. M1; V2924 NHCMP2D, ¿Cuánto gastó el hogar en total, en alimentos o bebidas no alcohólicas en el último mercado que hace cada 20 días?.
 - Capt. M1; V2926 NHCMP2E, ¿Cuánto gastó el hogar en total, en alimentos o bebidas no alcohólicas en el último mercado mensual?.
 - Capt. M1; V2929 NHCMP2F, ¿Cuánto gastó el hogar en total, en alimentos o bebidas no alcohólicas en ese último mercado?.
 - Capt. M1; V2940 NHCMP5BA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Pasajes en transmilenio, bus, buseta, colectivo, taxi, pasajes intermunicipales, transporte especial (no incluya el pago que se hace por el servicio de transporte escolar) durante los ÚLTIMOS 7 DÍAS?.
 - Capt. M1; V2946 NHCMP5EA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Comidas consumidas fuera del hogar durante los ÚLTIMOS 7 DÍAS?.

- Capt. M1; V2995 NHCMP7AA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Artículos para el aseo del hogar como jabones, detergentes, desinfectantes, ceras, servilletas, etc durante el PASADO MES?.
- Capt. M1; V2997 NHCMP7BA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Artículos para el aseo personal como cremas dentales, jabones, champú, papel higiénico, desodorantes, etc durante el PASADO MES?.
- Capt. M1; V2999 NHCMP7DA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Lavado y planchado de ropa fuera del hogar durante el PASADO MES?.
- Capt. M1; V3001 NHCMP7EA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Corte de pelo, manicure, otros durante el PASADO MES?.
- Capt. M1; V3003 NHCMP7FA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Dinero enviado a otras personas u hogares durante el PASADO MES?.
- Capt. M1; V3005 NHCMP7GA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Diversiones y entretenimiento (espectáculos, discotecas, deporte, etc.) durante el PASADO MES?.
- Capt. M1; V3007 NHCMP7HA, ¿Cuál fue el valor total gastado en Servicio doméstico interno y por días durante el PASADO MES?.
- Capt. F; V3398 NPCFP5, ¿Cuánto paga o cuánto le descuentan MENSUALMENTE a ... para estar cubierto(a) por una entidad de seguridad social en salud?
- Capt. G; V3512 NPCGP7A, Durante ESTE AÑO escolar, ¿el hogar pagó matrícula para menores de edad es?
- Capt. G; V3514 NPCGP8A, Durante ESTE AÑO escolar, ¿el hogar pagó uniformes para ... ? 1 Si Valor.
- Capt. G; V3516 NPCGP9A, Durante ESTE AÑO escolar, ¿el hogar pagó libros, útiles escolares y elementos de aseo para ... ? 1 Si Valor.
- Capt. G; V3518 NPCGP10A, ¿Este hogar paga pensión o cuota de participación para ... ? 1 Si Valor MENSUAL.
- Capt. G; V3520 NPCGP11A, ¿Este hogar paga transporte para ... ? 1 Si Valor MENSUAL.
- Capt. G; V3522 NPCGP12A, ¿Este hogar paga al establecimiento alimentación para ... ? 1 Si Valor MENSUAL.
- Capt. G; V3525 NPCGP15A, ¿Este hogar paga por el desayuno o almuerzo que ... recibe?.
- Capt. G; V3530 NPCGP17A, ¿Este hogar paga por refrigerio que ... recibe?.
- Capt. H; V3592 NPCHP10A, ¿Este hogar paga por ... pensión en el establecimiento educativo? 1 Si Valor MENSUAL pagado.
- Capt. H; V3594 NPCHP11A, ¿Este hogar tiene que pagar por transporte escolar para ... ? Valor MENSUAL pagado.
- Capt. H; V3623 NPCHP21AA, Durante ESTE AÑO escolar, ¿el hogar pagó: 1. Matrícula para ... ?.
- Capt. H; V3625 NPCHP21BA, Durante ESTE AÑO escolar, ¿el hogar pagó: 2. Libros, útiles escolares, uniformes y elementos de aseo para ... ?.
- Capt. H; V3627 NPCHP21CA, Durante ESTE AÑO escolar, ¿el hogar pagó: 3. Mantenimiento de equipos, sistematización de calificaciones para ... ?.
- Capt. H; V3629 NPCHP22A, ¿El MES PASADO el hogar gastó en útiles (papel, lápices, cuadernos, etc.).

- Capt. H; V3631 NPCHP23A, El MES PASADO ¿el hogar realizó otros pagos como: rifas, bingos, salidas pedagógicas, etc. en el establecimiento educativo para ... ?.
- Capt. K; V3853 NPCKP1, ¿En qué actividad ocupó ... la mayor parte del tiempo la SEMANA PASADA?, 1 Trabajando, 2 Buscando trabajo, 3 Estudiando, 4 Oficios del hogar, 5 Incapacitado(a) permanente para trabajar, 6 Otra actividad.
- Capt. K; V3873 NPCKP23, Antes de descuentos (salud, ARL, pensión, retención), ¿cuánto ganó ... el MES PASADO en este empleo (incluya propinas y comisiones; y excluya viáticos y pagos en especie)?.
- Capt. K; V3875 NPCKP24A, ¿Cuánto recibió? contin numeric 24. ¿El MES PASADO recibió ingresos por concepto de horas extras? ¿Cuánto recibió?.
- Capt. K; V3878 NPCKP25A, Además del salario en dinero, el MES PASADO ... recibió: ¿Alimentos como parte de pago por su trabajo?, 1 Si Valor mensual estimado.
- Capt. K; V3880 NPCKP26A, Además del salario en dinero, el MES PASADO ... recibió: ¿Vivienda como parte de pago por su trabajo?, 1 Si Valor mensual estimado.
- Capt. K; V3882 NPCKP27A, Además del salario en dinero, el MES PASADO ... recibió: ¿Otros ingresos en especie por su trabajo (electrodomésticos, ropa, productos diferentes a alimentos o bonos tipo Sodexho, etc.)? 1 Si Valor mensual estimado.
- Capt. K; V3886 NPCKP29A, El MES PASADO, ... recibió: ¿Subsidio de alimentación en dinero? 1 Si Valor.
- Capt. K; V3888 NPCKP30A, El MES PASADO, ... recibió: ¿Auxilio de transporte en dinero? 1 Si Valor.
- Capt. K; V3890 NPCKP31A, El MES PASADO, ... recibió: ¿Subsidio familiar en dinero? 1 Si Valor.
- Capt. K; V3892 NPCKP32A, El MES PASADO, ... recibió: ¿Subsidio educativo en dinero? 1 Si Valor.
- Capt. K; V3894 NPCKP33A, El MES PASADO, ... recibió: ¿Primas (técnica, de antigüedad, clima, orden público, etc.) en dinero? 1 Si Valor.
- Capt. K; V3896 NPCKP34AA, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ... recibió: 1. ¿Prima de servicios? Valor.
- Capt. K; V3898 NPCKP34BA, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ... recibió: 2. ¿Prima de navidad? Valor.
- Capt. K; V3900 NPCKP34CA, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ... recibió: 3. ¿Prima de vacaciones? Valor.
- Capt. K; V3902 NPCKP34DA, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ... recibió: 4. ¿Bonificaciones? Valor.
- Capt. K; V3904 NPCKP34EA, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ... recibió: 5. ¿Pagos o indemnizaciones por accidentes de trabajo? Valor.
- Capt. K; V3913 NPCKP36 36, ¿Cuál fue la ganancia neta o los honorarios netos de ... en esa actividad, negocio, profesión o finca, el MES PASADO?
- Capt. K; V3942 NPCKP47A, Además de su ocupación u oficio principal, ¿... el MES PASADO tuvo otros trabajos o negocios por los cuales recibió ingresos? Valor total percibido.
- Capt. K; V3946 NPCKP48A, El MES PASADO, ¿... recibió algún ingreso por concepto de trabajo? Valor.

- Capt. K; V3950 NPCKP52A, El MES PASADO, ¿ ... recibió algún ingreso por concepto de pensión de jubilación, sustitución pensional, invalidez o vejez? Valor.
- Capt. K; V3952 NPCKP53A, El MES PASADO, ¿ ... recibió algún ingreso en dinero para el sostenimiento de hijos(as) menores de 18 años (incluya pensión de alimentación y contribución de padres ausentes)? Valor.
- Capt. K; V3954 NPCKP54A, El MES PASADO, ¿ ... recibió algún ingreso por concepto de arriendos de casas, apartamentos, fincas de recreo, lotes, vehículos, maquinaria y equipos? Valor.
- Capt. K; V3956 NPCKP55A, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ¿ ... recibió primas por pensión de jubilación o por sustitución pensional? Valor.
- Capt. K; V3959 NPCKP56B, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ¿ ... recibió algún ingreso por concepto de ayudas en dinero proveniente de otros hogares o instituciones (padres, hijos(as), familiares, amigos(as))? Valor recibido.
- Capt. K; V3961 NPCKP57A, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ¿ ... recibió dinero por venta de propiedades (casas, edificios, lotes, maquinaria, vehículos, electrodomésticos, etc.)? Valor.
- Capt. K; V3963 NPCKP58A, Durante los ÚLTIMOS 12 MESES, ¿ ... recibió dinero por otros conceptos (cesantías, intereses de cesantías, intereses por préstamos o CDT, rifas, etc.)? Valor.

B. Variables auxiliares - Registros Administrativos

Las siguientes tablas son las variables auxiliares de las que corresponden al capítulo 3.2.1

- Situación económica y administrativa del municipio e infraestructura territorial.

Variable	Descripción	Unidad de Medida	Fuente
Indicador de desempeño integral	Desempeño de en el territorio de sus finanzas públicas	Puntos sobre 100	DNP - DDDR
Indicador de desempeño fiscal	Desempeño fiscal de sus finanzas públicas	Puntos sobre 100	DNP - DDDR
Porcentaje de inversión - Educación, Cultura y Deporte	Porcentaje de inversión - Educación, Cultura y Deporte	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT
Porcentaje de inversión - Salud	Porcentaje de inversión - Salud	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT
Porcentaje de inversión - Agua potable, saneamiento básico y servicios públicos	Porcentaje de inversión - Agua potable, saneamiento básico y servicios públicos	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT
Porcentaje de inversión - Vivienda	Porcentaje de inversión - Vivienda	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT
Porcentaje de inversión - Transporte	Porcentaje de inversión - Transporte	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT

Variable	Descripción	Unidad de Medida	Fuente
Porcentaje de inversión - Equipamiento, prevención y atención de desastres	Porcentaje de inversión - Equipamiento, prevención y atención de desastres	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT
Porcentaje de inversión - Agropecuario y Ambiental	Porcentaje de inversión - Agropecuario y Ambiental	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT
Porcentaje de inversión - Atención a grupos vulnerables, promoción social y Desarrollo Comunitario	Porcentaje de inversión - Atención a grupos vulnerables, promoción social y Desarrollo Comunitario	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT
Porcentaje de inversión - Fortalecimiento institucional y Justicia Seguridad	Porcentaje de inversión - Fortalecimiento institucional y Justicia Seguridad	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información del FUT

Tabla 5: Variables Auxiliares - Categoría: Situación económica y administrativa del municipio

- Total de población rural y urbana.

Variable	Descripción	Unidad de Medida	Fuente
Código	Código asignado por el DANE para la identificación del municipio	Texto	DANE
Municipio	Nombre consignado en el DANE para la identificación	Texto	DANE
N° Viviendas	N° de viviendas estimadas resultado del operativo estadístico de la encuesta multipropósito 2017	Número	Encuesta multipropósito 2017
N° Hogares	Número de hogares estimados resultado del operativo estadístico de la encuesta multipropósito 2017	Número	Encuesta multipropósito 2017
Porcentaje poblacional rural 2017	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	Número	DANE
Total poblacional 2017	Número de personas que residen en el municipio	Número	DANE
Numero Observado de Encuestas Multiproposito	Número de hogares estimados resultado del operativo estadístico de la encuesta multipropósito 2017	Número	Encuesta multipropósito 2017
Total poblacional Edad Trabajar PET 2017	Número de personas por municipio en edad de trabajar desde los 12 años y más	Número	DANE - Censo Nacional de Población y Vivienda
Densidad poblacional	Densidad poblacional	DNP con información del IGAC y el DANE	DNP con información del IGAC y el DANE

Tabla 6: Variables Auxiliares - Categoría: Densidad de población urbana y rural

- Acceso y permanencia en servicios de educación

Variable	Descripción	Unidad de Medida	Fuente
Cobertura bruta en educación - Total	Cobertura bruta en educación - Total	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	Ministerio de Educación Nacional
Tasa de deserción en educación básica y media (Desde transición hasta once)	Tasa de deserción en educación básica y media (Desde transición hasta once)	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	Ministerio de Educación Nacional

Tabla 7: Variables Auxiliares - Categoría: Acceso y permanencia en servicios de educación

- Acceso y permanencia en servicios de salud.

Variable	Descripción	Unidad de Medida	Fuente
Cobertura del régimen subsidiado	Cobertura del régimen subsidiado	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	Ministerio de Salud y Protección Social
Población no atendida - PP-NA	Población pobre no atendida - PPNA	Número	Ministerio de Salud y Protección Social
Tasa de mortalidad (x cada 1.000 habitantes)	Tasa de mortalidad (x cada 1.000 habitantes)	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	Ministerio de Salud y Protección Social

Tabla 8: Variables Auxiliares - Categoría: Acceso y permanencia en servicios de salud

- Cobertura de servicios públicos

Variable	Descripción	Unidad de Medida	Fuente
Internet Tecnología	Mide el acceso a las tecnologías de la información y formación	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Cobertura de acueducto (REC)	Cobertura de acueducto (REC)	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información de la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios
Cobertura de alcantarillado (REC)	Cobertura de alcantarillado (REC)	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de información de la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios
Cobertura de aseo (REC)	Cobertura de aseo (REC)	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios

Tabla 9: Variables Auxiliares - Categoría: Acceso y permanencia en servicios de educación

- Otros factores asociados a empleo y fuentes de alimentacion

Variable	Descripción	Unidad de Medida	Fuente
Empleados Formalmente	Porcentaje de personas ocupadas formalmente con respecto a la población total	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de FILCO - Ministerio del Trabajo
Participación de los trabajadores cotizantes - Hombres	Participación de los trabajadores cotizantes - Hombres	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de FILCO - Ministerio del Trabajo
Participación de los trabajadores cotizantes - Mujeres	Participación de los trabajadores cotizantes - Mujeres	Porcentaje (el valor está multiplicado por 100)	DNP a partir de FILCO - Ministerio del Trabajo
Área sembrada (ha)	Refleja el producto X producido en el territorio como variable asociada a la oferta alimentaria	Hectáreas	Censo Nacional Agropecuario, DANE
Área cosechada (ha)	Refleja el producto X producido en el territorio como variable asociada a la oferta alimentaria	Hectáreas	Censo Nacional Agropecuario, DANE
Producción (toneladas)	Refleja el producto X producido en el territorio como variable asociada a la oferta alimentaria	Hectáreas	Censo Nacional Agropecuario, DANE
Unidades de producción agrícola (UPAs)	Unidades de producción agrícola (UPAs)	Número	Censo Nacional Agropecuario, DANE
Distancia por carretera vehicular a la ciudad capital Km	Distancia a ciudad capital desde la zona urbana a centro capital	Número	Google Maps

Tabla 10: Variables Auxiliares - Categoría: Otros factores asociados a empleo y fuentes de alimentación

C. Tablas ALR, ILR, CLR, con las transformaciones

Una vez aplicado los respectivos procedimientos con lo referido en la sección 3.2.2 y las expresiones Alr 17, Ilr 20 y Clr 18, se obtienen los siguientes resultados que se consignan en la siguiente tabla 11:

Veamos primero un ejemplo:

Tenemos el vector de resultados correspondiente a las líneas de pobreza del municipio de Facatativá de Cundinamarca así: $C[0.0495, 0.1860, 0.7645]$

- Transformación logcociente aditiva (alr):

$$\begin{aligned}
 alr(x) &= alr[0.0495, 0.1860, 0.7645] \\
 &= \left[\ln \frac{0.0495}{0.7645}, \ln \frac{0.1860}{0.7645} \right] = [-2.74, -1.41]
 \end{aligned} \tag{38}$$

- Transformación logcociente centrada (clr):

$$\begin{aligned} clr(x) &= clr[0.0495, 0.1860, 0.7645] \\ &= \left[\ln \frac{0.0495}{(0.0495, 0.1860, 0.7645)^{1/3}}, \ln \frac{0.1860}{(0.0495, 0.1860, 0.7645)^{1/3}}, \right. \\ &\quad \left. \ln \frac{0.7645}{(0.0495, 0.1860, 0.7645)^{1/3}} \right] = [-1.35, -0.03, 1.38] \end{aligned} \quad (39)$$

- Transformación logcociente isométrica (ilr):

$$\begin{aligned} ilr(x) &= ilr[0.0495, 0.1860, 0.7645] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{0.0495}{0.1860}, \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{0.0495 \cdot 0.1860}{0.7645^2} \right] = [-1.69, -0.94] \end{aligned} \quad (40)$$

Código	1er Comp.: Po- breza Ex- trema	2da Comp.: Po- breza	3ra Comp.: Resto	ALR 1POS	ALR 2POS	CLR 1POS	CLR 2POS	CLR 3POS	ILR 1POS	ILR 2POS
25099	0,06	0,23	0,71	-2,49	-1,11	-1,29	0,09	1,20	-1,47	-0,97
25126	0,04	0,11	0,85	-3,16	-2,01	-1,43	-0,29	1,72	-2,11	-0,81
25151	0,10	0,25	0,65	-1,91	-0,97	-0,95	-0,01	0,96	-1,17	-0,67
25175	0,04	0,10	0,86	-3,18	-2,15	-1,41	-0,37	1,78	-2,18	-0,73
25183	0,05	0,20	0,75	-2,64	-1,32	-1,32	0,00	1,32	-1,62	-0,93
25200	0,04	0,16	0,79	-2,94	-1,58	-1,44	-0,07	1,51	-1,84	-0,96
25214	0,04	0,08	0,88	-3,23	-2,39	-1,35	-0,52	1,87	-2,30	-0,59
25260	0,03	0,18	0,79	-3,24	-1,45	-1,67	0,11	1,56	-1,91	-1,26
25269	0,05	0,19	0,76	-2,74	-1,41	-1,35	-0,03	1,38	-1,69	-0,94
25286	0,05	0,17	0,79	-2,80	-1,56	-1,35	-0,10	1,45	-1,78	-0,88
25290	0,07	0,22	0,70	-2,28	-1,14	-1,14	0,00	1,14	-1,40	-0,80
25295	0,06	0,26	0,68	-2,36	-0,97	-1,25	0,14	1,11	-1,36	-0,98
25297	0,11	0,30	0,59	-1,68	-0,69	-0,89	0,10	0,79	-0,97	-0,69
25307	0,04	0,16	0,80	-3,04	-1,62	-1,49	-0,07	1,55	-1,90	-1,00
25320	0,11	0,32	0,58	-1,67	-0,60	-0,92	0,16	0,76	-0,93	-0,76
25326	0,08	0,22	0,70	-2,18	-1,18	-1,06	-0,06	1,12	-1,37	-0,71
25377	0,04	0,10	0,87	-3,18	-2,18	-1,39	-0,39	1,79	-2,19	-0,71
25386	0,06	0,16	0,77	-2,50	-1,56	-1,15	-0,20	1,35	-1,66	-0,67
25430	0,03	0,13	0,84	-3,41	-1,86	-1,65	-0,10	1,76	-2,15	-1,10
25438	0,22	0,52	0,27	-0,21	0,66	-0,36	0,51	-0,15	0,18	-0,61
25473	0,04	0,18	0,78	-3,08	-1,46	-1,56	0,05	1,51	-1,85	-1,14
25486	0,07	0,21	0,72	-2,32	-1,23	-1,14	-0,04	1,18	-1,45	-0,78
25513	0,17	0,38	0,46	-1,00	-0,19	-0,61	0,21	0,40	-0,48	-0,58
25662	0,15	0,39	0,46	-1,10	-0,17	-0,68	0,25	0,42	-0,52	-0,66
25736	0,06	0,18	0,76	-2,52	-1,42	-1,21	-0,11	1,31	-1,61	-0,78
25740	0,04	0,17	0,79	-2,90	-1,56	-1,42	-0,07	1,49	-1,82	-0,95
25754	0,08	0,28	0,64	-2,09	-0,81	-1,12	0,16	0,97	-1,18	-0,91
25758	0,03	0,08	0,89	-3,35	-2,48	-1,41	-0,54	1,94	-2,38	-0,62
25769	0,03	0,12	0,85	-3,29	-1,97	-1,54	-0,21	1,75	-2,15	-0,94
25781	0,12	0,38	0,50	-1,39	-0,27	-0,84	0,28	0,55	-0,67	-0,79
25785	0,05	0,14	0,81	-2,79	-1,78	-1,26	-0,26	1,52	-1,86	-0,71
25793	0,09	0,30	0,61	-1,97	-0,71	-1,08	0,18	0,89	-1,10	-0,89

Código	1er Comp.: Po- breza Ex- trema	2da Comp.: Po- breza	3ra Comp.: Resto	ALR 1POS	ALR 2POS	CLR 1POS	CLR 2POS	CLR 3POS	ILR 1POS	ILR 2POS
25799	0,02	0,10	0,88	-3,70	-2,17	-1,74	-0,22	1,96	-2,40	-1,08
25817	0,03	0,12	0,85	-3,23	-1,95	-1,50	-0,22	1,73	-2,12	-0,90
25843	0,04	0,22	0,74	-2,84	-1,23	-1,49	0,13	1,36	-1,66	-1,14
25875	0,09	0,24	0,67	-2,06	-1,02	-1,03	0,01	1,02	-1,25	-0,74
25899	0,04	0,14	0,82	-3,02	-1,73	-1,43	-0,15	1,58	-1,94	-0,91

Tabla 11: Resultado de las Transformaciones Alr, Ilr, Clr

D. Procedimiento del cálculo de las varianzas y covarianzas a las transformaciones

Desarrollo para estimar las varianzas y covarianzas entre logaritmos asociados al ILR referenciados en la tabla 11 [24]:

Como primer paso se toma de las propiedades de la varianza:

$$\begin{aligned} V(X + Y + Z) &= V(X + Y) + V(Z) + 2Cov(X + Y, Z) \\ &= V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) + V(Z) + 2Cov(X, Z) + 2Cov(Y, Z) \end{aligned} \quad (41)$$

Varianza ILR_1

$$\begin{aligned} Var_{ILR1} &= \frac{1}{6}Var(log(c_1)) + \frac{1}{6}Var(log(c_2)) \\ &+ \frac{4}{6}Var(log(c_3)) + \frac{2}{6}Cov(logc_1, logc_2) \\ &- \frac{4}{6}Cov(logc_1, logc_2) - \frac{4}{6}Cov(logc_1, logc_3) \end{aligned} \quad (42)$$

Varianza ILR_2

$$Var_{ILR2} = \frac{1}{2}Var(log(c_1)) + \frac{1}{2}Var(log(c_2)) - \frac{1}{2}Cov(logc_1, logc_2) \quad (43)$$

Para el calculo de las covarianzas por linealización de taylor se tiene que:

$$g(t) \simeq g(\theta) + g'(\theta)(T - \theta) \quad (44)$$

De 44 T es un estimador de θ y g es una función. Para el parámetro C_1 y estimador $\widehat{C}_1$ (bajo el diseño de muestreo) y $g(.) = log(.)$ se tiene:

$$log\widehat{C}_1 \simeq log(C_1) + \frac{1}{C_1}(\widehat{C}_1 - C_1) \quad (45)$$

y análogamente para C_1 y $\widehat{C}_2$,

$$log\widehat{C}_2 \simeq log(C_2) + \frac{1}{C_2}(\widehat{C}_2 - C_2) \quad (46)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \log \widehat{C}_1 \log \widehat{C}_2 &\simeq \log(C_1) \log(C_2) + \frac{\log(C_2)}{C_1} (\widehat{C}_1 - C_1) \\ &+ \frac{\log(C_1)}{C_2} (\widehat{C}_2 - C_2) + \frac{1}{C_1 C_2} (\widehat{C}_1 - C_1) (\widehat{C}_2 - C_2) \end{aligned} \quad (47)$$

Al tomar valor esperado y teniendo en cuenta que $\widehat{C}_1$ y $\widehat{C}_2$ son insesgados para C_1 y C_2 respectivamente se tiene:

$$E[\log \widehat{C}_1 \log \widehat{C}_2] \simeq \log(C_1) \log(C_2) + \frac{1}{(C_1)C_2} E[(\widehat{C}_1 - C_1)(\widehat{C}_2 - C_2)] \quad (48)$$

de la ecuación 52;

$$= \log(C_1) \log(C_2) + \frac{1}{(C_1)C_2} \text{cov}[(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)] \quad (49)$$

Ahora, para estimar la covarianza entre $\log \widehat{C}_1$ y $\log \widehat{C}_2$ se procede como:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\log \widehat{C}_1 \log \widehat{C}_2) &= E[(\widehat{C}_1 - C_1)(\widehat{C}_2 - C_2)] - E[\widehat{C}_1]E[\widehat{C}_2] \\ &\simeq \log(C_1) \log(C_2) + \frac{1}{C_1 C_2} \text{Cov}(\widehat{C}_1 \widehat{C}_2) - \log(C_1) \log(C_2) \end{aligned} \quad (50)$$

de la ecuación 50;

$$= \frac{1}{(C_1)(C_2)} \text{Cov}(\widehat{C}_1 \widehat{C}_2) \quad (51)$$

y un estimador por momentos es de la forma:

$$\widehat{\text{Cov}}[\log \widehat{C}_1 \log \widehat{C}_2] = \frac{1}{\widehat{C}_1 \widehat{C}_2} \text{Cov}(\widehat{C}_1 \widehat{C}_2) \quad (52)$$

Acorde al desarrollo anterior, un resultado que se debe desarrollar es la covarianza entre las *ILR* de las componentes [24]:

$$ILR_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \log \left(\frac{C_1 C_2}{C_2^2} \right), \quad ILR_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \quad (53)$$

Su covarianza estara dada por:

$$\begin{aligned}
Cov(ILR_1, ILR_2) &= Cov \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \log(C_1) + \frac{1}{\sqrt{6}} \log(C_2) - \frac{2}{\sqrt{6}} \log(C_3), \frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_2) \right] \\
&= Cov \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \log(C_1), \frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_1) \right] + Cov \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \log(C_1), -\frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_2) \right] \\
&+ Cov \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \log(C_2), \frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_1) \right] + Cov \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \log(C_2), -\frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_2) \right] \\
&+ Cov \left[-\frac{2}{\sqrt{6}} \log(C_3), \frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_1) \right] + Cov \left[-\frac{2}{\sqrt{6}} \log(C_3), -\frac{1}{\sqrt{2}} \log(C_2) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}} Var(\log(C_1)) - \frac{1}{\sqrt{12}} Cov(\log(C_1), \log(C_2)) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{12}} Cov(\log(C_1), \log(C_2)) - \frac{1}{\sqrt{12}} Var(\log(C_2)) \\
&- \frac{2}{\sqrt{12}} Cov(\log(C_1), \log(C_2)) + \frac{2}{\sqrt{12}} Cov(\log(C_2), \log(C_3)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}} Var(\log(C_1)) - \frac{1}{\sqrt{12}} Var(\log(C_2))
\end{aligned} \tag{54}$$

E. Tabla de resultados estimados de la Pobreza Monetaria de los municipios de Cundinamarca no muestreados por la EM 2017

Veamos primero un ejemplo:

Tenemos el vector de resultados correspondiente al cálculo de los EBLUPS-Betas ILR del modelo descrito en la ecuación 36 y 36 aplicado a un municipio no muestreado correspondiente a *Agua de Dios* y con base en las variables auxiliares descritas en la sección 3.1 que son de la forma: porcentaje poblacional rural 2017 22.94, cobertura de acueducto 100, cobertura bruta en educación 97, cobertura del régimen subsidiado 99.68, indicador de desempeño integral 51.02 y distancia Bogota centro centro 119:

$$\begin{aligned}
ilr_1 &= 38.8040 + (0.0012 \cdot 22.94) - (0.0049 \cdot 100) - (0.0026 \cdot 97) - (0.3909 \cdot 99.68) \\
&- (0.0212 \cdot 51.02) + (0.0055 \cdot 119) \\
&= -1,310088346
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
ilr_2 &= 9.5588 + (0.0034 \cdot 22.91) - (0,0034 \cdot 100) + (0,0008 \cdot 97) - (0.1073 \cdot 99.68) \\
&+ (0,0047 \cdot 51.02) + (0,0003 \cdot 119) \\
&= -1,05928979
\end{aligned} \tag{56}$$

Una vez se obtienen los resultados con 55 y 56 se procede a aplicar las ecuaciones inversas descritas en la sección 3.2.4; con la ecuacione 33 para obtener las estimaciones de las lines de pobreza extrema (monetaria) y pobreza con la ecuacion 34:

$$\begin{aligned}
Pobreza_{AguaDeDios} &= \frac{(e^{\sqrt{6} \cdot -1,310088346})((e^{\sqrt{2} \cdot -1,05928979}) + 1)^2 - \sqrt{(e^{\sqrt{6} \cdot -1,310088346})(e^{\sqrt{2} \cdot -1,05928979})}}{(e^{\sqrt{6} \cdot -1,310088346})((e^{\sqrt{2} \cdot -1,05928979}) + 1)^2 - (e^{\sqrt{2} \cdot -1,05928979})} \\
&= 0.28
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
 PobrezaExtrema_{AguaDeDios} &= (e^{\sqrt{2} \cdot -1,05928979}) \cdot 0.28 \\
 &= 0.06
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Código	Municipio	MEDIA PE(M) _d ^{FH-EBLUP}	MEDIA LP _d ^{FH-EBLUP}
25001	Agua de Dios	0.06	0.28
25019	Albán	0.09	0.29
25035	Anapoima	0.07	0.20
25040	Anolaima	0.08	0.23
25053	Arbeláez	0.06	0.23
25086	Beltrán	0.14	0.33
25095	Bituima	0.17	0.38
25120	Cabrera	0.18	0.41
25123	Cachipay	0.08	0.27
25148	Caparrapí	0.20	0.45
25154	Carmen de Carupa	0.07	0.25
25168	Chaguaní	0.14	0.41
25178	Chipaqué	0.06	0.20
25181	Choachí	0.10	0.22
25224	Cucunubá	0.10	0.31
25245	El Colegio	0.09	0.24
25258	El Peñón	0.20	0.40
25279	Fomeque	0.08	0.23
25281	Fosca	0.09	0.26
25288	Fúquene	0.08	0.23
25293	Gachala	0.15	0.39
25299	Gama	0.14	0.34
25312	Granada	0.10	0.22
25317	Guachetá	0.09	0.26
25322	Guasca	0.07	0.21
25324	Guataquí	0.07	0.27
25328	Guayabal de Siquima	0.09	0.22
25335	Guayabetal	0.05	0.16
25339	Gutiérrez	0.10	0.34
25368	Jerusalén	0.13	0.37
25372	Junín	0.15	0.35
25394	La Palma	0.16	0.43
25398	La Peña	0.16	0.35
25402	La Vega	0.08	0.20
25407	Lenguazaque	0.09	0.32
25426	Macheta	0.10	0.35
25436	Manta	0.14	0.36
25483	Nariño	0.14	0.41
25488	Nilo	0.13	0.28
25489	Nimaima	0.11	0.39
25491	Nocaima	0.13	0.30
25506	Venecia	0.13	0.30
25518	Paime	0.21	0.42
25524	Pandi	0.09	0.30
25530	Paratebueno	0.19	0.39
25535	Pasca	0.12	0.28
25572	Puerto Salgar	0.12	0.43
25580	Pulí	0.18	0.40
25592	Quebradanegra	0.11	0.28
25594	Quetame	0.11	0.26
25596	Quipile	0.12	0.35

Código	Municipio	MEDIA PE(M) $_{d}^{FH-EBLUP}$	MEDIA LP $_{d}^{FH-EBLUP}$
25599	Apulo	0.12	0.29
25612	Ricaurte	0.09	0.22
25645	San Antonio del Tequendama	0.10	0.23
25649	San Bernardo	0.12	0.32
25653	San Cayetano	0.15	0.32
25658	San Francisco	0.12	0.32
25718	Sasaima	0.11	0.27
25743	Silvania	0.07	0.23
25745	Simijaca	0.11	0.33
25772	Suesca	0.08	0.31
25777	Supatá	0.11	0.27
25779	Susa	0.14	0.44
25797	Tena	0.13	0.30
25805	Tibacuy	0.13	0.37
25807	Tibirita	0.16	0.35
25815	Tocaima	0.06	0.23
25823	Topaipi	0.22	0.47
25839	Ubalá	0.16	0.31
25841	Ubaque	0.09	0.26
25845	Une	0.08	0.27
25851	Útica	0.11	0.34
25862	Vergara	0.14	0.44
25867	Vianí	0.11	0.33
25871	Villagómez	0.10	0.34
25873	Villapinzón	0.07	0.24
25878	Viotá	0.13	0.31
25885	Yacopí	0.19	0.45
25898	Zipacón	0.07	0.23

Tabla 12: Resultados Estimados y MSE para la Pobreza Extrema (Monetaria) y Pobreza en los Municipios de Cundinamarca No muestreados por la EM2017.

F. Supuestos del Modelo FH Multivariado propuesto en el Cálculo de la Pobreza Monetaria de los 116 Municipios

A continuación presentamos, con la ayuda del paquete *ebhupMFH1 msae* software estadístico R, las salidas del Modelo FH Multivariado descrito en la tabla 3. A pesar de estar basados en normalidad y de no tener restricciones para dar resultados:

- Método : tipo de método de ajuste, llamado REML”
- Convergencia: un valor lógico de convergencia del algoritmo Fisher Scoring
- Iteraciones: número de iteraciones realizadas por el algoritmo Fisher-Scoring
- Estcoef : un marco de datos con el coeficiente del modelo estimado en la primera columna, su error estándar en la segunda columna, las estadísticas t en la tercera columna y los valores p de la importancia de cada coeficiente en la última columna
- Refvar : un marco de datos con la varianza del efecto aleatorio estimada
- InformationFisher: una matriz de información Fisher del algoritmo Fisher-Scoring

```

$informationFisher
      [,1] [,2]
[1,] 1612.100 29.709
[2,] 29.709 45021.000

> fisher.test(x = meblup_FH14$fit$informationFisher, alternative = "two.sided")

Fisher's Exact Test for Count Data

data: meblup_FH14$fit$informationFisher
p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true odds ratio is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 8.402051e+03 4.503600e+15
sample estimates:
odds ratio
4.5036e+15

Warning message:
In fisher.test(x = meblup_FH14$fit$informationFisher, alternative = "two.sided") :
  'x' has been rounded to integer: Mean relative difference: 0.0004080124
> meblup_FH14$fit$iterations
[1] 8
> meblup_FH14$fit$method
[1] "REML"
> meblup_FH14$fit$convergence
[1] TRUE

> meblup_FH14$fit$estcoef
      beta std.error t.statistics p.value
(Intercept) 38.80400000 2.0636e+01 1.88040 0.06004800
seleccionSI$AAE 0.00122590 2.5884e-03 0.47362 0.63577000
seleccionSI$BBB -0.00491790 3.2071e-03 -1.53350 0.12516000
seleccionSI$CCA -0.00259870 1.7730e-03 -1.46570 0.14274000
seleccionSI$DDA -0.39090000 2.0989e-01 -1.86240 0.06255100
seleccionSI$EEA -0.02124000 7.5022e-03 -2.83120 0.00463710
seleccionSI$FFH 0.00546410 1.6589e-03 3.29380 0.00098841
(Intercept) 9.55880000 8.9925e+00 1.06300 0.28779000
seleccionSI$AAE 0.00338260 1.1682e-03 2.89570 0.00378370
seleccionSI$BBB -0.00343040 1.3373e-03 -2.56510 0.01031500
seleccionSI$CCA 0.00077292 8.4037e-04 0.91974 0.35771000
seleccionSI$DDA -0.10734000 9.1560e-02 -1.17230 0.24107000
seleccionSI$EEA 0.00472430 3.2417e-03 1.45730 0.14502000
seleccionSI$FFH 0.00026043 6.8089e-04 0.38249 0.70210000

```