

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

**DISEÑO DE UN MPC PARA EL SEGUIMIENTO DE UNA TRAYECTORIA DE UN
VEHÍCULO ARTICULADO**



Hernán Alonso Mancipe Bohórquez

Universidad Santo Tomás

Facultad de Ingeniería Electrónica

Bogotá D.C.

Mayo

2024

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

Investigación

**DISEÑO DE UN MPC PARA EL SEGUIMIENTO DE UNA TRAYECTORIA DE UN
VEHÍCULO ARTICULADO**

Hernán Alonso Mancipe Bohórquez

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de Magister en
Ingeniería Electrónica**

Director

Ing. Juan Manuel Calderón Chávez

Ing. Sindy Paola Amaya

Universidad Santo Tomás

Facultad de Ingeniería Electrónica

Bogotá D.C.

Mayo

2024

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico a mi Sra. Madre y a la vida, por darme la primera y la segunda oportunidad de estar en la tierra.

AGRADECIMIENTOS

Con énfasis especial al profesor Juan Manuel Calderón por su apoyo y por compartir sus conocimientos relacionados con esta Investigación.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	11
1.1. Planteamiento del problema	11
1.2. Justificación: ¿Por qué es importante automatizar los vehículos articulados?	13
1.3. Impacto social	14
1.4. Objetivos	15
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y CIENTÍFICA.....	16
2.1. Módulo principal.....	19
2.2. Función de costo.....	21
2.3. Vector gradiente de la función de costo.....	22
2.4. Restricciones de desigualdad.....	22
2.5. Jacobiano analítico.....	23
2.6. Ecuaciones de estado	28
2.7. Trayectoria inicial	28
2.8. Trayectoria del vehículo articulado	28
3. METODOLOGÍA	33
3.1. Caso de estudio	33
3.2. Configuración de los escenarios en MATLAB.....	36
3.2.1. Escenario 1	40
3.2.2. Escenario 2	54
3.2.3. Escenario 3	61
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	65
4.1. Escenario 1	67
4.2. Escenario 2	69
4.3. Escenario 3	70
5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	73
6. BIBLIOGRAFÍA	75

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Dimensiones del vehículo de dos cuerpos rígidos	18
Tabla 2. Restricciones de las variables de entrada y de estado.	20
Tabla 3. Valores de salida del argumento de salida <i>exitflag</i> de <i>fmincon</i> [42]	39
Tabla 4. Iteración 1 (escenario 1)	42
Tabla 5. Iteración 2 (escenario 1)	43
Tabla 6. Iteración 3 (escenario 1)	45
Tabla 7. Iteración 4 (escenario 1)	46
Tabla 8. Iteración 5 (escenario 1)	48
Tabla 9. Iteración 6 (escenario 1)	49
Tabla 10. Iteración 7 (escenario 1).....	51
Tabla 11. Iteración 8 (escenario 1).....	52
Tabla 12. Iteración 9 (escenario 1).....	54
Tabla 13. Iteración 1 (escenario 2).....	57
Tabla 14. Iteración 2 (escenario 2).....	58
Tabla 15. Iteración 3 (escenario 2).....	59
Tabla 16. Iteración 4 (escenario 2).....	60
Tabla 17. Iteración 1 (escenario 3).....	62
Tabla 18. Iteración 2 (escenario 3).....	63
Tabla 19. Iteración 3 (escenario 3).....	65
Tabla 20. Tiempo de ejecución de cada iteración junto con la magnitud de la función de costo	68
Tabla 21. Argumento de salida, tiempo y magnitud de función de costo para el tercer escenario	71
Tabla 22. Reducción de tiempo y aumentos de costo del escenario 3 respecto a los escenarios 1 y 2	71

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1. Colombia (2018) – Izquierda: Muertes en carretera por categoría de agentes viales. Derecha: Histórico de muertes por accidente de tráfico [6].	14
Fig. 2. Representación del modelo no lineal (vehículo de dos cuerpos rígidos)	17
Fig. 3. Programa principal y bloques secundarios	19
Fig. 4. Transformación de rotación [30]	30
Fig. 5. Patio Taller “Nelson Pinedo” [33]	35
Fig. 6. Área de parqueo de articulados Transmetro [33]	35
Fig. 7. Área de estacionamiento para articulados [34]	36
Fig. 8. Señales y horizonte del MPC [38] [39]	37
Fig. 9. Objetos de colisión – Posición inicial (rojo) y final (verde) (escenario 1) [34]	40
Fig. 10. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 1 (escenario 1)	42
Fig. 11. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 2 (escenario 1)	44
Fig. 12. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 3 (escenario 1)	45
Fig. 13. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 4 (escenario 1)	47
Fig. 14. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 5 (escenario 1)	48
Fig. 15. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 6 (escenario 1)	50
Fig. 16. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 7 (escenario 1)	51
Fig. 17. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 8 (escenario 1)	53
Fig. 18. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 9 (escenario 1)	54
Fig. 19. Objetos de colisión – Posición inicial (rojo) y final (verde) (escenario 2) [34]	55
Fig. 20. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 1 (escenario 2)	57
Fig. 21. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 2 (escenario 2)	58
Fig. 22. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 3 (escenario 2)	59
Fig. 23. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 4 (escenario 2)	61
Fig. 24. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 1 (escenario 3)	62
Fig. 25. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 2 (escenario 3)	64

Fig. 26. Gráficas de las variables de entrada (α, v) , de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 3 (escenario 3)	65
Fig. 27. Resultado de simulación de la trayectoria de un articulado con la aceleración como variable de salida [36]	66

RESUMEN

En Colombia, los sistemas de transporte masivo de pasajeros de algunas ciudades principales tienen en su flota vehículos articulados, los cuales se desplazan desde un origen hasta un destino específicos. Luego de que han finalizado su jornada de trabajo, estos vehículos deben estacionarse en un patio taller en un espacio reducido, esta acción se ha identificado como repetitiva y que se debe realizar a una velocidad baja. Es por esto por lo que, para reducir estrés y fatiga a los conductores de estos vehículos frente a estos eventos monótonos, este trabajo describe un caso de estudio relacionado con la planeación óptima de la trayectoria de un vehículo articulado, para lo cual se ha tomado como referencia el sistema de transporte masivo de la ciudad de Barranquilla: Transmetro. Se ha recreado el escenario de estacionamiento (patio taller) en MATLAB con sus respectivos obstáculos fijos: muros u otros vehículos de iguales dimensiones. La trayectoria desde el punto inicial hasta el final tiene un alto grado de complejidad, por eso se han configurado las restricciones de igualdad y desigualdad requeridas. Para encontrar la ruta se ha utilizado un Controlador Predictivo por Modelo (MPC) multietapa para sistemas no lineales, que reconoce estos obstáculos como objetos de colisión. Se ha agregado incertidumbre aleatoria a los valores iniciales de la posición inicial, además de modificar la ponderación relativa de su función de costo que depende de las entradas del sistema: la velocidad longitudinal y el ángulo de giro, para que la simulación se realice en *Closed Loop* y así se asegure su optimización.

Palabras Clave: MPC, vehículo, Control en lazo cerrado, optimización, método del gradiente

ABSTRACT

In Colombia, the mass passenger transportation systems of some main cities have articulated vehicles in their fleet, which travel from an origin to a specific destination. After they have finished their workday, these vehicles must be parked in a workshop yard in a small space. This action has been identified as repetitive and must be performed at a low speed. This is why, to reduce stress and fatigue to the drivers of these vehicles in the face of these monotonous events, this work describes a case study related to the optimal planning of the trajectory of an articulated vehicle, for which it has been taken as a reference the mass transportation system of the city of Barranquilla: Transmetro. The parking scenario (highest yard) has been recreated in MATLAB with their respective fixed obstacles: walls or other vehicles of equal dimensions. The trajectory from the initial point to the end has a high degree of complexity, which is why the required equality and inequality restrictions have been configured. To find the route, a multistage Model Predictive Controller (MPC) for nonlinear systems has been used, which recognizes these obstacles as collision objects. Random uncertainty has been added to the initial values of the initial position, in addition to modifying the relative weighting of its cost function that depends on the system inputs: the longitudinal speed and the angle of rotation, so that the simulation is carried out in Closed-Loop and thus its optimization will be ensured.

Key Word: MPC, vehicle, Closed-Loop, optimization, gradient-methods

INTRODUCCIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Según las estadísticas del Centro de Información de la Administración Nacional de Seguridad del Tráfico en las Carreteras de los Estados Unidos (NHTSA, por sus siglas en inglés), 38824 personas murieron en choques automovilísticos durante el 2020 en este país [1]. Este no es un indicador menor, todo lo contrario, en este territorio se lleva a cabo un desarrollo sólido y sustentable liderado por varias corporaciones, entre ellas una insignia y muy conocida: TESLA, que no solo se dedica a la automatización de vehículos eléctricos, también en el área de la energía renovable, lo cual fortalece su modelo productivo [2]. Es por esto por lo que el hecho de seguridad mencionado anteriormente se pretende reducir a su mínima expresión. ¿Cómo? A través de un trabajo conjunto (y de libre competencia) centrado en la automatización de vehículos, en dónde se demuestren las ventajas de este desarrollo frente a los vehículos de operación manual, además, que sirva para mejorar diferentes factores como: seguridad, movilidad, beneficios económicos, sociales y principalmente eficiencia [1]. Este tipo de vehículos, de un solo cuerpo rígido, se usa para el transporte de pasajeros o pequeñas cargas y ha tenido una evolución vertiginosa y ampliamente probada, este medio de transporte es utilizado en múltiples compañías y es de uso particular [3], y para una mejor identificación han sido categorizados en varios niveles de autonomía [4], bien sea para una ejecución parcial o total de las tareas dinámicas de conducción que van desde el nivel cero: nula automatización de la conducción hasta completar el máximo nivel (6): Automatización completa de conducción según la taxonomía definida por la Sociedad de Ingenieros de Automoción (SAE) [5].

No obstante, los vehículos de dos cuerpos rígidos también deberían tener un rol importante dentro de la industria automotriz debido a que su área de trabajo se enfoca principalmente en el transporte de carga pesada y de transporte masivo de pasajeros. Dado a esto, la automatización de los vehículos de dos cuerpos rígidos (de ahora en adelante *vehículos articulados*) puede contribuir a la disminución de los riesgos de accidentalidad en las vías y contrarrestar la fatiga (por ej.: acciones monótonas) asociados con la conducción de estos vehículos. Además, no sobra mencionar que los conductores de estos vehículos deben estar sometidos a largas horas de trabajo en condiciones difíciles, lo cual aumenta el riesgo de

cometer errores en sus trayectos [6]. También, es relevante mencionar que los vehículos articulados son más difíciles de maniobrar debido a sus puntos ciegos, frente a los vehículos de un solo cuerpo rígido, y es por esto se requieren habilidades y gran pericia por parte del conductor.

Ahora, yendo al área de conocimiento que compete para el problema de esta propuesta de investigación, lo que se busca diseñar una estrategia de un Controlador Predictivo por Modelo (MPC) que permita a un vehículo articulado moverse de forma segura y eficiente en entornos dinámicos y complejos, teniendo presente las características específicas de un vehículo articulado, como la longitud y el ángulo de giro de su estructura de gran dimensión. Pero, ¿Qué es el MPC?

El MPC es una técnica de control que optimiza sus acciones para minimizar una función de costo de un sistema dinámico restringido, en este caso el modelo del vehículo articulado, sobre un horizonte finito. A través, de cada intervalo de tiempo (*step time*), el MPC captura el estado actual de la planta y así calcula la secuencia de acciones de control necesarias. A continuación, el controlador aplica a la planta (vehículo articulado) solo la primera acción de control más adecuada, sin tener en cuenta las siguientes, después de cada *step time*, el proceso se repite [7]. En particular, para un vehículo autónomo articulado, el diseño del MPC debe abordar desafíos específicos, a partir de su modelo cinemático, como la coordinación de los movimientos de las dos secciones del vehículo (longitud y ángulo de giro) y la capacidad de adaptarse a condiciones cambiantes del entorno y la necesidad de cumplir con los requisitos de seguridad y eficiencia (maniobras seguras), por ejemplo, en entornos estrechos y con varios obstáculos en donde los puntos ciegos cobran alta importancia [8]. Al integrar este controlador con otros sistemas de control y navegación del vehículo autónomo articulado, va a permitir un comportamiento coordinado y coherente en su desplazamiento [9], para garantizar la seguridad de la carga transportada o de los pasajeros. También, se podrían abordar, de manera complementaria, aspectos relacionados como la optimización del rendimiento del vehículo, el consumo de energía, la reducción de emisiones y la minimización del tiempo de viaje. En síntesis, se plantea la siguiente pregunta: *¿Cómo diseñar un sistema de Control Predictivo por Modelo en vehículos articulados para hacer seguimiento a una trayectoria definida?*

1.2. Justificación: ¿Por qué es importante automatizar los vehículos articulados?

Los vehículos articulados tienen mayor dificultad para ser operados respecto a los vehículos de un solo cuerpo. Los conductores de estos vehículos abarcan más puntos ciegos, por ende, una menor maniobrabilidad. Al brindarles un nivel de autonomía se podría reducir el riesgo de accidentes debido a errores humanos y mejorar la seguridad en la carretera. También, como consecuencia, se puede reducir los costos de operación y mantenimiento ya que, al estar equipados con sistemas robustos de control y navegación, van a desplazarse de manera coordinada y segura en entornos dinámicos y complejos, lo que puede traducirse en la mejora de la eficiencia y la rentabilidad del transporte dado que permite un uso más eficiente de los recursos, como el combustible y especialmente el tiempo. Uno de los principales argumentos: reducir la fatiga del conductor para disminuir la carga de trabajo y el estrés activo en el conductor, lo que aumenta la seguridad en las vías y la calidad de vida del operario, especialmente, en tareas repetitivas que ocasionen cambios bruscos en los giros y que se busque lo contrario: se generen movimiento suaves y continuos [10]. En Colombia, según datos del Observatorio Nacional de Seguridad Vial, en su balance de siniestralidad vial del año 2021 hubo 7270 personas fallecidas [11]. A nivel mundial, la Organización Mundial de la Salud (OMS) en un estudio del año 2018, indica según sus indicadores, cada 23 segundos una persona muere [12], y para Colombia se muestra una media entre 12 y 16 muertes por cada 100 000 habitantes en carretera, el 3% de estos eventos de mortalidad corresponde a conductores y pasajeros de vehículos de carga pesada (observar la figura 1) [6] .

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

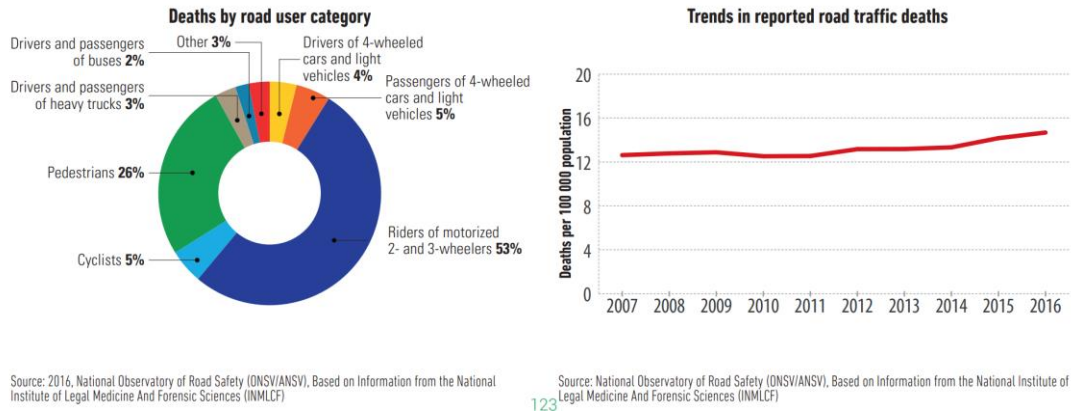


Fig. 1. Colombia (2018) – Izquierda: Muertes en carretera por categoría de agentes viales. Derecha: Histórico de muertes por accidente de tráfico [6].

Es por esto por lo que el diseño de una estrategia MPC para un vehículo articulado (modelo no lineal dado su comportamiento dinámico complejo) puede incrementar las capacidades del vehículo, como la precisión en el desplazamiento y la estabilidad del vehículo en entornos con obstáculos fijos, considerando la estructura de este tipo de vehículos y su dificultad para controlarlo dada su articulación (doble ángulo de giro) y sus dimensiones.

1.3. Impacto social

Lo que se busca con esta propuesta investigativa es la consideración de una población específica del sector automotriz: los conductores del transporte de carga y de pasajeros y todos los agentes viales involucrados. Dado que, en el país, aunque exista la infraestructura ferroviaria, esta modalidad de transporte no tiene una representación significativa, tampoco los vastos ríos que atraviesan el país son usados para el traslado de mercancía o de pasajeros. Es así como, en las principales ciudades del territorio nacional el transporte masivo de pasajeros es preponderante, así como en el transporte de carga al interior del país recae en vehículos pesados, que con el pasar del tiempo, van a adquirir un gran nivel de autonomía y las tareas relacionadas como la navegación por las calles y otras no relacionadas con la conducción pero inherentes como: la interacción con otros automóviles, peatones, ciclistas, obras viales y otros desafíos inesperados, por ahora, se mantendrán. Por lo tanto, los escenarios más probables es una adopción de la autonomía en eventos que se realizan con alta periodicidad y la interacción será con otros vehículos o muros, con poca o nula presencia de agentes viales o eventos imprevistos [13]. Este es el caso de la modalidad de

desplazamiento masivo de pasajeros la cual es realizada por los sistemas integrados de transporte en ciudades como Bogotá D.C.(Transmilenio), Cali (MIO) o Barranquilla (Transmetro). Esto abrirá la posibilidad de que los recursos que operan los vehículos de dos cuerpos rígidos se focalicen en tareas más especializadas y no en tareas repetitivas que puedan llevar a cometer acciones no solo de inminente peligro, también de muerte, debido a un exceso de confianza o de baja concentración por parte de las personas que los conducen, para que se reduzcan costos de operación, se mejore su eficiencia y también la coordinación operativa [14]. El objeto entonces es la focalización en acciones monótonas que se realicen a velocidades bajas en entornos con obstáculos fijos en escenarios similares a parqueaderos o patios-taller de los sistemas integrados de transporte, que busquen no sólo la protección de una carga, también el bienestar de los pasajeros. Por ende, al brindar seguridad en las maniobras, así como en el manejo óptimo del tiempo, estos vehículos articulados con este nivel de autonomía podrán influir positivamente en un uso más frecuente y a su vez más rentable [15] a través de un Controlador Predictivo por Modelo que planifique iterativamente la trayectoria del articulado y mitiga posibles colisiones, su intención será minimizar estos eventos y que se garantice el desplazamiento del vehículo por un espacio seguro [16].

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Diseñar y simular un Controlador Predictivo por Modelo (MPC) para el seguimiento de una trayectoria definida para un vehículo articulado.

1.4.2. Objetivo Específicos

- Modelar la cinemática de un vehículo autónomo articulado con restricciones.
- Diseñar el Control Predictivo por Modelo (MPC) que se adapte al modelo restringido.
- Optimizar una función objetivo que cumpla con la minimización del tiempo de desplazamiento de una trayectoria trazada sobre una deseada.

- Validar la estrategia de control en un escenario de simulación con obstáculos.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y CIENTÍFICA

Este trabajo fue desarrollado en el software MATLAB, utilizando la licencia que otorga la Universidad, utilizando sus herramientas embebidas (*Toolbox*):

- Model Predictive Control.
- Optimization.
- Robotics System.

Se ha utilizado el Control Predictivo por Modelo (MPC) para la predicción del comportamiento de la planta, asumiendo un estado actual o varios estados actuales que se basan en un modelo de estimación. Este controlador está en la búsqueda óptima de control, que a su vez minimiza el costo y su gradiente, y así satisface las restricciones de igualdad y desigualdad) en todo un horizonte de predicción seleccionado. Para este sistema, las ecuaciones de estado del vehículo articulado se caracterizan para un problema de planeación de una trayectoria no lineal multietapa. Es así como particularmente para este modelo se usa un controlador MPC no lineal, empleado para diseñar, encontrar y simular una trayectoria óptima para parquear automáticamente un vehículo articulado con cierto grado de inclinación, tomando una posición inicial hasta una final, que se encuentra entre varios obstáculos estáticos que tienen las dimensiones similares a otros vehículos articulados o a los muros de un patio-taller. Este desarrollo se asocia a un ejemplo claro en el país: los vehículos de transporte masivo que circulan en las principales ciudades, desplazando una gran cantidad de personas, y considerando los requerimientos de estos sistemas de transporte, que pueden ser de un solo cuerpo rígido (vagón), o para operar en las condiciones de una ciudad capital, que esté compuesto por 2 dos cuerpos rígidos (vagones), unidos por un elemento fijo, denominado enganche. Las dimensiones de este vehículo se toman un fabricante que hace parte de la flota automotriz de este sistema de transporte masivo [17].

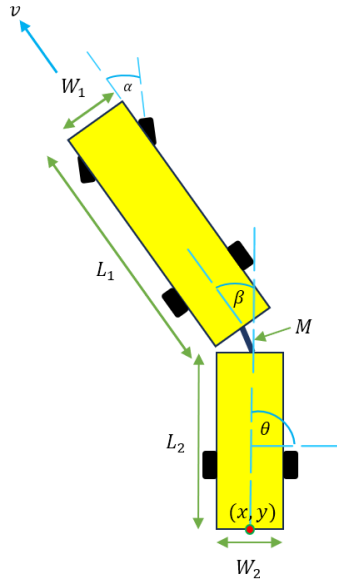


Fig. 2. Representación del modelo no lineal (vehículo de dos cuerpos rígidos)

El modelo no lineal que caracteriza el vehículo de dos cuerpos rígidos (dos vagones) se describe así:

$$\dot{x} = v \cos(\beta) \cos(\theta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (1)$$

$$\dot{y} = v \cos(\beta) \sin(\theta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = v \left(\frac{\sin(\beta)}{L_2} - \frac{M}{L_1 L_2} \cos(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (3)$$

$$\dot{\beta} = v \left(\frac{\tan(\alpha)}{L_1} - \frac{\sin(\beta)}{L_2} + \frac{M}{L_1 L_2} \cos(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (4)$$

Las variables de este modelo, relacionadas en las ecuaciones (1), (2), (3), (4), considerando la coordenada del punto simétrico de partida de la arista posterior del segundo vagón se especifican de la siguiente manera:

- El centro simétrico de la arista posterior del vagón 2 es x .
- El centro simétrico de la arista posterior del vagón 2 es y .
- El ángulo de desplazamiento del vagón 2 es θ .

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- El ángulo de desplazamiento del vagón 1 dependiente de θ es β .

También, se han considerado las siguientes entradas de este modelo no lineal: el ángulo de dirección (eje delantero del vagón 1) definido como α y la velocidad longitudinal v .

Además, se han establecido, según el Sistema Internacional (SI), las unidades de las magnitudes involucradas: para medir la longitud y la posición en metros [m], la rapidez en $\left[\frac{m}{s}\right]$ y para la rotación angular en radianes [rad]. Toda esta parametrización se muestra en la Fig. 2.

Las medidas del vehículo articulado están configuradas a partir de las dimensiones aproximadas que están descritas en la ficha técnica de cierto fabricante [17], además de considerar las dimensiones de una llanta comercial con referencia 295/80R22.5 [18].

Parámetro	Descripción
$M = 0.8m$	Longitud del enganche
$L_1 = 9.5m$	Longitud del vagón 1
$W_1 = 2.5m$	Anchura del vagón 1
$L_2 = 6.6m$	Longitud del vagón 2
$W_2 = 2.5m$	Anchura del vagón 2
$L_{wheel} = 1m$	Diámetro de las ruedas
$W_{wheel} = 0.5m$	Anchura de las ruedas

Tabla 1. Dimensiones del vehículo de dos cuerpos rígidos

El código fuente en Matlab está compuesto por un módulo principal y siete secundarios [19], a continuación, se puede observar en la Fig. 3 la jerarquía de cada uno de ellos respecto a la interacción con el programa principal. Cada una de estas subsecciones se encuentra descrita y representada por un código desde los subcapítulos 2.1. al 2.8.

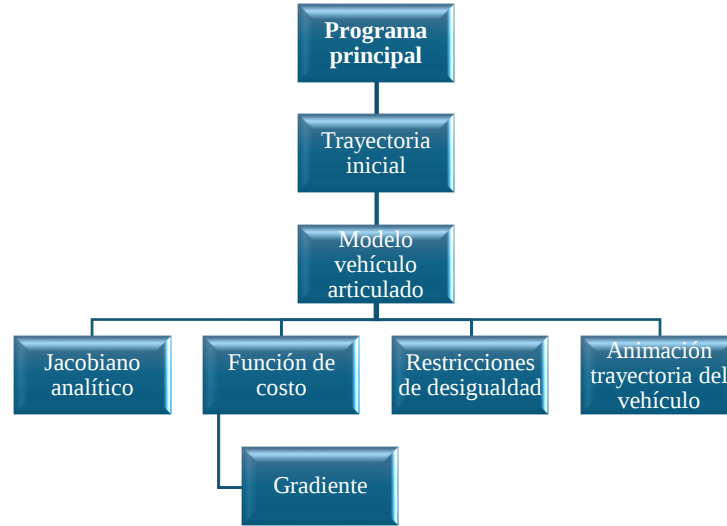


Fig. 3. Programa principal y bloques secundarios

2.1. Módulo principal

Este programa consolida el conjunto de ejecuciones sobre los programas secundarios. En síntesis, se planifica la trayectoria y el control de vehículo articulado.

- Configuración inicial: Se definen los parámetros del vehículo de dos vagones: posiciones inicial y final: (pos_{in} – pos_{fin}).
- Estados y entradas: Los estados del sistema se definen con el par ordenado (x, y) sobre el plano euclídeo de dos dimensiones, el ángulo de desplazamiento θ y el ángulo (orientación) β del vagón 1 respecto al vagón 2.

Las entradas del sistema son: el ángulo de dirección α y la velocidad longitudinal v .

- Visualización inicial: Se llama la función que realiza las transformaciones y, por ende, la animación de la trayectoria del vehículo desde la posición inicial hasta la final.

2.1.1. **MPC:** Se crea un objeto *nlmpcMultistage* para el MPC no lineal (NMPC) multietapa (p pasos) de 4 estados y 2 entradas. Con su respectivo tiempo de muestreo ($T_s = 0.5$ s). Este objeto requiere llamar a la función de ecuaciones de estados (*StateFcn*) y su correspondiente Jacobiano analítico (*StateJacFcn*), junto con la

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

configuración de las restricciones para las entradas y estados del sistema. Las restricciones de las variables de entradas son:

Restricciones de variables	
Ángulo de dirección: α	$\left[-\frac{\pi}{4} \text{ rad}, \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right]$
Velocidad longitudinal: v	$[-15, 15]$
Ángulo de giro del vagón 1: β	Restricción mecánica $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ rad}, \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right]$

Tabla 2. Restricciones de las variables de entrada y de estado.

También se llama a la función de costo total J , la cual se explica en la siguiente sección, en donde se establecen las etapas (ct) del algoritmo de control con base en la ecuación 5.

$$J = u^T W_{mv} u \quad (5)$$

Donde u es el vector de entradas y W_{MV} la matriz de ponderación de entradas. Además de la función de costo total, este objeto NLMPC requiere el vector gradiente de esta función J descrito como:

$$\nabla J = 2 W_{MV} u \quad (6)$$

Otra de las funciones requeridas para que se ejecute correctamente el algoritmo de control MPC es la función de restricción de desigualdad, la cual lee las posibles colisiones respecto a una distancia de seguridad (ver ecuación (10)), el estado final en la generación de la trayectoria del vehículo es el reposo (0's sus 4 variables de estado) al final del horizonte de predicción.

2.1.2. Se genera la trayectoria inicial (*Guess*) utilizando una heurística sencilla:

$$[simdata.InitialGuess, XY0] = \text{trayin}(posin, posfin, u0, p) \quad (7)$$

2.1.3. La función *nlmpcmove* se usa para obtener la trayectoria óptima del vehículo. También, se define tiempo de cálculo t , el costo de la función objetivo (*info.Cost*) descrita como la magnitud de la velocidad longitudinal al cuadrado, el estado de

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

salida (*info.ExitFlag*) y, por último, el número de iteraciones que definen la trayectoria (*info.Iterations*).

- 2.1.4. Por último, se ejecuta la parte principal del programa junto con los parámetros del modelo y su incertidumbre añadida para los diferentes escenarios para la simulación de la trayectoria utilizando la función *getSimulationData* y visualización de ésta en lazo cerrado (*Closed Loop*) con el objeto *simData* en k veces definida según su modelo de pruebas [20]. Lo que permite recalcular las variables de entrada para ahorrar el tiempo de cálculo y a su vez, mejorar el rendimiento del controlador y disminuir la generación de errores [21].

2.2. Función de costo

Esta función establece la relación de las entradas de control u para el MPC. Para calcular el costo se utiliza una matriz diagonal de ponderación W_{MV} para ajusta la relevancia relativa de las variables de la entrada de control según sea el cálculo del costo total.

$$costo = u^T W_{MV} u \quad (8)$$

Esta expresión, normalmente, representa una forma cuadrática (la sumatoria de la rapidez del vehículo al cuadrado [22]) que penaliza las entradas de control según cada peso configurado en la matriz de ponderación.

Por ejemplo, si la matriz de ponderación W_{MV} se plantea como una matriz diagonal con los valores asignados en la ecuación 9:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Esto quiere decir que la velocidad longitudinal tiene una mayor ponderación respecto al ángulo de dirección, específicamente, si la velocidad longitudinal es igual a 1 y el ángulo de dirección es 0.2, entonces, los cambios efectuados en la velocidad longitudinal van a tener un efecto doble en el ángulo de dirección que equivale a 0.5. En consecuencia, se prioriza mantener constante la velocidad v sobre cambios bruscos en la dirección α que tome el vehículo articulado [23].

2.3. Vector gradiente de la función de costo

El gradiente se define como un vector con magnitud y dirección del máximo cambio de la función de costo respecto a las variables de control [24]. Igualmente, permite encontrar la dirección en la cual se deben ajustar dichas variables con el objeto de minimizar la función de costo en cada paso p de predicción, mejorando la capacidad de respuesta del control y se simplifiquen los procedimientos para encontrar la ruta óptima del articulado [22].

En particular, se calcula el gradiente analítico de la función de costo respecto a los estados G_x y a las entradas de control G_{MV} . La matriz de ponderación W_{MV} especifica la ponderación relativa de las entradas de control, por ejemplo, cuando su diagonal principal son 1's significa que las dos entradas de control se ejecutan con el mismo peso para la función de costo.

$$G_{MV} = 2 W_{MV} u \quad (10)$$

Se calcula a partir de las derivadas parciales de la función de costo respecto a las variables de entradas u , (considerando que $u^T = u$):

$$\begin{aligned} costo &= u^T W_{MV} u = u^2 W_{MV} \\ \rightarrow \nabla costo &= 2u W_{MV} = G_{MV} \end{aligned} \quad (11)$$

El gradiente, respecto a los estados G_x , es un vector de ceros $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ debido a que la función de costo no depende explícitamente de ellos.

2.4. Restricciones de desigualdad

Esta función permite que el vehículo identifique los obstáculos del área de estacionamiento y así no realice colisiones y que garanticen las restricciones de las ecuaciones de estado, así como la de incertidumbre que se incorpore al modelo de prueba, de esta manera el MPC calcule de manera efectiva un conjunto de parámetros que no permitan mantener al articulado

en posiciones incorrectas, para esto es importante hacer uso de la retroalimentación de estados propia de este algoritmo de control [25]. No obstante, no se puede asegurar que durante la trayectoria planeada no se generen choques, el parámetro *ExitFlag* brinda más información al respecto (consultar Tabla 3).

$$cineq = - \begin{bmatrix} distancia_{vagon\ 1, 1} \\ distancia_{vagon\ 1, 2} \\ \dots \\ distancia_{vagon\ 1, n} \\ distancia_{vagon\ 2, 1} \\ distancia_{vagon\ 2, 2} \\ \dots \\ distancia_{vagon\ 2, n} \end{bmatrix} + distanciaSeguridad \quad (12)$$

Donde:

$distancia_{vagon\ 1, i}$: Distancia entre el vagón 1 y el obstáculo i

$distancia_{vagon\ 2, i}$: Distancia entre el vagón 2 y el obstáculo i

n : Número de obstáculo en el entorno

safetyDistance: Distancia de seguridad que se debe mantener

Todas las distancias entre los vagones y los obstáculos se concatenan y no deben superar la distancia de seguridad. Asimismo, esta función destaca la penalización en el momento que se presenten colisiones con los obstáculos fijos sin alterar sustancialmente la estabilidad y la viabilidad de la planeación de la trayectoria [26].

2.5. Jacobiano analítico

Esta función describe las derivadas parciales de las ecuaciones de estado, es decir, que establece la relación entre los cambios de los estados y las entradas al sistema. Se pueden expresar las ecuaciones para el vehículo articulado con la siguiente expresión:

$$\dot{x} = f(x, u, p) \quad (13)$$

Donde:

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- x : vector de estados
- u : vector de entradas
- p : vector de parámetros

En síntesis, el Jacobiano se calcula así:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \big|_{x=x_{actual}, u=u_{actual}, p=p_{actual}} \quad (14)$$

Donde x_{actual} , u_{actual} , p_{actual} son los valores actuales de los estados, entradas y parámetros, respectivamente.

La linealización del modelo sigue la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = Ax + Bu \quad (15)$$

La implementación de la función de estados y su Jacobiano analítico tiene una contribución significativa para la reducción de los cálculos computacionales [27], lo que permite optimizar la respuesta del sistema con cierto grado de incertidumbre, además, mejora notablemente la robustez y precisión del algoritmo del MPC. Se destaca también el papel del jacobiano analítico para la linealización de planta no lineal alrededor de una trayectoria de referencia, implementarlo es fundamental para brindar estabilidad y eficiencia [28]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A(1,3) & A(1,4) \\ 0 & 0 & A(2,3) & A(2,4) \\ 0 & 0 & A(3,3) & A(3,4) \\ 0 & 0 & A(4,3) & A(4,4) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B(1,1) & B(1,2) \\ B(2,1) & B(2,2) \\ B(3,1) & B(3,2) \\ B(4,1) & B(4,2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Por ende, a continuación, se describen las derivadas parciales a partir de las ecuaciones de estado:

- $A(1,3)$: Derivada parcial de $\dot{x}$ respecto a θ :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} = -v \cos(\beta) \sin(\theta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (17)$$

- **A(1, 4):** Derivada parcial de $\dot{x}$ respecto a β :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\beta) \left(\frac{M}{L_1} \sec^2(\beta) \tan(\alpha) \right) \right] \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \sin(\beta) \tan(\beta) \tan(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{L_1} \cos(\beta) \sec^2(\beta) \tan(\alpha) \right] \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \sin^2(\beta) \sec(\beta) \tan(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{L_1} \sec(\beta) \tan(\alpha) \right] \tag{18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) (\sin^2(\beta) \sec(\beta) - \sec(\beta)) \right] \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \sec(\beta) (\sin^2(\beta) - 1) \right] \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) + \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \sec(\beta) (1 - \sin^2(\beta)) \right] \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) + \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \sec(\beta) \cos^2(\beta) \right] \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta} &= v \cos(\theta) \left[-\sin(\beta) + \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \cos(\beta) \right]\end{aligned}$$

- **A(2, 3):** Derivada parcial de $\dot{y}$ respecto a θ :

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} = v \cos(\beta) \cos(\theta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \tag{19}$$

- **A(2, 4):** Derivada parcial de $\dot{y}$ respecto a β :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\beta) \left(\frac{M}{L_1} \sec^2(\beta) \tan(\alpha) \right) \right) \tag{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \sin(\beta) \tan(\beta) \tan(\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{M}{L_1} \cos(\beta) \sec^2(\beta) \tan(\alpha) \right) \\
 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \sin^2(\beta) \sec(\beta) \tan(\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{M}{L_1} \sec(\beta) \tan(\alpha) \right) \\
 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) (\sin^2(\beta) \sec(\beta) - \sec(\beta)) \right) \\
 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) - \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \sec(\beta) (\sin^2(\beta) - 1) \right) \\
 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) + \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \sec(\beta) (1 - \sin^2(\beta)) \right) \\
 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) + \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \sec(\beta) \cos^2(\beta) \right) \\
 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \beta} &= v \sin(\theta) \left(-\sin(\beta) + \frac{M}{L_1} \tan(\alpha) \cos(\beta) \right)
 \end{aligned}$$

- **A(3,3)**: Derivada parcial de $\dot{\theta}$ respecto a θ :

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (21)$$

- **A(3,4)**: Derivada parcial de $\dot{\theta}$ respecto a β :

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \beta} = v \left(\frac{\cos(\beta)}{L_2} + \frac{M}{L_1 L_2} \sin(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (22)$$

- **A(4,3)**: Derivada parcial de $\dot{\beta}$ respecto a θ :

$$\frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} = 0 \quad (23)$$

- **A(4,4)**: Derivada parcial de $\dot{\beta}$ respecto a β :

$$\frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} = v \left(-\frac{\cos(\beta)}{L_2} - \frac{M}{L_1 L_2} \sin(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (24)$$

- **B(1,1)**: Derivada parcial de $\dot{x}$ respecto a α :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} &= v \cos(\beta) \cos(\theta) \left(\frac{M}{L_1} \tan(\beta) \sec^2(\alpha) \right) \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial v} &= v \cos(\beta) \cos(\theta) \left(\frac{M \tan(\beta)}{L_1 \cos^2(\alpha)} \right)\end{aligned}\quad (25)$$

- **B(1, 2):** Derivada parcial de $\dot{x}$ respecto a v :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial v} = \cos(\beta) \cos(\theta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (26)$$

- **B(2, 1):** Derivada parcial de $\dot{y}$ respecto a α :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} &= v \cos(\beta) \sin(\theta) \left(\frac{M}{L_1} \tan(\beta) \sec^2(\alpha) \right) \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial v} &= v \cos(\beta) \sin(\theta) \left(\frac{M \tan(\beta)}{L_1 \cos^2(\alpha)} \right)\end{aligned}\quad (27)$$

- **B(2, 2):** Derivada parcial de $\dot{y}$ respecto a v :

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial v} = \cos(\beta) \sin(\theta) \left(1 + \frac{M}{L_1} \tan(\beta) \tan(\alpha) \right) \quad (28)$$

- **B(3, 1):** Derivada parcial de $\dot{\theta}$ respecto a α :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \alpha} &= v \left(-\frac{M}{L_1 L_2} \cos(\beta) \sec^2(\alpha) \right) \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial v} &= v \left(-\frac{M \cos(\beta)}{L_1 L_2 \cos^2(\alpha)} \right)\end{aligned}\quad (29)$$

- **B(3, 2):** Derivada parcial de $\dot{\theta}$ respecto a v :

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial v} = \frac{\sin(\beta)}{L_2} - \frac{M}{L_1 L_2} \cos(\beta) \tan(\alpha) \quad (30)$$

- **B(4, 1):** Derivada parcial de $\dot{\beta}$ respecto a α :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \alpha} &= v \left(\frac{\sec^2(\alpha)}{L_1} + \frac{M}{L_1 L_2} \cos(\beta) \sec^2(\alpha) \right) \\ \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial v} &= v \left(\frac{1}{L_1 \cos^2(\alpha)} + \frac{M \cos(\beta)}{L_1 L_2 \cos^2(\alpha)} \right)\end{aligned}\quad (31)$$

- **B(4, 2):** Derivada parcial de $\dot{\beta}$ respecto a v :

$$\frac{\partial \dot{\beta}}{\partial v} = \frac{\tan(\alpha)}{L_1} - \frac{\sin(\beta)}{L_2} + \frac{M}{L_1 L_2} \cos(\beta) \tan(\alpha) \quad (32)$$

2.6. Ecuaciones de estado

Esta función determina las ecuaciones de estado en función de sus variables de estado x , las entradas de control u y sus parámetros p :

- La posición en x , se describe en la ecuación (1).
- La posición en y , se describe en la ecuación (2).
- El ángulo de desplazamiento θ , en la ecuación (3).
- Por último, la orientación β se relaciona en la ecuación (4).

2.7. Trayectoria inicial

Esta función elabora una trayectoria inicial desde la posición inicial hasta la final, ésta la divide en tres tramos con puntos intermedios equidistantes. Al MPC le aporta la estimación inicial de cómo debería planear la trayectoria en todo el horizonte de predicción y es importante para iniciar y calcular la secuencia óptima de las posteriores acciones de control. En definitiva, permite una convergencia rápida del control hacia una solución óptima. Si esta trayectoria inicial es precisa concede al MPC [29]:

- Anticiparse al comportamiento del sistema para hacer ajustes más finos en las acciones de control.
- Que se mitiguen las perturbaciones ya que es un sistema no lineal y tiene un elevado grado de inestabilidad.

2.8. Trayectoria del vehículo articulado

Esta función dibuja las trayectorias del vehículo articulado en el plano bidimensional con todos sus componentes y dimensiones:

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- Se crea una figura para la visualización de las trayectorias inicial y óptima, con las dimensiones del área de parqueo, estableciendo las coordenadas (x, y) para la posición inicial en un marcador rojo y para la posición final en un marcador verde.
- Se crean los obstáculos fijos del área de estacionamiento con sus respectivas dimensiones y posiciones, y se definen como objetos de colisión dentro del *ToolBox* de robótica.
- Se utiliza una subfunción para animar el movimiento del vehículo articulado en toda la trayectoria optimizada. Para hacerlo, calcula iterativamente una matriz cuadrada de tamaño 3 que redefine la posición del vagón 1 en el espacio bidimensional. Los elementos de la matriz se modifican de la siguiente manera:

$$T_{vagon_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{L_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

En T_{vagon_1} hay un desplazamiento horizontal en $\frac{L_1}{2}$ unidades en la dirección positiva de x . En el restante de elementos no se ven modificados sus valores.

- De la misma manera se hace para el segundo vagón, los elementos de esta matriz cuadrada se ven modificados así:

$$T_{vagon_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{L_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

En T_{vagon_2} hay un desplazamiento horizontal en $\frac{L_2}{2}$ unidades en la dirección positiva de x . En el restante de elementos no se ven modificados sus valores.

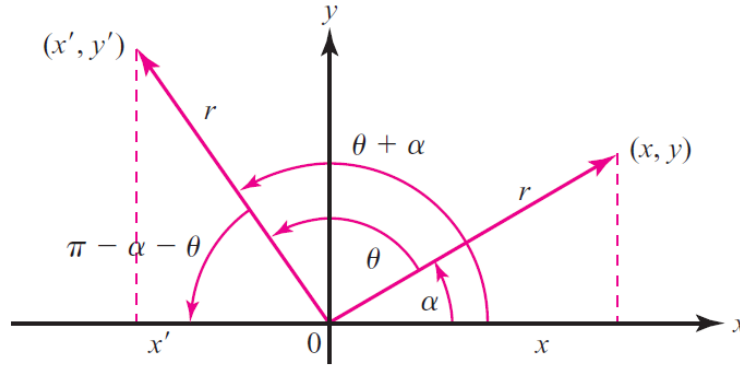


Fig. 4. Transformación de rotación [30]

- Posteriormente se definen las matrices de transformación en el plano para rotar en dos dimensiones los puntos que representan la orientación del vagón 1, tal como se puede notar en la Fig. 4. Para generar una rotación con cierto ángulo en sentido antihorario respecto al origen del plano de coordenadas [30], las ecuaciones de transformación se definen así:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{aligned} \quad (35)$$

Descrita en forma matricial, linealmente independientes, la transformación se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Para el vagón 1 cada posición se redefine específicamente así:

$$T_{vagon_1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & x_1 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Donde:

- θ_1 : Es el ángulo de orientación del vagón 1.

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- x_1, y_1 : Es el par ordenado del centro simétrico de la arista posterior del vagón 2.

Para el vagón 2 la matriz de transformación de las coordenadas que representan su posición se escribe así:

$$T_{vagon_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & x_2 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Donde:

- θ_2 : Es el ángulo de orientación del vagón 2.
- x_2, y_2 : Par ordenado del centro simétrico de la arista posterior del vagón 2

También se redefine la matriz de transformación para rotar las ruedas del vagón 1 según se consideren los valores asociados al ángulo α , que es la dirección del eje delantero.

$$T_{wheel} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Donde:

α : Es el ángulo de dirección del eje delantero

- Se describe también las matrices de transformación para la traslación de las coordenadas de las ruedas al punto de referencia del vagón 1 [30].

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Sus ecuaciones de transformación homogéneas son:

$$\begin{aligned} x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y \end{aligned} \quad (41)$$

Para las cuatro ruedas del vagón 1 se describe cada matriz de traslación:

- Delantera izquierda (FL):

$$T_{wheel_{FL}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & \frac{W_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

- Delantera derecha (FR):

$$T_{wheel_{FL}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & -\frac{W_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

- Trasera izquierda (RL):

$$T_{wheel_{FL}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{W_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

- Trasera derecha (RR):

$$T_{wheel_{FL}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{W_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Así como las dos ruedas del vagón 2:

- Izquierda (L):

$$T_{wheel_L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{W_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

- Derecha (R):

$$T_{wheel_L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{W_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Por último, se establece la matriz de coordenadas asociada al enganche entre los vagones:

$$M_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Donde:

La primera columna representa las coordenadas (x_a, x_b) y la segunda columna representa las coordenadas (y_a, y_b) . La primera coordenada está en el origen $(0, 0)$, y la segunda está a una distancia M hacia la izquierda del eje x .

3. METODOLOGÍA

3.1. Caso de estudio

Para un conductor con alto grado de experticia en la conducción de vehículos articulados, la acción repetitiva de ubicar un vehículo articulado entre otros vehículos de iguales dimensiones y considerando otros obstáculos como los muros de área de estacionamiento se haría a través de los siguientes pasos:

- a) El conductor considera las dimensiones del vehículo y luego evalúa el espacio disponible para ubicarlo en la posición final de parqueo, ya que en la gran mayoría de casos se debe posicionar entre dos vehículos de iguales dimensiones. También tendría presente otros obstáculos fijos como los muros de la superficie de parqueo.
- b) El conductor se basa en la información descrita en el anterior literal y luego fija la trayectoria de mayor conveniencia para ingresar el vehículo al espacio de estacionamiento. Debido a la longitud y articulación de este, las maniobras de ir hacia adelante y hacia atrás podrán repetirse una y otra vez dependiendo del espacio reducido y la orientación en la que debe quedar el vehículo. Durante el trayecto el

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

conductor tendrá que evitar colisiones en el entorno que puede visualizar y del que no puede visualizar (puntos ciegos).

- c) Cuando se aproxima al área reducida de estacionamiento, el operario debe realizar ajustes finos tanto a la dirección como a la velocidad debido a la estrechez del espacio, y así ejecutar una correcta alineación entre los dos vehículos articulados.
- d) Por último, deberá verificar que se haya estacionado en la posición y orientación correcta, además de asegurar que no haya obstrucciones para luego permitir la salida del vehículo.

Esta acción repetitiva también depende del estado fatiga y estrés del conductor, hasta de las condiciones climáticas: la lluvia reduce la visibilidad y la radiación solar puede encandilar la visión del conductor, lo que puede conllevar a realizar más maniobras para ubicar adecuadamente el vehículo o generar colisiones. En síntesis, aunque un conductor tenga alto grado de experticia, en algunas ocasiones pueden incurrir en fallos, lo que en síntesis se resume en un mayor tiempo de estacionamiento. No obstante, es lo que se intenta emular en el algoritmo de control para la planeación de la ruta óptima del articulado para que sean más naturales y seguras las maniobras realizadas en tramo [31].

El caso de estudio presentado en este trabajo se contextualiza en la ciudad de Barranquilla, en su sistema de transporte masivo Transmetro [32], donde se movilizan aproximadamente 68 000 usuarios por día en toda su flota, la cual dispone de 92 vehículos articulados que se movilizan por su dos troncales: Murillo y Olaya Herrera. Este sistema dispone de un Patio Taller llamado “Nelson Pinedo” que se aprecia en la imagen satelital (Fig. 5):

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

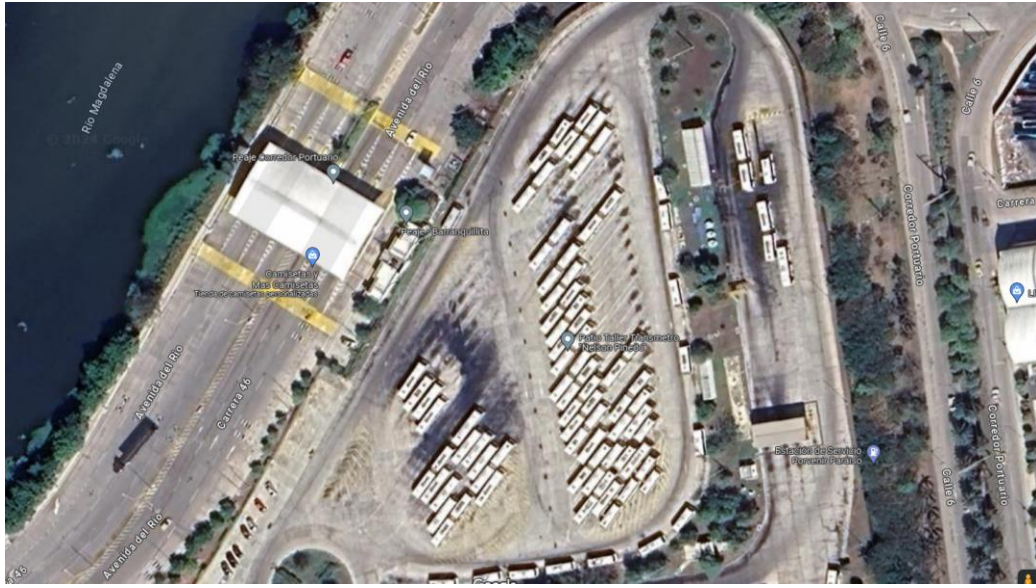


Fig. 5. Patio Taller "Nelson Pinedo" [33]

Aquí se puede notar las marcas en el suelo producto de la movilización frecuente de este tipo de vehículos, donde se evidencia que hay espacios muy reducidos para estacionarlos. Ahora, restringiendo una superficie de parqueo de articulados:



Fig. 6. Área de parqueo de articulados Transmetro [33]

3.2. Configuración de los escenarios en MATLAB

Se reconstruye en una figura este escenario, con cierta similitud y a escala, con las siguientes dimensiones: 110 metros de largo por 50 metros de ancho, así como se aprecia en la Fig. 7.

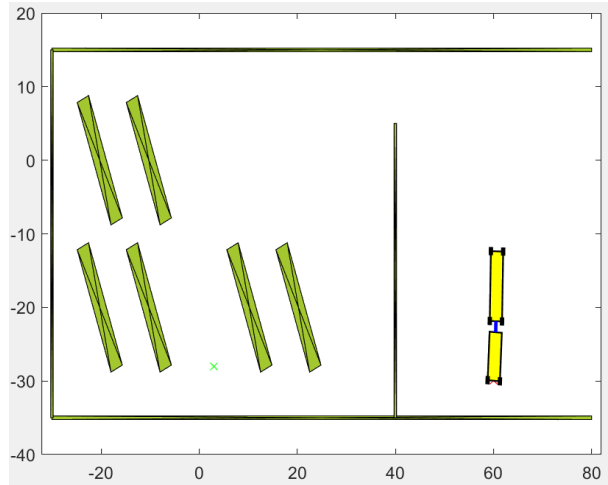


Fig. 7. Área de estacionamiento para articulados [34]

Para la posición inicial, para efectos de simulación, se le han agregado una incertidumbre aleatoria de 0.05 en todos sus cuatro componentes.

Ahora, que se han descrito todos los componentes, funciones, objetos y transformaciones relacionadas de este trabajo en el anterior capítulo, el protagonista MPC es el bloque de control utilizado para trazar la trayectoria del articulado, el cual asume que una de las variables manipuladas sea la velocidad longitudinal. Dicha elección es realizada debido a que la planeación se hace a una velocidad baja ya que se obtiene mejores resultados como en los vehículos rígidos de un solo cuerpo, aunque en otro tipo de modelos la función de costo se enfoca en la aceleración [35] que otorga más precisión en el control, pero es más usado en situaciones que requieran cambios rápidos en la velocidad, también tiene una mejor respuesta ante las perturbaciones para mantener la estabilidad del articulado, no obstante, el modelo descrito las ecuaciones (1-4) son de mayor complejidad, lo que se traduce en mayor costo computacional [36] en la ejecución del algoritmo, también, debido a que es un sistema subactuado sujeto a restricciones no holonómicas, el seguimiento de la trayectoria representa un desafío de gran magnitud, por eso se hace necesario considerar la robustez del MPC no lineal para que se puedan superar las restricciones e incertidumbres según las condiciones que sean asignadas en toda la ruta planeada [37].

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

Ahora, en configuración con el algoritmo, primero se debe validar la posición inicial que no debe estar sobre un obstáculo fijo (objetos de colisión), tampoco fuera de las dimensiones configuradas, las cuales son detectadas en tiempo real a través de las funciones concretas del Toolbox de robótica.

Para encontrar la ruta óptima se utiliza el objeto *nlpmcMultistage* que proporciona flexibilidad y eficiencia para la optimización de sistemas no lineales. Este MPC, con horizonte de predicción para cada etapa p , especifica:

- La función de costo.
- Las funciones de restricción de desigualdad e igualdad específicas para cada etapa.

El estado de la planta (vehículo articulado) y la entrada u asumen los valores de estas funciones de cada etapa. En cada estado actual de la planta $x[k]$, el controlador realiza una búsqueda de cada parte de la trayectoria, desde el tiempo $|k|$ hasta el tiempo $|k + p - 1|$, de esta manera optimiza el costo total de las etapas ($|k|, |k + p|$) sin exceder las restricciones configuradas en cada etapa. Para este modelo se tienen cuatro estados y dos entradas, ambas manipuladas - MV . En la Fig. 8 se observa el comportamiento de este controlador en cada etapa [38].

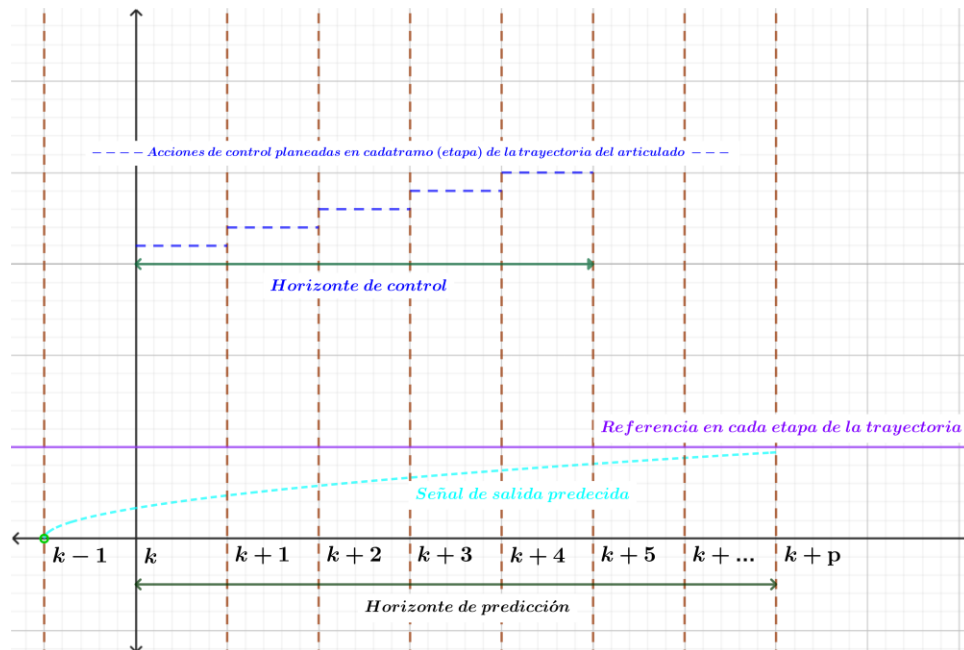


Fig. 8. Señales y horizonte del MPC [38][39]

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

Dentro de este bloque de control la función *fmincon* se utiliza para encontrar los puntos críticos mínimos de la función de costo bivariable, mientras se satisfacen las restricciones de la planta previamente definidas como límites en cada acción de control [40].

En primer lugar, la función cuadrática de costo y su gradiente analítico evalúan iterativamente la preferencia las acciones de control del MPC según el peso de cada variable de entrada: v y α (criterios de rendimiento), en este caso la ponderación relativa se configura así:

$$W_{MV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}$$

Donde:

- 1: Corresponde al peso dado al ángulo de dirección α
- 0.97: Corresponde al peso dado a la velocidad longitudinal v

Esta función de costo, en particular para esta simulación, penaliza ligeramente más al ángulo de dirección que a la velocidad del articulado. Esto se traduce en que los cambios en la velocidad son menos críticos que hacer giros bruscos durante la trayectoria del vehículo que en consecuencia comprometa la seguridad de este, en lugar se pueda trazar una ruta más suave y estable, pero con más flexibilidad en su velocidad.

En la práctica, esta función de costo se basa en la tolerancia de desviación de las etapas de la trayectoria respecto a la ruta deseada, para ello, utiliza dentro de la función *fmincon* el *ode45*, que es un solucionador de ecuaciones diferenciales ordinarias integrado, para proporcionar las coordenadas de cada etapa [41].

Para interpretar la optimización realizada por el bloque de control MPC la función *fmincon* tiene un argumento de salida llamado *exitflag*, el significado de estos valores de salida se especifica en la Tabla 3.

<i>exitflag</i>	Interpretación del resultado
-3	La iteración se ha detenido porque el <i>stepTime</i> es muy pequeño
-2	La iteración se ha detenido porque la dirección de búsqueda es muy pequeña, es decir, el algoritmo de búsqueda de la función de costo no puede encontrar una mejora significativa.

-1	Se detiene la iteración porque se ha detectado divergencia en el proceso de optimización. Por lo general sucede porque la posición final e inicial están en coordenadas que definen una trayectoria demasiado difícil de planear
0	La trayectoria se ha definido, pero no es una solución óptima ya que no se obtuvo una convergencia sobre una solución aceptable
1	Solución óptima de la planeación de la trayectoria y cumple con las restricciones especificadas
2	Hay convergencia para encontrar la trayectoria, pero no se hay garantía de que sea óptima porque que se han alcanzado el máximo número de iteraciones permitidas
> 2	Hay convergencia para encontrar la trayectoria, pero no hay garantía de que sea óptima, ya que las restricciones de igualdad no se han satisfecho en todas las iteraciones.

Tabla 3. Valores de salida del argumento de salida *exitflag* de *fmincon* [42]

Para cada uno de los tres escenarios se ha definido una cantidad específica de iteraciones hasta encontrar la planeación óptima de la trayectoria, que es última iteración de cada escenario. Cada iteración se presenta en guiones gráficos (tablas) de 9 fotogramas que relacionan los movimientos más relevantes del articulado desde el punto inicial (cruz de color rojo) hasta el punto final (cruz de color azul celeste). Los eventos (choques) que se generan, bien sea con otros vehículos o con los muros (obstáculos), o por defecto, cuando no presenta ningún choque y su trayectoria es limpia en todos sus tramos, se pueden visualizar sencillamente en la secuencia presentada en cada iteración. Cada fotograma está compuesto por una configuración de dos áreas de estacionamiento (con o sin el muro divisorio), y la trayectoria inicial (*Guess*) se puede identificar con puntos de color azul celeste y el seguimiento de la trayectoria generada por el MPC, por circunferencias de color azul oscuro.

La descripción de cada iteración consiste en la primera redefinición de la coordenada de partida (punto inicial) que describen sus dos componentes (x, y), el tiempo que se demora la ejecución del algoritmo en Matlab para definir la trayectoria junto con el número de iteraciones que tomo este objeto MPC no lineal y el tiempo requerido para hacerlo, luego se

denota el valor asociado a la sumatoria, al cuadrado, de las velocidades del vehículo articulado. Por último, se especifica el valor asociado al argumento de salida junto con una breve síntesis de lo ocurrido en cada gran iteración.

3.2.1. Escenario 1

Se define el número de etapas $p = 40$, luego de numerosas pruebas. Los valores por encima de esta referencia aumentan el costo computacional del proceso de optimización del MPC, y valores inferiores, no permiten que haya una rápida convergencia de la planeación de la ruta.

Ya predefinido Ts , que es el tiempo de cada paso p , se establece su horizonte de predicción equivalente al producto $p(Ts) = 20$.

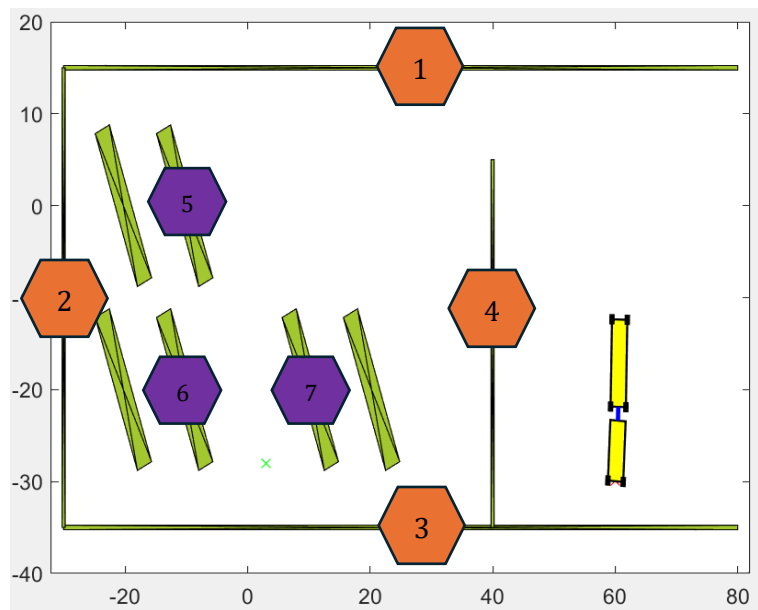


Fig. 9. Objetos de colisión – Posición inicial (rojo) y final (verde) (escenario 1) [34]

Como se aprecia en la Fig. 9, a la derecha se aprecia el articulado de color amarillo, aunque el color distintivo de los vehículos de Transmetro es el blanco, se elige este color para resaltarlos del resto de componentes. Se definen como objetos de colisión:

- Los 4 muros que limitan el espacio de maniobrabilidad del vehículo. Los 3 primeros, demarcados en color naranja, son muros perimetrales, mientras que el 4º objeto de

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

colisión (muro) está ubicado entre la posición inicial y final del vehículo dejando un intersticio de menos de 10 metros para la trayectoria.

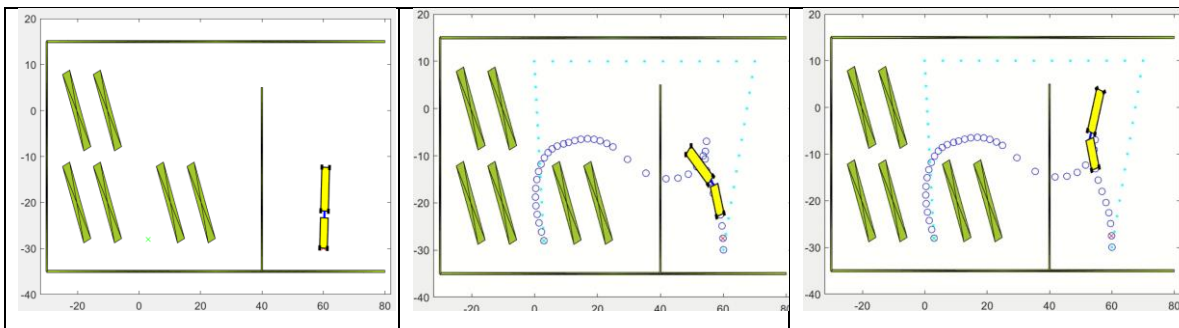
- Y los tres vehículos articulados circunvecinos (objetos de colisión: 5, 6 y 7) al espacio de estacionamiento tienen iguales dimensiones. Como se observa en la Fig. 9 el espacio final de estacionamiento está entre dos vehículos más el vehículo de la parte superior con una inclinación de 22.5° ($\frac{\pi}{8} \text{ rad}$) respecto a la horizontal, lo cual hace que la trayectoria que se deba planear y optimizar sea mucho más compleja.

Luego de que se ha recreado el escenario y se ha indicado las coordenadas:

- Posición inicial (marcador rojo): $\left[x = 60, y = -30, \theta = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0 \right]$
- Posición final (marcador verde): $\left[x = 3, y = -28, \theta = \frac{5\pi}{8}, \alpha = 0 \right]$

El controlador MPC, ajusta continuamente sus acciones en lazo cerrado (*Closed Loop*) en función del estado actual de la planta para compensar la incertidumbre aleatoria en la posición inicial, la cual pueda hacer desviar la trayectoria trazada y optimizada [43]. A continuación, se presenta una prueba de este escenario con la parametrización anteriormente descrita desde la posición inicial aleatoria del vehículo articulado.

- **Primera iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada $(x = 59.9, y = -27.5)$, el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 29 iteraciones es de aproximadamente 143 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1437.682. El argumento de salida (*ExitFlag*) es -2 , por lo tanto, el algoritmo se ha detenido, ya que en la ruta trazada se generan varias colisiones.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

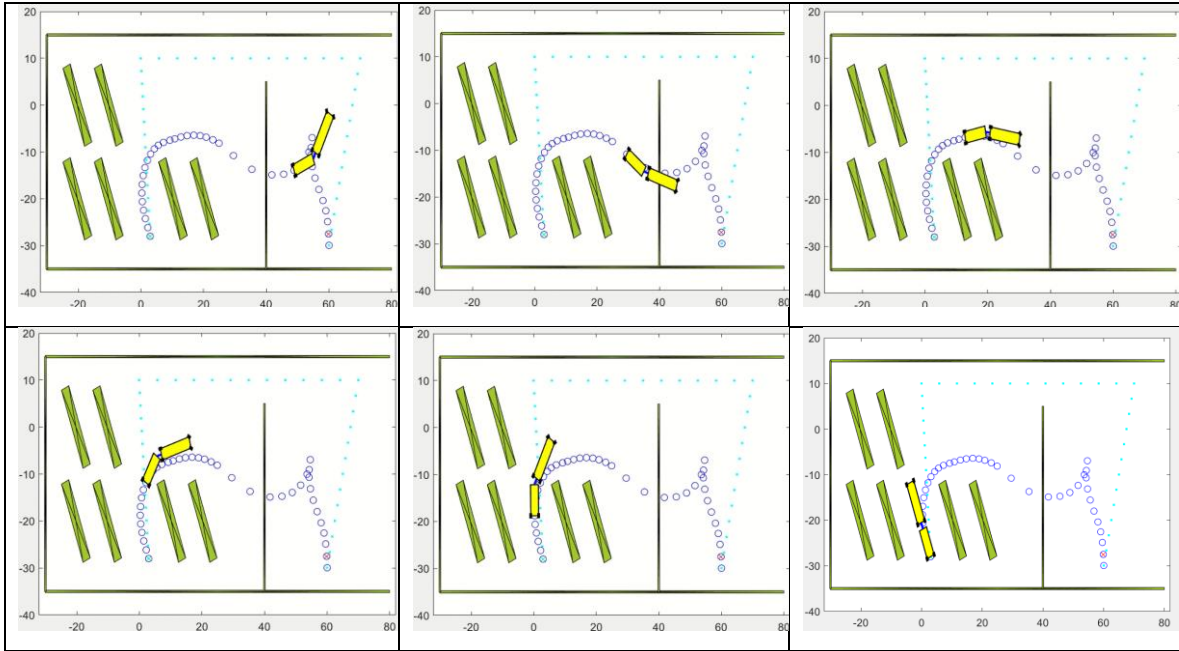


Tabla 4. Iteración 1 (escenario 1)

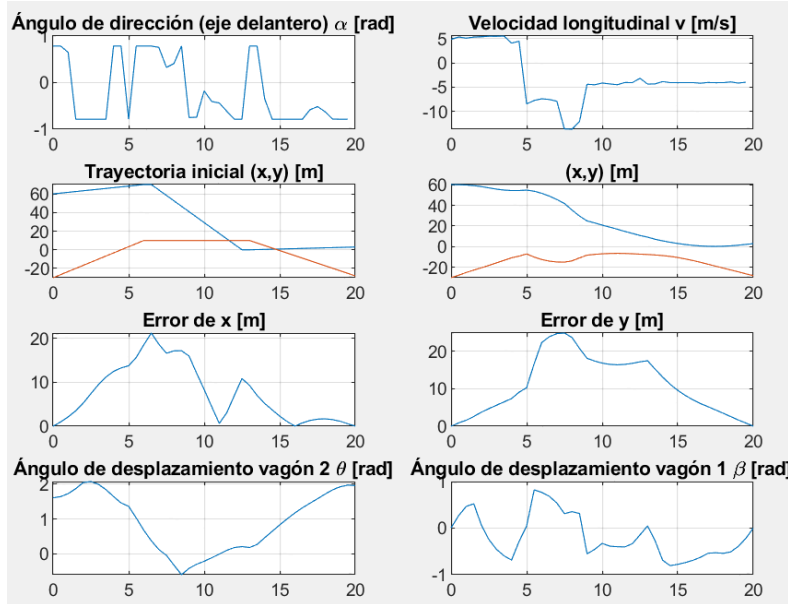


Fig. 10. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 1 (escenario 1)

- **Segunda iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 59.5, y = -24.4$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 139 iteraciones es de aproximadamente 134 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1507.9096. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

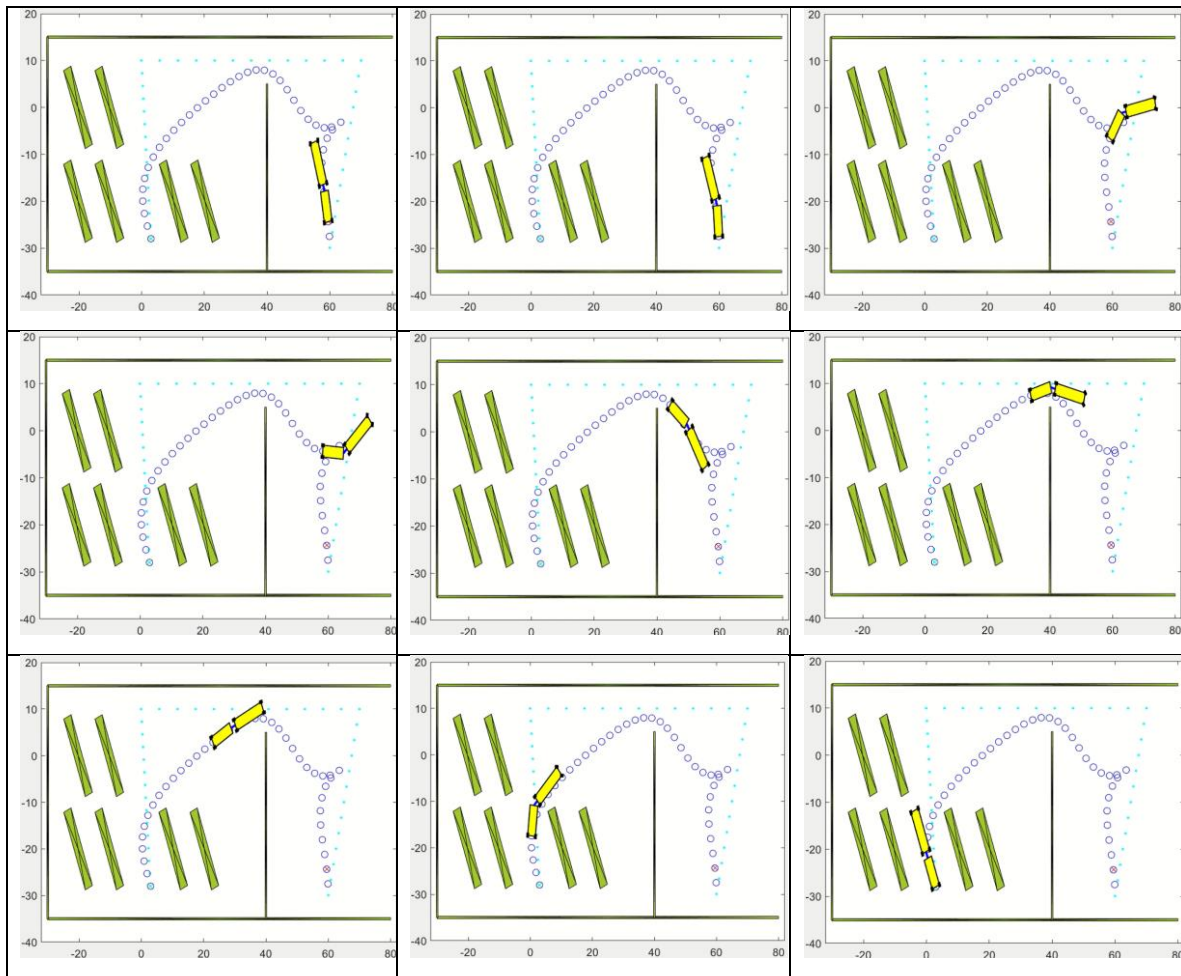


Tabla 5. Iteración 2 (escenario 1)

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

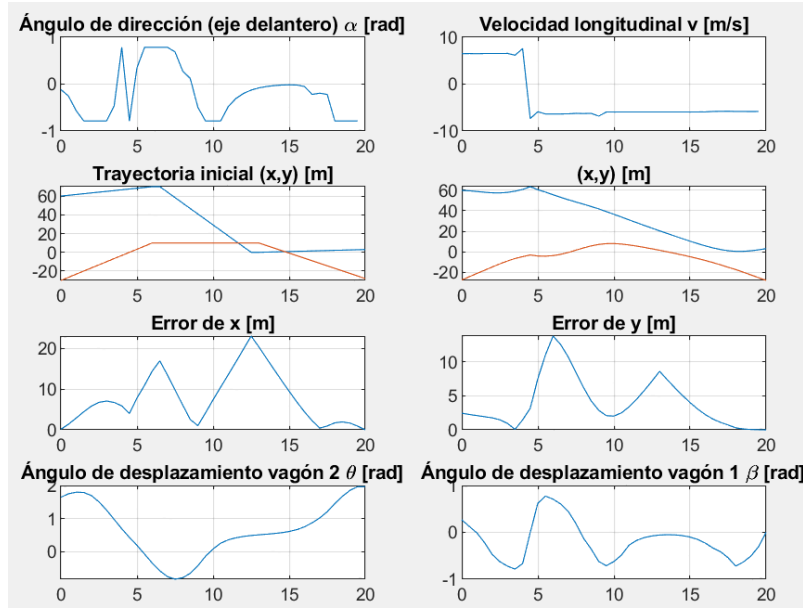
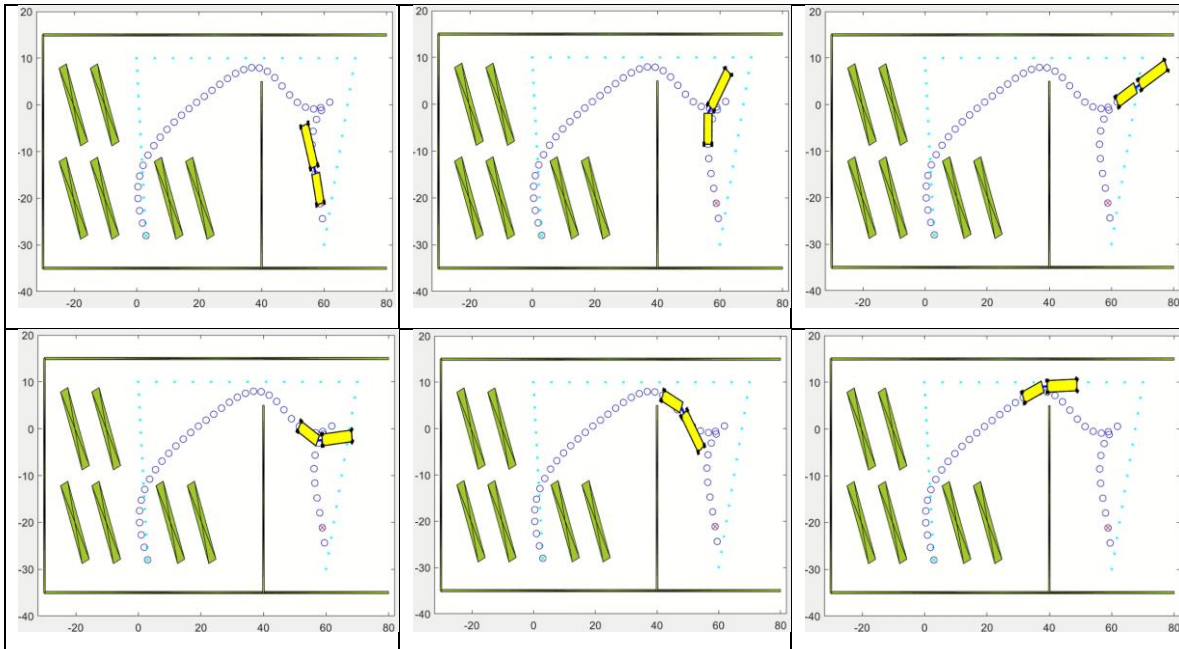


Fig. 11. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 2 (escenario 1)

- **Tercera iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 58.8, y = -21.1$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 129 iteraciones es de aproximadamente 54 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1432.1996. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

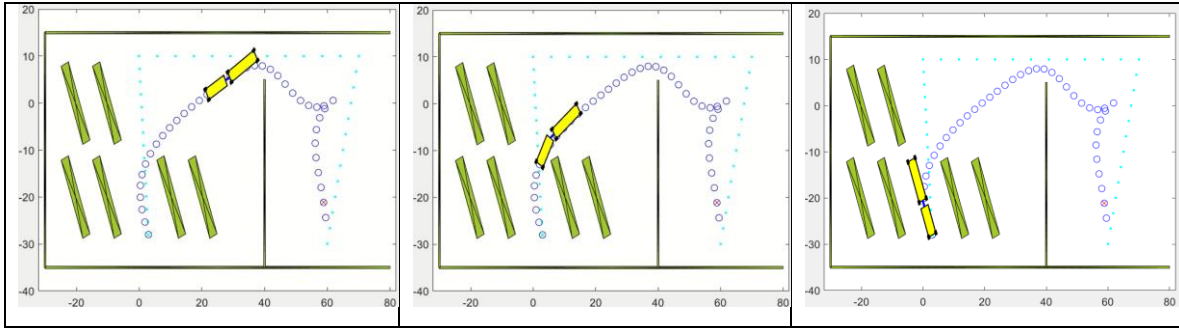


Tabla 6. Iteración 3 (escenario 1)

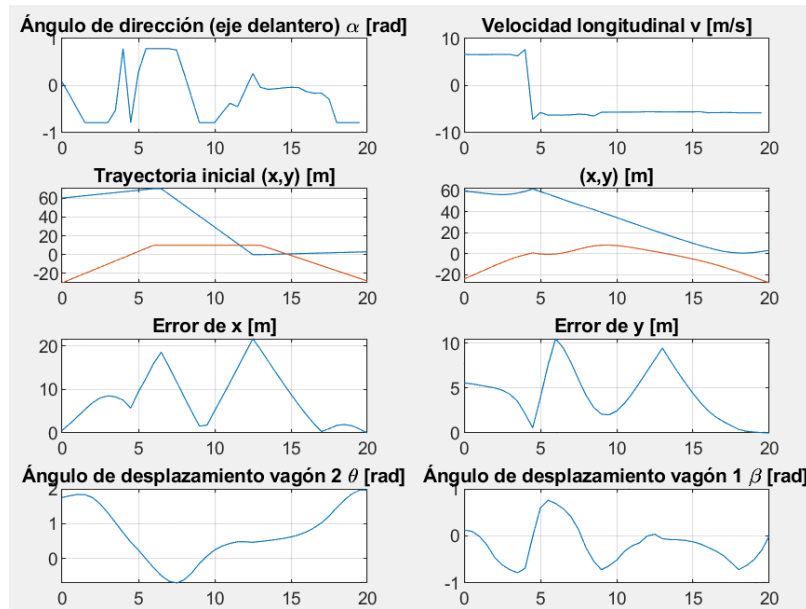


Fig. 12. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 3 (escenario 1)

- **Cuarta iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 58, y = -17.9$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 61 iteraciones es de aproximadamente 45 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1353.8778. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

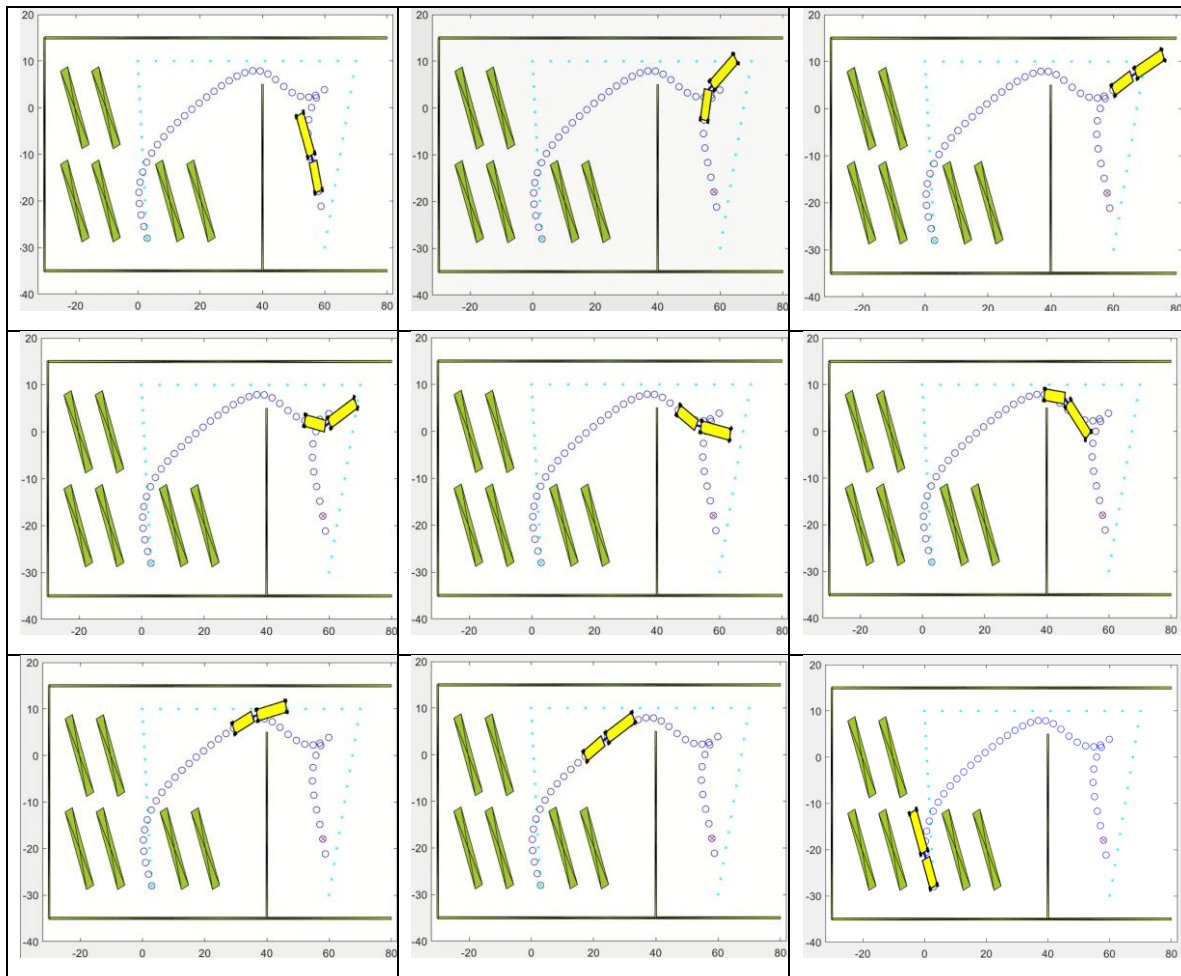


Tabla 7. Iteración 4 (escenario 1)

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

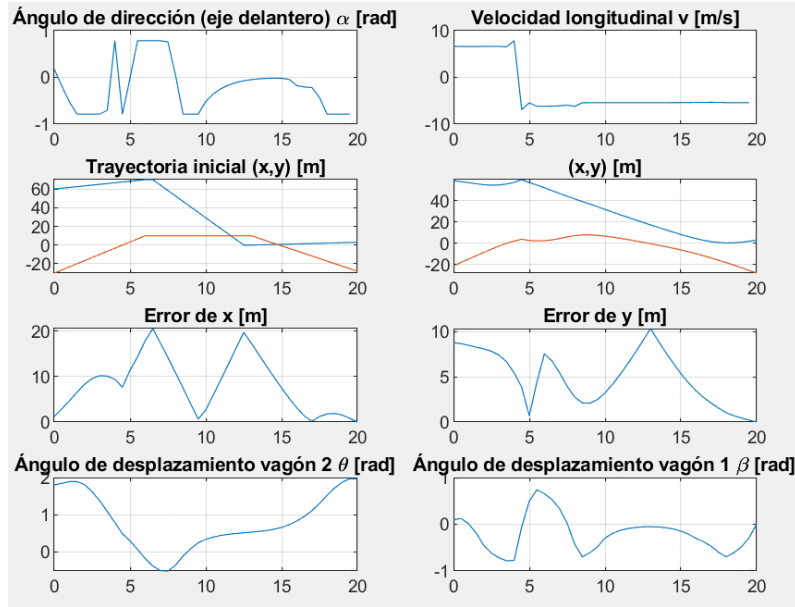
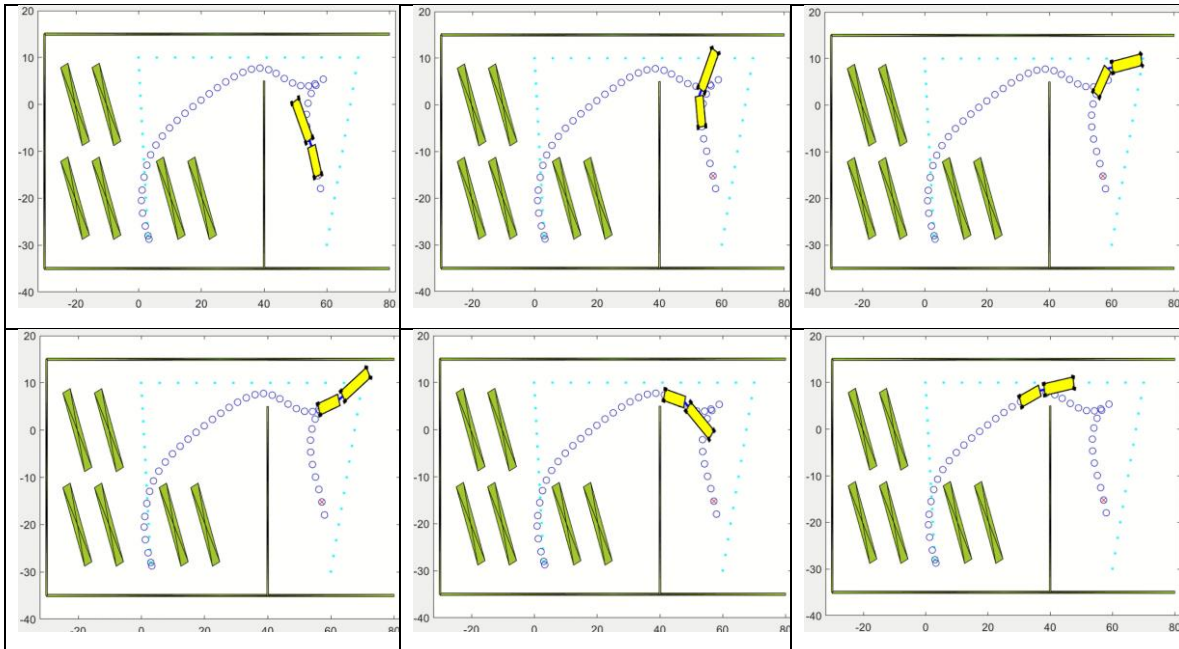


Fig. 13. Gráficas de las variables de entrada (α , v), de estado (x , y , θ , β) y el error de (x , y) para la iteración 4 (escenario 1)

- Quinta iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 57.2, y = -15.2$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 124 iteraciones es de aproximadamente 64 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1305.2336. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

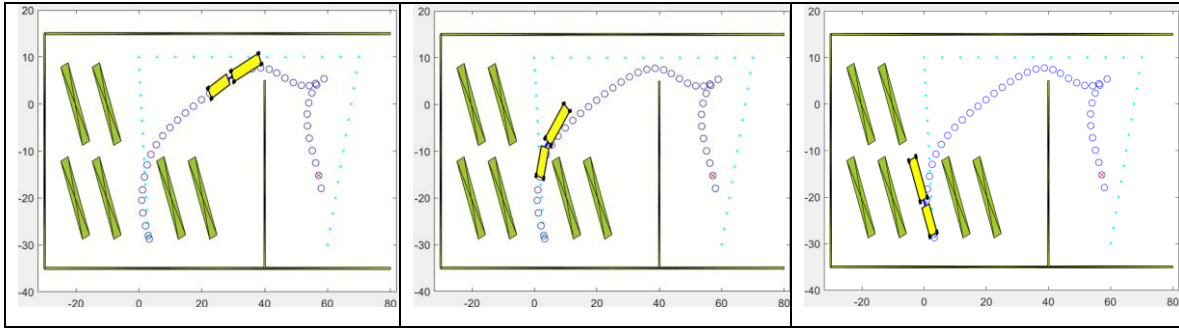


Tabla 8. Iteración 5 (escenario 1)

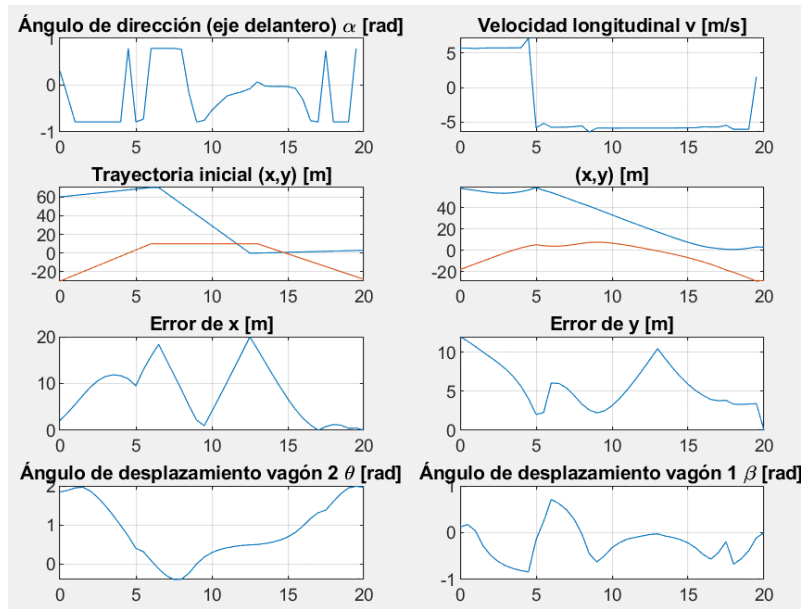


Fig. 14. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 5 (escenario 1)

- **Sexta iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 56.3, y = -12.8$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 139 iteraciones es de aproximadamente 40 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1203.4778. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

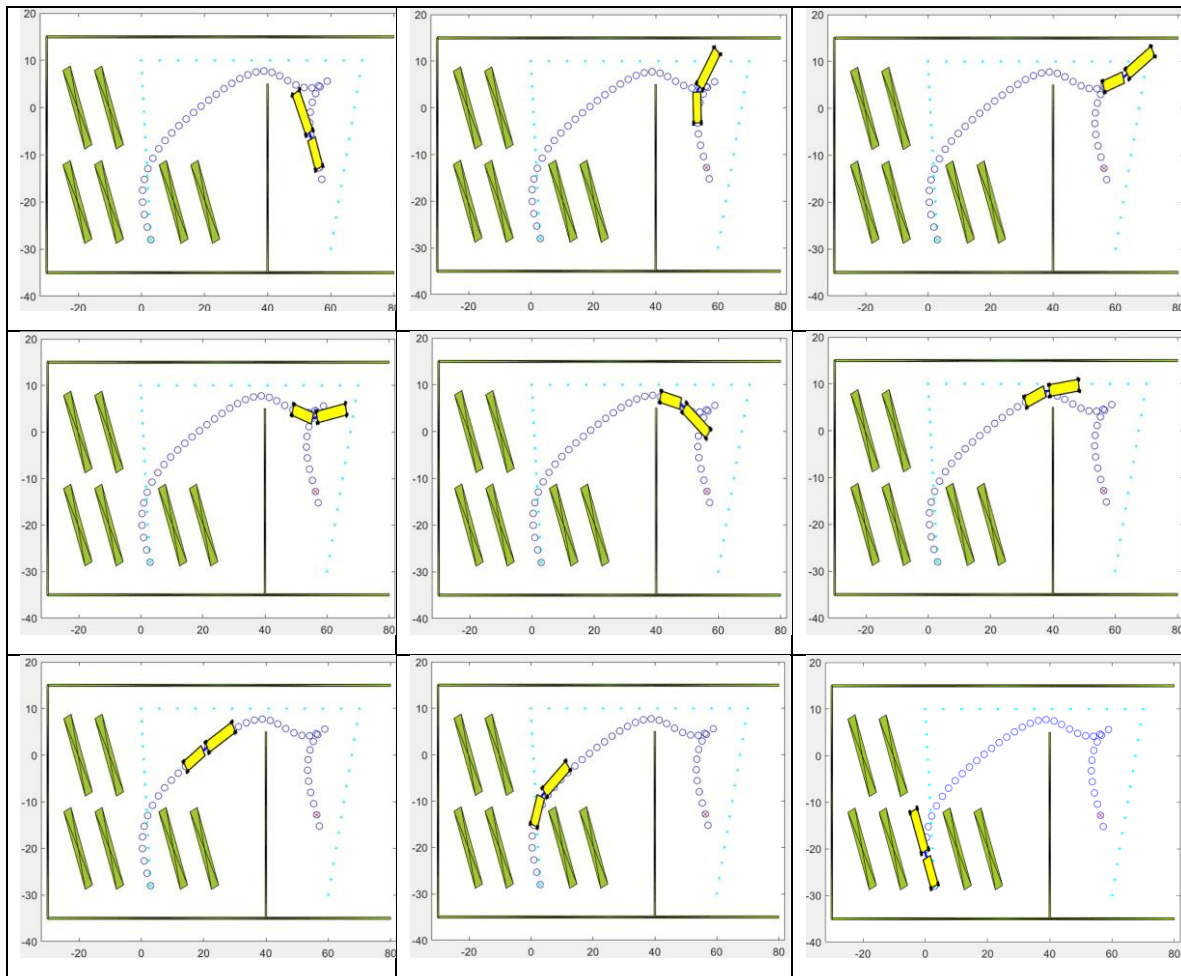


Tabla 9. Iteración 6 (escenario 1)

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

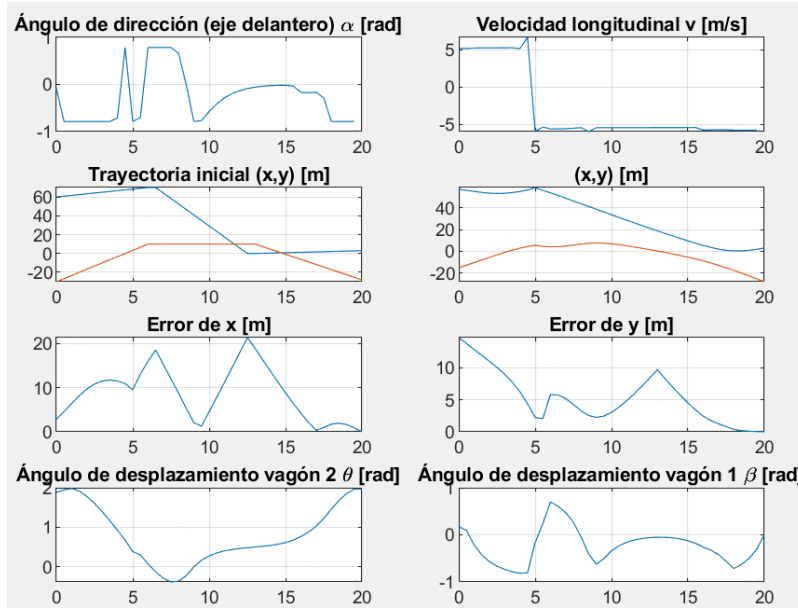
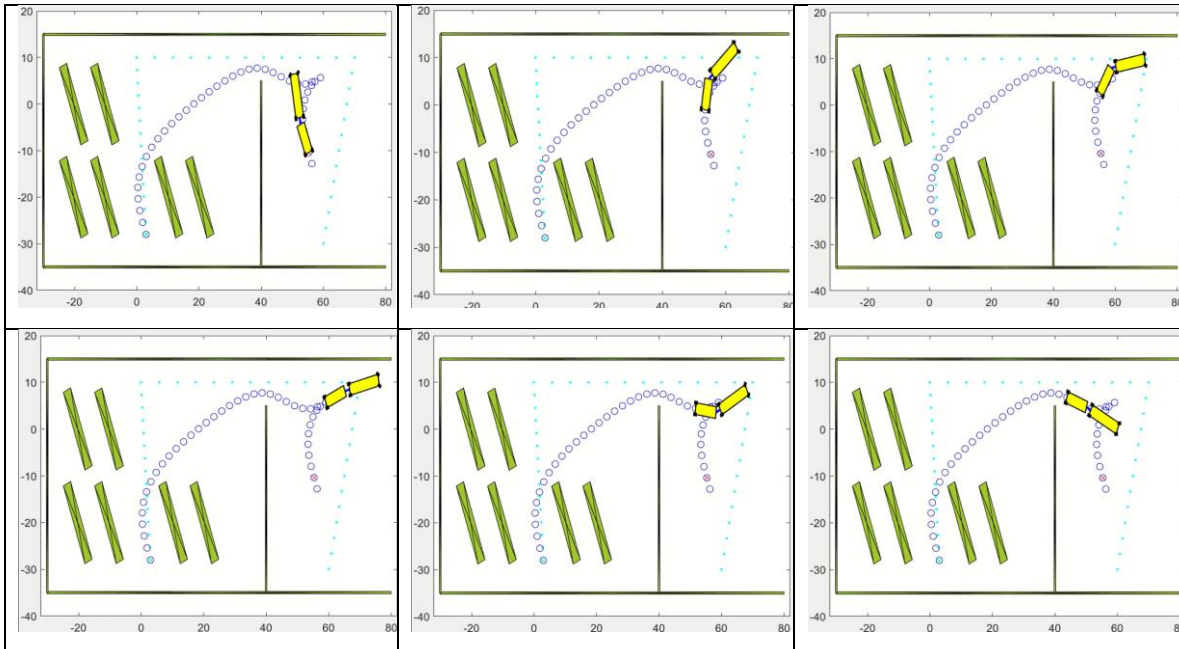


Fig. 15. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 6 (escenario 1)

- **Séptima iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 55.3, y = -10.4$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 57 iteraciones es de aproximadamente 17 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1153.6689. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

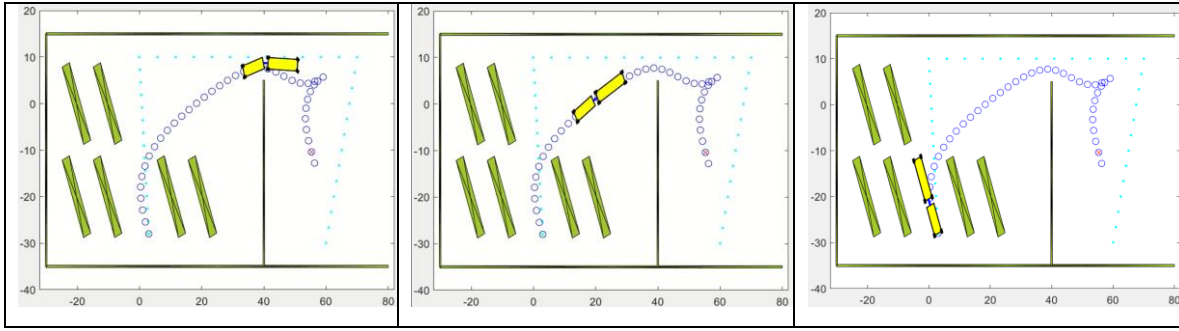


Tabla 10. Iteración 7 (escenario 1)

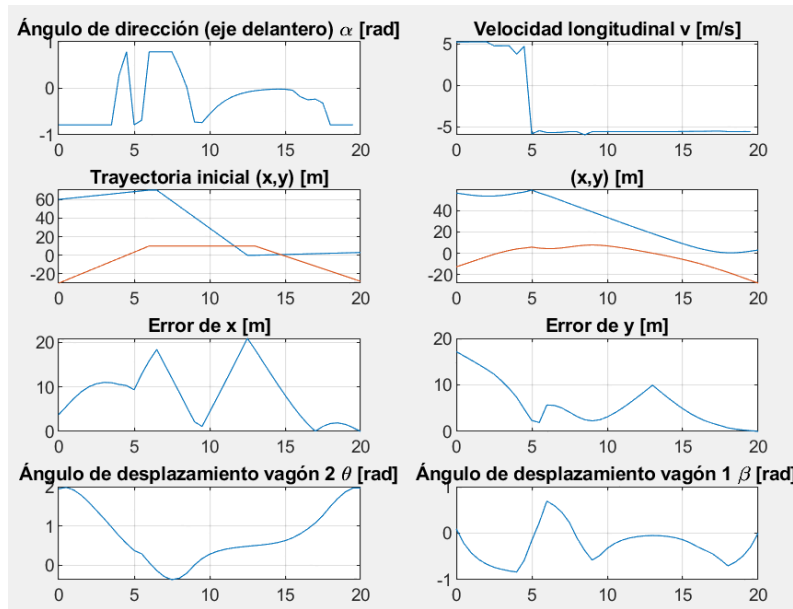


Fig. 16. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 7 (escenario 1)

- **Octava iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 54.4, y = -7.97$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 72 iteraciones es de aproximadamente 32 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1108.3279. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

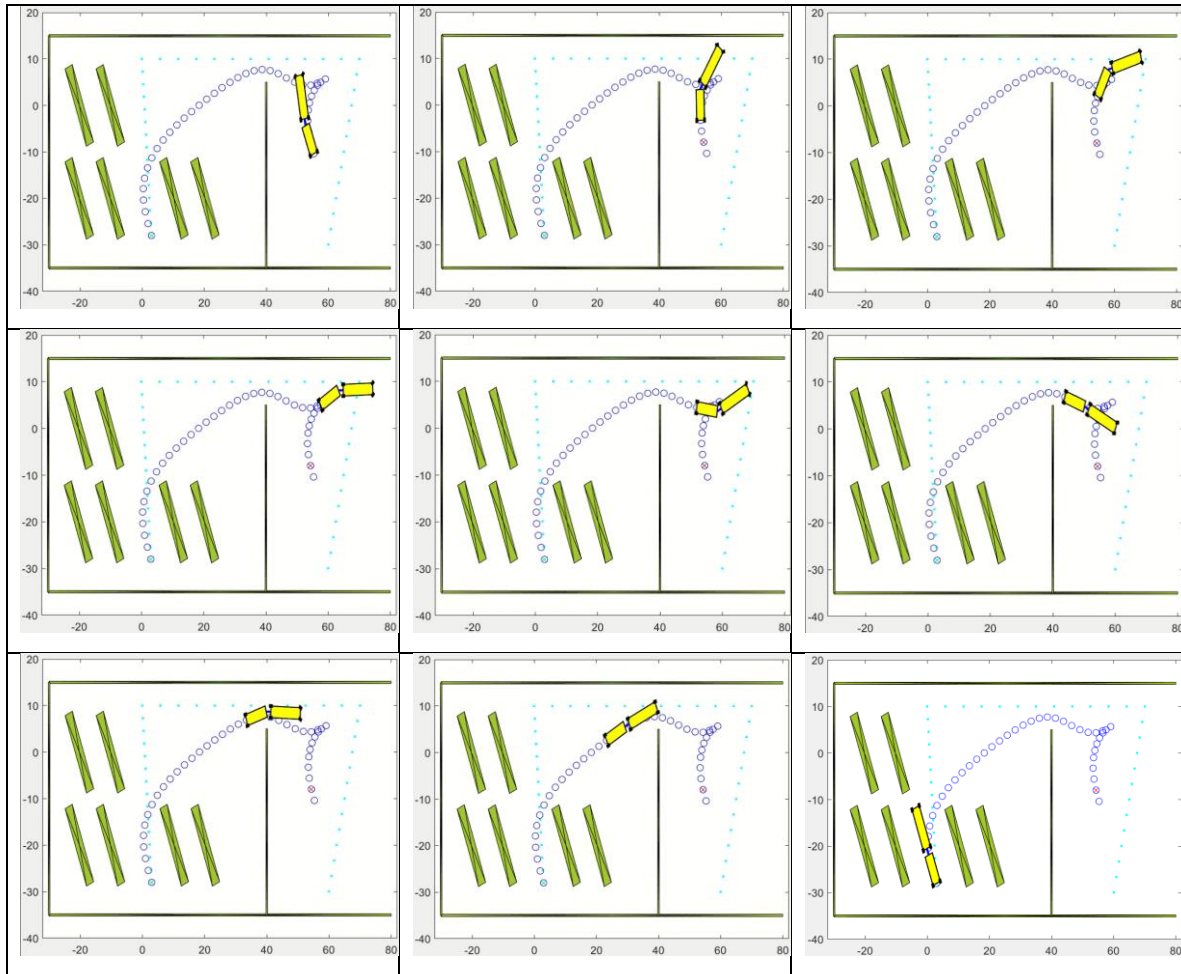


Tabla 11. Iteración 8 (escenario 1)

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

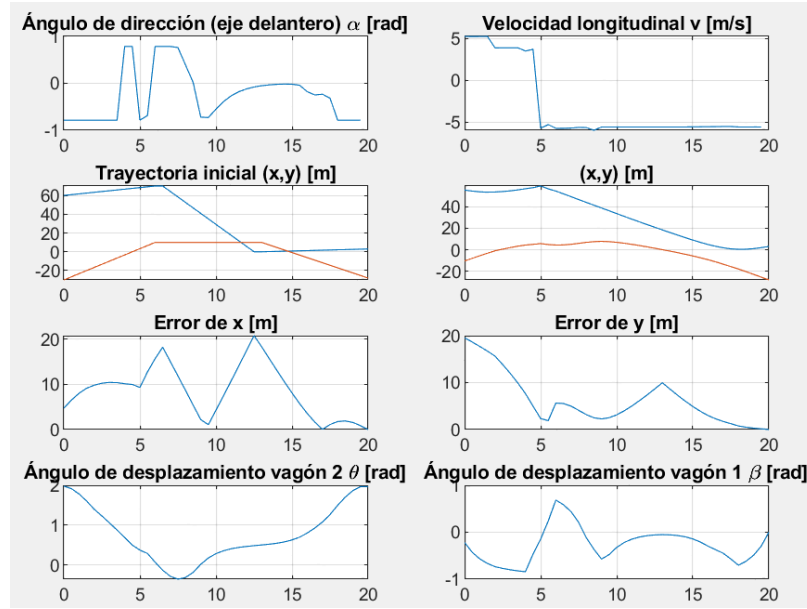
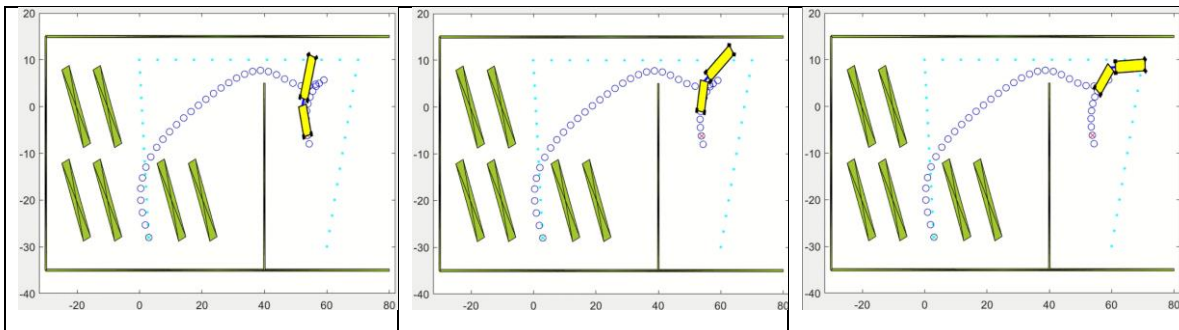


Fig. 17. Gráficas de las variables de entrada (α , v), de estado (x , y , θ , β) y el error de (x , y) para la iteración 8 (escenario 1)

- Novena iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 53.8, y = -6.17$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 71 iteraciones es de aproximadamente 31 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1061.9159. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 1, se establece que se ha encontrado la trayectoria óptima y además no sobrepasa las restricciones especificadas.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

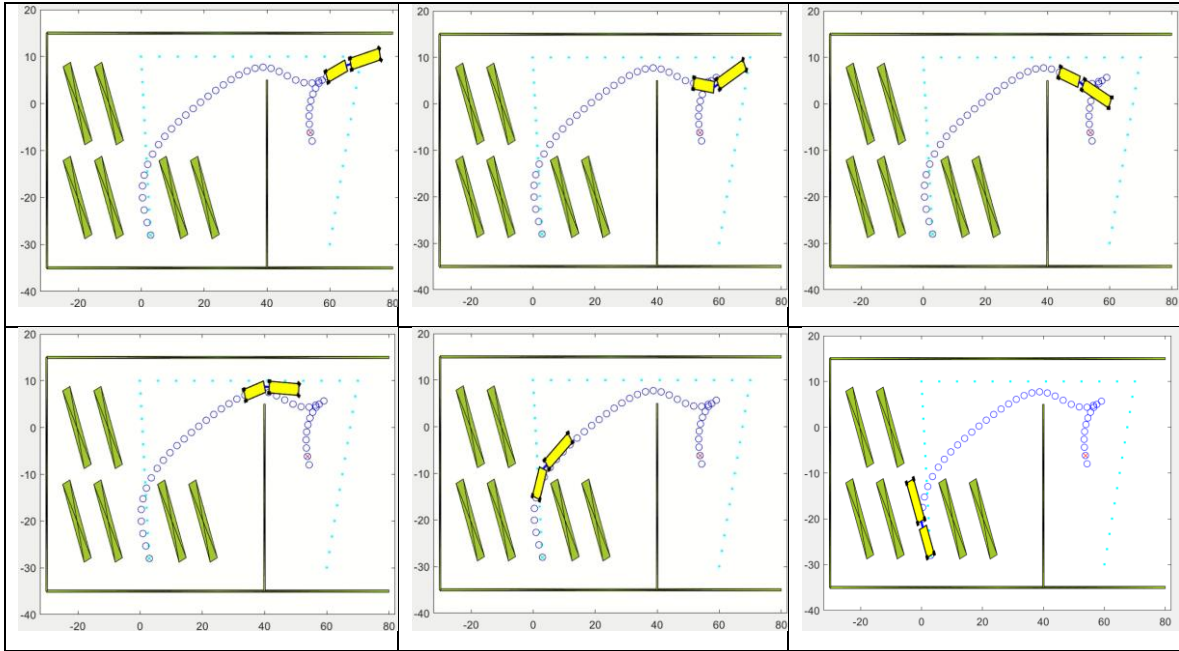


Tabla 12. Iteración 9 (escenario 1)

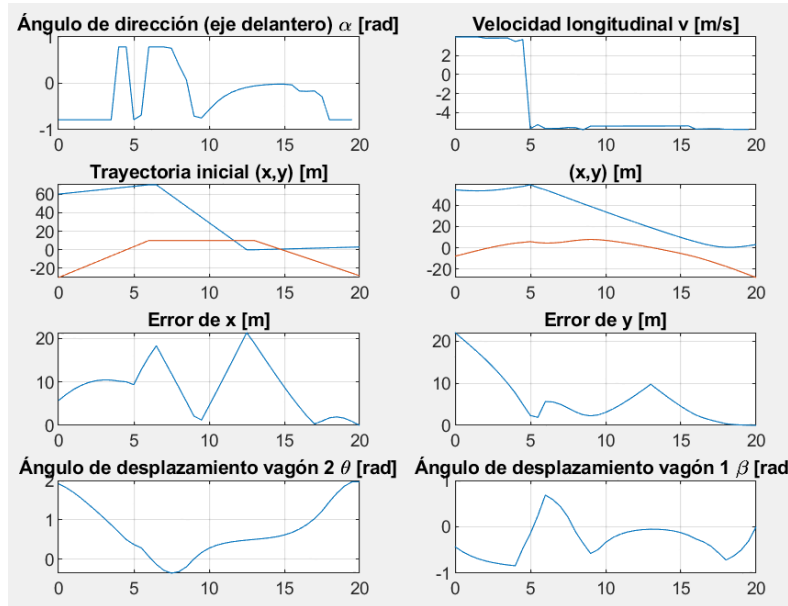


Fig. 18. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 9 (escenario 1)

3.2.2. Escenario 2

En el primer escenario se definieron 40 etapas para que el controlador MPC planeara la trayectoria del vehículo. Esta cifra solo se concretó luego de numerosas pruebas, no obstante,

es imprescindible sustentar matemáticamente la cantidad de etapas que permita que el algoritmo del MPC logre converger en menos iteraciones. Para este caso se calcula la distancia euclidiana entre la posición inicial (x_{in}, y_{in}) y final (x_{fin}, y_{fin}) a través de la expresión descrita en la ecuación 49.

$$\sqrt{(x_{fin} - x_{in})^2 + (y_{fin} - y_{in})^2} \quad (49)$$

Asimismo, el número de etapas p se define multiplicando la distancia calculada por un factor de distancia ($constante = 0.5$):

$$p = \text{round}(\text{distancia} * \text{factordistancia}) \quad (50)$$

Luego se establece un rango razonable, según las pruebas realizadas, para la cantidad mínima y máxima de posibles etapas. Por ende, se usa la función $\min$ y $\max$ para restringir el valor de p entre estos límites:

$$p = \max(\text{etapasminimas}, \min(p, \text{etapasmaximas})) \quad (51)$$

Para este escenario se precisaron 28 etapas. Es decir que, ya predefinido el Ts (tiempo de cada etapa p), se establece el horizonte de predicción equivalente al producto $p(Ts) = 14$.

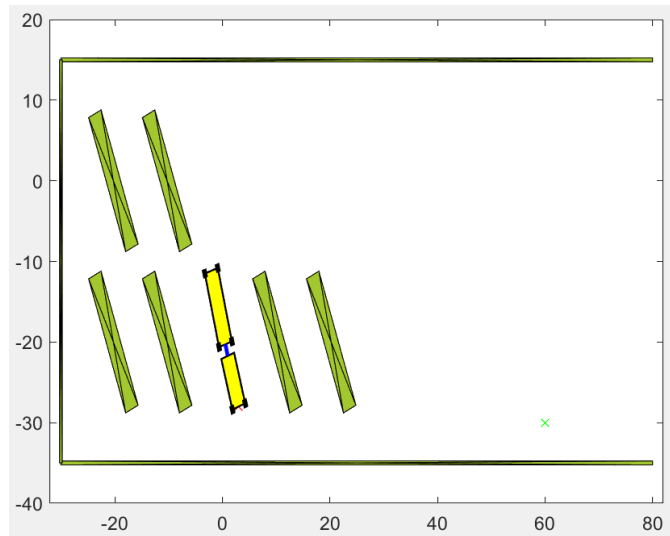


Fig. 19. Objetos de colisión – Posición inicial (rojo) y final (verde) (escenario 2) [34]

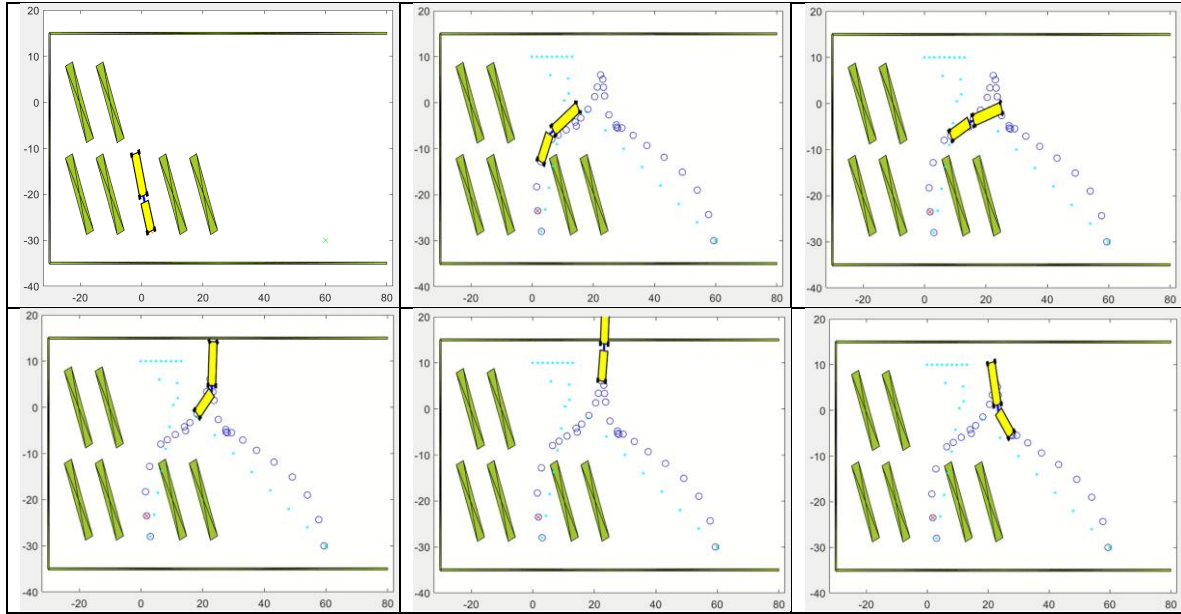
Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

Como se aprecia en la Fig. 20, el articulado de color amarillo, junto con los 3 muros perimetrales. Los tres vehículos articulados circunvecinos tienen iguales dimensiones. Para este escenario, el área final de estacionamiento es un espacio abierto, pero con la particularidad de que la salida del vehículo tiene un intersticio reducido y este debe quedar perpendicular a los muros superior e inferior. Las coordenadas de sus posiciones se definen así:

- Posición inicial (marcador rojo): $\left[x = 3, y = -28, \theta = \frac{5\pi}{8}, \alpha = 0 \right]$
- Posición final (marcador verde): $\left[x = 60, y = -30, \theta = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0 \right]$

En este caso también el controlador MPC ajusta continuamente sus acciones en lazo cerrado (Closed Loop) en función del estado actual de la planta.

- **Primera iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada $(x = 1.85, y = -23.5)$, el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 6 iteraciones es de aproximadamente 11 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1560.0258. El argumento de salida (*ExitFlag*) es -2 , por lo tanto, el algoritmo se ha detenido, ya que en la ruta trazada se generan varias colisiones.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

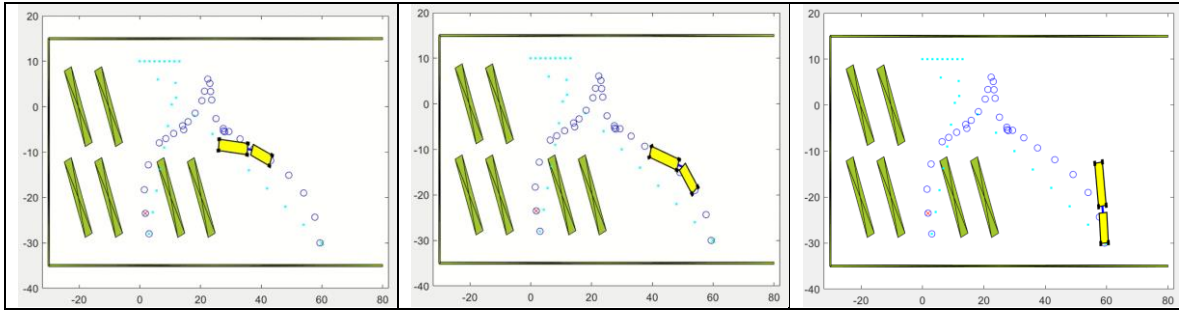


Tabla 13. Iteración 1 (escenario 2)

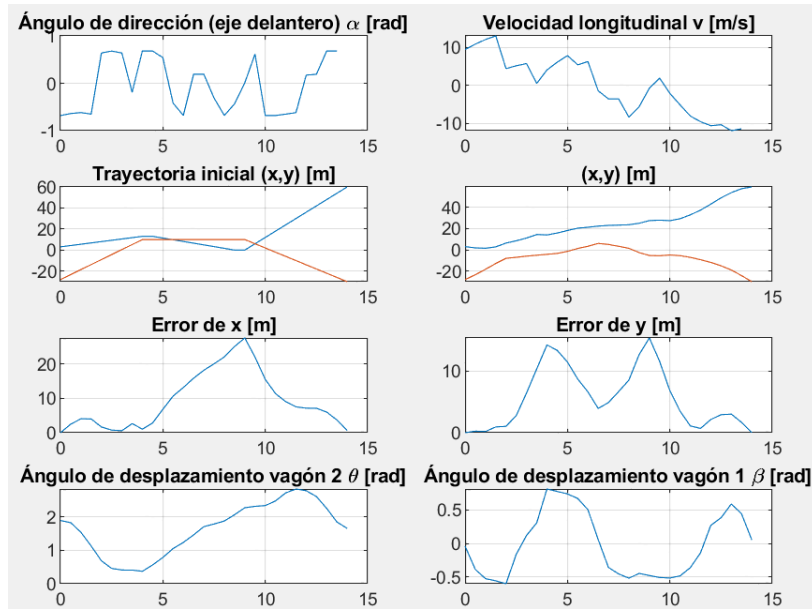
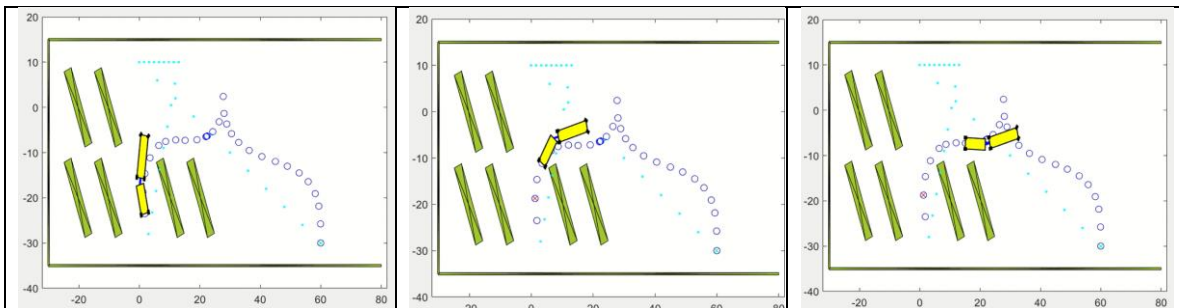


Fig. 20. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 1 (escenario 2)

- **Segunda iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 1.26, y = -18.7$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 16 iteraciones es de aproximadamente 24 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1803.4782. El argumento de salida (*ExitFlag*) es -2 , por lo tanto, el algoritmo se ha detenido, ya que en la ruta trazada se generan varias colisiones.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

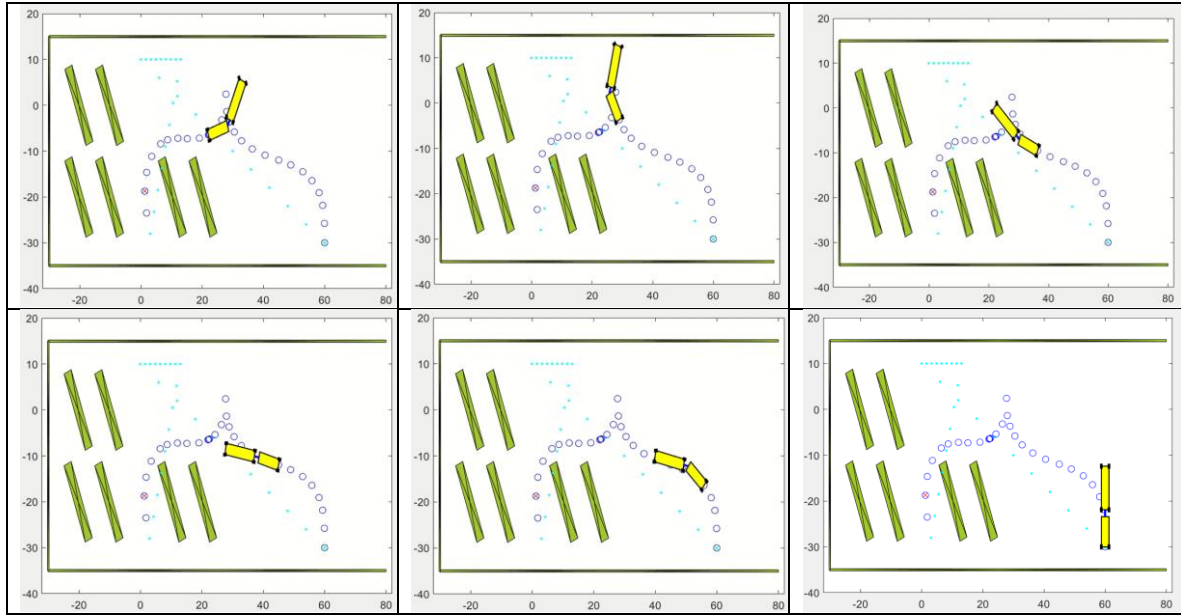


Tabla 14. Iteración 2 (escenario 2)

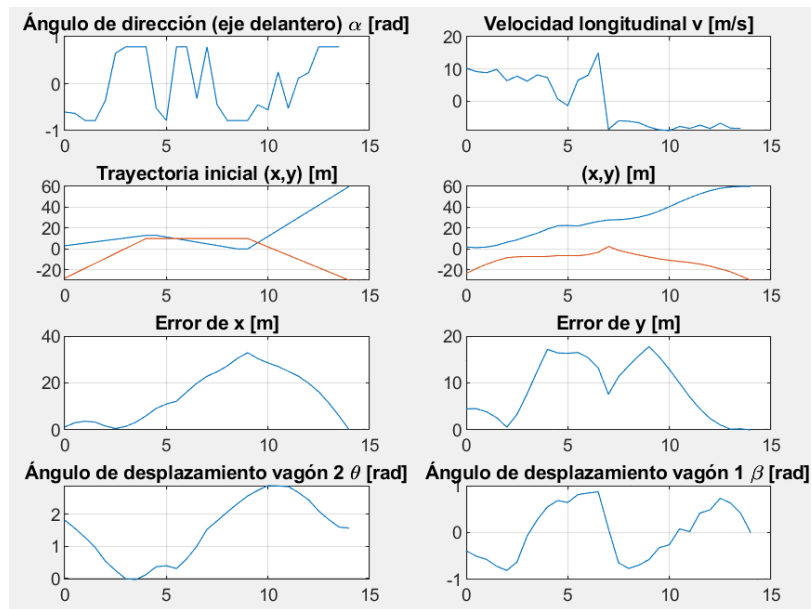


Fig. 21. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 2 (escenario 2)

- **Tercera iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 1.3, y = -15.4$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 3 iteraciones es de aproximadamente 4 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 718.1153. El argumento de salida (*ExitFlag*) es -2 , por lo tanto, el algoritmo se ha detenido, ya que en la ruta trazada se generan varias colisiones.

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

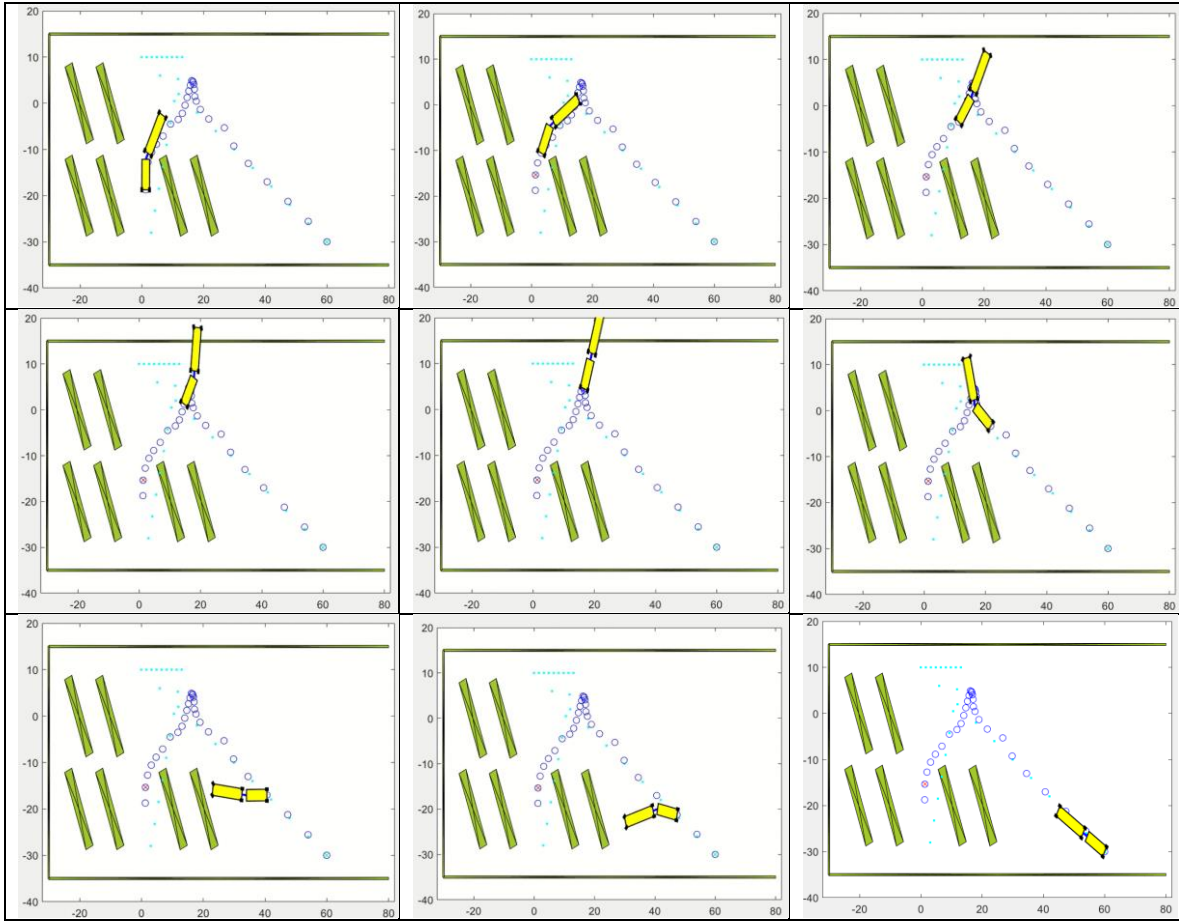


Tabla 15. Iteración 3 (escenario 2)

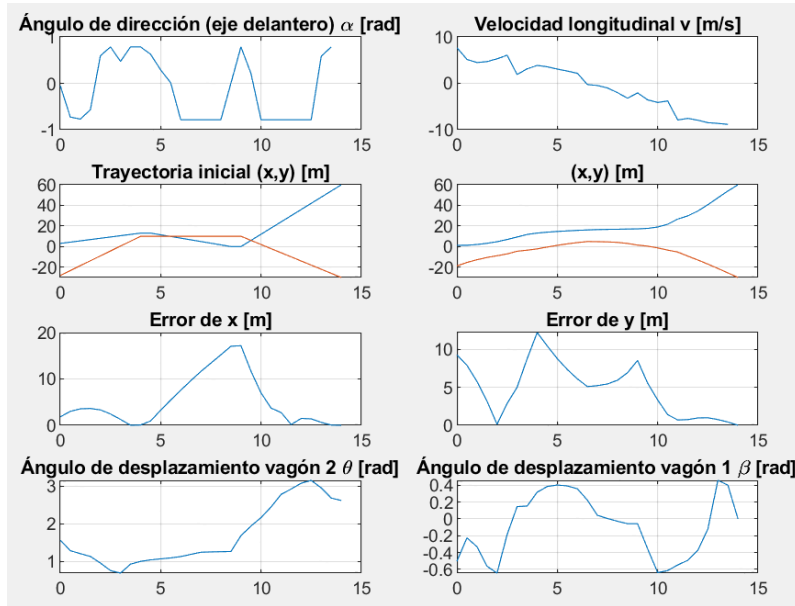


Fig. 22. Gráficas de las variables de entrada (α , v), de estado (x , y , θ , β) y el error de (x , y) para la iteración 3 (escenario 2)

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- **Cuarta iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 2.62, y = -11.7$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 52 iteraciones es de aproximadamente 15 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 1359.8994. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 1, se establece que se ha encontrado la trayectoria óptima y además no sobrepasa las restricciones especificadas.

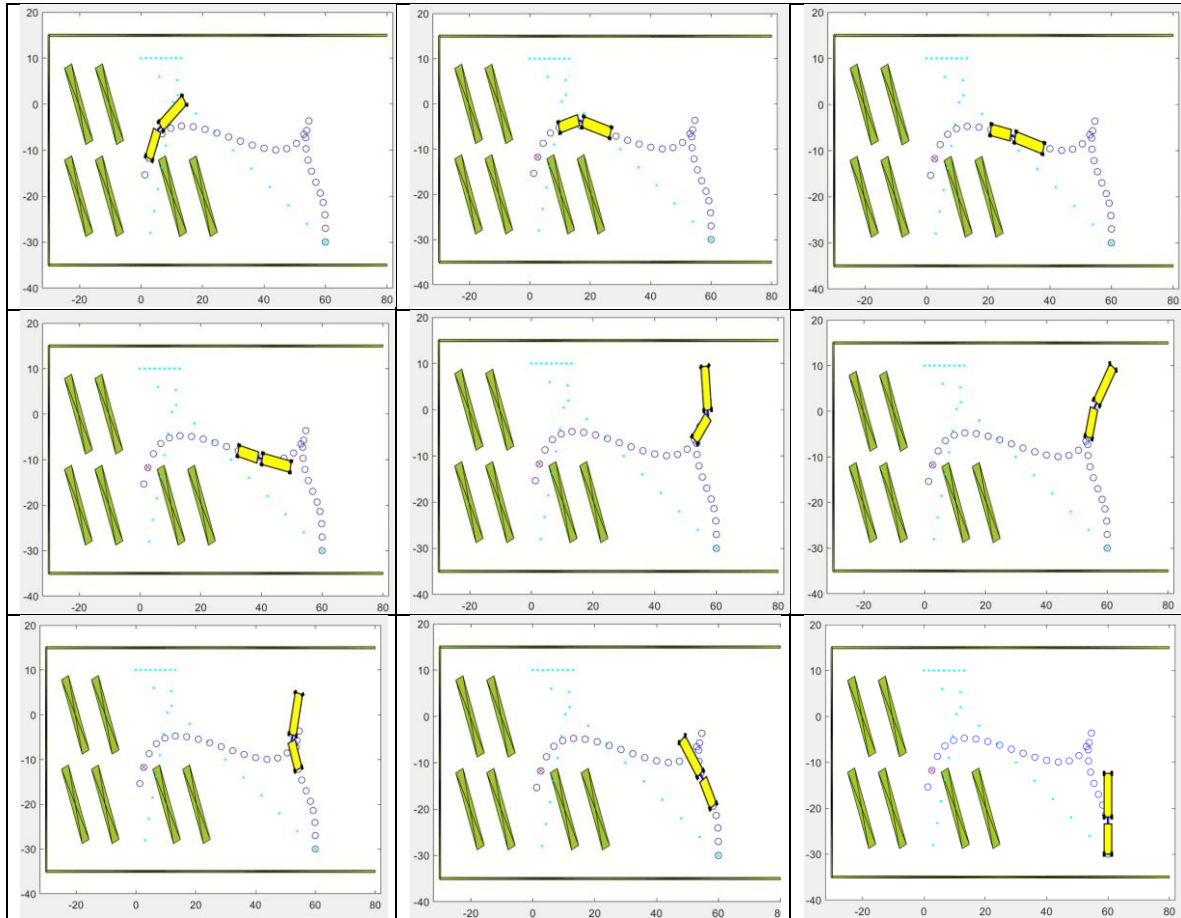


Tabla 16. Iteración 4 (escenario 2)

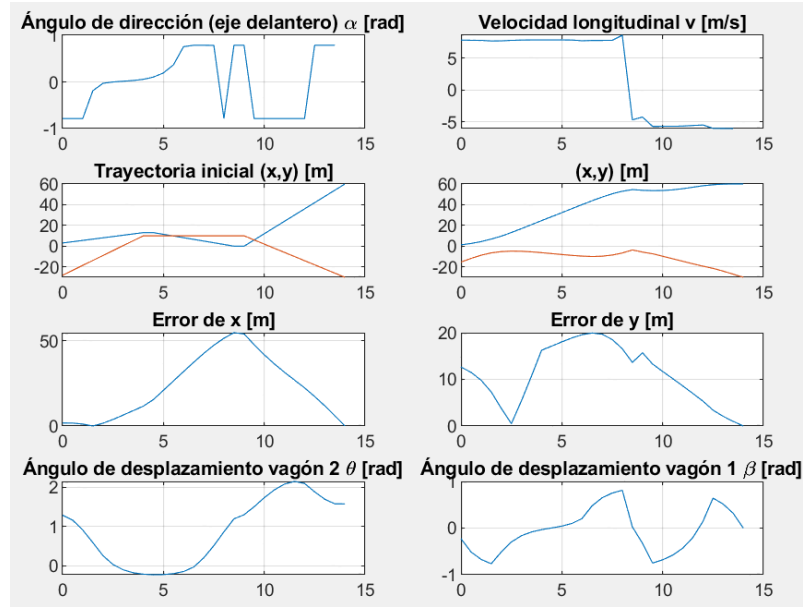


Fig. 23. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 4 (escenario 2)

3.2.3. Escenario 3

La reconstrucción de este caso es la misma que la parametrización detallada en el primer escenario. Pero ahora tiene la adición del segundo escenario: la reducción de etapas. Además, de que se le ha agregado el criterio de que, dentro del lazo cerrado, la nueva posición inicial no exceda en 2 o más metros la distancia de la posición inicial original. Esto claramente, aumentará el costo de la función objetivo, pero tendrá una convergencia rápida.

- **Primera iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 59.9, y = -28$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 57 iteraciones es de aproximadamente 17 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 2431.4355. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 2, es decir, no es la trayectoria óptima, aunque hay convergencia para encontrarla.

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

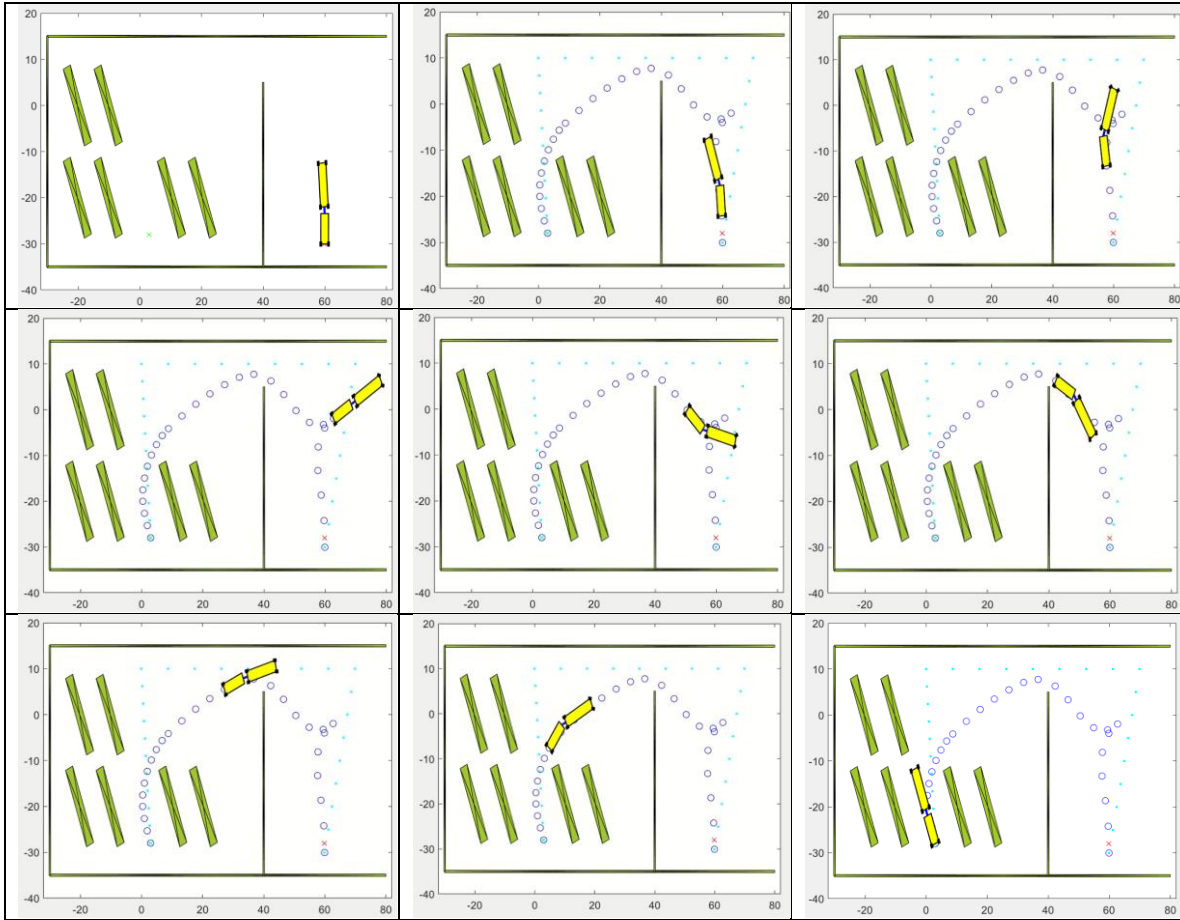


Tabla 17. Iteración 1 (escenario 3)

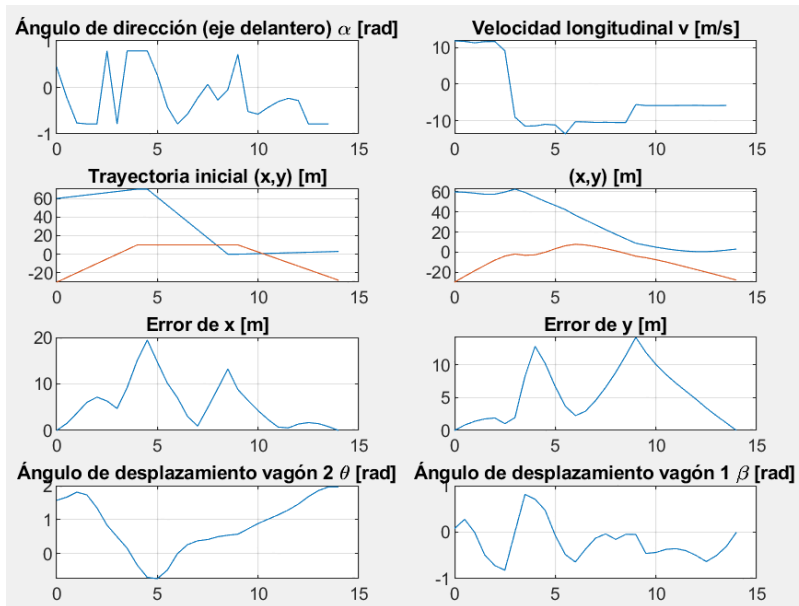


Fig. 24. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 1 (escenario 3)

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- **Segunda iteración:** Se redefine la posición inicial en la coordenada ($x = 59.8, y = -28$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 97 iteraciones es de aproximadamente 218 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 2892.5121. El argumento de salida (*ExitFlag*) es -2 , por lo tanto, el algoritmo se ha detenido, ya que en la ruta trazada se generan varias colisiones.

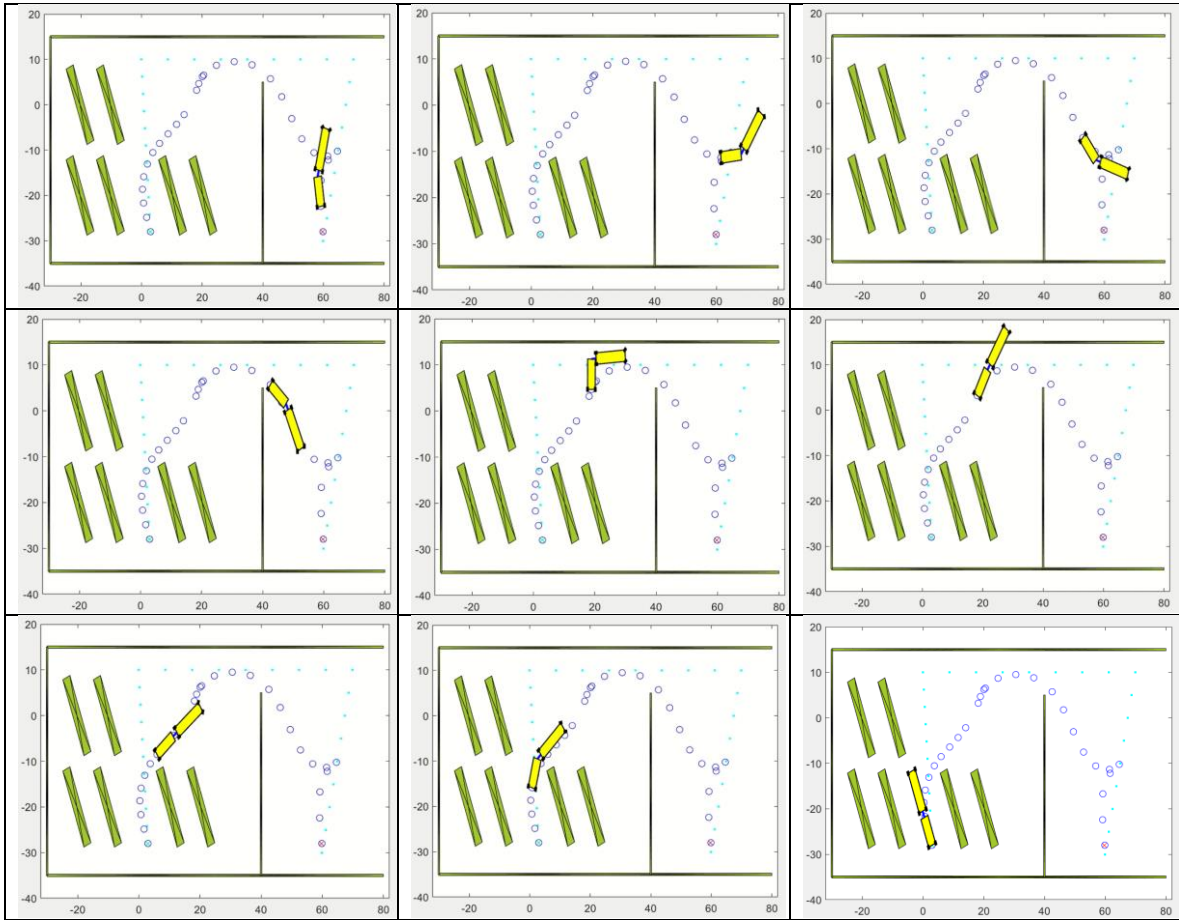


Tabla 18. Iteración 2 (escenario 3)

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

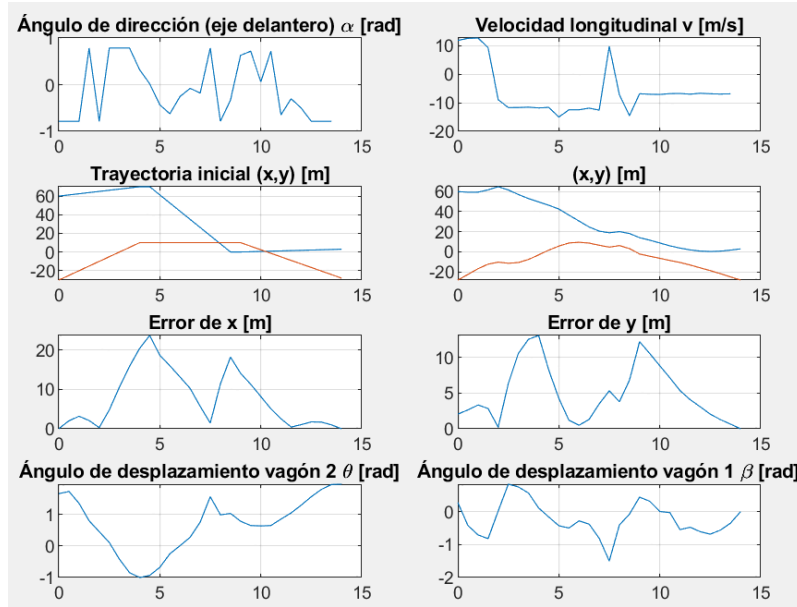
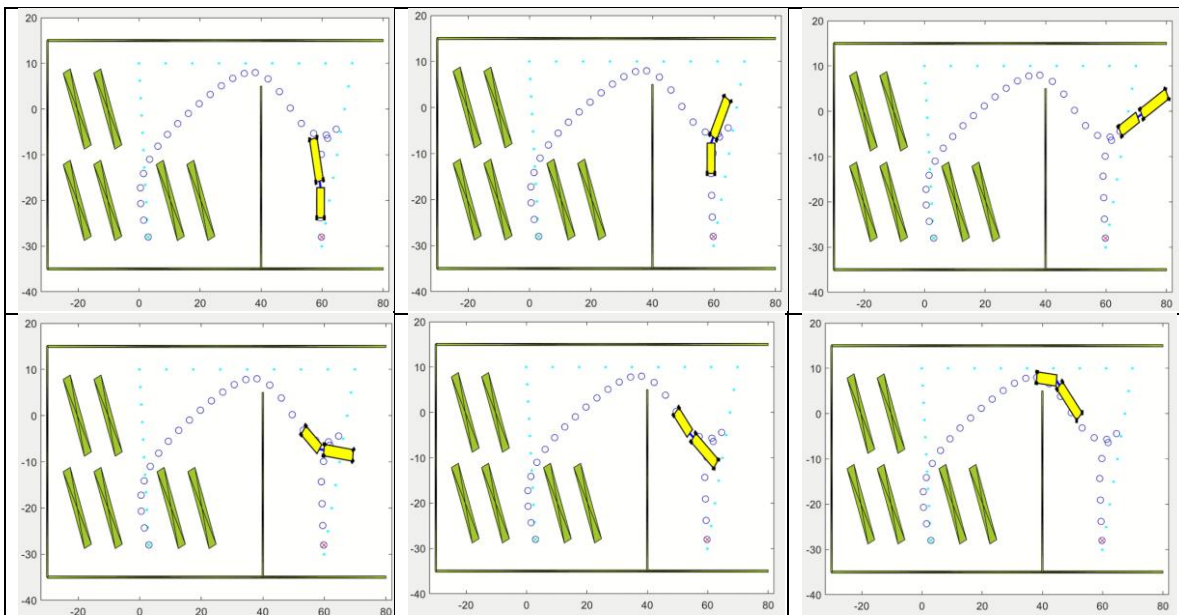


Fig. 25. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 2 (escenario 3)

- Tercera iteración:** La posición inicial no cambia respecto a la anterior iteración, ($x = 59.8, y = -28$), el tiempo que toma el MPC para planear la trayectoria en 70 iteraciones es de aproximadamente 12 segundos, el valor asociado para la función objetivo (costo) es de 2201.9179. El argumento de salida (*ExitFlag*) es 1, se establece que se ha encontrado la trayectoria óptima y además no sobrepasa las restricciones especificadas.



Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

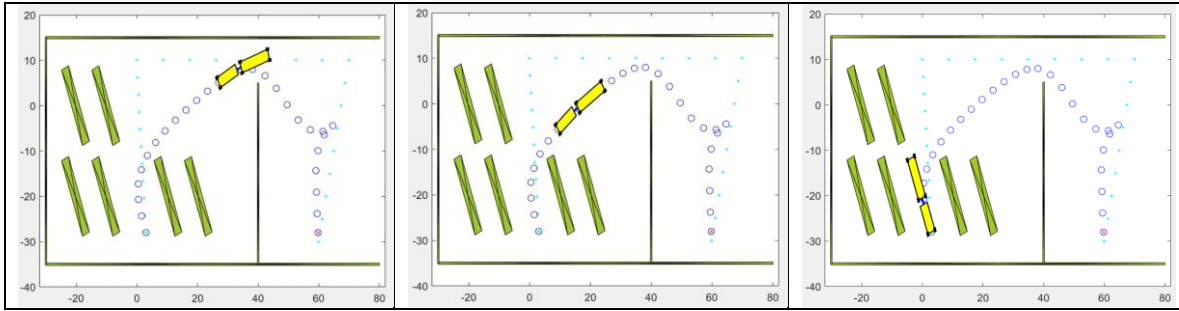


Tabla 19. Iteración 3 (escenario 3)

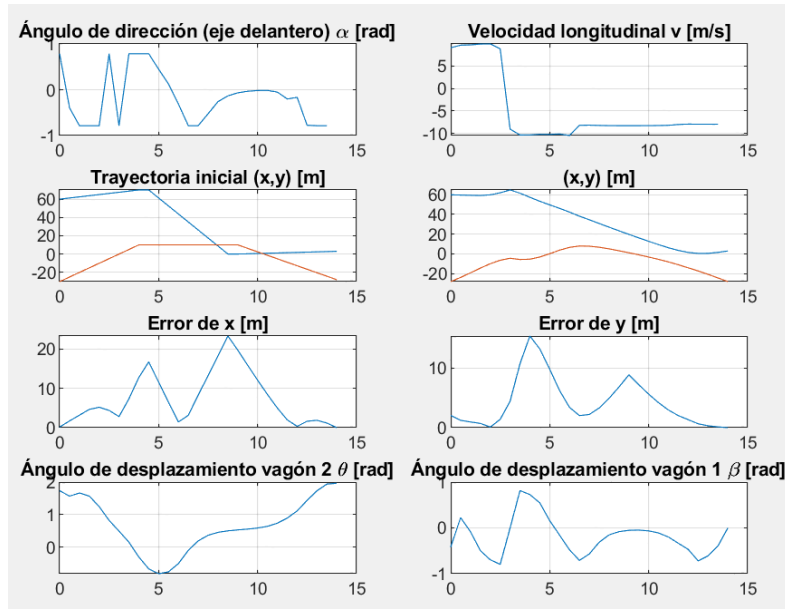


Fig. 26. Gráficas de las variables de entrada (α, v), de estado (x, y, θ, β) y el error de (x, y) para la iteración 3 (escenario 3)

Como se evidencia en los tres escenarios anteriores, en cada serie iterativa, se puede notar que la posición inicial se va replanteando hasta que encuentra la trayectoria óptima, pero con la reducción del número de etapas y con la inclusión de la delimitación de máximo dos metros a la redonda de la coordenada de la posición inicial, ay una convergencia más rápida.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los tres escenarios anteriormente descritos tienen como objeto evaluar la eficacia del algoritmo MPC para definir una trayectoria óptima de un vehículo articulado,

específicamente tomando como ejemplo uno asociado a un sistema de transporte masivo de la ciudad de Barranquilla.

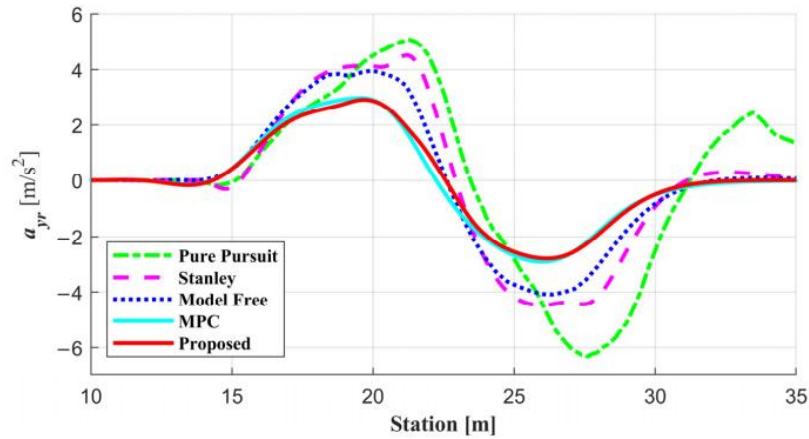


Fig. 27. Resultado de simulación de la trayectoria de un articulado con la aceleración como variable de salida [36]

En todos ellos, específicamente en la última iteración, se puede apreciar una salida similar en la planeación de la ruta, así como si se hubiese considerado un modelo con la aceleración como una de las variables de salida, enfocado en los tramos finales en donde el error tiende hacia cero, así como se aprecia en la Fig. 27. Además, la ruta propuesta por Taeyeon Lee y Yonghwan Jeong tiene forma de ‘S’ [36], es decir es una trayectoria con tramos suaves, y sin intersticios reducidos como los expuestos en estos escenarios.

Por otro lado, se asevera en estas simulaciones que la técnica de control usada (MPC) es excelente para este tipo de sistemas, como es la conducción autónoma de vehículos, en particular de dos cuerpos rígidos que, a su vez, pueden ser multipropósito: para transporte masivo de pasajeros o para fines agrícolas. En el trabajo que presenta Erkan Kayacan, Wouter Saeys, Herman Ramon, Calin Belta y Joshua Peschel, se puede interpretar que planear el seguimiento de una trayectoria para un vehículo articulado no tripulado puede hacerse con dos enfoques de este algoritmo de control: el Control Predictivo por Modelo no lineal) con un Estimador de Horizonte Móvil no lineal (NMHE-NMPC) o con el Control Predictivo por Modelo Lineal con una Linealización de Estados de las Entradas (ISL-LMPC). Estas dos estrategias se evalúan para demostrar cuál de ellas tiene un mejor desempeño, en términos del tiempo de ejecución, aún con mayor costo computacional [44], así se reflejan en esta simulaciones, las iteraciones buscan la trayectoria en donde se pueda

tener un mayor costo computacional, en términos de la sumatoria de las velocidades del articulado al cuadrado, para disminuir el tiempo para encontrar la ruta óptima, pero en este caso se usa otra variante de estas estrategias de control: el NMPC multietapa.

4.1. Escenario 1

A priori, se han requerido múltiples iteraciones para ajustarse a la robustez del problema de optimización de la trayectoria del vehículo debido a sus restricciones tanto operacionales como físicas, además de que el bloque de control MPC, por su misma naturaleza, requiere de predicción y sintonización continuas. Sin embargo, es así como la posición inicial se desvía 22.185 *m*.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_{fin} - x_{in})^2 + (y_{fin} - y_{in})^2} \\ &= \sqrt{(53.8 - 59.9)^2 + (-27.5 - (-6.17))^2} \approx 22.185 \text{ m} \end{aligned} \quad (52)$$

Para generar una trayectoria libre de colisiones a través de una estrategia de búsqueda adaptativa para el algoritmo de control.

A lo largo de todas las iteraciones se observa un decrecimiento en la magnitud de la función de costo ($\sum v^2$), en el orden en el que se actualiza la posición inicial del vehículo articulado. De la misma manera hay una similitud en el comportamiento del tiempo que toma cada iteración, pero la misma estrategia adaptativa hace que fluctúe como se aprecia en la Tabla 20.

Iteración	Tiempo [s]	Función de Costo $\sum v^2$	Error relativo
1	143	1437.682	
2	134	1507.910	5%
3	54	1432.200	5%
4	45	1353.878	6%
5	64	1305.234	4%
6	40	1203.478	8%
7	17	1153.669	4%

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

8	32	1108.328	4%
9	31	1061.916	4%

Tabla 20. Tiempo de ejecución de cada iteración junto con la magnitud de la función de costo

4.1.1. Primera iteración ($ExitFlag = -2$) (ver Fig. 7): La dirección para buscar la trayectoria es sustancialmente pequeña, lo que se traduce en una posición bastante compleja para generar la ruta para el vehículo articulado.

- La posición inicial no establece una trayectoria sin colisiones.
- Hay variaciones abruptas en el inicio de la trayectoria para el ángulo de dirección α .
- La velocidad longitudinal v es estable en valores cercanos a cero, pero es alternante en su signo.
- La posición (x, y) presenta desviaciones relevantes frente a la trayectoria óptima. Es evidente en el error presentado en la gráfica de cada uno de sus componentes.
- Los ángulos θ y β tienen gran inestabilidad, lo que se traduce en un control deficiente.

4.1.2. Iteraciones 2 a 8 ($ExitFlag = 2$) (ver Fig. 11 a Fig. 17): Aunque haya convergencia para encontrar una ruta, el algoritmo MPC busca reiteradamente una nueva posición inicial para generar una trayectoria, no obstante, debido a las restricciones, incertidumbre y complejidad del modelo no lineal no se logra encontrar una ruta óptima.

- En evidencia la segunda iteración presenta menor oscilación, conforme se avanza en las iteraciones se obtiene una menor estabilidad, esto se nota desde la cuarta iteración, la cual se mantiene hasta el final del ciclo Closed-Loop [20]. Un comportamiento similar tiene la velocidad longitudinal v la cual no solo cada vez es más estable, también es más consistente.
- La planeación de la trayectoria se ajusta más a la ruta deseada, por lo cual se nota una disminución apreciable en el error de la posición (x, y) , hasta llegar a una alineación con elevado grado de precisión.
- Los cambios que presentan los ángulos θ y β son gradualmente más suaves, las rotaciones son más tenues, lo que refleja una maniobrabilidad más segura.

4.1.3. Última iteración ($ExitFlag = 1$) (ver Fig. 18): Luego de buscar en 9 oportunidades la posición inicial del vehículo articulado se llega a una generación óptima de la trayectoria, para así superar las restricciones, incertidumbre y complejidad del

modelo como del entorno de estacionamiento. El ángulo de dirección α es estable, la velocidad longitudinal no solo es estable, también muy consistente, lo que hace que el algoritmo de control sea eficiente. El error de la trayectoria (x, y) es muy bajo, en especial para llegar a su posición final.

4.2. Escenario 2

En este segundo escenario de simulación se han definido 28 etapas, según el cálculo de la distancia euclidiana entre la posición inicial y final (ver ecuación (49)). Ha surtido efecto esta adición debido a que ha requerido menos de la mitad de las iteraciones que el primer escenario para ajustarse a la complejidad del sistema y así obtener la optimización de la trayectoria del vehículo debido a sus restricciones y a la naturaleza misma del MPC no lineal. Es así como la posición inicial se desvía 11.82 m.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_{fin} - x_{in})^2 + (y_{fin} - y_{in})^2} \\ &= \sqrt{(2.62 - 1.85)^2 + (-11.7 - (-23.5))^2} \approx 11.82 \text{ m} \end{aligned} \quad (53)$$

Para establecer, a través de la estrategia de búsqueda adaptativa propia del algoritmo de control MPC, la trayectoria óptima libre de colisiones.

En las cuatro iteraciones hay un comportamiento divergente en la magnitud de la función de costo ($\sum v^2$) porque los argumentos de salida (*ExitFlag*) de las tres primeras iteraciones indican que el algoritmo de control se ha detenido debido a que se han detectado varias colisiones en la planeación de la trayectoria. Por otro lado, en la secuencia de actualización de la posición inicial del vehículo articulado se observa que en la cuarta y última iteración se genera la ruta óptima para el vehículo. En ésta última cabe destacar que, aunque la magnitud de la función de costo sea 28.06% mayor, el tiempo de ejecución del algoritmo se reduce en 51.61% respecto al primer escenario de simulación

4.2.1. Tres primeras iteraciones (*ExitFlag* = -2) (ver Fig. 21 a 23): La posición inicial no es la adecuada para generar la ruta para el vehículo articulado. En estos eventos se describe que:

- La posición inicial no establece una trayectoria sin colisiones.

- Hay variaciones abruptas en toda la trayectoria para el ángulo de dirección α . De la misma manera para la velocidad longitudinal v que es inestable en el desarrollo de la trayectoria.
 - La posición (x, y) presenta grandes desviaciones, error en cada componente, frente a la trayectoria requerida.
 - Los ángulos θ y β tienen gran inestabilidad, lo que se traduce en un control deficiente.
- 4.2.2. Última iteración ($ExitFlag = 1$) (ver Fig. 24): El reposicionamiento de la coordenada inicial del vehículo articulado permite generar de manera óptima la trayectoria, para así superar las restricciones, incertidumbre y complejidad del modelo no lineal como del entorno de estacionamiento y sus objetos de colisión. El ángulo de dirección α es relativamente estable, la velocidad longitudinal v es también muy consistente y estable, así como en el primer escenario, y el error para llegar a la posición final (x_{fin}, y_{fin}) decrece hasta ser prácticamente cero. Como observación particular, se puede ver que los ángulos de desplazamiento θ y β no son muy suaves, lo que indica que hay una maniobrabilidad fuerte en ciertos momentos.

4.3. Escenario 3

Asumiendo las mismas etapas del escenario 2, este tercer y último escenario, solo ha requerido de 3 iteraciones para completar la trayectoria óptima del vehículo articulado, la cual se adapta a la robustez de este problema dadas sus restricciones tanto operacionales como físicas, reduciendo así los eventos de predicción y sintonización requeridos por el bloque de control NLMPC. Para lo cual, sacrificando la magnitud de la función de costo, el reposicionamiento de la coordenada inicial no debe exceder más de dos metros desde la posición inicial original.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_{fin} - x_{in})^2 + (y_{fin} - y_{in})^2} \\ &= \sqrt{(59.9 - 59.8)^2 + (-28 - (-28))^2} \approx 0.1 \text{ m} \end{aligned} \tag{54}$$

Hay un margen de aproximadamente 10cm para generar una trayectoria libre de colisiones por el algoritmo de control a través de una estrategia de búsqueda adaptativa.

Iteración	<i>ExitFlag</i>	Tiempo	Función de costo
1	2	17	2431.4355
2	-2	218	2892.5121
3	1	12	2201.9179

Tabla 21. Argumento de salida, tiempo y magnitud de función de costo para el tercer escenario

Es evidente que, con referencia a las últimas iteraciones de cada escenario, la magnitud de la función de costo se ha sacrificado, no obstante, se ha tenido una convergencia más rápida respecto a los dos primeros escenarios para la iteración óptima:

Escenario	Tiempo [s]	Costo $\sum v^2$	Reducción de tiempo	Aumento de costo
1	31	1061.9159	-61.29%	+107.3%
2	15	1359.8994	-51.61%	+61.9%

Tabla 22. Reducción de tiempo y aumentos de costo del escenario 3 respecto a los escenarios 1 y 2

4.3.1. Iteración 1 (*ExitFlag* = 2) (ver Fig. 24): Hay convergencia para encontrar una ruta, sin embargo, debido a la robustez del modelo no lineal no se logra encontrar una ruta óptima.

- El ángulo de dirección α y la velocidad longitudinal v presenta oscilaciones menores.
- Se puede observar una disminución considerable en el error de la posición (x, y) , especialmente en el último tramo, hasta llegar a una alineación con buen grado de precisión.
- Los cambios que presentan los ángulos θ y β son gradualmente más suaves, los desplazamientos angulares reflejan una maniobrabilidad más segura.

4.3.2. Iteración 2 (*ExitFlag* = -2) (ver Fig. 25): La posición inicial establecida no permite generar la ruta para el vehículo articulado debido a las múltiples colisiones.

- Hay variaciones abruptas en el inicio de la trayectoria para el ángulo de dirección α aun cuando la velocidad longitudinal v es estable en valores cercanos a cero.
- La posición del vehículo (x, y) , vista desde sus componentes independientes x y y , genera grandes desviaciones frente a la trayectoria requerida.

- Los ángulos θ y β tienen gran inestabilidad, lo que se traduce en maniobras muy arriesgadas, por ende, se obtiene un control deficiente.
- 4.3.3. Última iteración ($ExitFlag = 1$) (ver Fig. 26): En tan sólo 3 iteraciones la posición inicial del vehículo articulado prácticamente no se ha movido desde su coordenada original, es así como se llega a una generación óptima de la trayectoria para así superar las restricciones, incertidumbre y complejidad del modelo como del entorno de estacionamiento. El ángulo de dirección α es estable, la velocidad longitudinal no solo es estable y consistente, lo que hace que el algoritmo de control sea eficiente. El error de la trayectoria (x, y) es muy bajo, en especial para llegar a su posición final.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En el primer escenario, la magnitud de la función de costo durante las simulaciones tiene una tendencia hacia un valor cada vez menor, de la misma manera, en el número de iteraciones se puede apreciar el mismo comportamiento.

Las acciones del MPC, no sólo se calculan una vez sin agregar cambios, sino que se adaptan basándose en la nueva posición inicial de la trayectoria. El algoritmo del MPC, en *Closed Loop*, busca la reducción del error (incertidumbre) que hace que se generen desvíos significativos, corrigiendo iterativamente la trayectoria, otorgando mayor robustez y confiabilidad en la planeación de la trayectoria.

Calcular la distancia euclidiana entre la posición inicial y final, permite un menor número de iteraciones para así obtener la trayectoria óptima del vehículo articulado.

Por otro lado, delimitar la nueva coordenada de la posición inicial, cada vez que se reajusta, eleva el costo de la función objetivo, pero tiene un resultado importante: el MPC converge mucho más rápido.

Como se evidencian en las gráficas de las iteraciones de cada escenario, al no penalizar tanto el valor de entrada α respecto a la velocidad longitudinal v , se observan cambios bruscos en la dirección del vehículo, pero se mantiene relativamente constante la velocidad longitudinal. Lo que en la práctica se resume en que estas maniobras son complejas para un conductor, pero para un sistema autónomo, no representaría problemas muy exigentes.

Los trabajos adicionales que podrían hacerse estarían enfocados en tres vertientes:

- Usar un variante del algoritmo usado: el Control Predictivo por Modelo Adaptativo (AMPC), es una técnica que reduce drásticamente los errores en el seguimiento de una trayectoria para mejorar la eficiencia en las maniobras especialmente en las más complicadas, como múltiples e intrincados obstáculos o en pasos (intersticios) muy cerrados. Este algoritmo supera las limitaciones de los controladores MPC estándar al adaptar el modelo del control a la dinámica de no linealidad y las perturbaciones del vehículo articulado [45].

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- Realizar la animación de la planeación de la trayectoria del vehículo articulado utilizando un entorno tridimensional para así observar con más detalle y con enfoque realista el desplazamiento del vehículo en un área de estacionamiento o superficies similares como en la herramienta Virtual Test Drive (VTD) que contiene entornos virtuales basados en carreteras con escenarios de tráfico complejos en donde se permitan configurar programas de control de señales, incorporación de objetos, supervisión en tiempo real, también se admita la adición de comandos [46].
- Utilizar una red neuronal que permita una alta adaptabilidad y precisión en escenarios complejos y que tengan cambios frecuentes, también que tienen la capacidad de tener características típicas de las carreteras y las diversas condiciones de tráfico e interacción con agentes viales porque al implementarlas han demostrado que tienen una gran efectividad para planear trayectorias. Para ese tipo de problemas, se puede ejecutar el método gaussiano pseudoespectral (técnica numérica para optimización) el cual se destaca por integrar restricciones dinámicas de un vehículo, en donde se maximiza el uso eficiente del espacio y el tiempo para ejecutar las maniobras de desplazamiento, pero principalmente para garantizar que no existan colisiones [47].

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] NHTSA, «NTHSA en español,» 2024. [En línea]. Available: <https://www.nhtsa.gov/es/seguridad-de-vehiculos/vehiculos-automatizados-para-mayor-seguridad>. [Último acceso: 22 05 2024].
- [2] TESLA, «Tesla,» 2024. [En línea]. Available: <https://www.tesla.com/>. [Último acceso: 22 05 2024].
- [3] TESLA, «Autopilot,» 2024. [En línea]. Available: https://www.tesla.com/es_ES/autopilot. [Último acceso: 22 05 2024].
- [4] NHTSA, «AUTOMATED DRIVING SYSTEMS 2.0 (A Vision for Safety),» 2023. [En línea]. Available: https://www.nhtsa.gov/sites/nhtsa.gov/files/documents/13069a-ads2.0_090617_v9a_tag.pdf. [Último acceso: 22 05 2024].
- [5] S. International, «Taxonomy and Definitions for Terms Related to Driving Automation Systems for On-Road Motor Vehicles,» 30 04 2021. [En línea]. Available: https://www.sae.org/standards/content/j3016_202104/. [Último acceso: 22 05 2024].
- [6] W. H. Organization, «Global status report on road safety 2018,» 2018. [En línea]. Available: <https://www.who.int/publications/i/item/9789241565684>. [Último acceso: 22 05 2024].
- [7] MathWorks, «What is Model Predictive Control?,» 2024. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/help/mpc/gs/what-is-mpc.html>. [Último acceso: 22 05 2024].
- [8] L. Y. Y. X. S. Huang, «A Nonlinear Model Predictive Control Framework for Trajectory Tracking in Autonomous Vehicles,» de *Control Engineering Practice*, ScienceDirect, 2019.
- [9] A. L. M. Wächter, «Model Predictive Control for Autonomous Driving Using a Nonlinear Vehicle Model,» *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, n° IEEE Explore, 2020.
- [10] K. L. C. P. J. G. L. C. 1. Junren Shi, «Model-Based Predictive Control and Reinforcement Learning for Planning Vehicle-Parking Trajectories for Vertical Parking Spaces,» sensor, School of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China, 2023.
- [11] Agencia Nacional de Seguridad Vial, «OBSERVATORIO NACIONAL DE SEGURIDAD VIAL,» 21 05 2024. [En línea]. Available: <https://ansv.gov.co/observatorio>. [Último acceso: 22 05 2024].

- [12] World Health Organization, «Death on the roads,» 22 05 2024. [En línea]. Available: <https://extranet.who.int/roadsafety/death-on-the-roads/>. [Último acceso: 22 02 2024].
- [13] S. Viscelli, «Driverless? Autonomous Trucks and the Future of the American Trucker,» de *UC Berkeley Labor Center - Working Partnerships USA*, San Francisco, California, USA, 2018, p. 73.
- [14] F. B. B. L. D. K. S. M. Diehl, «Predictive Control for Public Transport Vehicles: Challenges and Applications,» de *Control Engineering Practice*, 2014.
- [15] «Autonomous Shuttle Bus for Public Transportation:,» de *Energies (Review)*, Department of Automotive Engineering and Transports, Technical University of Cluj-Napoca, Rumania, <https://www.mdpi.com/1996-1073/13/11/2917>, 2020, p. 45.
- [16] S. C. P. T. E. P. K. I. Sterling J. Anderson, «Design and Development of an Optimal-Control-Based Framework for Trajectory Planning, Threat Assessment, and Semi-autonomous Control of Passenger Vehicles in Hazard Avoidance Scenarios,» de *Robotics Research*, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Ave., Cambridge, MA, 02139, USA. Ford Research Laboratories, Dearborn, MI, 48124, USA, https://doi.org/10.1007/978-3-642-19457-3_3, 2011, pp. pp 39-54.
- [17] Mercedes-Benz, «CHASIS O 500 UA.,» 02 2022. [En línea]. Available: https://www.mercedes-benz-bus.com/es_AR/models/o500-ua.html. [Último acceso: 22 05 2024].
- [18] T. c. online, «Tire size comparison,» 2024. [En línea]. Available: <https://tire-calc.com/comparison/295-80-r22.5-and-315-80-r22.5/>. [Último acceso: 22 05 2024].
- [19] MathWorks, «Truck and Trailer Automatic Parking Using Multistage Nonlinear MPC,» 2024. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/help/mpc/ug/truck-and-trailer-automatic-parking-using-multistage-mpc.html#d126e36795>. [Último acceso: 2023].
- [20] M. N. Zeilinger, C. N. Jones y M. Morari, «Robust stability properties of soft constrained MPC,» de *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Zurich, Switzerland, Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, 2010, pp. 5276-5282.
- [21] MathWorks, «getSimulationData,» 2024. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/help/mpc/ref/nlmpcmultistage.getsimulationdata.html>. [Último acceso: 24 05 2024].
- [22] M. Ł. Robert Nebeluk, «On the Choice of the Cost Function for Nonlinear Model Predictive Control: A Multi-criteria Evaluation,» de *Advanced, Contemporary Control. PCC 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*, Institute of Control and Computation Engineering, Warsaw University of Technology, ul. Nowowiejska 15/19, 00-

665, Warsaw, Poland, https://doi.org/10.1007/978-3-031-35170-9_34, 2023, p. pp 361–371.

- [23] R. R. F. K. R. V. H. R. David Stenger, «What Is the Best Way to Optimally Parameterize the MPC Cost Function for Vehicle Guidance?,» de *Mathematics*, <https://doi.org/10.3390/math11020465>, 2023, pp. 11, 465.
- [24] G. B. Thomas, *Cálculo Varias Variables*, Mexico: Pearson - 12° edición, 2010.
- [25] Q. V. T. J. K. Changyu Lee, «Robust Path Tracking and Obstacle Avoidance using Tube-based Model Predictive Control for Surface Vehicles,» Department of Mechanical Engineering, KAIST, Daejeon, Korea, Department of Mechatronics, School of Mechanical Engineering, HUST, Hanoi, Vietnam, IFAC Papers Online, 2022, p. 6.
- [26] G. V. R. A. F. Marcelo A. Santos, «Nonlinear Model Predictive Control Schemes for Obstacle Avoidance,» de *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Department of Electronics Engineering, Federal University of Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil, Department of Management, Information and Production Engineering, University of Bergamo, Bergamo, Italy, 2023, pp. vol 34, pp 891-906.
- [27] J. H. L. K. T. Brian E. Jackson, «Data-Efficient Model Learning for Control with Jacobian-Regularized Dynamic-Mode Decomposition,» Robotics Institute Carnegie Mellon University, <https://ar5iv.labs.arxiv.org/html/2212.07885>, 2024.
- [28] L. T. Biegler, «A perspective on nonlinear model predictive control,» Korean Journal of Chemical Engineering, <https://doi.org/10.1007/s11814-021-0791-7>, 2021, pp. vol. 38, páginas: 1317–1332.
- [29] M. Werling, «Integrated Trajectory Optimization,» de *Handbook of Driver Assistance Systems*, BMW, Munich, Germany, 2015, pp. pp 1-19.
- [30] J. J. F. Stanley Grossman, «Álgebra Lineal,» México, Mc Graw Hill - Séptima edición, 2012, pp. 478-479.
- [31] H. C. Taokai Xia, «A Survey of Autonomous Vehicle Behaviors: Trajectory Planning Algorithms, Sensed Collision Risks, and User Expectations,» de *sensors*, School of Automotive Studies, Tongji University, Shanghai 201804, China, <https://doi.org/10.3390/s24154808>, 2024, p. 24(15).
- [32] Transmetro, 2022. [En línea]. Available: <https://www.transmetro.gov.co/sistema>. [Último acceso: 26 05 2024].
- [33] Google Maps, 2024. [En línea]. Available: <https://www.google.com.co/maps/@10.9862301,-74.7717924,196m/data=!3m1!1e3?entry=ttu>. [Último acceso: 26 05 2024].

- [34] MathWorks, «Figure,» 2024. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/figure.html>. [Último acceso: 26 05 2024].
- [35] M. P. G. S. F. B. Jason Kong, «Kinematic and Dynamic Vehicle Models for Autonomous Driving,» *IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, p. 6, 2015.
- [36] Y. J. Taeyeon Lee, «A Tube-Based Model Predictive Control for Path Tracking of Autonomous Articulated Vehicle,» de *Department of Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National University of Science and Technology*, Seoul, Republic of Korea, <https://www.mdpi.com/2076-0825/13/5/164>, *Actuators*, 2024, p. 29.
- [37] A. K. Khalaji y S. A. A. Moosavian, «Robust Adaptive Controller for a Tractor–Trailer Mobile Robot,» K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronic*, 2014, pp. vol. 19, no. 3, pp. 943-953.
- [38] MathWorks, «What is Model Predictive Control?,» 2024. [En línea]. Available: What is Model Predictive Control?. [Último acceso: 28 05 2024].
- [39] GeoGebra, «GeoGebra Classic,» 2024. [En línea]. Available: <https://www.geogebra.org/classic?lang=es>. [Último acceso: 09 08 2024].
- [40] MathWorks, «fmincon,» 2023. [En línea]. Available: https://la.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html#responsive_offcanvas. [Último acceso: 26 05 2024].
- [41] MathWorks, «ode45,» 2023. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>. [Último acceso: 26 05 2024].
- [42] MathWorks, «exitflag,» 2023. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html#busog7r-exitflag>. [Último acceso: 26 05 2024].
- [43] J. P. Lars Grüne, «Nonlinear Model Predictive Control,» de *Theory and Algorithms*, Mathematisches Institut, Universität Bayreuth, Bayreuth, Germany, Springer, 2017, pp. 45-69.
- [44] W. S. H. R. C. B. J. P. Erkan Kayacan, «Experimental Validation of Linear and Nonlinear MPC on an Articulated Unmanned Ground Vehicle,» de *Institute for the Promotion of Innovation through Science and Technology in Flanders (IWT-Vlaanderen), Senseable City Laboratory and Computer Science*, <https://arxiv.org/html/2103.13800>, 2024.
- [45] K. C. Kangle Hu, «Trajectory Planning for an Articulated Tracked Vehicle and Tracking the Trajectory via an Adaptive Model Predictive Control,» de *Electronics*, School of Mechanical and Aerospace Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China, 2023, p. 12 (9).

Diseño de un MPC para el seguimiento de una trayectoria de un vehículo articulado

- [46] H. AB, «Virtual Test Drive,» Hexagon AB, 2024. [En línea]. Available: https://hexagon.com/products/virtual-test-drive?utm_easyredir=vires.mscsoftware.com. [Último acceso: 12 08 2024].
- [47] X. W. W. Z. W. Y. Zhenfeng Li, «Obstacle Avoidance Trajectory Planning for Autonomous Vehicles on Urban Roads Based on Gaussian Pseudo-Spectral Method,» de *World Electric Vehicle Journal*, School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China, <https://doi.org/10.3390/wevj15010007>, 2024, p. 15 (1).
- [48] P. d. l. N. U. p. e. Desarrollo, Objetivo 9: Industria, innovación e infraestructura, <https://www.undp.org/es/sustainable-development-goals/industria-innovacion-infraestructura>, 2024.
- [49] MathWorks, «Multistage nonlinear model predictive controller,» nlmpcMultistage, 2021. [En línea]. Available: <https://la.mathworks.com/help/mpc/ref/nlmpcmultistage.html>. [Último acceso: 22 05 2024].